



**HAL**  
open science

# Dynamique semi-classique d'un système intégrable de dimension deux : renaissances et clonages de l'état initial

Olivier Lablée

► **To cite this version:**

Olivier Lablée. Dynamique semi-classique d'un système intégrable de dimension deux : renaissances et clonages de l'état initial. 2009. hal-00441272

**HAL Id: hal-00441272**

**<https://hal.science/hal-00441272>**

Preprint submitted on 16 Dec 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# DYNAMIQUE SEMI-CLASSIQUE D'UN SYSTÈME INTÉGRABLE DE DIMENSION 2 : RENAISSANCES ET CLONAGES DE L'ÉTAT INITIAL

Olivier Lablée

---

**Résumé.** — Cet article propose une étude de la dynamique quantique de l'équation de Schrödinger en temps long d'un hamiltonien sur  $L^2(\mathbb{R}^2)$  avec un état initial localisé dans une zone régulière. A l'instar de la dimension un, sur des échelles de temps courtes, la dynamique quantique suit en première approximation (dans la limite semi-classique  $h \rightarrow 0$ ) la dynamique classique associée. Mais contrairement à la dimension 1, cette dynamique n'est pas toujours périodique, ce qui amène à des questions de théorie diophantienne des nombres. Sur des échelles de temps plus longues, il apparaît des nouveaux phénomènes purement quantiques de périodicité du paquet d'onde initial. Sur une des échelles de temps d'ordre  $1/h$  le paquet d'onde initial se reforme en un certain nombre de clones de l'état initial.

## 1. Introduction

**1.1. Motivation.** — En mécanique quantique non relativiste l'état d'un système est régi par l'équation de Schrödinger sur la variété riemannienne  $(M, g)$  :

$$ih \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = P_h \varphi(t)$$

avec  $P_h$  un opérateur pseudo-différentiel sur  $L^2(M)$  (par exemple  $P_h := -\frac{h^2}{2} \Delta_g + V$ ). En dimension 1 ou dans des situations complètement intégrable on sait généralement bien décrire les états stationnaires, qui correspondent aux valeurs propres de l'opérateur  $P_h$ . Par linéarité, on a donc, en principe, accès aux solutions générales de l'équation de Schrödinger. Pourtant la dynamique des solutions (comportement lorsque le temps évolue) reste sur bien des aspects mystérieuse. Dans un contexte général on s'attend à ce qu'un état initial

---

**Mots clefs.** — Dynamique quantique, système intégrables, analyse semi-classique, équation de Schrödinger.

localisé suivie en première approximation (dans la limite  $h \rightarrow 0$ ) la trajectoire classique associée. Des versions de ces affirmations existent dans la littérature physique pour des échelles de temps très courtes. En dimension 1 ou dans des situations complètement intégrable on s'attend à beaucoup mieux. Pour des échelles de temps beaucoup plus longues (de l'ordre de  $1/h^s$  avec  $s > 0$ ) un phénomène de renaissance du paquet d'onde initial apparaît. Ce phénomène a été récemment mis en évidence par les physiciens ([Av-Pe], [LAS], [Robi1], [Robi2], [BKP], [Bl-Ko]). Mathématiquement, le cas d'un feuilletage classique régulier et le cas des singularités de type elliptiques en dimension 1 [He-Ro] ont été traités par M. Combes et D. Robert [Co-Ro], [Rob], par T. Paul [Pau1], [Pau2], et aussi dans [Lab1]. Cette article est le pendant des ces travaux en dimension 2. Le cas de la dimension 1 près d'une singularité hyperbolique est traité dans [Lab1], [Lab3], voir aussi [Pau3].

**1.2. Rappels des résultats connus sur la dimension 1.** — Un vecteur initial  $\psi_0$  localisé dans une zone régulière suit la dynamique classique associée à  $p$ , c'est à dire une trajectoire elliptique et périodique avec une période  $T_{cl}$  indépendante de  $h$ . Ensuite sur des échelles de temps plus grandes une nouvelle période non géométrique apparaît. Cette période  $T_{ren}$  (dite période de renaissance) est de l'ordre de  $1/h$ ; le vecteur  $\psi(T_{ren})$  reprend sa forme initial  $\psi_0$ . Encore plus surprenant quand on observe ce qui se passe aux temps  $\frac{p}{q}T_{ren}$ , où  $\frac{p}{q}$  est une fraction rationnelle, on constate qu'il y a un phénomène de clonage du vecteur initial : en quelque sorte que le vecteur  $\psi\left(\frac{p}{q}T_{ren}\right)$  s'écrit comme une combinaison linéaire complexe finie de translaté du vecteur initial  $\psi_0$ . Dans ce chapitre on arrive à décrire ces coefficients complexes : on arrive, suivant les propriétés arithmétiques de la fraction  $p/q$  à donner le nombre de coefficients non nuls et la valeur de leurs modules.

**1.3. La dimension 2.** — Ici l'hamiltonien de la dynamique est un opérateur auto-adjoint avec domaine inclus dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ ; et ayant un spectre discret du type  $F(h\mathbb{Z}, h\mathbb{Z})$ ,  $F$  étant un polynôme réel à deux indéterminées. A l'instar de la dimension 1, un vecteur initial  $\psi_0$  localisé suit en première approximation la dynamique classique associée à l'hamiltonien de départ. En dimension 2, cette dynamique est nettement plus complexe. Le flot hamiltonien s'enroule autour d'un tore de dimension 2, il y a alors deux périodes classiques (qui sont d'ordre  $O(1)$ ). La présence des deux périodes classiques compliquent nettement la compréhension de l'évolution de la fonction d'auto-corrélation pour les échelles de temps courtes. On propose d'abord une étude de la dynamique quantique en fonction de la commensurabilité de ces deux périodes classiques; ce qui nous amène à quelques discussions de théorie des nombres. Lorsque on regarde la dynamique sur des échelles plus grandes il y a 3 périodes de renaissance

(d'ordre  $1/h$ ) qui apparaissent. Sous une hypothèse de commensurabilité entre ces 3 périodes on arrive à écrire des analogues des théorèmes de renaissance du cas uni-dimensionnel [Co-Ro], [Rob], [Pau1], [Lab1].

## 2. Préliminaires

**2.1. Fonction d'auto-corrélation.** — De manière générale, on sait qu'à partir d'un opérateur auto-adjoint  $P_h$  sur un espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$ , on peut lui associer le groupe unitaire fortement continu :

$$U(t) = \left\{ e^{-i\frac{t}{h}P_h} \right\}_{t \in \mathbb{R}} .$$

Ce groupe dynamique donne directement la dynamique quantique associée à  $P_h$  ; en effet pour tout état initial  $\psi_0 \in \mathcal{H}$ , l'évolution quantique du vecteur  $\psi_0$  par l'hamiltonien  $P_h$  au cours du temps est donnée par

$$\psi(t) = U(t)\psi_0 \in \mathcal{H}.$$

Suivant une idée répandue dans les articles de physique théoriques ([Av-Pe], [LAS], [Robi1], [Robi2], [BKP], [Bl-Ko]), pour comprendre l'évolution de la dynamique on définit un analogue quantique de la fonction de retour de Poincaré.

**Définition 2.1.** — On définit la fonction d'auto-corrélation  $\mathbf{r}$  de l'hamiltonien  $P_h$  et de vecteur initial  $\psi_0$  par :

$$\mathbf{r}(t) := \langle \psi(t), \psi_0 \rangle_{L^2} ;$$

et la fonction d'auto-corrélation semi-classique par :

$$\mathbf{a}(t) := |\mathbf{r}(t)| = |\langle \psi(t), \psi_0 \rangle_{L^2}| .$$

Cette quantité mesure en quelque sorte dans la dynamique le retour sur l'état initial. Si le vecteur  $\psi(t)$  est complètement délocalisé par rapport au vecteur initial  $\psi_0$  alors la fonction  $\mathbf{a}(t)$  est nulle ; si par contre le vecteur  $\psi(t)$  est localisé la fonction  $\mathbf{a}(t)$  est alors égale à 1.

**2.2. Hamiltonien du modèle.** — On prend comme hamiltonien quantique, l'opérateur :

$$P_h := F(P_1, P_2)$$

où  $F$  est un polynôme de  $\mathbb{R}[X, Y]$  indépendant de  $h$  ;  $P_1$  et  $P_2$  sont les quantifiés de Weyl des oscillateurs harmonique classiques  $p_j(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2) = \omega_j \left( x_j^2 + \xi_j^2 \right) / 2$  avec  $\omega_1, \omega_2 > 0$ . L'étude de l'hamiltonien  $P_h = F(P_1, P_2)$  permet de faire une étude assez générale non triviale. En effet est cet hamiltonien est moins particulier qu'il n'y paraît, puisque à homéomorphisme près, il donne

le spectre conjoint de tout système complètement intégrable à deux degrés de libertés dans les zones régulières et près d'une singularité de type elliptique.

Une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  est la famille des fonctions d'Hermitte  $(e_{n,m})_{n,m} := (e_n \otimes e_m)_{n,m \in \mathbb{N}^2}$ . En posant pour tout couple  $(n, m)$  d'entiers naturels

$$\tau_n := \omega_1 h \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad \mu_m := \omega_2 h \left( m + \frac{1}{2} \right);$$

on a immédiatement que pour tout couple  $(n, m)$  d'entiers naturels

$$F(P_1, P_2)(e_n \otimes e_m) = F(\tau_n, \mu_m)(e_n \otimes e_m).$$

### 2.3. Dynamique semi classique associée et fonction de retour. —

Soit un vecteur initial  $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$  et notons par  $(a_{n,m})_{n,m} = (a_{n,m}(h))_{n,m}$  la suite des projections de  $\psi_0$  sur la base  $(e_n \otimes e_m)_{n,m}$ . On obtient alors que pour tout  $t$  réel

$$\psi(t) = \left( e^{-i\frac{t}{h}F(P_1, P_2)} \right) \left( \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} a_{n,m}(e_n \otimes e_m) \right) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} a_{n,m} e^{-i\frac{t}{h}F(\tau_n, \mu_m)} e_n \otimes e_m$$

et donc

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{n,m}|^2 e^{-i\frac{t}{h}F(\tau_n, \mu_m)}; \quad \mathbf{a}(t) = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{n,m}|^2 e^{-i\frac{t}{h}F(\tau_n, \mu_m)} \right|.$$

Avant d'étudier cette quantité en détails on va d'abord définir un état initial pour la dynamique.

**2.4. Choix d'un état initial localisé en énergie.** — Définissons un état initial  $\psi_0$  de la dynamique dépendant de  $h$  et localisé autour d'un nombre réel  $E$ . Soit deux réels  $E_1 \in [-1, 1]$  et  $E_2 \in [-1, 1]$  indépendant de  $h$ .

**Définition 2.2.** — On définit les entiers naturels  $n_0 = n_0(h)$  et  $m_0 = m_0(h)$  par :

$$n_0 := \arg \min_n |\tau_n - E_1|; \quad m_0 := \arg \min_m |\mu_m - E_2|.$$

L'entier  $n_0$  (resp.  $m_0$ ) est donc l'indice de la valeur propre de l'opérateur  $P_1$  (resp. de  $P_2$ ) la plus proche du réel  $E_1$  (resp.  $E_2$ ).

**Remarque 2.3.** — Comme les valeurs propres de  $P_1$  (resp. celles de  $P_2$ ) sont distantes l'une de l'autre de  $\omega_1 h$  (resp. de  $\omega_2 h$ ), il est clair que  $|E_1 - \tau_{n_0}| \leq \omega_1 h$ ,  $|E_2 - \mu_{m_0}| \leq \omega_2 h$  et que pour  $h \rightarrow 0$  on a les équivalences :

$$n_0 \sim \frac{E_1}{\omega_1 h}; \quad m_0 \sim \frac{E_2}{\omega_2 h}.$$

**Définition 2.4.** — Considérons la suite  $(a_{n,m})_{n,m \in \mathbb{Z}^2} = (a_{n,m}(h))_{n,m \in \mathbb{Z}^2}$  définie par :

$$a_{n,m} := K_h \chi \left( \frac{\tau_n - \tau_{n_0}}{h^{\delta'_1}}, \frac{\mu_m - \mu_{m_0}}{h^{\delta'_2}} \right) = K_h \chi \left( \omega_1 \frac{n - n_0}{h^{\delta'_1 - 1}}, \omega_2 \frac{m - m_0}{h^{\delta'_2 - 1}} \right);$$

où  $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  est une fonction non identiquement nulle, positive et paire. Les paramètres  $(\delta'_1, \delta'_2) \in ]0, 1]^2$ . Et avec

$$K_h := \left\| \chi \left( \frac{\tau_n - \tau_{n_0}}{h^{\delta'_1}}, \frac{\mu_m - \mu_{m_0}}{h^{\delta'_2}} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{N}^2)}.$$

On va détailler ce choix d'état initial :

1. Le terme  $\chi \left( \frac{\tau_n - \tau_{n_0}}{h^{\delta'_1}}, \frac{\mu_m - \mu_{m_0}}{h^{\delta'_2}} \right)$  sert à localiser autour, non pas autour de  $(E_1, E_2)$  directement, mais pour des raisons techniques, autour des valeurs propres les plus proches du couple  $(E_1, E_2)$ .
2. Les constantes  $\delta'_1$  et  $\delta'_2$  servent à modifier la dilatation de la fonction  $\chi$ .

La raison du choix  $0 < \delta'_j < 1$  est la suivante : c'est l'unique choix possible pour avoir à la fois une localisation pertinente (qui ne tend pas vers  $\{0\}$ ) et une localisation plus grande que l'interstice spectral  $h^{\delta'_j} \gg h$ .

D'abord estimons la constante de normalisation  $K_h$ , pour cela on va utiliser le :

**Lemme 2.5.** — Soit une fonction  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  et  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in ]0, 1]^2$ ; alors uniformément pour  $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2, |l+u_1| \geq \frac{1}{2}, |s+u_2| \geq \frac{1}{2}} \left| \varphi \left( \frac{l+u_1}{\varepsilon_1}, \frac{s+u_2}{\varepsilon_2} \right) \right| = O(\varepsilon_1^\infty + \varepsilon_2^\infty).$$

*Démonstration.* — On montre facilement que, uniformément pour  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$

$$\sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2, |l+u_1| \geq \frac{1}{2}, |s+u_2| \geq \frac{1}{2}} \left| \varphi \left( \frac{l+u_1}{\varepsilon_1}, \frac{s+u_2}{\varepsilon_2} \right) \right| = O(1).$$

Écrivons ensuite que

$$\begin{aligned} & \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2, |l+u_1| \geq \frac{1}{2}, |s+u_2| \geq \frac{1}{2}} \left| \varphi \left( \frac{l+u_1}{\varepsilon_1}, \frac{s+u_2}{\varepsilon_2} \right) \right| \\ & \leq \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2, |l+u_1| \geq \frac{1}{2}, |s+u_2| \geq \frac{1}{2}} \left( \frac{l+u_1}{\varepsilon_1} \right)^{2N} \left| \varphi \left( \frac{l+u_1}{\varepsilon_1}, \frac{s+u_2}{\varepsilon_2} \right) \right| \frac{\varepsilon_1^{2N}}{(l+u_1)^{2N}} \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon_1^{2N} 4^N \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2} \left( \frac{l+u_1}{\varepsilon_1} \right)^{2N} \left| \varphi \left( \frac{l+u_1}{\varepsilon_1}, \frac{s+u_2}{\varepsilon_2} \right) \right|.$$

De même on a aussi

$$\begin{aligned} & \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2, |l+u_1| \geq \frac{1}{2}, |s+u_2| \geq \frac{1}{2}} \left| \varphi \left( \frac{l+u_1}{\varepsilon_1}, \frac{s+u_2}{\varepsilon_2} \right) \right| \\ & \leq \varepsilon_2^{2N} 4^N \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2} \left( \frac{s+u_2}{\varepsilon_2} \right)^{2N} \left| \varphi \left( \frac{l+u_1}{\varepsilon_1}, \frac{s+u_2}{\varepsilon_2} \right) \right|. \end{aligned}$$

Ensuite on applique ceci successivement aux fonctions  $\psi(x, y) := x^{2N} \varphi(x, y)$  et  $\psi(x, y) := y^{2N} \varphi(x, y)$  pour conclure.  $\square$

**Théorème 2.6.** — *Nous avons*

$$K_h = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} h^{\frac{\delta'_1 + \delta'_2 - 2}{2}}} + O(h^\infty);$$

et ainsi  $\|a_{n,m}\|_{l^2(\mathbb{N}^2)} = 1 + O(h^\infty)$ .

