

# Perturbation de la dynamique de difféomorphismes en topologie $C^1$

Sylvain CROVISIER

Décembre 2009



## **Perturbation de la dynamique de difféomorphismes en topologie $C^1$**

Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur la dynamique de difféomorphismes de variétés compactes. Pour l'étude des propriétés génériques ou pour la construction d'exemples, il est souvent utile de savoir perturber un système. Ceci soulève généralement des problèmes délicats : une modification locale de la dynamique peut engendrer un changement brutal du comportement des orbites. En topologie  $C^1$ , nous proposons diverses techniques permettant de perturber tout en contrôlant la dynamique : mise en transversalité, connexion d'orbites, perturbation de la dynamique tangente, réalisation d'extensions topologiques,... Nous en tirons diverses applications à la description de la dynamique des difféomorphismes  $C^1$ -génériques.

## **Perturbation of the dynamics of diffeomorphisms in the $C^1$ -topology**

This memoir deals with the dynamics of diffeomorphisms of compact manifolds. For the study of generic properties or for the construction of examples, it is often useful to be able to perturb a system. This generally leads to delicate problems: a local modification of the dynamic may cause a radical change in the behavior of the orbits. For the  $C^1$  topology, we propose various techniques which allow to perturb while controlling the dynamic: setting in transversal position, connection of orbits, perturbation of the tangent dynamics,... We derive various applications to the description of  $C^1$ -generic diffeomorphisms.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
0.1 Dynamiques génériques . . . . .	9
0.2 Décomposition de la dynamique . . . . .	12
0.3 Structure de l'espace des dynamiques . . . . .	16
<b>1 Décomposition de la dynamique</b>	<b>21</b>
1.1 Récurrence : transitivité faible, transitivité par chaînes . . . . .	21
1.2 Théorème "fondamental" de la dynamique, filtrations . . . . .	22
1.3 Ensemble stable par chaînes, quasi-attracteurs . . . . .	23
1.4 Hyperbolicité . . . . .	23
1.5 Classes homoclines . . . . .	24
1.6 Difféomorphismes hyperboliques . . . . .	24
<b>2 Techniques de perturbations, généricité</b>	<b>27</b>
2.1 Notions de généricité, de robustesse . . . . .	27
2.2 Mise en transversalité : difféomorphismes de Kupka-Smale . . . . .	27
2.3 Perturbation ponctuelle de la différentielle : le lemme de Franks . . . . .	28
2.4 Modification élémentaire d'une orbite . . . . .	28
2.5 Modification progressive d'une orbite : le lemme de Pugh . . . . .	29
2.6 Fermeture d'orbites : le "closing lemma" . . . . .	30
2.7 Le théorème de densité de Pugh . . . . .	31
2.8 Connexions d'orbites : le "connecting lemma" . . . . .	32
2.9 Espaces de perturbation . . . . .	36
2.10 Problèmes . . . . .	36
<b>3 Connexions de pseudo-orbites</b>	<b>39</b>
3.1 Énoncé du lemme de connexion pour les pseudo-orbites . . . . .	39
3.2 Idée de la preuve . . . . .	39
a) Les domaines de perturbations . . . . .	40
b) Les tours topologiques . . . . .	41
c) Lorsqu'il n'y a pas d'orbite périodique de basse période . . . . .	41
d) Lorsqu'il y a des points périodiques . . . . .	42
3.3 Conséquences immédiates . . . . .	42
3.4 Exemples . . . . .	43
3.5 Problèmes . . . . .	45

<b>4</b>	<b>Connexions globales</b>	<b>47</b>
4.1	Approximation des mesures ergodiques par orbites périodiques : l' "ergodic closing lemma" . . . . .	47
4.2	Approximation des ensembles transitifs par chaînes . . . . .	49
4.3	Démonstration du pistage faible . . . . .	51
4.4	Application : étude de la stabilité molle . . . . .	53
4.5	Problèmes . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Hyperbolicité non uniforme</b>	<b>55</b>
5.1	Décomposition dominée . . . . .	55
5.2	Familles de plaques . . . . .	56
5.3	Points hyperboliques . . . . .	57
5.4	Variétés invariantes . . . . .	57
5.5	Mesures hyperboliques . . . . .	58
5.6	Pistage généralisé . . . . .	59
5.7	Lemmes de sélection . . . . .	60
5.8	Fibrés non uniformes . . . . .	61
5.9	Classes hyperboliques par chaînes . . . . .	62
5.10	Difféomorphismes robustement non hyperboliques . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Réduction de la dimension ambiante</b>	<b>67</b>
6.1	Variété normalement hyperbolique . . . . .	67
6.2	Existence de sous-variété localement invariante . . . . .	68
6.3	Idée de la preuve du théorème 6.2 . . . . .	68
6.4	Application : existence de feuilletages stables . . . . .	69
6.5	Problèmes . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Bifurcations de points périodiques</b>	<b>71</b>
7.1	Cocycles linéaires périodiques . . . . .	71
7.2	Contraction uniforme à la période . . . . .	72
7.3	Valeurs propres réelles simples . . . . .	72
7.4	Domination . . . . .	72
7.5	Tangences homoclines . . . . .	73
7.6	Application (1) : phénomène de Newhouse . . . . .	74
7.7	Application (2) : caractérisation de la stabilité . . . . .	76
7.8	Contrôle des variétés invariantes . . . . .	78
7.9	Exemples d'Abraham-Smale . . . . .	79
7.10	Problèmes . . . . .	81
<b>8</b>	<b>Points périodiques homocliniquement liés</b>	<b>83</b>
8.1	Spécification au sein d'une classe homocline (indice fixé) . . . . .	83
8.2	Cycles hétérodimensionnels . . . . .	84
8.3	Spécification au sein d'une classe homocline (indice variable) . . . . .	85
8.4	Application (1) : indices des classes homoclines . . . . .	86
8.5	Application (2) : mesures génériques portées par une classe homocline isolée . . . . .	86
8.6	Application (3) : dynamique universelle . . . . .	87
8.7	Mélangeurs, obtention de bifurcations robustes . . . . .	90

8.8	Problèmes . . . . .	91
<b>9</b>	<b>Loin des tangences homoclines, modèles centraux</b>	<b>95</b>
9.1	Mécanismes versus phénomènes . . . . .	95
9.2	Caractérisation des dynamiques hyperboliques . . . . .	96
9.3	Dynamiques non critiques . . . . .	97
9.4	Ensembles minimaux non hyperboliques . . . . .	98
9.5	Modèles centraux . . . . .	99
	a) Définition . . . . .	99
	b) Modèles centraux en dynamique différentiable . . . . .	100
	c) Classification des dynamiques centrales . . . . .	101
9.6	Lorsqu'un fibré est dégénéré . . . . .	102
9.7	Dynamique centrale récurrente par chaînes . . . . .	103
9.8	Le type hyperbolique par chaînes et situations similaires . . . . .	105
	a) Dynamique centrale hyperbolique par chaînes . . . . .	105
	b) Ensembles non vrillés . . . . .	105
	c) Dynamique centrale piégée . . . . .	106
9.9	Les autres types . . . . .	107
	a) Ensembles vrillés . . . . .	107
	b) Dynamique centrale neutre . . . . .	107
	c) Ensembles instables par chaînes . . . . .	108
9.10	Application (1) : dynamique simple versus intersections homoclines . . . . .	108
9.11	Application (2) : étude des quasi-attracteurs . . . . .	109
9.12	Application (3) : loin des cycles hétérodimensionnels . . . . .	112
<b>10</b>	<b>Hyperbolicités topologique et uniforme</b>	<b>117</b>
10.1	Hyperbolicité des fibrés extrêmes . . . . .	117
10.2	Technique de Mañé-Pujals-Sambarino . . . . .	118
10.3	Classes homoclines à plaques centre-stables discontinues . . . . .	119
10.4	Application : non dégénérescence des fibrés uniformes . . . . .	121
10.5	Hyperbolicité des quasi-attracteurs . . . . .	121
10.6	Classification des connexions fortes . . . . .	122
10.7	Connexions de variétés instables périodiques . . . . .	124
10.8	Connexions contenues dans une variété stable périodique . . . . .	126
10.9	Continuation des classes hyperboliques par chaînes . . . . .	128
<b>11</b>	<b>Centralisateurs de difféomorphismes</b>	<b>131</b>
11.1	Difféomorphismes commutant . . . . .	131
11.2	Stratégie pour montrer que le centralisateur est trivial . . . . .	132
	a) Centralisateur localement trivial . . . . .	132
	b) Du local au global . . . . .	133
	c) Densité et généricité . . . . .	134
11.3	Perturbations fantômes . . . . .	135
11.4	Problèmes . . . . .	135





# Introduction

Le dynamiqueur étudie les systèmes qui évoluent au cours du temps. De nombreux exemples sont fournis par la mécanique classique à travers une équation différentielle. Poincaré a montré dans son mémoire [132] sur la stabilité du système solaire que l'on peut décrire le comportement asymptotique des trajectoires sans passer par leur calcul explicite (souvent vain). Nous nous intéressons dans ce texte aux systèmes à temps discret obtenus en itérant un difféomorphisme. Ils sont naturellement reliés aux systèmes à temps continu si l'on considère une section de Poincaré ou le temps 1 du flot associé. Les systèmes provenant de la physique possèdent bien souvent des symétries supplémentaires : nous n'abordons pas ici le cas spécifique des difféomorphismes conservatifs, i.e. qui préservent une forme volume ou symplectique (voir [48] pour un panorama des difféomorphismes de surface conservatifs).

La classe des difféomorphismes hyperboliques est l'une des premières étudiées et des mieux décrites. Dans ce mémoire<sup>1</sup>, nous discuterons essentiellement des difféomorphismes non hyperboliques génériques. (Nous renvoyons à [35] pour une vue d'ensemble des dynamiques faiblement hyperboliques.)

## 0.1 Dynamiques génériques

Plaçons-nous sur une variété différentiable compacte  $M$ . L'étude de la dynamique d'un difféomorphisme arbitraire de  $M$  peut sembler parfois hors de portée : on peut imaginer la coexistence et l'accumulation d'une grande variété de comportements différents, empêchant l'espoir de décomposer et de structurer la dynamique. Il se pourrait cependant que de tels difféomorphismes, pathologiques, puissent toujours être approchés par d'autres, plus simples à analyser : il devient plus raisonnable d'espérer *décrire la dynamique d'une partie dense des systèmes*. Ce point de vue soulève une difficulté, que nous discuterons plus amplement par la suite : nous devons préciser l'espace des difféomorphismes considérés, ainsi que le choix d'une topologie sur cet espace.

Nous travaillerons en général avec des espaces de difféomorphismes métrisables complets et nous pourrons alors utiliser la généralité de Baire. Une propriété sera dite *générique* si elle est satisfaite par un ensemble de difféomorphismes contenant une intersection dénombrable d'ouverts denses (un ensemble  $G_\delta$  dense). La réalisation simultanée de deux propriétés génériques est encore générique. La généralité de Baire est donc un outil commode pour décrire des ensembles denses de difféomorphismes.

---

<sup>1</sup>Je suis très reconnaissant à Jérôme Buzzi, Rafael Potrie et Charles Pugh pour l'attention qu'ils ont portée sur ce texte et leurs nombreuses remarques.

**0.1.a Choix d'un espace de difféomorphismes.** Les propriétés génériques que l'on peut obtenir dépendent beaucoup de la régularité des difféomorphismes que l'on étudie. Notons  $\text{Diff}^k(M)$  l'espace des difféomorphismes de classe  $C^k$  de  $M$ . Nous allons discuter l'existence de points périodiques de difféomorphismes génériques pour différents espaces.

- Dans  $\text{Diff}^0(M)$ , les homéomorphismes possèdent génériquement un ensemble non dénombrable de points périodiques (voir [121, 11]).
- Dans  $\text{Diff}^1(M)$ , l'existence de points périodiques est plus difficile à obtenir : c'est l'objet du lemme de fermeture de Pugh. L'ensemble des points ayant une même période est fini.
- Dans  $\text{Diff}^k(M)$ ,  $k > 1$ , l'existence de points périodique n'est en général pas connue.
- Herman a montré [76, 75] que sur certains tores symplectiques, pour des ensembles ouverts de fonctions hamiltoniennes  $C^\infty$  il existe des ouverts de surfaces d'énergies régulières sur lesquelles il n'y a pas d'orbites périodiques. Les dynamiques hamiltoniennes génériques sur ces surfaces d'énergies n'ont donc pas d'orbite périodique.

*Nous travaillerons par la suite en régularité  $C^1$ .* Il y a pour cela plusieurs raisons. L'existence d'une structure différentiable donne une rigidité minimale, permettant par exemple la continuation des points périodiques, l'étude des exposants de la dynamique, l'obtention de sous-variétés invariantes. Comme nous l'avons vu, la perturbation de difféomorphismes en topologie  $C^1$  est assez souple pour créer des points périodiques. La topologie  $C^1$  possède également une propriété importante : si  $f$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^d$  à support compact, tous les conjugués  $x \mapsto a f(a^{-1} x)$  par des homothéties de rapport  $a \in (0, 1)$  petit sont à la même distance à l'identité. Cette remarque est à la base des principales techniques de perturbation dans  $\text{Diff}^1(M)$ . En revanche, la régularité  $C^1$  n'est pas suffisante pour certains résultats requérant un contrôle de distorsion.

**0.1.b Dynamiques hyperboliques.** Très rapidement, les dynamiciens ont cherché quelles étaient les dynamiques structurellement stables, i.e. dont le comportement topologique ne change pas après perturbation du système. Anosov et Smale ont introduit une classe de difféomorphismes ayant cette propriété : ce sont les difféomorphismes hyperboliques. Un difféomorphisme est hyperbolique si, au-dessus de tout ensemble invariant suffisamment récurrent, on peut décomposer l'espace tangent de  $M$  en deux fibrés linéaires invariants, le premier (le fibré stable) étant uniformément contracté, le second (le fibré instable) uniformément dilaté. Paradoxalement, la stabilité de ces systèmes face aux perturbations ne les empêche pas d'avoir une dynamique parfois "chaotiques". La dynamique de ces systèmes est très bien comprise, notamment du point de vue symbolique (existence de partitions de Markov, de codages) et du point de vue de la théorie ergodique (existence de mesures physiques).

L'équivalence entre la stabilité et l'hyperbolicité a fait l'objet de nombreux travaux et a finalement été obtenue par Mañé. Ces recherches ont fait émerger de nombreux outils intéressants pour l'étude des dynamiques différentiables. Il est apparu cependant que l'ouvert des dynamiques hyperboliques n'est en général pas dense dans l'espace des difféomorphismes. Des objectifs naturels guident alors l'étude des dynamiques génériques :

- la compréhension des défauts d'hyperbolicité,
- la généralisations de propriétés satisfaites par les systèmes hyperboliques à des classes plus larges de dynamiques,
- la recherche de nouveaux phénomènes dynamiques.

Parmi les dynamiques non hyperboliques, deux obstructions apparaissent fréquemment : les tangences homoclines et les cycles hétérodimensionnels (voir la figure 1).

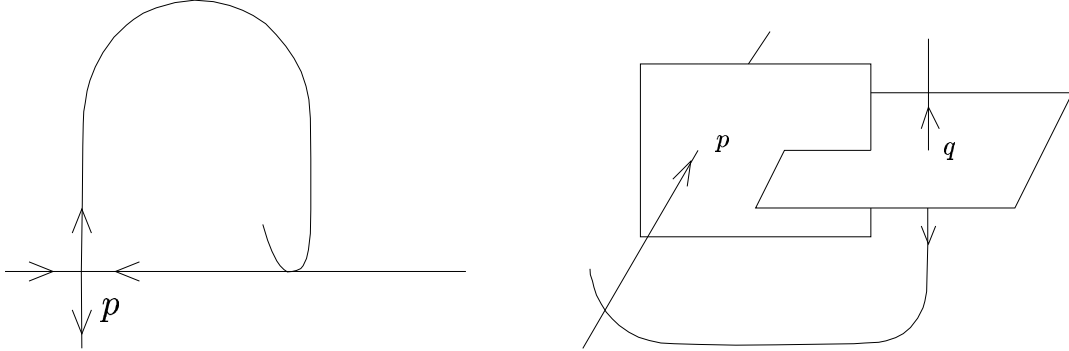


FIG. 1 – Tangence homocline et cycle hétérodimensionnel.

- Une orbite périodique hyperbolique possède une *tangence homocline* si ses variétés stable et instable possèdent un point d'intersection non transverse. Certains vecteurs sont alors uniformément contractés par itérations passées et futures et devraient appartenir simultanément aux fibrés stable et instable.
- Deux orbites périodiques hyperboliques forment un *cycle hétérodimensionnel* si elles sont liées par des orbites hétéroclines et si leurs dimensions stables diffèrent. Il n'existe donc pas de fibré stable de dimension constante au-dessus du cycle.

Pour les difféomorphismes de surface de régularité  $C^k$ ,  $k > 1$ , Newhouse a montré que l'ensemble des difféomorphismes ayant une tangence homocline est dense dans un ouvert (non vide) de l'espace des difféomorphismes. En dimension plus grande (et en toute régularité  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ), Abraham et Smale ont construit un ouvert dans lequel les dynamiques présentant un cycle hétérodimensionnel sont denses. Le cas des difféomorphismes de classe  $C^1$  des surfaces n'est pas connu.

**Conjecture** (Smale). *Pour toute surface compacte  $S$ , l'ensemble des difféomorphismes hyperboliques est dense dans  $\text{Diff}^1(S)$ .*

Palis a conjecturé que ces bifurcations sont les seules obstructions à l'hyperbolicité.