*Démonstration.* — Avec la formule sommatoire de Poisson et le lemme précédent nous avons les égalités

$$\begin{aligned} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} \chi^2 \left( \omega_1 \frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \omega_2 \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) &= h^{\delta'_1 + \delta'_2 - 2} \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2} \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -l \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1}, -s \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} \right) \\ &= h^{\delta'_1 + \delta'_2 - 2} \left[ \mathfrak{F}(\chi^2)(0,0) + \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2, |l|+|s| \geq 1} \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -l \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1}, -s \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} \right) \right] \\ &= h^{\delta'_1 + \delta'_2 - 2} \mathfrak{F}(\chi^2)(0,0) + O(h^\infty). \end{aligned}$$

On va maintenant revenir à l'indexage de la série sur l'ensemble  $\mathbb{N}^2$ ; partons de l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} \chi^2 \left( \frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) &= h^{\delta'_1 + \delta'_2 - 2} \mathfrak{F}(\chi^2)(0,0) + O(h^\infty) \\ &- \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi^2 \left( \frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) - \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \chi^2 \left( \frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right). \end{aligned}$$

Avec le lemme précédent on montre alors facilement que

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi^2 \left( \frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) = O(h^\infty),$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \chi^2 \left( \frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) = O(h^\infty).$$

Et au final on a bien :

$$\left\| \chi \left( \frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) \right\|_{l^2(\mathbb{N}^2)}^2 = \mathfrak{F}(\chi^2)(0,0) h^{\delta'_1+\delta'_2-2} + O(h^\infty);$$

d'où

$$K_h = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} h^{\frac{\delta'_1+\delta'_2-2}{2}}} + O(h^\infty).$$

Ensuite il suffit de réécrire que

$$\begin{aligned} \|a_{n,m}\|_{l^2(\mathbb{N}^2)}^2 &= K_h^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \chi \left( \omega_1 \frac{n-n_0}{h^{\delta'_1-1}}, \omega_2 \frac{m-m_0}{h^{\delta'_2-1}} \right) \right|^2 \\ &= K_h^2 h^{\delta'_1+\delta'_2-2} [\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0) + O(h^\infty)] = 1 + O(h^\infty). \end{aligned}$$

□

**2.5. Découpe de la série.** — Commençons par une définition :

**Définition 2.7.** — On définit les ensemble d'entiers  $\Delta = \Delta(h, E_1, E_2)$  et  $\Gamma = \Gamma(h, E_1, E_2)$  par :

$$\Delta := \left\{ (n, m) \in \mathbb{N}^2; |n-n_0| \leq h^{\delta_1-1} \text{ et } |\mu_m - \mu_{m_0}| \leq h^{\delta_2-1} \right\}$$

où  $0 < \delta'_i < 1$ ; et on considère aussi  $\Gamma$  le complémentaire de  $\Delta$  dans  $\mathbb{N}^2$  :

$$\Gamma := \mathbb{N}^2 - \Delta.$$

**Lemme 2.8.** — Si on suppose que pour tout indice  $i \in \{1, 2\}$   $\delta'_i > \delta_i$  on a alors

$$\sum_{n,m \in \Gamma} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty).$$

*Démonstration.* — Écrivons :

$$\sum_{n,m \in \Gamma} |a_{n,m}|^2 \leq \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2, |n-n_0| > h^{\delta_1-1}} |a_{n,m}|^2 + \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2, |m-m_0| > h^{\delta_2-1}} |a_{n,m}|^2.$$

Comme  $\chi^2$  est à décroissance rapide, pour tout entier  $N \geq 1$  on a

$$\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} \left( \frac{n-n_0}{h^{\delta_1-1}} \right)^{2N} |a_{n,m}|^2 + \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} \left( \frac{m-m_0}{h^{\delta_2-1}} \right)^{2N} |a_{n,m}|^2 = O(1).$$



Sans perdre de généralités on peut supposer que  $n_0 = m_0 = 0$ . Ensuite nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2, |n| > h^{\delta_1-1}} |a_{n,m}|^2 &= h^{2N(\delta_1'-1)} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2, |n| > h^{\delta_1-1}} |a_{n,m}|^2 \left( \frac{n}{h^{\delta_1'-1}} \right)^{2N} \frac{1}{n^{2N}} \\ &= O\left(h^{2N(\delta_1'-\delta_1)}\right). \end{aligned}$$

De même nous avons

$$\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2, |m| > h^{\delta_2-1}} |a_{n,m}|^2 = O\left(h^{2N(\delta_2'-\delta_2)}\right);$$

et ainsi  $\sum_{n,m \in \Gamma} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty)$ .  $\square$

### 3. Dynamique sur des échelles de temps courtes : périodes classiques

Lorsque on apprimes au premier ordre la fonction d'auto-corrélation il apparaît deux constantes ; ces deux constantes sont les périodes classiques géométriques associées à l'hamiltonien classique du système.

**3.1. Périodes semi-classiques et classiques.** — En tout premier lieu introduisons les périodes semi-classiques et classiques du système. On va en effet introduire deux paires de périodes classiques ; la première paire sort naturellement de la formule de Taylor effectuée sur les valeurs propres dans la fonction d'auto-corrélation. On suppose ici que  $\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \neq 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial Y}(E_1, E_2) \neq 0$ .

*Périodes semi-classique.* —

**Définition 3.1.** — On définit les périodes semi-classiques  $T_{scl_1}$  et  $T_{scl_2}$  par :

$$T_{scl_1} := \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \omega_1} \text{ et } T_{scl_2} := \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial Y}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \omega_2}.$$

En première approximation la fonction d'auto-corrélation est alors égale à :

**Proposition 3.2.** — Soit  $\alpha$  un réel vérifiant l'inégalité :  $\alpha > 1 - 2 \min \delta_i$ . On a alors uniformément pour tout  $t \in [0, h^\alpha]$  :

$$\mathbf{r}(t) = e^{-itF(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})/h} \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} + O\left(h^{\alpha+2 \min \delta_i-1}\right).$$

*Démonstration.* — Étudions la différence  $\varepsilon(t) := \varepsilon(t, h)$  définie par

$$\varepsilon(t) := \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-i\frac{t}{h}F(\tau_n, \mu_m)} - e^{-itF(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})/h} \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} \right|.$$

Écrivons maintenant la formule de Taylor-Lagrange d'ordre 2 sur la fonction  $F$  autour du point  $(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})$ ; pour tout couple  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , il existe  $\theta = \theta(n, m, n_0, m_0) \in ]0, 1[$  tel que

$$\begin{aligned} F(\tau_n, \mu_m) &= F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) + \frac{h(n-n_0)}{T_{scl_1}} + \frac{h(m-m_0)}{T_{scl_2}} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^2} \omega_1^2 h^2 (n-n_0)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial Y^2} \omega_2^2 h^2 (m-m_0)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0})) \omega_1 \omega_2 h^2 (n-n_0)(m-m_0). \end{aligned}$$

Et ainsi

$$\varepsilon(t) = \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} \left[ e^{-i2\pi t R_{n,m}(h)} - 1 \right] \right|$$

où on a posé

$$\begin{aligned} R_{n,m}(h) &:= \frac{h\omega_1^2(n-n_0)^2}{4\pi} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^2} \\ &+ \frac{h\omega_2^2(m-m_0)^2}{4\pi} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial Y^2} \\ &+ \frac{h\omega_1\omega_2(n-n_0)(m-m_0)}{2\pi} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X \partial Y}. \end{aligned}$$

Ensuite à l'aide des ensembles  $\Gamma$  et  $\Delta$  et par inégalité triangulaire pour tout  $t \geq 0$  on a

$$\varepsilon(t) \leq \left| \sum_{n,m \in \Delta} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} \left[ e^{-i2\pi t R_{n,m}(h)} - 1 \right] \right| + 2 \sum_{n,m \in \Gamma} |a_{n,m}|^2.$$

Pour tout  $t \geq 0$ , pour  $h$  assez petit et quel que soit  $(n, m) \in \Delta$  nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{th\omega_1^2(n-n_0)^2}{4\pi} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^2} &\leq tK_1 h^{2\delta_1-1}; \\ \frac{th\omega_2^2(m-m_0)^2}{4\pi} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial Y^2} &\leq tK_2 h^{2\delta_2-1}; \end{aligned}$$

$$\frac{th\omega_1\omega_2(n-n_0)(m-m_0)}{2\pi} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X \partial Y} \leq tK_{12}h^{\delta_1 + \delta_2 - 1},$$

où  $K_1, K_2, K_{12} > 0$  sont des constantes indépendantes de  $h$ , en effet : en notant par  $B((E_1, E_2), r)$  la boule euclidienne de dimension 2 de centre  $(E_1, E_2)$  et de rayon  $r$  ; comme  $\lim_{h \rightarrow 0} (\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) = (E_1, E_2)$  on a que  $\forall \varepsilon > 0, \exists h_0 > 0$ , tel que pour tout  $h \leq h_0, (\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \in B((E_1, E_2), \varepsilon)$  ; ensuite pour tout couple  $(n, m) \in \Delta$  nous avons  $|\theta(\tau_n - \tau_{n_0})| = h\omega_1\theta|n - n_0| \leq \omega_1 h^{\delta_1}$  et  $|\theta(\mu_m - \mu_{m_0})| = h\omega_2\theta|m - m_0| \leq \omega_2 h^{\delta_2}$ , donc pour  $h$  assez petit, disons  $h \leq h_0$

$$(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0})) \in B((E_1, E_2), \varepsilon);$$

et ainsi pour tout  $h \leq h_0$ ,

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0})) \right| \leq \sup_{(x,y) \in B((E_1, E_2), \varepsilon)} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(x, y) \right|$$

qui est une constante positive indépendante de  $h$ . Ensuite comme  $\alpha > 1 - 2 \min \delta_i$ , on en déduit que  $\alpha > 1 - 2\delta_1$  ;  $\alpha > 1 - 2\delta_2$  et  $\alpha > 1 - \delta_1 - \delta_2$  ; d'où pour tout  $t \in [0, h^\alpha]$  on a

$$\begin{aligned} t |R_{n,m}(h)| &\leq K_1 h^{\alpha + 2\delta_1 - 1} + K_2 h^{\alpha + 2\delta_2 - 1} + K_{1,2} h^{\alpha + \delta_1 + \delta_2 - 1} \\ &\leq M h^{\alpha - 1} (h^{2\delta_1} + h^{2\delta_2} + h^{\delta_1 + \delta_2}) = 3M h^{2 \min \delta_i + \alpha - 1}; \end{aligned}$$

avec  $M := \max(K_1, K_2, K_{12})$  ; où par hypothèse  $2 \min \delta_i + \alpha - 1 > 0$ . Et ainsi pour tout  $t \in [0, h^\alpha]$  et quel que soit le couple  $(n, m) \in \Delta$  nous avons  $e^{-i2\pi t R_{n,m}(h)} - 1 = O(h^{2 \min \delta_i + \alpha - 1})$  ; d'où

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{n,m \in \Delta} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} \left[ e^{-i2\pi t R_{n,m}(h)} - 1 \right] \right| \\ &= O(h^{2 \min \delta_i + \alpha - 1}) \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 = O(h^{2 \min \delta_i + \alpha - 1}). \end{aligned}$$

Au final, on a, montré que pour  $t \in [0, h^\alpha]$  on a uniformément  $\varepsilon(t) = O(h^{2 \min \delta_i + \alpha - 1})$ .  $\square$

*Périodes classiques.* — Les deux périodes semi-classiques  $T_{scl_i}$  dépendent de  $h$  ; comme par la suite on va distinguer les cas où  $T_{scl_1}/T_{scl_2} \in \mathbb{Q}$  ou non ; il est préférable de supprimer la dépendance en  $h$  du quotient  $T_{scl_1}/T_{scl_2}$  afin de ne pas faire des hypothèses de commensurabilité valide pour tout  $h > 0$ . On va donc remplacer les périodes semi-classique  $T_{scl_i}$  par les périodes classique  $T_{cl_i}$ .

**Définition 3.3.** — Les périodes classiques  $T_{cl_1}$  et  $T_{cl_2}$  sont définies par :

$$T_{cl_1} := \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \omega_1} \text{ et } T_{cl_2} := \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial Y}(E_1, E_2) \omega_2}.$$

On a évidemment pour tout  $j \in \{1, 2\}$  que  $\lim_{h \rightarrow 0} T_{scl_j} = T_{cl_j}$ .

**Proposition 3.4.** — Soit  $\tau$  un réel vérifiant l'inégalité :  $\tau > -\min \delta_i$ . On a alors uniformément pour tout  $t \in [0, h^\tau]$  :

$$\sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} = \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} + O\left(h^{\tau + \min \delta_i}\right).$$

*Démonstration.* — Observons que

$$\left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 \left[ e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} - e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} \right] \right| \leq \sum_{n,m \in \Gamma} 2|a_{n,m}|^2$$

$$+ 2 \sum_{n,m \in \Delta} |a_{n,m}|^2 \left[ \left| 2\pi t(n-n_0) \left( \frac{1}{T_{scl_1}} - \frac{1}{T_{cl_1}} \right) \right| + \left| 2\pi t(m-m_0) \left( \frac{1}{T_{scl_2}} - \frac{1}{T_{cl_2}} \right) \right| \right],$$

car  $|e^{iX_1} e^{iX_2} - e^{iY_1} e^{iY_2}| \leq 2|X_1 - Y_1| + 2|X_2 - Y_2|$ .