**Conjecture** (Palis). *Dans  $\text{Diff}^k(M)$ ,  $k \geq 1$ , tout difféomorphisme peut être approché par une dynamique hyperbolique ou par une dynamique possédant une tangence homocline ou un cycle hétérodimensionnel.*

**0.1.c Les dynamiques génériques représentent-elles tous les systèmes ?** La genericité donne un sens à la notion de partie négligeable de l'ensemble des difféomorphismes : nous cherchons à décrire la plupart des dynamiques. Ce point de vue est cependant très relatif, puisqu'il se peut que l'espace des difféomorphismes étudiés soit négligeable pour une autre notion de genericité.

Il est ainsi envisageable que l'on puisse trouver deux parties disjointes, chacune dense dans un ouvert de l'espace des difféomorphismes et représentant des dynamiques très différentes. Par exemple, lorsque  $\dim(M) \leq 3$ , on peut alors introduire :

- l'ensemble des homéomorphismes ayant un ensemble non dénombrable de points périodiques (nous avons vu que c'est une partie générique de  $\text{Diff}^0(M)$ ),
- l'ensemble des difféomorphismes structurellement stables de  $M$  (Shub a montré [162] qu'ils forment une partie  $C^0$ -dense de  $\text{Diff}^\infty(M)$  et lorsque  $\dim(M) \leq 3$ , Munkres a montré [103] que  $\text{Diff}^\infty(M)$  est dense dans  $\text{Diff}^0(M)$ ).

Les difféomorphismes structurellement stables ont au plus un nombre dénombrable de points périodiques et ces deux parties denses de  $\text{Diff}^0(M)$  sont donc disjointes.

Remarquons que, dans certains cas, en travaillant avec des propriétés génériques, on peut obtenir des conclusions satisfaites par un ouvert dense de difféomorphismes, et non pas seulement par un  $G_\delta$ . (Voir par exemple la conjecture faible de Palis, plus bas.)

## 0.2 Décomposition de la dynamique

La dynamique d'un difféomorphisme hyperbolique  $f$  est portée par un nombre fini d'ensembles compacts invariants disjoints et transitifs (i.e. possédant une orbite positive dense), appelés pièces basiques. Plus précisément, dans ce cadre chaque pièce basique contient une orbite périodique  $O$  et coïncide avec l'adhérence  $H(O)$  de l'ensemble des intersections transverses entre les variétés stables et instables de  $O$ . Un tel ensemble  $H(O)$  associé à une orbite périodique hyperbolique  $O$  peut être défini pour un difféomorphisme arbitraire et est appelé *classe homocline* de  $O$ .

Conley a montré que cette décomposition se généralise aux difféomorphismes quelconques, si l'on autorise un nombre infini de pièces et si l'on remplace la transitivité par la transitivité par chaînes. Cette propriété est une notion plus faible de récurrence qui met en jeu les pseudo-orbites, i.e. les suites  $(x_n)$  de  $M$  pour lesquelles  $f(x_n)$  et  $x_{n+1}$  sont proches pour tout  $n$  mais ne coïncident pas nécessairement. Les pièces obtenues sont alors appelées *classes de récurrence par chaînes*.

La décomposition de Conley est intéressante si l'on parvient à faire le lien entre les pseudo-orbites et les vraies orbites de la dynamique. Il faut pour cela être capable de refermer les sauts d'une pseudo-orbite par perturbation. Ce problème a été traité progressivement par l'obtention de lemmes de perturbation dans des situations de plus en plus générales.

- Pugh a démontré un lemme de fermeture qui permet de créer un point périodique près d'un point non-errant. Il s'agit en quelque sorte de fermer une pseudo-orbite périodique ayant un saut unique.
- Hayashi a obtenu un lemme de connexion : lorsque l'orbite positive d'un point  $p$  et l'orbite négative d'un point  $q$  ont un point d'accumulation commun,  $p$  et  $q$  sont contenus dans la même orbite après perturbation. Là encore, il n'y a qu'un seul saut à refermer.
- Finalement, avec C. Bonatti nous avons abordé le cas général et établi un lemme de connexion pour les pseudo-orbites.

Le lemme de connexion pour les pseudo-orbites permet de montrer que la décomposition en classes de récurrence par chaînes est bien adaptée à l'étude des difféomorphismes génériques : par exemple, les classes de récurrence par chaînes contenant une orbite périodique sont des ensembles transitifs. Plus précisément, nous avons obtenu le résultat suivant.

**Théorème.** *Il existe un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  formé de difféomorphismes pour lesquels la classe de récurrence par chaînes de toute orbite périodique  $O$  coïncide avec sa classe homocline  $H(O)$ .*

Toutefois le lemme de connexion pour les pseudo-orbites ne permet pas de contrôler complètement le support de l'orbite obtenue. J'ai établi pour cela un autre lemme de perturbation. En voici une conséquence.

**Théorème.** *Pour tout difféomorphisme appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$ , chaque classe de récurrence par chaînes est limite de Hausdorff d'une suite d'orbites périodiques.*

Ces techniques de perturbation restent valables pour les difféomorphismes conservatifs. Elles entraînent un résultat de "diffusion des orbites" (obtenu avec C. Bonatti et M.-C. Arnaud).

**Théorème.** *Considérons une variété compacte connexe  $M$  munie d'une forme volume ou symplectique  $\omega$ . Tout difféomorphisme appartenant à une partie générique de l'espace  $\text{Diff}_\omega^1(M)$  des difféomorphismes de  $M$  préservant  $\omega$  est transitif.*

Ce dernier théorème souligne à nouveau l'importance de la régularité choisie. En effet, le théorème des tores invariants de Herman (voir [74, chapitre IV], [102, section II.4.c] et [191]) montre par des techniques de théorie KAM qu'il existe un ouvert de difféomorphismes de  $\text{Diff}_\omega^k(M)$ ,  $k \geq 4$ , qui possèdent un tore de codimension 1. Ce tore sépare la variété en deux composante et empêche la transitivité. Le théorème précédent n'est donc pas vrai en régularité supérieure.

Nous pouvons également remarquer certaines particularités du sujet. D'une part, l'essentiel des résultats s'appuient sur des techniques de perturbation. D'autre part, les différents lemmes de perturbation ont parfois des énoncés qui peuvent sembler très similaires, bien que la difficulté des démonstrations puisse être bien différente.

Notre connaissance des dynamiques  $C^1$ -générique devient suffisamment précise pour pouvoir obtenir des conclusions qui n'étaient jusqu'alors connues que dans le cadre des dynamiques hyperboliques. Par exemple, on s'attend à ce que le *centralisateur* d'un difféomorphisme, i.e. l'ensemble des difféomorphismes qui commutent avec lui, soit en général petit. C'est ce que nous avons vérifié avec C. Bonatti et A. Wilkinson.

**Théorème.** *L'ensemble des difféomorphismes  $f$  à centralisateur trivial (i.e. réduit aux itérés  $f^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) contient un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$ .*

## Caractérisation des dynamiques non hyperboliques

En dimension 1 et en toute régularité, la conjecture de Palis est une conséquence du théorème de Peixoto : tout difféomorphisme du cercle peut être approché par un difféomorphisme ayant un nombre fini de points périodiques, tous hyperboliques (les autres orbites sont errantes et connectent une source à un puits). En dimension 2, Pujals et Sambarino ont démontré la conjecture en régularité  $C^1$ . En dimension supérieure, seuls des résultats partiels existent (et seulement en topologie  $C^1$ ). Nous allons les présenter ci-dessous.

**0.3.a Les dynamiques conservatives** En topologie  $C^1$  et dans le cadre conservatif, la conjecture de Palis est vérifiée, nous obtenons même un résultat plus fort.

En dimension 2, il existe une obstruction robuste à l'hyperbolicité venant de la structure symplectique : l'existence d'un point périodique elliptique, i.e. ayant des valeurs propres non

réelles de module 1. Newhouse a montré [107] que cette obstruction suffit à caractériser les difféomorphismes robustement non hyperboliques

Lorsque  $\dim(M) \geq 3$ , les points périodiques sont génériquement hyperboliques [155]. Les travaux, classiques, autour de la stabilité structurelle, impliquent qu'une dynamique dont on ne peut pas faire bifurquer les points périodiques est hyperbolique. Si l'on parvient au contraire à faire bifurquer des points périodiques, on obtient par perturbation des points périodiques ayant des dimensions stables différentes; le lemme de connexion pour les pseudo-orbites crée alors un cycle hétérodimensionnel (dans le cadre conservatif et lorsque  $M$  est connexe, il n'y a qu'une seule classe de récurrence par chaînes) associé à des points périodiques dont la dimension stable diffère de 1.