Ensuite pour tout  $t \geq 0$  nous avons

$$\left| 2\pi t(n-n_0) \left( \frac{1}{T_{scl_1}} - \frac{1}{T_{cl_1}} \right) \right| = \left| 2\pi t(n-n_0) \left( \frac{T_{cl_1} - T_{scl_1}}{T_{scl_1} T_{cl_1}} \right) \right|,$$

or

$$T_{cl_1} - T_{scl_1} = \frac{2\pi \frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) - \frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2)}{\omega_1 \frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})};$$

d'une part, par l'inégalité des accroissements finis, en notant par  $B((E_1, E_2), 1)$  la boule euclidienne de dimension 2 de centre  $(E_1, E_2)$  et de rayon 1, on obtient la majoration

$$\left| \frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) - \frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \right|$$

$$\leq \sup_{x,y \in B((E_1, E_2), 1)} \left\| \nabla \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right) (x, y) \right\|_{\mathbb{R}^2} \|(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) - (E_1, E_2)\|_{\mathbb{R}^2}$$

$$\leq M \sqrt{(\tau_{n_0} - E_1)^2 + (\mu_{m_0} - E_2)^2} \leq Mh \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

où  $M > 0$  est une constante indépendante de  $h$ . D'autre part comme on suppose que  $\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \neq 0$  il existe  $\varepsilon_1 > 0$  et  $r_1 > 0$  tels que pour tout couple  $(x, y) \in B((E_1, E_2), r_1)$  on ait  $|\frac{\partial F}{\partial X}(x, y)| \geq \varepsilon_1$ ; donc comme  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_{n_0} = E_1$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \mu_{m_0} = E_2$  il existe alors  $h_1 > 0$  tel que pour tout  $h \in ]0, h_1[$

$$(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \in B((E_1, E_2), r_1);$$

ainsi  $h \mapsto \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}$  est bornée sur l'ouvert  $]0, h_1[$ , en effet pour tout  $h \in ]0, h_1[$

$$\left| \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon_1^2} < +\infty$$

d'où avec  $M' := 2\pi \frac{Mh\sqrt{2}}{\varepsilon_1^2}$ , pour tout  $h \in ]0, h_1[$  nous avons  $|T_{cl_1} - T_{scl_1}| \leq hM'$ . Puis comme

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T_{scl_1} T_{cl_1}} \right| &\leq \frac{\omega_1 \omega_2}{4\pi^2} \left| \frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \frac{\partial F}{\partial X}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \right| \\ &\leq \frac{\omega_1 \omega_2}{4\pi^2} \left( \sup_{x, y \in B((E_1, E_2), 1)} \left| \frac{\partial F}{\partial X}(x, y) \right| \right)^2 < \infty \end{aligned}$$

on arrive au fait qu'il existe une constante  $C_1 > 0$  indépendante de  $h$  ( $C_1 := KM'$ ) telle que pour tout  $h \in ]0, h_1[$  on ait  $\left| \frac{1}{T_{scl_1}} - \frac{1}{T_{cl_1}} \right| \leq C_1 h$ . De même il existent  $C_2 > 0$  et  $h_2 > 0$  tels que pour tout  $h \in ]0, h_2[$  on ait  $\left| \frac{1}{T_{scl_2}} - \frac{1}{T_{cl_2}} \right| \leq C_2 h$ . Ainsi pour tout  $h \in ]0, h^*[$  où  $h^* = \min h_i$  et pour tout  $t \in [0, h^\tau]$  avec  $\tau \in \mathbb{R}$ , et quel que soient  $(n, m) \in \Delta$  on a :

$$\left| t(n - n_0) \left( \frac{1}{T_{scl_1}} - \frac{1}{T_{cl_1}} \right) \right| \leq C_1 h^{v+\delta_1}, \quad \left| t(m - m_0) \left( \frac{1}{T_{scl_2}} - \frac{1}{T_{cl_2}} \right) \right| \leq C_2 h^{v+\delta_2};$$

ainsi pour tout  $(t, n, m) \in [0, h^v] \times \Delta$

$$\left| t(n - n_0) \left( \frac{1}{T_{scl_1}} - \frac{1}{T_{cl_1}} \right) + t(m - m_0) \left( \frac{1}{T_{scl_2}} - \frac{1}{T_{cl_2}} \right) \right| \leq Mh^{\tau + \min \delta_i}.$$

Donc

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 \left[ e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} - e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} \right] \right| \\ &\leq 4\pi Mh^{\tau + \min \delta_i} \sum_{n, m \in \Delta} |a_{n, m}|^2 + O(h^\infty) = O(h^{\tau + \min \delta_i}). \end{aligned}$$

□

*Remarques sur les échelles de temps.* — Notons que comme la seule contrainte sur le  $\alpha$  de l'échelle spécifique est que  $\alpha > 1 - 2 \min \delta_i$ ; avec le choix de prendre  $\delta_i \in ]\frac{1}{2}, 1[$  ceci autorise donc d'avoir  $\alpha < 0$ ; ce qui donne un choix de  $\alpha$  pertinent : pour  $h$  assez petit, l'échelle de temps spécifique d'approximation est plus grande que les périodes classiques, en effet pour  $h$  assez petit on a :

$$[0, T_{cl_i}] \subset [0, h^\alpha].$$

Ensuite comme  $-\min \delta_i - (1 - 2 \min \delta_i) = -1 + \min \delta_i \leq 0$  on a donc

$$h^{-\min \delta_i} \gg h^{1-2 \min \delta_i};$$

on peut donc faire le choix de prendre  $\tau = \alpha$ . En conclusion, on a immédiatement que le terme principal de la fonction d'auto corrélation dans l'échelle  $[0, h^\alpha]$  est :

**Définition 3.5.** — Le terme principal de la fonction d'auto-corrélation est la série de fonction

$$\mathbf{a}_1 : t \mapsto \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)}.$$

*Interprétation géométrique des périodes.* — Les deux périodes classiques  $T_{cl_i}$  ont une interprétation géométrique bien précise ; considérons pour  $E_1 > 0$  et  $E_2 > 0$  le sous-ensemble  $M_{E_1, E_2} := p_1^{-1}(E_1) \cap p_2^{-1}(E_2) \subset \mathbb{R}^4$ . La variété  $M_{E_1, E_2}$  est isomorphe au tore  $\mathcal{T} = \sqrt{\frac{2E_1}{\omega_1}} \mathbb{S}^1 \times \sqrt{\frac{2E_2}{\omega_2}} \mathbb{S}^1$ . On va maintenant calculer le flot hamiltonien de  $p = F(p_1, p_2)$  avec un point initial  $m_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \xi_{1,0}, \xi_{2,0}) \in M_{E_1, E_2}$ . En posant

$$a := \frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \omega_1, \quad b := \frac{\partial F}{\partial Y}(E_1, E_2) \omega_2$$

les équations de Hamilton sont alors :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\xi_1(t) \\ b\xi_2(t) \\ -ax_1(t) \\ -bx_2(t) \end{pmatrix};$$

et en posant pour tout indice  $j \in \{1, 2\}$ ,  $Z_j(t) := x_j(t) + i\xi_j(t) \in \mathbb{C}$  on a immédiatement les deux égalités  $\dot{Z}_1(t) = -iaZ_1(t)$ ,  $\dot{Z}_2(t) = -ibZ_2(t)$ . Et par conséquent en intégrant ces équations différentielles on obtient alors

$$Z_1(t) = Z_1(0)e^{-iat}, \quad Z_2(t) = Z_2(0)e^{-ibt}$$

ainsi que

$$|Z_1(0)|^2 = x_1^2(0) + \xi_1^2(0) = \frac{2E_1}{a}, \quad |Z_2(0)|^2 = x_2^2(0) + \xi_2^2(0) = \frac{2E_2}{b};$$

par conséquent le flot hamiltonien dans le repère  $(x_1, \xi_1, x_2, \xi_2)$  est donné en coordonnées complexe par :

$$\varphi_t : \begin{pmatrix} Z_1(0) \\ Z_2(0) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{pmatrix}.$$

En coordonnées angulaire le flot s'écrit alors linéairement :

$$\varphi_t : \begin{pmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta_{1,0} - t \frac{a}{2\pi} \\ \theta_{2,0} - t \frac{b}{2\pi} \end{pmatrix}$$

avec  $\theta_{j,0} \equiv \frac{\arg Z_j(0)}{2\pi}$  [1]. On retrouve alors bien les périodiques classiques du flot hamiltonien

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial X}(E_1, E_2) \omega_1} = T_{cl_1}, \quad \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\partial F}{\partial Y}(E_1, E_2) \omega_2} = T_{cl_2}.$$

Un résultat classique affirme que si les deux périodes sont commensurables alors le flot s'enroule périodiquement sur le tore ; si par contre les deux périodes ne sont pas commensurables le flot s'enroule densément sur le tore. Sur la figure suivante on trouve un exemple où le quotient des deux périodes est commensurable : le flot est alors périodique sur le tore.

**3.2. Comportement de la dynamique sur les périodes classiques.** — Étudions donc la fonction  $\mathbf{a}_1(t)$  sur une période  $[0, \max T_{cl_i}]$ .

*Proposition 3.6.* — Pour tout  $t \geq 0$ , on a l'égalité :

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2} \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} \left( l + \frac{t}{T_{cl_1}} \right), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} \left( s + \frac{t}{T_{cl_2}} \right) \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* — L'ingrédient essentiel de la démonstration est la formule sommatoire de Poisson. Pour cela considérons la fonction  $\Omega_t$  définie par :

$$\Omega_t : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2) \mapsto |a_{x_1, x_2}|^2 e^{-2i\pi t \frac{(x_1-n_0)}{T_{cl_1}}} e^{-2i\pi t \frac{(x_2-m_0)}{T_{cl_2}}} \end{cases}$$

où  $t$  est un paramètre réel. Ainsi pour tout couple  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$

$$|a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} = \Omega_t(n, m).$$

Clairement, uniformément par rapport à  $t$ , la fonction  $\Omega_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ . Calculons  $\mathfrak{F}(\Omega_t)$  sa transformée de Fourier ; on obtient alors que quel que soit  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^2$

$$\mathfrak{F}(\Omega_t)(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_t(x_1, x_2) e^{-2i\pi x_1 \zeta_1} e^{-2i\pi x_2 \zeta_2} dx_1 dx_2;$$

et donc on trouve que que soit  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^2$

$$\mathfrak{F}(\Omega_t)(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{e^{-2i\pi(n_0\zeta_1+m_0\zeta_2)}}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} \left( \zeta_1 + \frac{t}{T_{cl_1}} \right), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} \left( \zeta_2 + \frac{t}{T_{cl_2}} \right) \right).$$

Maintenant avec l'égalité de Poisson appliquée à la fonction  $\Omega_t$  on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} \Omega_t(n, m) &= \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2} \mathfrak{F}(\Omega_t)(l, s) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2} \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} \left( l + \frac{t}{T_{cl_1}} \right), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} \left( s + \frac{t}{T_{cl_2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Ce qui donne bien l'égalité énoncée dans la proposition .  $\square$

On voit tout de suite, compte tenu de la décroissance à l'infini des deux variables de la fonction  $\mathfrak{F}(\chi^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  ; que les termes prépondérants dans la série correspondent aux indices  $l$  et  $s$  tels que  $l + \frac{t}{T_{cl_1}}$  ou  $s + \frac{t}{T_{cl_2}}$  soient le plus proche de zéro. Précisons cela avec une définition et une proposition.

**Définition 3.7.** — Pour tout réel positif  $t$ , on définit les entiers  $l_i(t) = l_i(t, h)$  comme étant les entiers le plus proche des réels  $-\frac{t}{T_{cl_i}}$  ; on note alors par  $d(t, T_{cl_i}\mathbb{Z})$  la distance entre le réel  $t$  et le réseau  $T_{cl_i}\mathbb{Z}$ . Ainsi  $d(t, T_{cl_i}\mathbb{Z}) = l_i(t) + \frac{t}{T_{cl_i}}$ .

**Remarque 3.8.** — Par définition, on a immédiatement que quel que soit  $l \in \mathbb{Z}$  tel que  $l \neq l_i(t)$  on a la minoration  $\left| l + \frac{t}{T_{cl_1}} \right| \geq \frac{1}{2}$ .

**Théorème 3.9.** — On a uniformément pour  $t$  réel

$$\begin{aligned} &\sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) + O(h^\infty). \end{aligned}$$

*Démonstration.* — On va commencer par montrer ce résultat avec la série indexée sur  $\mathbb{Z}^2$ . Comme  $\mathfrak{F}(\chi^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  on a

$$\forall k, d \in \mathbb{N}^{*2}, \exists B_{k,d} > 0, \forall \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^2, |\mathfrak{F}(\chi^2)(\zeta_1, \zeta_2)| \leq \frac{B_{k,d}}{(1 + |\zeta_1|)^k (1 + |\zeta_2|)^d}.$$



Ensuite, d'après la précédente proposition et le lemme précédent, on a l'égalité, uniforme pour  $t$  réel :

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0)} \sum_{l,s \in \mathbb{Z}^2} \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} \left( l + \frac{t}{T_{cl_1}} \right), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} \left( s + \frac{t}{T_{cl_2}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(t, T_{cl_1}\mathbb{Z}), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(t, T_{cl_2}\mathbb{Z}) \right) + O(h^\infty). \end{aligned}$$

Maintenant établissons ce même type de résultat avec la série indexée sur l'ensemble  $\mathbb{N}^2$ . Partons simplement de l'égalité

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} \right)} \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} - \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2 - \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{cl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{cl_2}} \right)} - \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) \right| \\ & \leq \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2 - \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 + O(h^\infty). \end{aligned}$$

Pour finir la preuve il suffit donc de montrer que  $\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2 - \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty)$ . Écrivons alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2 - \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} |a_{n,m}|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=-\infty}^{-1} |a_{n,m}|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{n,m}|^2; \end{aligned}$$

et en utilisant le lemme 2.5 on montre alors facilement que  $\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2 - \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 = O(h^\infty)$ .  $\square$

**Cas où**  $\frac{T_{cl_1}}{T_{cl_2}} \in \mathbb{Q}$ . — On va supposer dans cette sous section que  $\frac{T_{cl_1}}{T_{cl_2}} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ ; ainsi  $bT_{cl_2} = aT_{cl_1}$ .

**Définition 3.10.** — Si les deux périodes classiques sont commensurables ; la période classique totale du système est définie par  $T_{cl} := T_{cl_1}b = aT_{cl_2}$ .

Le premier résultat que nous avons expliqué le comportement de la fonction d'auto-corrélation sur une période classique  $T_{cl}$ . Dans le théorème suivant on montre que le graphe de la fonction d'auto-corrélation est très "piquée" sur la valeur 1 autour de la période classique.

**Théorème 3.11.** — *Nous avons :*

(i) Pour  $t$  tel que  $t \in T_{cl}\mathbb{N}$  (i.e pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $d(t, T_{cl_i}\mathbb{Z}) = 0$ ) :

$$\mathbf{a}_1(t) = 1.$$

(ii) Si il existe  $i \in \{1, 2\}$  tel que  $d(T_{cl_i}\mathbb{Z}, t) > h^{1-\delta'_i}$  :

$$\mathbf{a}_1(t) = O(h^\infty).$$

*Démonstration.* — Le premier point (i) est immédiat. Démontrons le second point : en partant de l'égalité donnée par le précédent théorème :

$$\mathbf{a}_1(t) = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) + O(h^\infty);$$

et en utilisant toujours le fait que la fonction  $\mathfrak{F}(\chi^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  on a une inégalité du type

$$\forall q \in \mathbb{N}, \exists D_q > 0, \forall \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^2, |\mathfrak{F}(\chi^2)(\zeta_1, \zeta_2)| \leq \frac{D_q}{(1 + |\zeta_1| + |\zeta_2|)^q}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} & \left| \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) \right| \\ & \leq \frac{D_q}{\left( 1 + \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t) + \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right)^q}. \end{aligned}$$

Par conséquent s'il existe un indice  $i \in \{1, 2\}$  tel que  $d(T_{cl_i}\mathbb{Z}, t) > \omega_i h^{1-\delta'_i}$  alors il existe  $\varepsilon > 0$  de sorte que  $d(T_{cl_i}\mathbb{Z}, t) \geq \omega_i h^{1-\delta'_i-\varepsilon}$  et ainsi nous avons pour tout  $q \in \mathbb{N}$  l'inégalité suivante :

$$\left| \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) \right| \leq D_q h^{\varepsilon q}.$$

Par conséquent, comme ceci est vrai pour tout pour tout  $q \in \mathbb{N}$  on en déduit que

$$\mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta_1'-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta_2'-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right) = O(h^\infty).$$

□

**Cas où  $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$ .** — Le cas où le réel  $\frac{b}{a} = \frac{T_{cl_1}}{T_{cl_2}}$  n'est plus une fraction rationnelle est beaucoup plus délicat, en effet il n'existe plus de période classique commune. Le flot hamiltonien est dense sur le tore. Le théorème 3.10 nous indique que le comportement à l'ordre 1 de la fonction d'auto-corrélation est donné par la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta_1'-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta_2'-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right).$$

Pour comprendre cette fonction il faut donc analyser l'évolution de la distance entre la demi-droite  $(OM_t)$  où  $O := (0, 0)$ ,  $M_t := (t, t)$  et le réseau  $T_{cl_1}\mathbb{Z} \times T_{cl_2}\mathbb{Z}$  en fonction du temps  $t$  et du nombre  $\frac{T_{cl_1}}{T_{cl_2}} = \frac{b}{a}$ . Pour être plus précis, il faut comparer cette distance avec les réels  $h^{\delta_j'-1}$ . Par exemple, si à un temps  $t^*$  donné la distance entre le flot et le réseau est plus grande que  $h^{1-\delta_j'}$ , en utilisant la décroissance à l'infini de la fonction  $\mathfrak{F}(\chi^2)$ , on est assuré que  $\mathbf{a}_1(t^*) = O(h^\infty)$ .

On va donc débiter cette sous-section par des résultats géométriques, puis on reviendra à l'étude de la fonction d'auto-corrélation  $\mathbf{a}_1(t)$ .

**Généralités.** — Dans ce cas là le flot classique sur le tore n'est pas périodique, mais il est dense sur le tore  $\mathcal{T}$ . On a vu qu'en coordonnées angulaire le flot hamiltonien est donné par

$$\varphi_t : \begin{cases} [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2 \\ \begin{pmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{at}{2\pi} + \theta_{1,0} \\ -\frac{bt}{2\pi} + \theta_{2,0} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Sans perdre de généralité on va supposer que la condition initiale est  $\begin{pmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et que  $a, b < 0$ . En posant  $\mathbf{a} := -\frac{a}{2\pi} > 0$  et  $\mathbf{b} = -\frac{b}{2\pi} > 0$ , le flot hamiltonien s'écrit alors plus simplement

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} \mathbf{a}t \\ \mathbf{b}t \end{pmatrix}.$$

Rappelons aussi que  $T_{cl_1} = \left| \frac{2\pi}{a} \right| = \left| \frac{1}{\mathbf{a}} \right|$  et  $T_{cl_2} = \left| \frac{2\pi}{b} \right| = \left| \frac{1}{\mathbf{b}} \right|$ . La compréhension de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0,0)} \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t) \right)$$

passé donc par l'étude de l'évolution de la distance  $d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2)$  en fonction du temps  $t$  et du nombre  $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ .

**Cas où  $\frac{b}{a}$  vérifie une condition diophantienne.** — Au milieu du XIXème siècle, J. Liouville a démontré le

**Théorème 3.12.** — (*Liouville*). *Soit  $\theta$  un nombre irrationnel algébrique réel de degré  $d \geq 2$ . Il existe une constante  $C = C(\theta) > 0$  tel que pour tout nombre rationnel  $\frac{p}{q}$  on ait*

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^d}.$$

En d'autres termes, un nombre algébrique ne s'approche pas bien par les rationnels. Vers le milieu du XXème siècle, K. F. Roth a considérablement amélioré ce résultats (ce qui lui a valu la médaille Field en 1958).

**Définition 3.13.** — On dit qu'un nombre  $\theta$  irrationnel vérifie une condition diophantienne d'ordre  $\varepsilon$  si et seulement si il existe une constante  $C_\varepsilon > 0$  telle que pour tout couple  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  on ait

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C_\varepsilon}{q^{2+\varepsilon}}.$$

On note par  $\mathcal{C}_\varepsilon$  l'ensemble des nombres  $\theta$  irrationnels qui vérifie une condition diophantienne d'ordre  $\varepsilon$ . On dit qu'un nombre  $\theta$  irrationnel est un nombre de Roth si et seulement si  $\theta \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{C}_\varepsilon$ ; i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0; \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; \left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C_\varepsilon}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Il y a beaucoup d'exemple de nombre de Roth, par exemple :

**Théorème 3.14.** — (*Thue-Siegel-Roth*). *Tout nombre irrationnel algébrique réel de degré  $d \geq 2$  est de Roth.*

Il est aussi connu que (voir par exemple [Cas]) :

**Théorème 3.15.** — *La mesure de Lebesgue des nombres de Roth est pleine.*

**Remarque 3.16.** — Si un nombre  $\theta$  est un nombre  $\varepsilon$ -diophantien alors comme  $|\theta - \frac{p}{1}| \geq C_\varepsilon$  et que  $|\theta - p| \leq \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  on en déduit alors que pour tout  $\varepsilon > 0$  on a  $0 < C_\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ .

On va maintenant estimer la distance euclidienne entre la partie du flot  $\{\varphi_t\}_{t \in [0, T]}$  et l'ensemble  $\mathbb{Z}_*^2$ .

**Définition 3.17.** — Notons par  $\Delta$  et  $\Gamma$  les deux droites vectorielles orthogonales

$$\Delta := \text{Vect}(\mathbf{a}e_1 + \mathbf{b}e_2), \Gamma := \text{Vect}(-\mathbf{b}e_1 + \mathbf{a}e_2)$$

où  $(e_1, e_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Considérons aussi  $\pi_\Delta$  le projecteur orthogonal sur la droite  $\Delta$  et  $\pi_\Gamma$  le projecteur orthogonal sur la droite  $\Gamma$ .

*Par la suite on suppose que  $\theta = \frac{b}{a}$  est un nombre de Roth.*

**Lemme 3.18.** — Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $K_\varepsilon > 0$  telle que  $K_\varepsilon \leq C_\varepsilon$  où  $C_\varepsilon$  est la constante de Roth du nombre  $\theta = \frac{b}{a}$ ; telle que pour tout couple  $(n, m) \in \mathbb{Z}_*^2$

$$\|\pi_\Delta(ne_1 + me_2)\|_{\mathbb{R}^2} \geq \frac{K_\varepsilon}{\|ne_1 + me_2\|_{\mathbb{R}^2}^{1+\varepsilon}}; \|\pi_\Gamma(ne_1 + me_2)\|_{\mathbb{R}^2} \geq \frac{K_\varepsilon}{\|ne_1 + me_2\|_{\mathbb{R}^2}^{1+\varepsilon}}.$$

*Démonstration.* — En notant par  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$  le vecteur directeur normé de la droite  $\Delta$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|\pi_\Delta(ne_1 + me_2)\|_{\mathbb{R}^2} &= |\langle u, ne_1 + me_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}| \\ &= |nu_1 + mu_2| = |u_1| |n + m\theta|; \end{aligned}$$

comme  $\theta$  est un nombre de Roth, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une constante  $C_\varepsilon > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \|\pi_\Delta(ne_1 + me_2)\|_{\mathbb{R}^2} &\geq |u_1| \frac{C_\varepsilon}{|m|^{1+\varepsilon}} \\ &\geq \frac{|u_1| C_\varepsilon}{\|ne_1 + me_2\|_{\mathbb{R}^2}^{1+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

De la même façon nous avons

$$\|\pi_\Gamma(ne_1 + me_2)\|_{\mathbb{R}^2} \geq |u_2| \frac{C_\varepsilon}{|n|^{1+\varepsilon}} \geq \frac{|u_2| C_\varepsilon}{\|ne_1 + me_2\|_{\mathbb{R}^2}^{1+\varepsilon}};$$

ainsi en posant  $K_\varepsilon := \min(|u_1| C_\varepsilon, |u_2| C_\varepsilon) \leq C_\varepsilon$ , on a bien le lemme.  $\square$

De ce lemme on en déduit le :

**Théorème 3.19.** — Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $K_\varepsilon \leq C_\varepsilon$  où  $C_\varepsilon$  est la constante de Roth du nombre  $\theta = \frac{b}{a}$ ; telle que pour tout  $t \geq 0$

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) \geq \frac{K_\varepsilon}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}\right)^{1+\varepsilon}}.$$

*Démonstration.* — Pour tout  $t \geq 0$ , le point  $\varphi_t \in \Delta$ , il existe donc un couple  $(n_t, m_t) \in \mathbb{Z}_*^2$  tel que

$$\begin{aligned} d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) &= \left\| \overrightarrow{O\varphi_t} - (n_t e_1 + m_t e_2) \right\|_{\mathbb{R}^2} \\ &\geq \|\pi_\Gamma(n_t e_1 + m_t e_2)\|_{\mathbb{R}^2}; \end{aligned}$$

et avec le lemme précédent on en déduit alors

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) \geq \frac{K_\varepsilon}{\|n_t e_1 + m_t e_2\|_{\mathbb{R}^2}^{1+\varepsilon}}.$$

Par ailleurs, nous avons la majoration

$$\left\| \overrightarrow{O\varphi_t} - (n_t e_1 + m_t e_2) \right\|_{\mathbb{R}^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

et par l'inégalité triangulaire renversée on obtient

$$\|n_t e_1 + m_t e_2\|_{\mathbb{R}^2} \leq \left\| \overrightarrow{O\varphi_t} \right\|_{\mathbb{R}^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où, comme  $\left\| \overrightarrow{O\varphi_t} \right\|_{\mathbb{R}^2} = t\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$ , pour tout  $t \geq 0$  et quel que soit  $\varepsilon > 0$  nous avons

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) \geq \frac{K_\varepsilon}{\left(t\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1+\varepsilon}}.$$

□

**Corollaire 3.20.** — Pour tout  $\varepsilon > 0$  et quel que soit  $\eta \in \left]0, \frac{\sqrt{2}^{1+\varepsilon}}{2} \left[ \subset \right]0, \frac{\sqrt{2}}{2} \left[$  nous avons l'implication suivante :

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) < \eta \Rightarrow t > \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left( \left( \frac{K_\varepsilon}{\eta} \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

*Démonstration.* — Supposons que  $d(\varphi_t(0), \mathbb{Z}_*^2) < \eta$ , ainsi par le précédent théorème pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une constante  $K_\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2} \left[$  telle que

$$\frac{K_\varepsilon}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}\right)^{1+\varepsilon}} < \eta$$

i.e.

$$\left(\frac{K_\varepsilon}{\eta}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < \frac{\sqrt{2}}{2} + t\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$$

et par conséquent on en déduit l'inégalité souhaitée.  $\square$

**Remarque 3.21.** — Comme  $\eta \in ]0, \frac{\sqrt{2}^{1+\varepsilon}}{2} [ \subset ]0, \frac{\sqrt{2}}{2} [$  on a  $\left(\frac{K_\varepsilon}{\eta}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Définition 3.22.** — Pour  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$ , on note :

$$t_\eta(\varepsilon) := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left( \left(\frac{K_\varepsilon}{\eta}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

**Théorème 3.23.** — Pour tout  $\varepsilon > 0$  et quel que soit  $\eta \in ]0, \frac{\sqrt{2}^{1+\varepsilon}}{2} [$  avec  $\eta$  assez petit pour que  $t_\eta(\varepsilon) \geq \max T_{cl_i}$ ; pour tout entier  $k \geq 1$  il existe une constante  $D_k > 0$  telle que pour tout  $t \in [\max T_{cl_i}, t_\eta(\varepsilon)]$  on ait uniformément

$$|\mathbf{a}_1(t)| \leq D_k h^{k(1-\max \delta'_i)} \eta^{-k}.$$

*Démonstration.* — Par définition de  $d(t, T_{cl_i} \mathbb{Z})$ , on a la simple relation valide pour tout  $t \geq \max T_{cl_i} > 0$

$$d(t, T_{cl_i} \mathbb{Z}) = d(t, T_{cl_i} \mathbb{N}^*);$$

puis comme  $T_{cl_1} = \left|\frac{2\pi}{a}\right| = \left|\frac{1}{\mathbf{a}}\right|$  et  $T_{cl_2} = \left|\frac{2\pi}{b}\right| = \left|\frac{1}{\mathbf{b}}\right|$  on a

$$d(t, T_{cl_1} \mathbb{Z}) = d(\mathbf{a}t, \mathbb{N}^*), \quad d(t, T_{cl_2} \mathbb{Z}) = d(\mathbf{b}t, \mathbb{N}^*).$$

Ainsi par contraposée du précédent corollaire nous obtenons que pour tout  $t \in [\max T_{cl_i}, t_\eta(\varepsilon)]$

$$d((\mathbf{a}t, \mathbf{b}t), \mathbb{Z}_*^2) \geq \eta;$$

ce qui implique (comme les normes  $\|(x, y)\|_{\mathbb{R}^2}$  et  $|x| + |y|$  sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^2$ ) l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $t \in [\max T_{cl_i}, t_\eta(\varepsilon)]$

$$d(t, T_{cl_1} \mathbb{Z}) + d(t, T_{cl_2} \mathbb{Z}) \geq C\eta.$$

Puis comme la fonction  $\mathfrak{F}(\chi^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\forall k \in \mathbb{N}^2, \exists M_k > 0, \forall \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^2, |\mathfrak{F}(\chi^2)(\zeta_1, \zeta_2)| \leq \frac{M_k}{(|\zeta_1| + |\zeta_2|)^k};$$

d'où pour tout  $t \in [\max T_{cl_i}, t_\eta(\varepsilon)]$

$$\begin{aligned} & \left| \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(t, T_{cl_1} \mathbb{Z}), -\frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(t, T_{cl_2} \mathbb{Z}) \right) \right| \\ & \leq \frac{M_k}{\left( \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(t, T_{cl_1} \mathbb{Z}) + \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(t, T_{cl_2} \mathbb{Z}) \right)^k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\max(\omega_i)^k M_k}{h^{k \max(\delta'_i) - k} (d(t, T_{cl_1} \mathbb{Z}) + d(t, T_{cl_2} \mathbb{Z}))^k} \\ &\leq \frac{\max(\omega_i)^k M_k}{h^{k \max(\delta'_i) - k}} \frac{1}{C^k \eta^k} = \max(\omega_i) \frac{M^k}{C^k} h^{k(1 - \max(\delta'_i))} \eta^{-k}; \end{aligned}$$

d'où le théorème énoncé.  $\square$

Puis en appliquant ce théorème avec  $\eta = h^s$ , où  $s$  est un réel de  $]0, 1 - \max \delta'_i[$  on obtient immédiatement le :