Un résultat de Bonatti et Díaz permet de renforcer les cycles hétérodimensionnels : après perturbation, on obtient un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}_\omega^1(M)$  et une paire d'ensemble hyperboliques transitifs  $K, L$  dont la dimension stable diffère, tels que pour tout difféomorphisme  $g$  proche de  $f$ , les continuations  $K_g, L_g$  sont liées par des orbites hétéroclines. Un tel cycle associé à  $K$  et  $L$  est une obstruction robuste à l'hyperbolicité et est appelé *cycle hétérodimensionnel robuste*. Si l'on choisit des orbites périodiques  $O \in K$  et  $O' \in L$ , il existe un ensemble dense de difféomorphismes au voisinage de  $f$  pour lesquels  $O$  et  $O'$  forment un cycle hétérodimensionnel.

L'énoncé obtenu porte sur un *ouvert dense* de l'espace des difféomorphismes conservatifs.

**Théorème.** *Tout difféomorphisme conservatif peut être approché dans  $\text{Diff}_\omega^1(M)$  par un difféomorphisme hyperbolique ou par un difféomorphisme ayant un cycle hétérodimensionnel robuste.*

**0.3.b La conjecture faible de Palis.** On connaît depuis Poincaré [132, 133] et Birkhoff [21] l'importance du rôle joué par les *intersections homoclines transverses*, i.e. par les points d'intersection transverses entre les variétés stables et instables d'une orbite périodique. Cette propriété - très simple - est à l'origine d'une dynamique complexe.

Smale a construit [169] un modèle géométrique, son célèbre fer à cheval, qui décrit la dynamique près d'une telle orbite. On trouve des ensembles hyperboliques dont une puissance est conjuguée au décalage sur l'ensemble de Cantor  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Il y a alors une infinité d'orbites périodiques et l'entropie topologique de la dynamique est strictement positive. Remarquons également que l'existence d'une intersection homocline transverse est une propriété ouverte.

À l'opposé, Smale a introduit des dynamiques très simples : les *difféomorphismes Morse-Smale*. Ce sont des difféomorphismes hyperboliques pour lesquels chaque pièce basique est réduite à une orbite périodique. Les autres orbites s'accumulent dans le passé et dans le futur sur deux orbites périodiques distinctes. En particulier, ces dynamiques sont stables (elles forment donc un ouvert) et leur entropie topologique est nulle.

Palis a conjecturé (en toute classe de différentiabilité  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ) que ces deux comportements forment une partie dense de l'espace des difféomorphismes. Cette seconde conjecture de Palis est impliquée par la première et est donc vérifiée en dimension 2 d'après les résultats de Pujals et Sambarino. Elle a ensuite été démontrée en dimension 3 par Bonatti, Gan et Wen. J'ai obtenu une démonstration dans le cas général.

**Théorème.** *Tout difféomorphisme peut être approché dans  $\text{Diff}^1(M)$  par un difféomorphisme Morse-Smale ou par un difféomorphisme ayant une intersection homocline transverse.*

Bien que la preuve fasse appel aux techniques de généricité, la conclusion décrit à nouveau une partie ouverte et dense de l'espace des difféomorphismes. Sur cet ouvert, il y a donc une dichotomie parfaite entre les dynamiques "simples" et "compliquées".

La démonstration se ramène à l'étude d'ensembles dont le défaut d'hyperbolicité est concentré sur un fibré linéaire invariant de dimension 1. Aucun vecteur de ce fibré n'est contracté ni dilaté par les itérés de l'application tangente. Les techniques habituelles de dynamiques différentiables reliées à l'existence d'exposants de Lyapunov non nuls ne s'appliquent donc pas et nous les avons remplacées par l'étude d'objets de nature plus topologique : les *modèles centraux*.

Dans le cas conservatif, on s'attendrait à ce que pour un ouvert dense de difféomorphismes, il existe une orbite périodique hyperbolique ayant une intersection homocline transverse. En topologie  $C^1$ , c'est une conséquence du théorème établi avec Arnaud et Bonatti énoncé ci-dessus. En régularité plus grande, des résultats partiels existent sur les surfaces : Zehnder a montré [192] que tout point elliptique est approché par un point périodique hyperbolique ayant une intersection homocline transverse. Plus généralement, les difféomorphismes ayant une intersection homocline transverse sont denses dans presque toute classe d'homotopie de difféomorphisme conservatif  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , voir [156, 129, 111, 112].

**0.3.c Hyperbolicité partielle.** Une approche possible pour montrer la conjecture de Palis consiste à étudier les difféomorphismes génériques qui ne sont pas approchés par des tangence homoclines ou par des cycles hétérodimensionnels. Il s'agit alors de montrer que chaque classe de récurrence par chaînes est un ensemble hyperbolique.

Nous avons obtenu un résultat dans cette direction : chaque classe de récurrence par chaînes  $\Lambda$  vérifie une propriété d'hyperbolicité partielle. Plus précisément, il existe une décomposition  $T_\Lambda M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  du fibré tangent unitaire.  $E^s$  et  $E^u$  sont uniformément contractés et dilatés. La partie centrale  $E^c$  est moins contractée ou dilatée que les fibrés extrêmes  $E^s, E^u$ . De plus, sa dimension est au plus égale à 2 (lorsqu'elle est de dimension 2, elle se décompose à nouveau en deux fibrés  $E^c = E_1^c \oplus E_2^c$  de dimension 1). Un tel difféomorphisme est appelé dans ce cadre *difféomorphisme partiellement hyperbolique*.

J'ai démontré que les difféomorphismes loin des bifurcations homoclines peuvent être approchés par des difféomorphismes partiellement hyperboliques. Wen avait obtenu précédemment une version locale de ce résultat en s'appuyant sur le lemme de sélection de Liao.

**Théorème.** *Tout difféomorphisme peut être approché dans  $\text{Diff}^1(M)$  par un difféomorphisme partiellement hyperbolique ou par un difféomorphisme ayant une tangence homocline ou un cycle hétérodimensionnel.*

Pour achever la démonstration de la conjecture de Palis, il faudrait montrer que pour ces difféomorphismes partiellement hyperboliques, les fibrés centraux de dimension 1 sont uniformément contractés ou dilatés. C'est ce qu'ont réussi Pujals et Sambarino dans le cas des difféomorphismes de surface. Dans le cas de fibrés centraux extrêmes (i.e. lorsque  $E^s$  ou  $E^u$  est dégénéré) leur argument se généralise (le cas où  $E^c$  est de dimension 1 a été traité par Pujals et Sambarino ; j'ai traité le cas  $\dim(E^c) = 2$  avec E. Pujals).

**Addendum.** *Les difféomorphismes partiellement hyperboliques du théorème précédent peuvent être choisis pour satisfaire la propriété additionnelle suivante : pour chaque classe de récurrence par chaînes qui n'est pas un puits ou une source, les fibrés extrêmes  $E^s, E^u$  sont non dégénérés.*

**0.3.d Hyperbolicité essentielle.** Il peut être plus facile d'étudier l'hyperbolicité des parties attractives de la dynamique. En dimension 3, Pujals a établi sous certaines hypothèses que tout difféomorphisme ayant un attracteur non hyperbolique peut être approché par un difféomorphisme ayant une tangence homocline ou un cycle hétérodimensionnel.

Un difféomorphisme  $f$  est *essentiellement hyperbolique* si  $f$  et  $f^{-1}$  possèdent un nombre fini d'attracteurs hyperboliques dont l'union des bassins est dense dans  $M$ . De façon équivalente, en restriction à un ouvert dense de  $M$  on ne distingue pas la dynamique de  $f$  de celle d'un difféomorphisme hyperbolique.

Le résultat suivant a été obtenu en collaboration avec E. Pujals.

**Théorème.** *Tout difféomorphisme peut être approché dans  $\text{Diff}^1(M)$  par un difféomorphisme essentiellement hyperbolique ou par un difféomorphisme ayant une tangence homocline ou un cycle hétérodimensionnel.*

### 0.3 Structure de l'espace des dynamiques

La décomposition de la dynamique générique a permis la formulation de nombreuses questions, présentées dans ce texte (voir aussi l'exposé de Bonatti [22]). Une des directions de recherches actuelles consiste à structurer l'espace des difféomorphismes et à classifier les divers types de comportements de la dynamique. Une telle approche avait déjà été proposée par Smale [173, 161].

**0.4.a Phénomènes et mécanismes.** Les énoncés présentés dans les paragraphes précédents ont un objectif commun que l'on peut formuler de la façon suivante.

**Problème** (Pujals). *Structurer l'espace des difféomorphismes en phénomènes et mécanismes.*

Plus précisément, ces énoncés fournissent deux ouverts disjoints  $\mathcal{U}_p$ ,  $\mathcal{U}_m$  d'union dense dans l'espace des difféomorphismes et caractérisant deux types de dynamiques très différents.

- $\mathcal{U}_p$  est l'ouvert associé à un *phénomène* : pour tout difféomorphisme appartenant à une partie ( $G_\delta$  parfois ouverte) dense de  $\mathcal{U}_p$ , il existe une description globale de la dynamique (dynamique Morse-Smale, hyperbolicité, hyperbolicité partielle, hyperbolicité essentielle,...)
- $\mathcal{U}_m$  est l'ouvert associé à un *mécanisme* : pour tout difféomorphisme appartenant à une partie dense de  $\mathcal{U}_m$ , il existe une configuration semi-locale de la dynamique (une bifurcation) qui est à la fois très simple (par exemple elle se lit sur les orbites périodiques, elle peut être détectée numériquement), qui engendre des changements importants sur les dynamiques voisines (par exemple l'apparition d'un grand nombre d'orbites périodiques) et qui est une obstruction au phénomène associé à  $\mathcal{U}_p$ .