**Corollaire 3.24.** — *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $s \in ]0, 1 - \max \delta'_i[$  et pour  $h$  assez petit tel que  $t_{h^s}(\varepsilon) \geq \max T_{cl_i}$ ; alors uniformément pour tout  $t \in [\max T_{cl_i}, t_\eta(\varepsilon)]$  nous avons*

$$\mathbf{a}_1(t) = O(h^\infty).$$

**Remarques sur les échelles de temps.** — Pour que le précédent lemme ait un intérêt il faut vérifier que pour tout  $\varepsilon \geq 0$

$$t_{h^s}(\varepsilon) \leq h^\alpha$$

où on rappelle que  $\alpha > 1 - 2 \min(\delta_i)$ . En effet on a la

**Proposition 3.25.** — *En supposant que  $\min \delta_i > \frac{2}{3}$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $s \in ]0, 1 - \max \delta'_i[$  on a*

$$t_{h^s}(\varepsilon) \leq \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left( h^{1-2\min \delta_i} - \sqrt{2} \right).$$

*Démonstration.* — D'une part pour tout  $s > 0$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  comme

$$t_{h^s}(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left( (K_\varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} h^{-\frac{s}{1+\varepsilon}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

pour  $h \rightarrow 0$  on a donc l'équivalence

$$t_{h^s} \sim D_\varepsilon h^{-\frac{s}{1+\varepsilon}}$$

où  $D_\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} (K_\varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} > 0$ . D'autre part, par une simple étude de fonction montre que pour tout  $\varepsilon > 0$  on a  $1 - 2\min \delta_i \leq \frac{\max \delta'_i - 1}{1+\varepsilon}$ . Par suite on a  $h^{\frac{\max \delta'_i - 1}{1+\varepsilon}} \leq h^{1-2\min \delta_i}$ . Et par conséquent on obtient

$$\begin{aligned} &t_{h^s}(\varepsilon) \leq \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left( (K_\varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} h^{\frac{\max \delta'_i - 1}{1+\varepsilon}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left( (K_\varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} h^{1-2\min \delta_i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \left( \frac{1}{2} h^{1-2\min \delta_i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

$\square$



**Utilisation des fractions continues.** — Maintenant, on peut se demander quels sont les temps précis où  $d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) < \eta$ ? Pour répondre à cette problématique on va utiliser les fractions continues. Pour tout nombre réel irrationnel  $\theta$  on notera par  $(q_n, p_n) \in \mathbb{N}^2$  la suite donnée par l'algorithme des fractions continues. On a en particulier que pour tout entier  $n \geq 0$

$$\left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Notons par  $D$  la droite d'équation  $y = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}x = \theta x$ . Ainsi pour tout  $t \geq 0$ ;

$$[O\varphi_t] \subset D.$$

Pour  $n \geq 0$  fixé on va déterminer le point de la droite  $D$  qui réalise la distance entre  $D$  et le point  $(q_n, p_n) \in \mathbb{N}^2$ ; ce qui revient à trouver le temps  $\tau_n$  tel que  $d(\varphi_{\tau_n}, (q_n, p_n)) = d(D, (q_n, p_n))$ .

**Proposition 3.26.** — *Pour tout  $n \geq 1$ ; l'unique  $\tau_n \geq 0$  tel que  $d(\varphi_{\tau_n}, (q_n, p_n)) = d(D, (q_n, p_n))$  est donné par*

$$\tau_n = \frac{\mathbf{a}q_n + \mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}.$$

De plus nous avons

$$d(\varphi_{\tau_n}, \mathbb{Z}_*^2) \leq \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \frac{1}{q_n} < \frac{1}{q_n}.$$

*Démonstration.* — Pour  $n$  fixé non nul, on va chercher  $t \geq 0$  tel que  $d(\varphi_t, (q_n, p_n)) = d(D, (q_n, p_n))$ . Il faut donc trouver  $t \geq 0$  tel que :

$$\overrightarrow{O\varphi_t} \perp \left( (q_n e_1 + p_n e_2) - \overrightarrow{O\varphi_t} \right)$$

ie : il faut donc trouver  $t \geq 0$  tel que :

$$\left\langle \overrightarrow{O\varphi_t}, (q_n e_1 + p_n e_2) - \overrightarrow{O\varphi_t} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0.$$

On doit donc résoudre  $\mathbf{a}t(q_n - \mathbf{a}t) + \mathbf{b}t(p_n - \mathbf{b}t) = 0$  et on trouve comme solution non nulle  $t = \frac{\mathbf{a}q_n + \mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$ . Et ainsi à  $t = \tau_n := \frac{\mathbf{a}q_n + \mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$  on obtient

$$\begin{aligned} d(\varphi_{\tau_n}, (q_n, p_n)) &= d\left(\left(\frac{\mathbf{a}^2 q_n + \mathbf{a}\mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}, \frac{\mathbf{a}\mathbf{b}q_n + \mathbf{b}^2 p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}\right), (q_n, p_n)\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{\mathbf{a}^2 q_n + \mathbf{a}\mathbf{b}p_n - \mathbf{a}^2 q_n - \mathbf{b}^2 p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}q_n + \mathbf{b}^2 p_n - \mathbf{a}^2 p_n - \mathbf{b}^2 p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \sqrt{\mathbf{b}^2 (\mathbf{a}p_n - \mathbf{b}q_n)^2 + \mathbf{a}^2 (\mathbf{b}q_n - \mathbf{a}p_n)^2}. \end{aligned}$$

Or comme pour tout entier  $n$  on a  $\left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}$ , c'est-à-dire pour tout entier  $n$   $|q_n \mathbf{b} - p_n \mathbf{a}| \leq \frac{\mathbf{a}}{q_n}$ ; on en déduit donc l'inégalité :

$$\begin{aligned} d(\varphi_{\tau_n}, (q_n, p_n)) &\leq \frac{1}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \sqrt{\mathbf{b}^2 \frac{\mathbf{a}^2}{q_n^2} + \mathbf{a}^2 \frac{\mathbf{a}^2}{q_n^2}} \\ &\leq \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \frac{1}{q_n} < \frac{1}{q_n}. \end{aligned}$$

Pour conclure il suffit de noter que pour tout entier  $n$

$$d(\varphi_{\tau_n}, (q_n, p_n)) \geq d(\varphi_{\tau_n}, \mathbb{Z}_*^2).$$

□

Généralisons un peu ce résultat en regardant comme évolue la distance entre l'ensemble  $\mathbb{Z}_*^2$  et la partie du flot  $\varphi_t$  lorsque  $t$  est dans un voisinage de  $\tau_n$ .

**Définition 3.27.** — Pour tout réel  $r > 0$ , on note par  $I(r)$  la boule fermée de centre  $\tau_n$  et de rayon  $r > 0$  :

$$I(r) := \left[ \frac{\mathbf{a}q_n + \mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} - r, \frac{\mathbf{a}q_n + \mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} + r \right].$$

**Proposition 3.28.** — Pour tout réel  $r > 0$ ; quel que soit  $t \in I(r)$

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) \leq \frac{1}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \sqrt{\left( \left( \frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{q_n} \right) + r\mathbf{a}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) \right)^2 + \left( \frac{\mathbf{a}^2}{q_n} + r\mathbf{b}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) \right)^2}.$$

*Démonstration.* — Partons de l'inégalité vraie pour tout réel  $t \geq 0$ .

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) \leq d(\varphi_t, (q_n, p_n)).$$

Ensuite pour tout  $t \in I(r)$  on a très clairement que

$$\varphi_t \in B_{\mathbb{R}} \left( \frac{\mathbf{a}^2 q_n + \mathbf{a}\mathbf{b} p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}, r\mathbf{a} \right) \times B_{\mathbb{R}} \left( \frac{\mathbf{a}\mathbf{b} q_n + \mathbf{b}^2 p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}, r\mathbf{b} \right)$$

où  $B_{\mathbb{R}}(X, R) := [X - R, X + R]$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} &d(\varphi_t, (q_n, p_n)) \\ &\leq \sqrt{\left( \frac{\mathbf{a}^2 q_n + \mathbf{a}\mathbf{b} p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} + r\mathbf{a} - q_n \right)^2 + \left( \frac{\mathbf{a}\mathbf{b} q_n + \mathbf{b}^2 p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} + r\mathbf{b} - p_n \right)^2} \\ &= \frac{1}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \sqrt{(\mathbf{a}\mathbf{b} p_n - \mathbf{b}^2 q_n + r\mathbf{a}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2))^2 + (\mathbf{a}\mathbf{b} q_n - \mathbf{a}^2 p_n + r\mathbf{b}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2))^2} \\ &\leq \frac{1}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \sqrt{\left( \left( \frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{q_n} \right) + r\mathbf{a}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) \right)^2 + \left( \frac{\mathbf{a}^2}{q_n} + r\mathbf{b}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) \right)^2}. \end{aligned}$$

Ce qui montre l'inégalité proposée. □

**Remarque 3.29.** — Pour  $r = 0$  on obtient

$$d(\varphi_t, \mathbb{Z}_*^2) \leq \frac{1}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \sqrt{\left(\left(\frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{q_n}\right)\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{a}^2}{q_n}\right)^2} \leq \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}} \frac{1}{q_n}.$$

et on retrouve bien le résultat de la précédente proposition.

On va maintenant donner un équivalent pour  $n \rightarrow \infty$  du réel  $\tau_n$  :

**Proposition 3.30.** — Pour  $n \rightarrow \infty$  on a l'équivalent  $\tau_n \sim \Omega q_n$  où on a posé  $\Omega := \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}\theta}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} > 0$ .

*Démonstration.* — Écrivons le quotient  $\tau_n$  sur  $\Omega q_n$  :

$$\frac{\tau_n}{\Omega q_n} = \frac{\mathbf{a}q_n + \mathbf{b}p_n}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{q_n(\mathbf{a} + \mathbf{b}\theta)} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a} + \mathbf{b}\theta} + \frac{\mathbf{b}p_n}{q_n(\mathbf{a} + \mathbf{b}\theta)}$$

et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \theta$  on en déduit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n}{\Omega q_n} = 1$ .  $\square$

Revenons maintenant à la fonction d'auto-corrélation  $\mathbf{a}_1$ .

**Définition 3.31.** — Pour  $\mu > 0$  fixé, on note par  $\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_h(\theta, \mu)$  l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A}_h := \left\{ q_n \in \mathbb{N}, q_n \in \left[ h^{\min \delta'_i - 1 + \mu}, h^{1 - 2 \min \delta_i - \mu} \right] \right\}.$$

**Remarque 3.32.** — Pour  $\mu > 0$  on a  $\left[ h^{\min \delta'_i - 1 - \mu}, h^{1 - 2 \min \delta_i + \mu} \right] \subset \left[ h^{\min \delta'_i - 1}, h^{1 - 2 \min \delta_i} \right]$ .

**Théorème 3.33.** — Supposons que  $\mathcal{A}_h \neq \emptyset$ , alors

$$\sup_{n \in \{m \in \mathbb{N}, q_m(\theta) \in \mathcal{A}_h\}} |\mathbf{a}_1(\tau_n) - 1| = O(h^\mu).$$

*Démonstration.* — Appliquons pour commencer la formule de Taylor-Lagrange d'ordre 1 sur la fonction  $(x, y) \mapsto \mathfrak{F}(\chi^2)(x, y)$  autour de l'origine : pour tout réel  $t \geq 0$  il existe un réel  $\theta = \theta(t, h, T_{cl_1}, T_{cl_2}) \in ]0, 1[$  tel que :

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}(\chi^2) \left( -\frac{h^{\delta'_1 - 1}}{\omega_1} d(T_{cl_1} \mathbb{Z}, t), -\frac{h^{\delta'_2 - 1}}{\omega_2} d(T_{cl_2} \mathbb{Z}, t) \right) = \mathfrak{F}(\chi^2)(0, 0) \\ & - \frac{h^{\delta'_1 - 1}}{\omega_1} d(T_{cl_1} \mathbb{Z}, t) \frac{\partial \mathfrak{F}(\chi^2)}{\partial x} \left( \theta \frac{h^{\delta'_1 - 1}}{\omega_1} d(T_{cl_1} \mathbb{Z}, t), \theta \frac{h^{\delta'_2 - 1}}{\omega_2} d(T_{cl_2} \mathbb{Z}, t) \right) \\ & - \frac{h^{\delta'_2 - 1}}{\omega_2} d(T_{cl_2} \mathbb{Z}, t) \frac{\partial \mathfrak{F}(\chi^2)}{\partial y} \left( \theta \frac{h^{\delta'_1 - 1}}{\omega_1} d(T_{cl_1} \mathbb{Z}, t), \theta \frac{h^{\delta'_2 - 1}}{\omega_2} d(T_{cl_2} \mathbb{Z}, t) \right). \end{aligned}$$

Nous venons de voir que pour tout entier  $n \geq 1$  la distance entre la partie du flot  $\varphi_{\tau_n}$  et l'ensemble  $\mathbb{Z}_*^2$  est strictement plus petite que  $\frac{1}{q_n}$ . Ainsi si on suppose

qu'à partir d'un certain rang la suite  $\left(\frac{1}{q_n}\right)_n$  devient très petite, disons que pour tout  $n \geq N$  on ait  $\frac{1}{q_n} < h^s$  avec  $s > 0$ . Alors dans ce cas là nous obtenons la majoration  $d(\varphi_{\tau_n}, \mathbb{Z}_*^2) \leq h^s$ ; et par conséquent pour tout indice  $i \in \{1, 2\}$  on a aussi  $d(\tau_n, T_{cl_i}\mathbb{Z}) \leq h^s$ . D'où, pour tout indice  $i \in \{1, 2\}$  nous avons  $h^{\delta'_i-1}d(\tau_n, T_{cl_i}\mathbb{Z}) \leq h^{\delta'_i-1+s}$  et comme on suppose que  $s \geq -\min \delta'_i + 1 + \mu$  avec  $\mu > 0$

$$h^{\delta'_i-1}d(\tau_n, T_{cl_i}\mathbb{Z}) \leq h^\mu;$$

et comme pour  $h$  assez petit

$$\left| \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, \tau_n) \frac{\partial \mathfrak{F}(\chi^2)}{\partial x} \left( \theta \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, \tau_n), \theta \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t\tau_n) \right) \right| \leq Mh^\mu,$$

$$\left| \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, \tau_n) \frac{\partial \mathfrak{F}(\chi^2)}{\partial y} \left( \theta \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, \tau_n), \theta \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, t\tau_n) \right) \right| \leq Nh^\mu;$$

où  $M, M'$  sont des constantes positives indépendantes de  $h$ . Ainsi avec la formule de Taylor précédemment écrite on a immédiatement

$$\sup_{n \in \{m \in \mathbb{N}, q_m(\theta) \in \mathcal{A}_h\}} |\mathbf{a}_1(\tau_n) - 1| = \frac{1}{\mathfrak{F}(\chi^2)(0, 0)}$$

$$\sup_{n \in \{m \in \mathbb{N}, q_m(\theta) \in \mathcal{A}_h\}} \left| \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, \tau_n) \frac{\partial \mathfrak{F}(\chi^2)}{\partial x} \left( \theta \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, \tau_n), \theta \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, \tau_n) \right) \right.$$

$$\left. \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, \tau_n) \frac{\partial \mathfrak{F}(\chi^2)}{\partial y} \left( \theta \frac{h^{\delta'_1-1}}{\omega_1} d(T_{cl_1}\mathbb{Z}, \tau_n), \theta \frac{h^{\delta'_2-1}}{\omega_2} d(T_{cl_2}\mathbb{Z}, \tau_n) \right) \right|$$

$$\leq h^\mu M.$$

□

**Comptage de la suite  $q_n$ .** — Au vu du précédent théorème il est intéressant de déterminer la cardinalité de l'ensemble  $\mathcal{A}_h$ . Comme la suite  $(q_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

$$\text{card} \{\mathcal{A}_h\} = \text{card} \{n \in \mathbb{N}, q_n(\theta) \in \mathcal{A}_h\}.$$