**0.4.b Complexité des dynamiques génériques.** Les résultats récents sur la dynamique générique permettent d'imaginer une façon de structurer l'espace des difféomorphismes. Deux conjectures, impliquant toutes deux celle de Palis, résument l'essentiel des scénarios envisagés par les auteurs du sujet (voir [22] pour un exposé détaillé de différentes conjectures).

La première constate que les seuls mécanismes connus engendrant une infinité de classes distinctes sont liées à l'existence de tangences homoclines (c'est le cas du phénomène de Newhouse pour lequel il existe une infinité de puits et de sources).



**Conjecture de finitude** (Bonatti). *Les difféomorphismes loin des tangences homoclines dans  $\text{Diff}^1(M)$  n'ont qu'un nombre fini de classes de récurrence par chaînes.*

La seconde implique également la conjecture de Smale et est propre à la régularité  $C^1$ . Pour cette topologie, les méthodes pour obtenir un ensemble localement dense de difféomorphismes présentant une tangence homocline font toutes intervenir des cycles hétérodimensionnels.

**Conjecture d'hyperbolicité** (Bonatti-Díaz). *Tout difféomorphisme de  $\text{Diff}^1(M)$  peut être approché par un difféomorphisme hyperbolique ou par un difféomorphisme ayant un cycle hétérodimensionnel robuste.*

Bonatti propose de décomposer l'espace des difféomorphismes selon les critères suivants :

- existence de tangences homoclines (dynamique *critique*),
- existence de cycle hétérodimensionnel (dynamique *hétérodimensionnelle*),
- nombre fini ou infini de classes de récurrence par chaînes (dynamique *modérée* ou *sauvage*).

Par ailleurs, Bonatti et Díaz ont montré l'existence de dynamiques sauvages ayant une propriété remarquable : en renormalisant la dynamique contenue dans des disques périodiques, on obtient une famille de difféomorphismes dense dans l'espace des difféomorphismes du disque préservant l'orientation. Une telle dynamique est qualifiée d'*universelle*.

Si les deux conjectures précédentes sont vérifiées, l'espace des difféomorphismes est alors structuré en régions de complexité croissante : dynamique hyperbolique, modérée non critique, modérée critique, sauvage, dynamique universelle (voir la figure 2). Des exemples de dynamique pour chaque région seront donnés en sections 1.6, 5.10, 7.9 et 8.6.

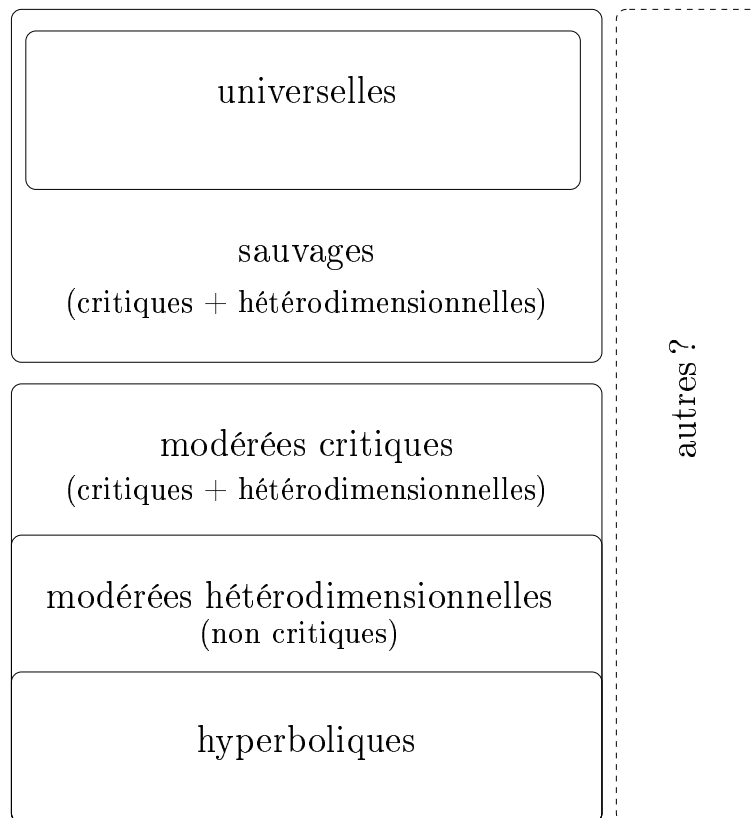


FIG. 2 – Structure de l'espace des difféomorphismes.

# Notations

$\mathcal{K}(X)$  est l'espace (compact) des parties compactes d'un espace métrique compact  $X$ , muni de la distance de Hausdorff :

$$d_H(K, K') = \sup_{x \in K, x' \in K'} d(x, x').$$

(Lorsque  $K$  est vide et  $K'$  non vide, on pose  $d_H(K, K') = \text{Diam}(X)$ .)

$M$  désignera en général une variété différentiable compacte sans bord munie d'une métrique riemannienne.

$\text{Int}(A)$  est l'intérieur d'une partie  $A \subset M$ .

$\text{Diff}^k(M)$ , pour  $k \geq 0$ , est l'espace des difféomorphismes  $f$  de classe  $C^k$  de  $M$ , muni de la topologie  $C^k$ . (C'est un espace métrique complet, donc un espace de Baire.)

$\mathcal{P}\text{er}(f)$ ,  $\Omega(f)$ ,  $\mathcal{R}(f)$  représentent l'ensemble des points périodiques, l'ensemble non-errant et l'ensemble récurrent par chaînes du difféomorphisme  $f$  de  $M$ .

$W^s(x)$ ,  $pW^s(x)$  sont les ensembles stable et stable par chaînes du point  $x$ .

$x \prec y$  et  $x \dashv y$  sont des relations dynamiques introduites au chapitre 1.

Les mesures d'un espace compact métrique  $X$  seront toujours des mesures boréliennes. Leur ensemble est muni de la topologie faible (rendant continues les évaluations sur les fonctions continues  $X \rightarrow \mathbb{R}$ ).

$\mathcal{T}$  et  $\mathcal{C}$  désignent l'ensemble des difféomorphismes d'une variété ayant une tangence homocline ou un cycle hétérodimensionnel.



# Chapitre 1

## Décomposition de la dynamique

Ce chapitre introduit les notations et les définitions que nous utiliserons dans la suite du texte. Nous nous plaçons sur une variété différentiable compacte sans bord  $M$  de dimension  $d$ .

Nous présentons tout d'abord des notions de récurrence qui permettent d'analyser les systèmes dynamiques topologiques : la récurrence au sens des pseudo-orbites donne lieu au "théorème fondamental de la dynamique" de Conley. Nous travaillons ensuite avec des difféomorphismes et nous rappelons la notion d'ensemble hyperbolique. Nous renvoyons à [43, 163, 108, 190, 69] pour des exposés détaillés des propriétés des dynamiques hyperboliques (stabilité, pistage,...) Nous définissons finalement ce qui sera pour nous un *difféomorphisme hyperbolique*.

### 1.1 Récurrence : transitivité faible, transitivité par chaînes

Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété différentiable compacte sans bord  $M$  munie d'une métrique riemannienne<sup>1</sup>.

**Ensembles faiblement transitifs.** Un compact invariant  $K$  est *transitif* si pour tous ouverts  $U, V \subset M$  rencontrant  $K$ , il existe  $z \in U \cap K$  ayant un itéré positif  $f^n(z)$ ,  $n \geq 1$ , dans  $V$ .

Plus généralement,  $K$  est *faiblement transitif* si, pour tous ouverts  $U, V \subset M$  rencontrant  $K$  et tout voisinage  $W$  de  $K$ , la propriété suivante est satisfaite.

( $\prec$ ) *Il existe un segment d'orbite  $\{z, f(z), \dots, f^n(z)\} \subset W$  tel que  $z \in U$  et  $f^n(z) \in V$ .*

Si  $K \subset M$  est un ensemble fermé, nous noterons  $x \prec_K y$  si pour tous voisinages  $U$  de  $x$ ,  $V$  de  $y$  et  $W$  de  $K$ , la propriété ( $\prec$ ) a lieu. Nous écrirons  $x \prec y$  pour  $x \prec_M y$ . Ces relations sont fermées mais ne sont en général pas transitives.

L'*ensemble non-errant*,  $\Omega(f)$ , est l'ensemble des points de  $M$  dont tout voisinage  $U$  intersecte l'un de ses itérés  $f^n(U)$ ,  $n \geq 1$ , c'est-à-dire l'ensemble des points  $x$  satisfaisant  $x \prec x$ . C'est un fermé invariant qui contient les ensembles faiblement transitifs. En particulier, il contient tous les points périodiques de  $f$ . Remarquons que la dynamique induite par  $f$  sur  $\Omega(f)$  peut avoir des points errants.