Commerçons par une majoration simple de  $\text{card} \{\mathcal{A}_h\}$  :

$$\text{card} \{\mathcal{A}_h\} \leq \text{card} \left\{ \mathbb{N} \cap \left[ h^{\min \delta'_i - 1 - \mu}, h^{1 - 2 \min \delta_i + \mu} \right] \right\} \leq E[\delta(h)] + 1$$

où  $\delta(h) := h^{1-2\min\delta_i+\mu} - h^{\min\delta'_i-1-\mu}$ . On a alors, pour  $h \rightarrow 0$ , l'équivalent  $\delta(h) \sim h^{1-2\min\delta_i+\mu}$ . Pour minimiser  $\text{card}\{\mathcal{A}_h\}$  c'est beaucoup plus dur ; cependant il est clair que pour tout  $n^* > 1$ , il existe  $h^* \in ]0, 1[$  tel que :

$$\left[ h^{*\min\delta'_i-1-\mu}, h^{*1-2\min\delta_i+\mu} \right] \cap \left( \bigcup_{n=0}^{+\infty} q_n(\theta) \right) = \{q_{n^*}(\theta)\}.$$

Pour pouvoir estimer l'entier  $\text{card}\{\mathcal{A}_h\}$  il faut connaître la distribution des  $(q_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  sur la droite des réels (en particulier sur le compact  $\left[ h^{\min\delta'_i-1-\mu}, h^{1-2\min\delta_i+\mu} \right]$ ) en fonction du nombre  $\theta$ . Essayons de donner quelques exemples de distribution de  $(q_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Un exemple : le nombre d'or.* — Le nombre d'or est le nombre l'unique racine réelle de  $X^2 - X - 1 = 0$ , c'est à dire  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . La fraction continue approximant le nombre d'or possède systématiquement la plus petite valeur possible pour chacun des coefficients, à savoir 1 :

$$\varphi = [1, 1, \dots, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

En conséquence le nombre d'or est l'irrationnel qui s'approche le plus mal par des rationnels. Une autre particularité de ce nombre est que la suite des dénominateurs  $(q_n)_n$  de l'algorithme des fractions continues est égale à la suite de Fibonacci  $(\mathbb{F}_n)_n$  :

$$\mathbb{F}_n := \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Notons bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{F}_{n+1}}{\mathbb{F}_n} = \varphi.$$

Ensuite pour  $n \rightarrow +\infty$  on a aussi :

$$\mathbb{F}_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Une récurrence évidente nous fournit le :

**Proposition 3.34.** — *En notant par  $q_n(x)$  le  $n$ -ème dénominateur de l'algorithme des fractions continues de  $x$  ; pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  nous avons pour tout  $n \geq 0$*

$$q_n(\theta) \geq \mathbb{F}_n.$$

Dans le cas général où  $\theta$  est un irrationnel quelconque on dispose du théorème d'arithmétique analytique suivant (voir **[Khi]**) :

**Théorème 3.35.** — (*Khinchine-Lévy, 1952*). Pour presque tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ; nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(\theta)^{\frac{1}{n}} = K$$

où  $K$  est la constante de Khinchine-Lévy  $K := e^{\frac{\pi}{12 \ln(2)}} > 1$ .

Ainsi, par exemple, à partir d'un certain rang on a :

$$\left(\frac{1}{2}K\right)^n \leq q_n(\theta) \leq \left(\frac{3}{2}K\right)^n.$$

L'étude de la distribution des suites géométriques  $\left(\left(\frac{1}{2}K\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left(\left(\frac{3}{2}K\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  sur le compact  $\left[h^{\min \delta'_i - 1 - \mu}, h^{1 - 2 \min \delta_i + \mu}\right]$  est assez simple à faire ; malheureusement ceci ne fournit pas beaucoup d'informations exactes sur la distribution de la suite  $(q_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Question ouverte.* — Connaît t'on la distribution des dénominateurs  $(q_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  sur les réels en fonction de  $\theta$  ; plus précisément pour un compact non vide fixé de  $\mathbb{R}_+^*$  est t'il possible d'estimer le nombre d'éléments de la suite  $(q_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$  dans ce compact en fonction du réel  $\theta$  et du diamètre de ce compact ?

#### 4. Dynamique sur des échelles de temps Longues : périodes de renaissances

Dans cette section on supposera que  $\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) \neq 0$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}(E_1, E_2) \neq 0$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(E_1, E_2) \neq 0$ . L'approximation à l'ordre deux de la fonction d'auto-corrélation fait apparaître trois nouvelles quantités : les périodes de renaissances.

##### 4.1. Périodes de renaissances. —

**Définition 4.1.** — On définit les périodes de renaissances semi-classiques  $T_{sren_1}$ ,  $T_{sren_2}$  et  $T_{sren_{12}}$  du système par :

$$T_{sren_1} := \frac{4\pi}{h \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \omega_1^2}; \quad T_{sren_2} := \frac{4\pi}{h \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \omega_2^2};$$

$$T_{sren_{12}} := \frac{4\pi}{h \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \omega_1 \omega_2}.$$

De sorte que :

**Proposition 4.2.** — Soit  $\beta$  un réel vérifiant l'inégalité :  $\beta > 1 - 3 \min \delta_i$ . On a alors uniformément pour tout  $t \in [0, h^\beta]$  :

$$e^{+itF(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})/h} \mathbf{r}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{sren1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{sren2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{sren12}} \right)} \\
&\quad + O\left(h^{\beta+3 \min \delta_i - 1}\right).
\end{aligned}$$

*Démonstration.* — Le principe de la démonstration est le même que dans la preuve de la proposition 3.3. Ici il faut par contre écrire une formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 : pour tout couple  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , il existe  $\theta = \theta(n, m, n_0, m_0) \in ]0, 1[$  tel que

$$\begin{aligned}
F(\tau_n, \mu_m) &= F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \\
&\quad + \frac{\partial F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\partial X} \omega_1 h (n - n_0) + \frac{\partial F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\partial y} \omega_2 h (m - m_0) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\partial X^2} \omega_1^2 h^2 (n - n_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\partial Y^2} \omega_2^2 h^2 (m - m_0)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \omega_1 \omega_2 h^2 (n - n_0) (m - m_0) \\
&\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^3} \omega_1^3 h^3 (n - n_0)^3 \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^2 \partial Y} \omega_1^2 \omega_2 h^3 (n - n_0)^2 (m - m_0) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X \partial Y^2} \omega_1 \omega_2^2 h^3 (n - n_0) (m - m_0)^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F(\tau_{n_0} + \theta(\tau_n - \tau_{n_0}), \mu_{m_0} + \theta(\mu_m - \mu_{m_0}))}{\partial X^3} \omega_2^3 h^3 (m - m_0)^3.
\end{aligned}$$

Ensuite il suffit de noter que pour tout couple  $(n, m) \in \Delta$  et pour tout  $t \in [0, h^\beta]$

$$\left| t(n - n_0)^3 h^2 \right| \leq h^{\beta+3\delta_1-1}; \quad \left| t(n - n_0)^2 (m - m_0) h^2 \right| \leq h^{\beta+2\delta_1+\delta_2-1};$$

$$\left| t(n - n_0) (m - m_0)^2 h^2 \right| \leq h^{\beta+\delta_1+2\delta_2-1}; \quad \left| t(m - m_0)^3 h^2 \right| \leq h^{\beta+3\delta_2-1};$$

et donc comme  $\beta > 1 - \min(3\delta_1, 2\delta_1 + \delta_2, \delta_1 + 2\delta_2, 3\delta_2) = 1 - 3 \min \delta_i$ , quel que soit  $t \in [0, h^\beta]$  et pour tout couple  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  nous avons

$$\begin{aligned}
&e^{-2i\pi t((n-n_0)^3 h^2 + (n-n_0)^2 (m-m_0) h^2 + (n-n_0) (m-m_0)^2 h^2 + (m-m_0)^3 h^2)} \\
&= 1 + O\left(h^{\beta-1+3 \min \delta_i}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui permet de simplifier la fonction d'auto-corrélation.  $\square$

**Définition 4.3.** — On définit les périodes de renaissances  $T_{ren_1}$ ,  $T_{ren_2}$  et  $T_{ren_{12}}$  par :

$$T_{ren_1} := \frac{4\pi}{h \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) \omega_1^2}; \quad T_{ren_2} := \frac{4\pi}{h \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}(E_1, E_2) \omega_2^2};$$

$$T_{ren_{12}} := \frac{4\pi}{h \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}(E_1, E_2) \omega_1 \omega_2}.$$

Evidemment, pour tout indice  $j \in \{1, 2, 12\}$  on a  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{sren_j}}{T_{ren_j}} = 1$ . Les trois périodes semi-classiques  $T_{sren_j}$  dépendent de  $h$  ainsi que leurs quotients. Comme par la suite on va faire des considérations sur les quotients des périodes, il est préférable de travailler plutôt avec les périodes de renaissances qu'avec les périodes de renaissances semi-classique ; pour cela nous disposons en effet de la :

**Proposition 4.4.** — Soit  $v$  un réel vérifiant l'inégalité :  $v > -2 \min \delta_i$ . On a alors uniformément pour  $t \in [0, h^v]$  :

$$\sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{sren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{sren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{sren_{12}}} \right)}$$

$$= \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{ren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{ren_{12}}} \right)} + O\left(h^{v+\min(\delta_1, \delta_2)}\right).$$

*Démonstration.* — Le principe de la preuve est le même que celle de la proposition 3.5. Observons qu'avec la partition  $\mathbb{N}^2 = \Delta \amalg \Gamma$  et par inégalité triangulaire nous obtenons :

$$\left| \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 \left[ e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{sren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{sren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{sren_{12}}} \right)} \right. \right.$$

$$\left. \left. e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{ren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{ren_{12}}} \right)} \right] \right|$$

$$\leq \sum_{n, m \in \Gamma} 2 |a_{n, m}|^2$$

$$+ 2 \sum_{n, m \in \Delta} |a_{n, m}|^2 \left[ \left| 2\pi t (n - n_0)^2 \left( \frac{1}{T_{sren_1}} - \frac{1}{T_{ren_1}} \right) \right| + \left| 2\pi t (m - m_0)^2 \left( \frac{1}{T_{sren_2}} - \frac{1}{T_{ren_2}} \right) \right| \right]$$

$$+ \left| 2\pi t (n - n_0)(m - m_0) \left( \frac{1}{T_{sren_{12}}} - \frac{1}{T_{ren_{12}}} \right) \right|;$$



on a utilisé ici que  $|e^{iX} - e^{iY}| \leq 2|X - Y|$ . En écrivant ensuite  $\frac{1}{T_{sren_1}} - \frac{1}{T_{ren_1}} = \frac{T_{ren_1} - T_{sren_1}}{T_{sren_1}T_{ren_1}}$  puis en remarquant que

$$T_{sren_1} - T_{ren_1} = \frac{4\pi}{\omega_1^2 h} \left( \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) - \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}{\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2)} \right);$$

d'une part avec l'inégalité des accroissements finis nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) - \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \right| \\ & \leq \sup_{(x,y) \in B((E_1, E_2), 1)} \left\| \nabla \left( \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right) (x, y) \right\|_{\mathbb{R}^2} \|(E_1, E_2) - (\tau_{n_0}, \mu_{m_0})\|_{\mathbb{R}^2} \\ & \leq M \sqrt{(E_1 - \tau_{n_0})^2 + (E_2 - \mu_{m_0})^2} \leq Mh \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

où  $M$  est une constante strictement positive et indépendante de  $h$ . D'autre part comme on suppose que  $\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) \neq 0$ ; il existe  $\varepsilon_1 > 0$  et  $r_1 > 0$  tels que pour tout  $(x, y) \in B((E_1, E_2), r_1)$  on ait  $\left| \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(x, y) \right| \geq \varepsilon_1$ ; donc comme  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_{n_0} = E_1$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \mu_{m_0} = E_2$  il existe  $h_1 > 0$  tel que pour tout  $h \in ]0, h_1[$

$$(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \in B((E_1, E_2), r_1);$$

ainsi l'application

$$h \mapsto \frac{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})}$$

est bornée sur l'ouvert  $]0, h_1[$ , en effet pour tout  $h \in ]0, h_1[$

$$\left| \frac{1}{\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon_1^2} < +\infty;$$

d'où avec  $M' := 2\pi \frac{M\sqrt{2}}{\varepsilon_1^2}$ , pour tout  $h \in ]0, h_1[$  nous avons alors  $|T_{sren_1} - T_{ren_1}| \leq M'$ . Après, comme

$$\left| \frac{1}{T_{sren_1}T_{ren_1}} \right| \leq h^2 \frac{\left| \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(E_1, E_2) \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(\tau_{n_0}, \mu_{m_0}) \right|}{16\pi^2} \leq Kh^2$$

où  $K := \frac{1}{16\pi^2} \sup_{(x,y) \in B((E_1, E_2), 1)} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(x, y) \right|^2$ . Par conséquent il existe une constante  $C_1 > 0$  indépendante de  $h$  telle que pour tout  $h \in ]0, h_1[$

$$\left| \frac{1}{T_{sren_1}} - \frac{1}{T_{ren_1}} \right| \leq C_1 h^2$$

(il suffit de prendre  $C_1 := KM$ ). De la même façon on montre l'existence de deux autres constantes  $C_2, C_{12} > 0$  indépendantes de  $h$  telles que pour tout  $h \in ]0, h_2[$  on ait

$$\left| \frac{1}{T_{sren_2}} - \frac{1}{T_{ren_2}} \right| \leq C_2 h^2$$

et pour tout  $h \in ]0, h_{12}[$  on ait

$$\left| \frac{1}{T_{sren_{12}}} - \frac{1}{T_{ren_{12}}} \right| \leq C_{12} h^2.$$