---

<sup>1</sup>Jusqu'en section 1.4, il suffirait de considérer un homéomorphisme d'un espace métrique compact.

**Ensembles transitifs par chaînes.** Nous introduisons une notion de récurrence plus grossière mais qui n'a pas les défauts de la précédente.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Les  $\varepsilon$ -pseudo-orbites de  $f$  sont les suites  $(x_n)_{n \in I}$  de  $M$  telles que la distance  $d(f(x_n), x_{n+1})$  est strictement inférieure à  $\varepsilon$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n, n+1$  appartiennent à  $I$ .

Un ensemble  $K \subset M$  est *transitif par chaînes* si pour tous  $x, y \in K$  et tout  $\varepsilon > 0$  la propriété suivante a lieu.

( $\dashv$ ) Il existe une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite  $\{x_0, \dots, x_n\} \subset K$  telle que  $n \geq 1$ ,  $x_0 = x$  et  $x_n = y$ .

Si  $K \subset M$  est un ensemble fermé, nous noterons  $x \dashv_K y$  si la propriété ( $\dashv$ ) a lieu. Nous écrirons  $x \dashv y$  pour  $x \dashv_M y$ . Ces relations sont fermées et transitives. De plus  $x \prec_K y$  implique  $x \dashv_K y$ . Par conséquent les ensembles faiblement transitifs sont aussi transitifs par chaînes.

On peut étendre la relation  $\dashv$  aux ensembles transitifs par chaînes : on a  $K \dashv K'$  s'il existe  $x \in K$  et  $x' \in K'$  tels que  $x \dashv x'$ .

Un point est *récurrent par chaînes* si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il appartient à une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite périodique, c'est à dire si  $x \dashv x$ . L'ensemble récurrent par chaînes  $\mathcal{R}(f)$  est l'ensemble des points récurrents par chaînes. C'est un donc fermé invariant, contenant l'ensemble non-errant. En restriction à  $\mathcal{R}(f)$ , la dynamique de  $f$  ne possède que des points récurrents par chaînes.

Les *classes de récurrence par chaînes* sont les classes d'équivalence de la relation symétrisée " $x \dashv y$  et  $y \dashv x$ ". Elles sont fermées et elles coïncident avec les ensembles transitifs par chaînes maximaux. L'ensemble récurrent par chaînes est naturellement partitionné par les classes de récurrence par chaînes, par conséquent l'ensemble récurrent par chaînes coïncide avec l'union des ensembles transitifs par chaînes.

## 1.2 Théorème "fondamental" de la dynamique, filtrations

Conley a démontré ce résultat très général (voir [47, 158]).

**Théorème 1.1** (Conley). *Soit  $f$  un homéomorphisme d'un espace compact métrique  $M$ . Il existe une fonction continue  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  ayant les propriétés suivantes :*

- $h$  décroît le long des orbites de  $f$  et décroît strictement le long des orbites de  $f$  contenues dans  $M \setminus \mathcal{R}(f)$  ;
- l'image de  $\mathcal{R}(f)$  par  $h$  est totalement discontinue ;
- $h$  prend des valeurs distinctes sur des classes de récurrence par chaînes distinctes.

Un ouvert  $U$  de  $M$  est *attractif* si  $f(\overline{U})$  est contenu dans  $U$ . Une fonction de Lyapunov<sup>2</sup>  $h$  donnée par le théorème de Conley permet de montrer de nouvelles propriétés.

- Pour tout point  $x \notin \mathcal{R}(f)$ , il existe un ouvert attractif  $U$  tel que  $x$  appartient à  $U \setminus f(\overline{U})$  : l'ensemble récurrent par chaînes est donc la notion de récurrence raisonnable la plus faible.
- Pour tout ensemble fini  $\mathcal{S}$  de classes de récurrence par chaînes, il existe une suite emboîtée d'ouverts attractifs  $M = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_k = \emptyset$ , tels que  $U_i \setminus U_{i+1}$  contienne un élément de  $\mathcal{S}$  et un seul pour chaque entier  $0 \leq i < k$ .

Une suite emboîtée d'ouverts attractifs est appelée *filtration* de  $f$ .

<sup>2</sup>Nous renvoyons à [19] pour une discussion plus détaillée des décomposition de la dynamique par fonctions de Lyapunov.

### 1.3 Ensemble stable par chaînes, quasi-attracteurs

L'ensemble stable d'un point  $x \in M$  est l'ensemble

$$W^s(x) := \left\{ y \in M, d(f^n(x), f^n(y)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \right\}.$$

Par analogie, on introduit l'ensemble stable par chaînes d'un point  $x \in \mathcal{R}(f)$  ou d'une classe de récurrence par chaînes de  $f$  : c'est l'ensemble des points  $y \in M$  tels que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe des  $\varepsilon$ -pseudo-orbite  $(y_0, \dots, y_n)$  et  $(x_0, \dots, x_n)$  telles que  $y_0 = y$ ,  $x_0 = x$  et  $x_n = y_n$ . On le note  $pW^s(x)$ . (Le "p" signifie "au sens des pseudo-orbites"). On définit symétriquement l'ensemble instable  $W^u(x)$  et l'ensemble instable par chaînes  $pW^u(x)$ .

Les classes de récurrence par chaînes sont partiellement ordonnées par la relation  $\dashv$ . Un *quasi-attracteur* (on parle aussi parfois d'"attracteur faible") est une classe de récurrence par chaînes qui est minimale pour l'ordre  $\dashv$ , ou de façon équivalente qui coïncide avec son ensemble instable par chaînes. Il existe toujours au moins un quasi-attracteur (ce qui n'est pas le cas des attracteurs).

Si  $K$  est une classe de récurrence par chaînes, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble des points que l'on peut atteindre depuis  $K$  par  $\varepsilon$ -pseudo-orbites est un voisinage attractif de  $K$ . Ceci montre la proposition suivante.

**Proposition 1.2.** *Une classe de récurrence par chaînes est un quasi-attracteur si et seulement si elle possède une base de voisinages ouverts attractifs.*

Ces notions sont proches de la stabilité au sens de Lyapunov. On dit qu'un ensemble invariant  $K$  est *stable au sens de Lyapunov* s'il admet une base de voisinages  $U$  positivement invariants, i.e. satisfaisant  $f(U) \subset U$ . Un quasi-attracteur est une classe de récurrence par chaînes stable au sens de Lyapunov, mais la réciproque est fautive en général.

### 1.4 Hyperbolicité

Un ensemble  $K$  invariant par  $f$  est *hyperbolique* s'il existe une décomposition  $T_K M = E^s \oplus E^u$  du fibré tangent au-dessus de  $K$  en deux sous-fibrés linéaires invariants par l'application tangente  $Df$  et un entier  $N \geq 1$  tels que pour tout  $x \in K$  on a<sup>3</sup>

$$\|D_x f|_{E^s(x)}^N\| \leq \frac{1}{e} \text{ et } \|D_x f|_{E^u(x)}^{-N}\| \leq \frac{1}{e}. \quad (1.4.1)$$

La dimension du fibré stable est appelée *indice* de  $K$ .<sup>4</sup>

Plus généralement, un ensemble compact invariant est dit *hyperbolique (à indice variable)* s'il admet une partition en ensembles hyperboliques.

L'ensemble stable  $W^s(x)$  (resp. instable  $W^u(x)$ ) d'un point  $x$  appartenant à un ensemble hyperbolique est une sous-variété injectivement immergée de  $M$ , tangente à  $E^s(x)$  (resp.  $E^u(x)$ ).

Une orbite périodique hyperbolique est un *puits* (resp. une *source*) si son ensemble stable (resp. instable) contient un voisinage de l'orbite. Dans les autres cas, on dit que l'orbite périodique hyperbolique est une *selle*.

<sup>3</sup>Nous pouvons bien sûr remplacer  $e$  par n'importe quelle constante strictement supérieure à 1, mais nous avons fait ce choix par cohérence avec la définition de l'exposant de Lyapunov (section 5.5).

<sup>4</sup>Certains auteurs appellent au contraire indice la dimension du fibré instable.

## 1.5 Classes homoclines

Deux orbites périodiques hyperboliques  $O_1, O_2$  sont dites *homocliniquement reliées*<sup>5</sup> si la variété stable de  $O_i$  coupe transversalement la variété instable de  $O_j$  pour  $(i, j) = (1, 2)$  et  $(i, j) = (2, 1)$ . En particulier, leur indices coïncident.

La *classe homocline*  $H(O)$  d'une orbite périodique hyperbolique est l'adhérence de l'ensemble des points d'intersection transverse entre les variétés stables et instables de  $O$ . En utilisant le lemme d'inclinaison (le “ $\lambda$ -lemma”, voir [108, proposition 2.5]) et le théorème homocline de Smale (voir [108, théorème 2.3]), Newhouse a montré [105] que c'est aussi l'adhérence de l'ensemble des orbites périodiques hyperboliques homocliniquement reliées à  $O$ . La classe homocline  $H(O)$  est dite *triviale* lorsqu'elle est réduite à  $O$ .

Remarquons que les classes homoclines de deux orbites périodiques hyperboliques distinctes peuvent s'intersecter sans coïncider. Chaque classe homocline  $H(O)$  est un ensemble compact invariant transitif. Plus précisément, il existe toujours au moins une mesure de probabilité invariante ergodique dont le support coïncide avec  $H(O)$  (voir [4, théorème 3.1]).

## 1.6 Difféomorphismes hyperboliques

Un difféomorphisme satisfait l'*axiome A* si l'ensemble non-errant  $\Omega(f)$  est hyperbolique et coïncide avec l'adhérence  $\overline{\text{Per}(f)}$  des points périodiques de  $f$ . D'après, le théorème de décomposition spectrale de Smale, il existe une décomposition disjointe

$$\Omega(f) = K_1 \cup \dots \cup K_s$$

en ensembles hyperboliques compacts transitifs localement maximaux<sup>6</sup>, appelés *ensembles basiques* de  $f$ . Chaque ensemble  $K_i$  est une classe homocline et réciproquement toute classe homocline de  $f$  est un ensemble basique.

Un difféomorphisme qui satisfait l'*axiome A* possède un *cycle* s'il existe une suite d'ensembles basiques  $K_{i_1}, \dots, K_{i_r}$  tels que  $W^u(K_{i_j})$  et  $W^s(K_{i_\ell})$  se rencontrent hors de  $\Omega(f)$  lorsque  $j \in \{1, \dots, r-1\}$ ,  $\ell = j+1$  et lorsque  $(j, \ell) = (r, 1)$ . Lorsque  $f$  n'a pas de cycle,  $\Omega(f) = \mathcal{R}(f)$  et les ensembles basiques sont aussi les classes de récurrence par chaînes de  $f$ .

Réciproquement, on montre facilement à l'aide du lemme de pistage qu'un difféomorphisme dont l'ensemble récurrent par chaînes est hyperbolique vérifie l'*axiome A* et n'a pas de cycle. Ceci justifie la définition suivante.<sup>7</sup>

**Définition 1.3.** Un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^1(M)$  est *hyperbolique* si  $\mathcal{R}(f)$  est hyperbolique, ou de façon équivalente s'il satisfait l'*axiome A* et n'a pas de cycle.

Puisque l'ensemble récurrent par chaînes varie semi-continûment supérieurement avec  $f$ , les difféomorphismes hyperboliques forment une partie ouverte de  $\text{Diff}^1(M)$ .

*Exemples 1.4.* 1. Un difféomorphisme hyperbolique pour lequel  $\mathcal{R}(f)$  coïncide avec  $M$  est un *difféomorphisme d'Anosov*. C'est le cas du difféomorphisme du tore  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  induit par l'action de l'automorphisme linéaire  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

<sup>5</sup>On devrait dire *transversalement homocliniquement reliées*.

<sup>6</sup> $K_i$  est localement maximal s'il possède un voisinage  $U$  tel que  $K_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$ .

<sup>7</sup>Cette définition n'est pas standard. On lit en général “difféomorphisme axiome A sans cycle”.



2. Le temps 1 du flot associé au champ de gradient d'une fonction de Morse  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  est un difféomorphisme hyperbolique : les ensembles basiques sont les points critiques de  $h$ . Lorsque toutes les valeurs critiques de  $h$  sont simples,  $-h$  est une fonction de Lyapunov au sens du théorème 1.1 de Conley. La figure 1.1 montre une filtration associée.

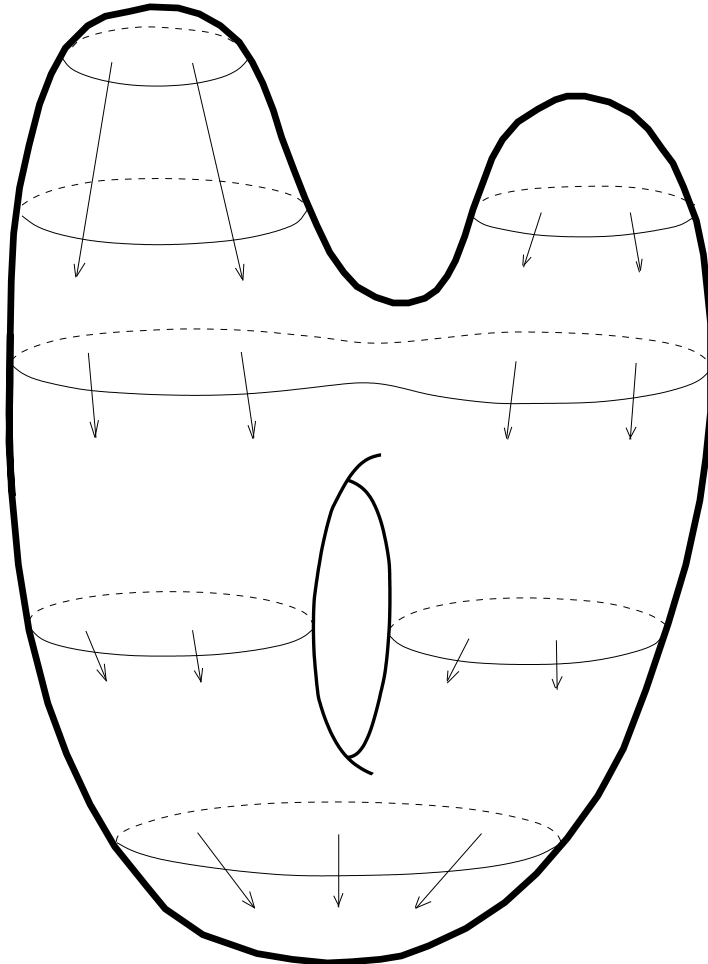


FIG. 1.1 – Filtration pour le temps 1 du flot associé au gradient d'une fonction de Morse.

Smale a donné [166] une généralisation de l'exemple précédent.

**Définition 1.5.** Un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^1(M)$  est *Morse-Smale* si  $\mathcal{R}(f)$  est fini, hyperbolique et si pour tous points  $x, y \in \mathcal{R}(f)$ , l'intersection  $W^s(x) \cap W^u(y)$  est transverse : pour tout point  $z$  dans l'intersection,  $T_z M = T_z W^s(x) + T_z W^u(y)$ .

L'ensemble des difféomorphismes Morse-Smale est ouvert [122].



## Chapitre 2

# Techniques de perturbations, généricité

Afin d'obtenir des propriétés satisfaites par des ensembles denses de difféomorphismes, il est naturel de s'intéresser aux propriétés des difféomorphismes génériques. La difficulté pour montrer qu'une propriété est générique reste bien souvent la densité : elle requiert de savoir perturber dans  $\text{Diff}^1(M)$ .

Nous introduisons dans ce chapitre une technique de perturbation d'orbites en topologie  $C^1$ , due à Pugh. Elle permet d'obtenir par un argument combinatoire (que nous pensons plus simple que l'argument initial de Pugh [136, 143]) le lemme de fermeture de Pugh (le "closing lemma"). Elle permet également d'obtenir les autres résultats de connexion d'orbites, en particulier le lemme de connexion d'Hayashi (le "connecting lemma") présenté en fin de chapitre.

Le lemme de fermeture est particulièrement important puisqu'il assure l'existence d'orbites périodiques pour les difféomorphismes  $C^1$ -génériques : un grand nombre de propriétés dynamiques s'énoncent ou se démontrent en s'appuyant sur les orbites périodiques.

### 2.1 Notions de généricité, de robustesse

Un ensemble de difféomorphismes est  $C^r$ -générique, pour  $r \geq 0$ , s'il contient un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^r(M)$ . Une propriété est  $C^r$ -générique si elle est satisfaite par un ensemble  $C^r$ -générique.

Puisque  $\text{Diff}^r(M)$  est un espace de Baire, une intersection dénombrable de parties  $C^r$ -génériques est encore  $C^r$ -générique.

Un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^r(M)$  vérifie une propriété *de façon robuste* si cette propriété est satisfaite par tous les difféomorphismes proches de  $f$ .

### 2.2 Mise en transversalité : difféomorphismes de Kupka-Smale

L'une des premières propriétés de généricité a été montrée par Kupka et Smale [83, 168]. En appliquant le théorème de transversalité de Thom (disponible en régularité  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ), on peut perturber tout difféomorphisme pour supprimer les points fixes non hyperboliques. Plus généralement, on obtient le théorème suivant (voir [119]).