Ensuite quel que soit  $t \geq 0$ , quel que soit  $(n, m) \in \Delta$  et que que soit  $h < \min(h_1, h_2, h_{12})$  nous avons

$$\begin{aligned} \left| t(n - n_0)^2 \left( \frac{1}{T_{sren_1}} - \frac{1}{T_{ren_1}} \right) \right| &\leq C_1 |t| h^{2\delta_1}; \\ \left| t(n - n_0)(m - m_0) \left( \frac{1}{T_{sren_{12}}} - \frac{1}{T_{ren_{12}}} \right) \right| &\leq C_{12} |t| h^{\delta_1 + \delta_2}; \\ \left| t(m - m_0)^2 \left( \frac{1}{T_{sren_2}} - \frac{1}{T_{ren_2}} \right) \right| &\leq C_2 |t| h^{2\delta_2}; \end{aligned}$$

et donc pour tout  $t \in [0, h^v]$  où  $v$  est un réel tel que  $v > -2 \min \delta_i$ , nous avons

$$\begin{aligned} &\left| t(n - n_0)^2 \left( \frac{1}{T_{sren_1}} - \frac{1}{T_{ren_1}} \right) \right| + \left| t(m - m_0)^2 \left( \frac{1}{T_{sren_2}} - \frac{1}{T_{ren_2}} \right) \right| \\ &+ \left| t(n - n_0)(m - m_0) \left( \frac{1}{T_{sren_{12}}} - \frac{1}{T_{ren_{12}}} \right) \right| \\ &\leq M h^{v + \min(2\delta_1, \delta_1 + \delta_2, 2\delta_2)} = M h^{v + 2 \min \delta_i} \end{aligned}$$

où  $M := 3 \max(C_1, C_2, C_{12})$ . Au final on vient de montrer qu'il existe une constante  $M > 0$  telle que pour tout  $h < \min(h_1, h_2, h_{12})$  et pour tout  $v > -2 \min \delta_i$

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 \left[ e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{sren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{sren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{sren_{12}}} \right)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{ren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{ren_{12}}} \right)} \right] \right| \\ &\leq 2 \sum_{n, m \in \Gamma} |a_{n, m}|^2 + M h^{v + 2 \min \delta_i} \sum_{n, m \in \Delta} |a_{n, m}|^2. \end{aligned}$$

Ensuite comme d'après le lemme 2.5  $\sum_{n, m \in \Gamma} |a_{n, m}|^2 = O(h^\infty)$  et que

$$\sum_{n, m \in \Delta} |a_{n, m}|^2 \leq \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 = 1 + O(h^\infty)$$

on en déduit

$$\left| \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 \left[ e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{sren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{sren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{sren_{12}}} \right)} e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{ren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{ren_{12}}} \right)} \right] \right| = O\left(h^{v+2 \min \delta_i}\right).$$

□

Ainsi le terme d'ordre deux de la fonction d'auto corrélation dans l'échelle  $[0, h^\beta]$  est :

**Définition 4.5.** — Le terme principal de la fonction de retour  $\mathbf{r}(t)$  est la série de fonction

$$\mathbf{r}_2 : t \mapsto e^{-itF(\tau_{n_0}, \mu_{m_0})/h} \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{ren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{ren_{12}}} \right)}$$

et son module est le même que celui de la série de fonction

$$\mathbf{a}_2 : t \mapsto \sum_{n,m \in \mathbb{N}^2} |a_{n,m}|^2 e^{-2i\pi t \left( \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} + \frac{m-m_0}{T_{scl_2}} + \frac{(n-n_0)^2}{T_{ren_1}} + \frac{(m-m_0)^2}{T_{ren_2}} + \frac{(n-n_0)(m-m_0)}{T_{ren_{12}}} \right)}.$$

*Remarque sur les échelle des temps.* — Rappelons que  $(\delta'_i, \delta_i) \in ]\frac{1}{2}, 1]^2$ , avec  $\delta'_i > \delta_i$ , et que les échelles de temps d'approximation données par les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  doivent vérifier :  $\alpha > 1 - 2 \min \delta_i$  et  $\beta > 1 - 3 \min \delta_i$ . Remarquons aussi que  $1 - 3 \min \delta_i - (1 - 2 \min \delta_i) = -\min \delta_i < 0$ ; et que  $-2 \min \delta_i - (1 - 3 \min \delta_i) = \min \delta_i - 1 < 0$ ; ainsi pour  $h$  assez petit on a

$$h^{1-2 \min \delta_i} < h^{1-3 \min \delta_i} < h^{-2 \min \delta_i}.$$

On peut donc choisir les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $v$  tels que :

$$v \leq \beta < -1 < \alpha < 0$$

ce qui permet, pour  $h$  assez petit d'avoir les inclusions :

$$[0, T_{cl_i}] \subset [0, h^\alpha] \subset [0, T_{ren_i}] \subset [0, h^\beta] \subseteq [0, h^v].$$

**4.2. Théorème de renaissance.** —

**Hypothèse de résonance.** —

**Définition 4.6.** — On dira que les trois périodes de renaissances  $T_{ren_1}, T_{ren_2}, T_{ren_{12}}$  sont en résonances si et seulement si il existe un triplet  $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_{12}}{q_{12}}\right) \in \mathbb{Q}^3$  tel que

$$\frac{p_1}{q_1} T_{ren_1} = \frac{p_2}{q_2} T_{ren_2} = \frac{p_{12}}{q_{12}} T_{ren_{12}};$$

**Définition 4.7.** — Dans le cas où les trois périodes de renaissances  $T_{ren_1}, T_{ren_2}, T_{ren_{12}}$  sont en résonances on pose  $T_{frac} := \frac{p_1}{q_1} T_{ren_1} = \frac{p_2}{q_2} T_{ren_2} = \frac{p_{12}}{q_{12}} T_{ren_{12}}$ . Pour tout indice  $j \in \{1, 2\}$  on pose aussi  $r_j := p_{12} q_j$ ,  $s_j := q_{12} p_j$  de sorte que pour  $j \in \{1, 2\}$  on ait  $T_{ren_j} = \frac{r_j}{s_j} T_{ren_{12}}$ .

**Définition 4.8.** — On définit la fonction classique  $\psi_{cl}$  à deux variables  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\psi_{cl}(t_1, t_2) := \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 e^{-2i\pi t_1 \frac{n-n_0}{T_{scl_1}} - 2i\pi t_2 \frac{m-m_0}{T_{scl_2}}}.$$

On a alors immédiatement les propriétés évidentes suivantes :

- (i) Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\psi_{cl}(t, t) = \mathbf{a}_1(t)$ ;
- (ii) pour tous  $t_1, t_2 \geq 0$ ,  $\psi_{cl}(t_1 + T_{scl_1}, t_2) = \psi_{cl}(t_1, t_2)$ ;
- (iii) pour tous  $t_1, t_2 \geq 0$ ,  $\psi_{cl}(t_1, t_2 + T_{scl_2}) = \psi_{cl}(t_1, t_2)$ .

**Quelques lemmes.** —

**Définition 4.9.** — On considère la suite  $(\theta_{n, m})_{n, m} = (\theta_{n, m}(h))_{n, m}$  indexée sur  $\mathbb{Z}^2$  par :

$$\theta_{n, m} := e^{-2i\pi \left( \frac{p_1}{q_1} (n-n_0)^2 + \frac{p_{12}}{q_{12}} (n-n_0)(m-m_0) + \frac{p_2}{q_2} (m-m_0)^2 \right)}.$$

**Proposition 4.10.** — Il existent deux entiers  $\ell_1$  et  $\ell_2$  tels que pour tout couple d'entiers  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$

$$\begin{cases} \theta_{n+\ell_1, m} = \theta_{n, m} \\ \theta_{n, m+\ell_2} = \theta_{n, m} \end{cases}$$

si et seulement si les entiers  $\ell_1$  et  $\ell_2$  vérifient les équations suivantes :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \frac{\ell_1^2 p_1}{q_1} + \frac{2p_1 \ell_1}{q_1} n + \frac{p_1 r_1 \ell_1}{s_1 q_1} m \equiv 0 [1]$$

$$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \frac{\ell_2^2 p_2}{q_2} + \frac{2p_2 \ell_2}{q_2} m + \frac{p_2 r_2 \ell_2}{s_2 q_2} n \equiv 0 [1].$$

*Démonstration.* — Pour tout couple d'entier relatif  $n, m$  nous avons :

$$\begin{aligned} \theta_{n+\ell_1, m} &= \theta_{n, m} \\ \Leftrightarrow \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \theta_{n+\ell_1, m} &= \theta_{n, m} e^{-2i\pi \left( \frac{\ell_1^2 p_1}{q_1} + \frac{2p_1 \ell_1}{q_1} n + \frac{p_1 r_1 \ell_1}{s_1 q_1} m \right)} \\ \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \frac{\ell_1^2 p_1}{q_1} + \frac{2p_1 \ell_1}{q_1} n + \frac{p_1 r_1 \ell_1}{s_1 q_1} m &\equiv 0 [1]. \end{aligned}$$

De même pour l'autre période  $\ell_2$ .  $\square$

**Exemple 4.11.** — Une solution simple de ces deux équations est  $\ell_1 = q_1 s_1$  et  $\ell_2 = q_2 s_2$ .

Maintenant pour une paire de périodes  $\ell_1, \ell_2$  fixées, considérons l'ensemble des suite  $(\ell_1, \ell_2)$ -périodiques à valeurs complexes.

**Définition 4.12.** — Pour une paire d'entier  $\ell_1, \ell_2 \in (\mathbb{Z}^*)^2$  fixés; on définit l'ensemble :

$$\mathfrak{S}_{\ell_1, \ell_2}(\mathbb{Z}) := \left\{ u_{n, m} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}; \forall n, m \in \mathbb{Z}^2, u_{n+\ell_1, m} = u_{n, m}; \text{ et } u_{n, m+\ell_2} = u_{n, m} \right\}.$$

On a alors trivialement la :

**Proposition 4.13.** — En notant par  $\phi_{n, m}^{k, p} := e^{-\frac{2i\pi k n}{\ell_1}} e^{-\frac{2i\pi p m}{\ell_2}}$  où  $(k, p) \in \mathbb{Z}^2$ ; la famille  $\left\{ \left( \phi_{n, m}^{k, p} \right)_{n, m \in \mathbb{Z}^2} \right\}_{k=0 \dots \ell_1-1, p=0 \dots \ell_2-1}$  est une base orthonormée de  $\mathfrak{S}_{\ell_1, \ell_2}(\mathbb{Z})$  pour le produit scalaire :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{S}_{\ell_1, \ell_2}} : \begin{cases} \mathfrak{S}_{\ell_1, \ell_2}(\mathbb{Z})^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_{\mathfrak{S}_{\ell_1, \ell_2}} := \frac{1}{|\ell_1 \ell_2|} \sum_{n=0}^{|\ell_1|-1} \sum_{m=0}^{|\ell_2|-1} u_{n, m} \overline{v_{n, m}} \end{cases}.$$

**Théorème 4.14.** — Sous l'hypothèse de résonance il existe une famille de  $\ell_1 + \ell_2$  nombre complexes dépendant de  $h$  :  $\left( \widetilde{b_{k_1, k_2}} \right)_{k_1 \in \{0 \dots \ell_1-1\}, k_2 \in \{0 \dots \ell_2-1\}}$  où les entiers  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}^2$  sont solutions des équations de la proposition 4.11; telle que pour tout  $t \in [0, h^\alpha]$  on ait l'égalité :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2(t + T_{frac}) &= \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} \widetilde{b_{k_1, k_2}} \psi_{cl} \left( t + T_{frac} + \frac{k_1}{\ell_1} T_{scl_1}, t + T_{frac} + \frac{k_2}{\ell_2} T_{scl_2} \right) \\ &+ O \left( h^{\alpha+2 \min \delta_i-1} \right). \end{aligned}$$

En outre quel que soient les indices  $k_1 \in \{0 \dots \ell_1 - 1\}$ ,  $k_2 \in \{0 \dots \ell_2 - 1\}$  les coefficients  $\widetilde{b}_{k_1, k_2}$  sont données par

$$\widetilde{b}_{k_1, k_2} = e^{-\frac{2i\pi k_1 n_0}{\ell_1}} e^{-\frac{2i\pi k_2 m_0}{\ell_2}} b_{k_1, k_2}$$

avec

$$\begin{aligned} b_{k_1, k_2} &= b_{k_1, k_2}(h) = \left\langle \sigma_h, \phi^{k_1, k_2} \right\rangle_{\mathfrak{S}_{\ell_1, \ell_2}} \\ &= \frac{1}{|\ell_1 \ell_2|} \sum_{n=0}^{|\ell_1|-1} \sum_{m=0}^{|\ell_2|-1} e^{-2i\pi \left( \frac{p_1}{q_1} (n-n_0)^2 + \frac{p_{12}}{q_{12}} (n-n_0)(m-m_0) + \frac{p_2}{q_2} (m-m_0)^2 \right)} e^{\frac{2i\pi k_1 n}{\ell_1}} e^{\frac{2i\pi k_2 m}{\ell_2}}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Posons  $\tilde{n} := n - n_0$ ,  $\tilde{m} := m - m_0$  et considérons la différence  $\varepsilon(t)$  définie par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &:= \left| \mathbf{a}_2(t + T_{frac}) - \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} \widetilde{b}_{k_1, k_2} \psi_{cl} \left( t + T_{frac} + \frac{k_1}{\ell_1} T_{cl_1}, t + T_{frac} + \frac{k_2}{\ell_2} T_{cl_2} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl_1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl_1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl_2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl_2}}} \right. \\ &\quad e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren_1}}} e^{-2i\pi \frac{p_1 \tilde{n}^2}{q_1}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren_2}}} e^{-2i\pi \frac{p_2 \tilde{m}^2}{q_2}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren_{12}}}} e^{-2i\pi \frac{p_{12} \tilde{n}\tilde{m}}{q_{12}}} \\ &\quad \left. - \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} \widetilde{b}_{k_1, k_2} \psi_{cl} \left( t + T_{frac} + \frac{k_1}{\ell_1} T_{cl_1}, t + T_{frac} + \frac{k_2}{\ell_2} T_{cl_2} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 \theta_{n, m} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl_1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl_1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl_2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl_2}}} \right. \\ &\quad e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren_1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren_2}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren_{12}}}} \\ &\quad \left. - \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} \widetilde{b}_{k_1, k_2} \psi_{cl} \left( t + T_{frac} + \frac{k_1}{\ell_1} T_{cl_1}, t + T_{frac} + \frac{k_2}{\ell_2} T_{cl_2} \right) \right|. \end{aligned}$$

Comme la suite  $(\theta_{n, m})_{n, m} \in \mathfrak{S}_{\ell_1, \ell_2}(\mathbb{Z})$  où  $\ell_1 = q_1 s_1$  et  $\ell_2 = q_2 s_2$  on peut décomposer d'une manière unique la suite  $(\theta_{n, m})_{n, m}$  sur la base orthonormée

$$\left\{ \left( \phi_{n, m}^{k, p} \right)_{n, m \in \mathbb{Z}^2} \right\}_{k=0 \dots \ell_1-1, p=0 \dots \ell_2-1} \quad \text{de l'espace } \mathfrak{S}_{\ell_1, \ell_2}(\mathbb{Z}) :$$

$$\theta_{n, m} = \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} b_{k_1, k_2} \phi_{n, m}^{k_1, k_2}.$$

où  $b_{k_1, k_2} = \langle \theta, \phi^{k_1, k_2} \rangle_{\mathfrak{S}_{\ell_1, \ell_2}}$ . Par suite nous avons :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= \left| \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} |a_{n, m}|^2 b_{k_1, k_2} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} \right. \\
&\quad e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren2}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren12}}} \phi_{n, m}^{k_1, k_2} \\
&\quad \left. - \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} \widetilde{b_{k_1, k_2}} \psi_{cl} \left( t + T_{frac} + \frac{k_1}{\ell_1} T_{scl1}, t + T_{frac} + \frac{k_2}{\ell_2} T_{scl2} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} |a_{n, m}|^2 b_{k_1, k_2} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} \right. \\
&\quad e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren2}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren12}}} \phi_{n, m}^{k_1, k_2} \\
&\quad \left. - \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} \widetilde{b_{k_1, k_2}} \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi k_1 \frac{\tilde{n}}{\ell_1}} \right. \\
&\quad \left. e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi k_2 \frac{\tilde{m}}{\ell_2}} \right| \\
&= \left| \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} |a_{n, m}|^2 b_{k_1, k_2} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} \right. \\
&\quad e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren2}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren12}}} e^{-\frac{2i\pi k_1 n}{\ell_1}} e^{-\frac{2i\pi k_2 m}{\ell_2}} \\
&\quad \left. - \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} \widetilde{b_{k_1, k_2}} \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} |a_{n, m}|^2 e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi k_1 \frac{\tilde{n}}{\ell_1}} \right. \\
&\quad \left. e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi k_2 \frac{\tilde{m}}{\ell_2}} \right|.
\end{aligned}$$

Et comme

$$\widetilde{b_{k_1, k_2}} e^{-2i\pi k_1 \frac{\tilde{n}}{\ell_1}} e^{-2i\pi k_2 \frac{\tilde{m}}{\ell_2}} = b_{k_1, k_2} e^{-\frac{2i\pi k_1 n}{\ell_1}} e^{-\frac{2i\pi k_2 m}{\ell_2}}$$

on en déduit

$$\varepsilon(t) = \left| \sum_{n, m \in \mathbb{N}^2} \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} |a_{n, m}|^2 b_{k_1, k_2} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{n}}{T_{scl1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-2i\pi T_{frac} \frac{\tilde{m}}{T_{scl2}}} e^{-\frac{2i\pi k_1 n}{\ell_1}} e^{-\frac{2i\pi k_2 m}{\ell_2}} \right|$$

$$\left( -1 + e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren_1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren_2}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren_{12}}}} \right) \Big|.$$

Ensuite, on partitionne  $\mathbb{N}^2$  avec les ensembles  $\Delta$  et  $\Gamma$  et il suffit alors d'étudier la série sur l'ensemble  $\Delta$ . Il existent des constantes  $C_1, C_2, C_{12} > 0$  telles que pour tout couple  $(n, m) \in \Delta$  et pour tout  $t \in [0, h^\alpha]$  :

$$\begin{aligned} \left| t \frac{(n - n_0)^2}{T_{ren_1}} \right| &\leq C_1 h^{\alpha + 2\delta_1 - 1}, & \left| t \frac{(m - m_0)^2}{T_{ren_2}} \right| &\leq C_2 h^{\alpha + 2\delta_2 - 1}, \\ \left| t \frac{(n - n_0)(m - m_0)}{T_{ren_{12}}} \right| &\leq C_{12} h^{\alpha + \delta_1 + \delta_2 - 1}. \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout  $t \in [0, h^\alpha]$  et quel que soit  $(n, m) \in \Delta$  nous avons :

$$e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}^2}{T_{ren_1}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{m}^2}{T_{ren_2}}} e^{-2i\pi t \frac{\tilde{n}\tilde{m}}{T_{ren_{12}}}} - 1 = O\left(h^{\alpha + 2 \min \delta_i - 1}\right).$$

□

En prenant  $t = 0$  on obtient le :

**Corollaire 4.15.** — *Sous les mêmes hypothèses :*

$$\mathbf{a}_2(T_{frac}) = \sum_{k_1=0}^{\ell_1-1} \sum_{k_2=0}^{\ell_2-1} \widetilde{b}_{k_1, k_2} \psi_{cl} \left( T_{frac} + \frac{k_1}{\ell_1} T_{scl_1}, T_{frac} + \frac{k_2}{\ell_2} T_{scl_2} \right).$$

**Calcul des coefficients.** — Pour calculer ces coefficients de renaissances en dimension deux on est ramené au cas de la dimension un, en effet :

**Définition 4.16.** — Pour  $\ell \geq 1$  et pour des entiers  $p$  et  $q$  premiers entre eux. Considérons pour tout entier  $k \in \{0 \dots \ell - 1\}$

$$c_k(\ell, p, q) = \frac{1}{\ell} \sum_{n=0}^{\ell-1} e^{-2i\pi \frac{p}{q} (n-n_0)^2} e^{\frac{2i\pi kn}{\ell}}$$

On a alors pour tout  $k \in \{0 \dots \ell - 1\}$

$$|c_k(\ell, p, q)| = \frac{1}{\ell} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p}{q} m^2} e^{\frac{2i\pi km}{\ell}} \right|.$$

**Théorème 4.17.** — *Supposons que l'hypothèse de résonance soit vérifiée avec en plus  $\frac{p_{12}}{q_{12}} \in \mathbb{Z}$ ; alors :*

$$|b_{k_1, k_2}|^2 = |c_{k_1}(\ell_1, p_1 s_1, \ell_1)|^2 |c_{k_2}(\ell_2, p_2 s_2, \ell_2)|^2.$$



*Démonstration.* — Pour tous indices  $k_1 \in \{0 \dots \ell_1 - 1\}$ ,  $k_2 \in \{0 \dots \ell_2 - 1\}$  on a

$$\begin{aligned} |b_{k_1, k_2}| &= \frac{1}{\ell_1 \ell_2} \left| \sum_{(n, m) \in \mathbb{Z}/\ell_1 \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell_2 \mathbb{Z}} e^{-2i\pi \left( \frac{p_1}{q_1} n^2 + \frac{p_{12}}{q_{12}} nm + \frac{p_2}{q_2} m^2 \right)} e^{\frac{2i\pi k_1 n}{\ell_1}} e^{\frac{2i\pi k_2 m}{\ell_2}} \right|; \\ &= \frac{1}{\ell_1 \ell_2} \left| \sum_{m=0}^{\ell_2-1} e^{\frac{2i\pi k_2 m}{\ell_2}} e^{-2i\pi \frac{p_2}{q_2} m^2} \sum_{n=0}^{\ell_1-1} e^{-2i\pi \frac{p_1}{q_1} n^2} e^{\frac{2i\pi n}{\ell_1} \left( k_1 - \frac{p_{12}}{q_{12}} \ell_1 m \right)} \right| \end{aligned}$$

et comme  $\ell_1 = q_1 s_1 = q_1 q_{12} p_1$  nous obtenons que

$$|b_{k_1, k_2}| = \frac{1}{\ell_1 \ell_2} \left| \sum_{m=0}^{\ell_2-1} e^{\frac{2i\pi k_2 m}{\ell_2}} e^{-2i\pi \frac{p_2}{q_2} m^2} \sum_{n=0}^{\ell_1-1} e^{-2i\pi \frac{p_1}{q_1} n^2} e^{\frac{2i\pi n}{\ell_1} (k_1 - p_{12} q_1 s_1 m)} \right|.$$

Pour  $j \in \{1, 2\}$ , on considère  $\chi_j$  les caractères donnés par

$$\chi_j : \begin{cases} \mathbb{Z}/\ell_j \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^* \\ a \mapsto e^{-2i\pi \frac{a}{\ell_j}}; \end{cases}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} |b_{k_1, k_2}|^2 &= \frac{1}{\ell_1^2 \ell_2^2} \left( \sum_{x \in \mathbb{Z}/\ell_1 \mathbb{Z}} \sum_{y \in \mathbb{Z}/\ell_2 \mathbb{Z}} \chi_1(p_1 s_1 x^2 - x(k_1 - p_{12} q_1 p_1 y)) \chi_2(p_2 s_2 y^2 - k_2 y) \right) \\ &\quad \left( \sum_{z \in \mathbb{Z}/\ell_1 \mathbb{Z}} \sum_{t \in \mathbb{Z}/\ell_2 \mathbb{Z}} \chi_1(-p_1 s_1 z^2 + z(k_1 - p_{12} q_1 p_1 t)) \chi_2(-p_2 s_2 t^2 + k_2 t) \right) \\ &= \frac{1}{\ell_1^2 \ell_2^2} \left( \sum_{x \in \mathbb{Z}/\ell_1 \mathbb{Z}} \sum_{y \in \mathbb{Z}/\ell_2 \mathbb{Z}} \sum_{z \in \mathbb{Z}/\ell_1 \mathbb{Z}} \sum_{t \in \mathbb{Z}/\ell_2 \mathbb{Z}} \right. \\ &\quad \left. \chi_1(p_1 s_1 (x^2 - z^2) - k_1(x - z) + p_{12} q_1 p_1(xy - zt)) \chi_2(p_2 s_2 (y^2 - t^2) - k_2(y - t)) \right). \end{aligned}$$

Maintenant comme  $\frac{p_{12}}{q_{12}} \in \mathbb{Z}$  alors  $\ell_1 = q_1 q_{12} p_1 |q_1 p_1 p_{12}|$  et donc pour tout  $x, y, z, t$  on a  $p_{12} q_1 p_1(xy - zt) \in \ell_1 \mathbb{Z}$  d'où pour tout  $x, y, z, t$

$$\chi_1(p_{12} q_1 p_1(xy - zt)) = 1.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |b_{k_1, k_2}|^2 &= \frac{1}{\ell_1^2 \ell_2^2} \left( \sum_{x \in \mathbb{Z}/\ell_1 \mathbb{Z}} \sum_{y \in \mathbb{Z}/\ell_2 \mathbb{Z}} \sum_{z \in \mathbb{Z}/\ell_1 \mathbb{Z}} \sum_{t \in \mathbb{Z}/\ell_2 \mathbb{Z}} \right. \\ &\quad \left. \chi_1(p_1 s_1 (x^2 - z^2) - k_1(x - z)) \chi_2(p_2 s_2 (y^2 - t^2) - k_2(y - t)) \right) \\ &= \frac{1}{\ell_1^2 \ell_2^2} \left( \sum_{x \in \mathbb{Z}/\ell_1 \mathbb{Z}} \sum_{z \in \mathbb{Z}/\ell_1 \mathbb{Z}} \chi_1(p_1 s_1 (x^2 - z^2) - k_1(x - z)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{y \in \mathbb{Z}/\ell_2 \mathbb{Z}} \sum_{t \in \mathbb{Z}/\ell_2 \mathbb{Z}} \chi_2 (p_2 s_2 (y^2 - t^2) - k_2 (y - t)) \\
 &= \frac{1}{\ell_1^2} \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}/\ell_1 \mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p_1 s_1}{\ell_1} x^2} e^{\frac{2i\pi k_1}{\ell_1} x} \right|^2 \frac{1}{\ell_2^2} \left| \sum_{y \in \mathbb{Z}/\ell_2 \mathbb{Z}} e^{-2i\pi \frac{p_2 s_2}{\ell_2} y^2} e^{\frac{2i\pi k_2}{\ell_2} y} \right|^2.
 \end{aligned}$$

□

Ensuite les résultats établis dans le cas de la dimension 1 **[Lab1]** nous permette de calculer les deux termes

$$|c_{k_1}(\ell_1, p_1 s_1, \ell_1)|^2 |c_{k_2}(\ell_2, p_2 s_2, \ell_2)|^2.$$

en fonction des entiers  $\ell_i, p_i, s_i$  et  $k_i$ . En effet, dans **[Lab1]** on dispose des :

**Théorème 4.18.** — *Quel que soit le couple d'entiers  $p$  et  $q$ , avec  $p \wedge q = 1$  et  $q$  impair, alors nous avons pour tout  $k \in \{0 \dots q - 1\}$  :*

$$|c_k(q, p, q)|^2 = \frac{1}{q}.$$

Et

**Théorème 4.19.** — *Quel que soit le couple d'entiers  $p$  et  $q$ , avec  $p \wedge q = 1$  et  $q$  pair ; nous avons pour tout  $k \in \{0 \dots q - 1\}$*

$$\begin{aligned}
 & \text{si } \frac{q}{2} \text{ est pair, alors } |c_k(q, p, q)|^2 = \begin{cases} \frac{2}{q} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \\
 & \text{si } \frac{q}{2} \text{ est impair, alors } |c_k(q, p, q)|^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{q} & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

## Références

- [Av-Pe] I. Sh. AVERBUKH & N. F PERELMAN, *Fractional revivals : universality in the long-term evolution of quantum wave packets beyond the correspondance principle dynamics*. Physics Letters A, 139, p. 449-453, 1989.
- [BKP] R. BLUHM, V. A. KOSTELECKY & J. A. PORTER, *The evolution and revival structure of localized quantum wave packets*. American Journal of Physics 64, 944, 1996.
- [Bl-Ko] R. BLUHM & V. A. KOSTELECKY , *Long term evolution and revival structure of Rydberg wave packets for hydrogen and alkali-metal atoms*. Phys. Rev A51, 4767-4786, 1995.
- [Cas] J. W. CASSELS, *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge Tracts, 45, Cambridge Univ. Press, 1957.

- [Co-Ro] M. COMBESURE & D. ROBERT, *A phase study of the quantum Loschmidt Echo in the semi-classical limit*, [arXiv : quant-ph0510151], 2005.
- [Khi] A. Y. KHINTCHINE, *Continued fractions*, P. Noordhoff, Ltd. Groningen, 1963.
- [Lab1] O. LABLÉE, *Autour de la dynamique semi-classique de certains systèmes intégrables*. Thèse de doctorat en mathématiques, Université de Grenoble 1, 2009.
- [Lab2] O. LABLÉE, *Sur le spectre semi-classique d'un système intégrable de dimension 1 autour d'une singularité hyperbolique*. Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Mathématiques, vol. 19, 1., pp. 85-123, 2010.
- [Lab3] O. LABLÉE, "Semi-classical dynamics in long time : revivals of wave packets in hyperbolic case", (in preparation).
- [Pau1] T. PAUL, *Echelles de temps pour l'évolution quantique à petite constante de planck*, Séminaire X-EDP, 2007.
- [Pau2] T. PAUL, *Reconstruction and non-reconstruction of wave packets*, Preprint, 2008.
- [Pau3] T. PAUL, *Reconstruction of wave packets on a hyperbolic trajectory*, Preprint, 2008.
- [Rob1] D. ROBERT, *Revivals of wave packets and Bohr-Sommerfeld quantization rules*, Adventures in mathematical physics, 219-235, Contemp. Math., 447, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [Rob2] D. ROBERT, *Propagation of coherent states in quantum mechanics and application*, proc. CIMPA, 2006.
- [Robi1] R. W. ROBINNET, *Quantum wave packet revivals*, Physics Reports. 392, 1-119, 2005.
- [Robi2] R. W. ROBINNET, *Wave packets revivals and quasirevivals in one-dimensional power law potentials*, Journal of Mathematical Physics, Volume 41(4), 2000.
- [Ro-Sz] A. M. ROCKETT & P. SZÜSZ, *Continued fractions*, World Scientific Publishing Co., Inc, River Edge, NJ, 1992.

---

15 Décembre 2009

OLIVIER LABLÉE, Université Joseph Fourier-  
Grenoble 1, Institut Fourier, UFR de Mathématiques UMR 5582,  
BP 74 38402 Saint Martin d'Hères • E-mail : lablee@ujf-grenoble.fr  
Url : <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~lablee/>