**Théorème 2.1** (Kupka-Smale). *Chaque espace  $\text{Diff}^k(M)$ ,  $k \geq 1$  contient un  $G_\delta$  dense formé de difféomorphismes vérifiant les deux propriétés suivantes.*

- *Toutes les orbites périodiques de  $f$  sont hyperboliques.*

- Pour tous points périodiques  $p, q$  de  $f$ , les variétés stables  $W^s(p)$  et instables  $W^u(q)$  sont transverses, i.e.  $T_x W^s(p) + T_x W^u(q) = T_x M$  pour tout  $x \in W^s(p) \cap W^u(q)$ .

Un difféomorphisme vérifiant ces deux propriétés est appelé *difféomorphisme Kupka-Smale*. En particulier pour tout  $N \geq 1$ , l'ensemble de ses points périodiques de période inférieure à  $N$  est fini.

### 2.3 Perturbation ponctuelle de la différentielle : le lemme de Franks

Voici un résultat élémentaire, souvent utilisé pour modifier la différentielle d'un difféomorphisme le long d'une orbite périodique, sans changer l'orbite.

**Théorème 2.2** (Lemme de Franks [57]). *Pour tout voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f \in \text{Diff}^1(M)$ , il existe  $\varepsilon > 0$  avec la propriété suivante.*

*Pour tout point  $p \in M$  et toute application linéaire  $A: T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$  telle que  $\|D_p f - A\| \leq \varepsilon$ , il existe un difféomorphisme  $g \in \mathcal{U}$  tel que :*

- $f$  et  $g$  coïncident en  $p$  et hors d'un voisinage arbitrairement petit de  $p$  ;
- $D_p g = A$ .

Ce résultat permet de rendre hyperbolique une orbite périodique par petite perturbation  $C^1$ . Avec le même argument, on peut aussi "linéariser" un difféomorphisme au voisinage d'un point, c'est-à-dire fixer une métrique riemannienne et demander que  $g$  coïncide au voisinage de  $p$  avec l'application  $\exp_{f(p)} \circ A \circ \exp_p^{-1}$ . Ce résultat est bien sûr propre à la topologie  $C^1$ .

### 2.4 Modification élémentaire d'une orbite

On souhaite fréquemment modifier une orbite d'un difféomorphisme  $f$ . Dans les cas les plus simples, on considère deux points proches  $x, y \in M$ , et l'on cherche un difféomorphisme  $g$  proche de  $f$  pour lequel l'image de  $x$  n'est plus  $f(x)$  mais  $f(y)$ . On contrôle la taille du support à l'aide du lemme élémentaire suivant (voir [14]).

**Lemme 2.3** (Perturbation élémentaire). *Pour tout voisinage  $\mathcal{U}$  d'un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^1(M)$ , il existe  $\theta > 1$  et  $r_0 > 0$  vérifiant la propriété suivante : pour tous points  $x, y \in M$ , contenus dans une boule  $B(z, r)$  de rayon  $r < r_0$ , il existe  $g \in \mathcal{U}$  envoyant  $x$  sur  $f(y)$  et coïncidant avec  $f$  hors de la boule  $B(z, \theta.r)$ .*

*Pourquoi travailler en topologie  $C^1$  ?* Une telle perturbation s'obtiendrait très facilement en topologie  $C^0$  avec un support localisé autour d'un chemin quelconque joignant  $x$  à  $y$ . Les régularités supérieures font apparaître des contraintes sur la taille du support de perturbation.

En topologie  $C^1$ , si l'on cherche une perturbation  $g$  de l'identité vérifiant  $g(x) = y$  et  $\|Dg - \text{Id}\| \leq \varepsilon$ , pour tout point  $z = g(z)$  on obtient :

$$\|y - x\| = \|(g(x) - x) - (g(z) - z)\| \leq \varepsilon \cdot \|x - z\|.$$

Le support de la perturbation contient donc une boule de rayon  $\varepsilon^{-1} \cdot d(x, y)$ . Le lemme 2.3 nous montre en revanche que la taille du support ne dégénère pas aux petites échelles : l'uniformité de  $\theta$  par rapport au couple  $(x, y)$  sera essentielle pour les utilisations futures.

En topologie supérieure, on perd cette uniformité. Ceci explique pourquoi les démonstrations des énoncés perturbatifs que nous présentons dans les sections suivantes sont spécifiques à la topologie  $C^1$ , ainsi que les difficultés que l'on a à perturber en régularité  $C^k$ ,  $k \geq 2$ .

*Quelle est la difficulté à travailler en topologie  $C^1$  ?* La constante  $\theta$  dans le lemme 2.3 explose lorsque le voisinage  $\mathcal{U}$  décroît. Ceci constitue la principale difficulté des perturbations en topologie  $C^1$ . Si l'on suppose par exemple que  $x$  est un itéré futur de  $y$ , on peut espérer utiliser le lemme 2.3 pour fermer l'orbite de  $x$ . Cette idée simple ne fonctionne pas en général puisque le support risque de contenir un itéré futur de  $y$  antérieur à  $x$  et la perturbation risque de briser la connexion entre  $y$  et  $x$ . On voit ainsi l'intérêt de travailler avec des perturbation de support aussi petit que possible.

## 2.5 Modification progressive d'une orbite : le lemme de Pugh

Pugh a élaboré une technique de perturbation en topologie  $C^1$  qui permet de supposer la constante  $\theta$  du lemme 2.3 petite, quelle que soit la taille des perturbations. L'idée est de répartir la perturbation dans le temps : le difféomorphisme  $f$  peut être perturbé successivement dans des domaines  $U, f(U), \dots, f^{N-1}(U)$  disjoints. Puisque l'on travaille désormais avec de grands itérés de la dynamique, le domaine  $U$  supportant la perturbation subit une déformation et ce sont maintenant des ellipsoïdes qui jouent le rôle des boules apparaissant au lemme 2.3. Il sera plus commode par la suite de travailler avec des parallélépipèdes. On introduit donc la définition suivante.

**Définition 2.4.** Si  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une carte de  $M$ , nous appelons *cube* de  $\varphi$  tout ensemble  $C \subset V$  tel que  $\varphi(C)$  soit l'image d'un cube  $[-a, a]^d$  par une translation de  $\mathbb{R}^d$  ; la quantité  $a > 0$  est le *rayon* du cube. Si le cube homothétique à  $\varphi(C)$  de rayon  $(1 + \varepsilon).a$  et de même centre est encore contenu dans  $\varphi(C)$ , nous noterons  $(1 + \varepsilon).C$  sa pré-image par  $\varphi$ .

Voici l'énoncé fondamental permettant les modifications d'orbites en topologie  $C^1$ .

**Théorème 2.5** (Lemme de perturbation, Pugh). *Pour tout voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f \in \text{Diff}^1(M)$  et tous  $\varepsilon, \eta > 0$ , il existe un entier  $N \geq 1$  et, en tout point  $p \in M$ , une carte  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  avec la propriété suivante.*

*Pour tout cube  $(1 + \varepsilon).C$  de  $\varphi$ , disjoint de ses  $N - 1$ -premiers itérés, et tous points  $x, y \in C$ , il existe  $g \in \mathcal{U}$  vérifiant :*

- $g^N(x) = f^N(y)$  ;
- $g$  coïncide avec  $f$  hors de l'union des  $f^k((1 + \varepsilon).C)$  avec  $0 \leq k < N$  ;
- pour tout  $0 < k < N$ , le point  $g^k(x)$  appartient à  $f^k((1 + \frac{\varepsilon}{2}).C)$  ;
- $g$  et  $f$  coïncident sur  $f^k((1 + \varepsilon).C)$  pour  $0 \leq k < N$  hors d'une boule centrée en  $g^k(x)$  et de rayon inférieur à  $\eta$  fois la distance entre  $f^k((1 + \frac{\varepsilon}{2}).C)$  et le complémentaire de  $f^k((1 + \varepsilon).C)$ .

*Remarque 2.6.* La perturbation  $g$  de  $f$  est obtenue en composant des perturbations élémentaires (au sens du lemme 2.3) centrée aux différents points  $g^k(x)$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ .

C'est essentiellement cet énoncé que l'on retrouve dans les différents travaux traitant du "lemme de fermeture" de Pugh (voir [136, 138, 86, 91, 143]). La version que nous donnons ici est légèrement plus uniforme (en particulier  $N$  ne dépend pas du point  $p$ ) et correspond à

[23, théorème A.2] (voir aussi [181]). Pour la démonstration, il suffit de travailler avec la suite d'applications linéaires  $D_p f^k: T_p M \rightarrow T_{f^k(p)} M$ ,  $k \geq 0$ . En effet, le support de la carte  $\varphi$  est choisi très petit de sorte que les premiers itérés de  $f$  sur  $V$  sont proches d'une suite d'applications linéaires. La preuve initiale de Pugh a été simplifiée par Mai [92] (voir aussi [14]). Nous renvoyons à [185] pour une démonstration digeste de ce théorème.

## 2.6 Fermeture d'orbites : le “closing lemma”

Nous pouvons déduire du théorème 2.5 le célèbre “closing lemma” de Pugh.

**Théorème 2.7** (Lemme de fermeture, Pugh). *Pour tout voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f \in \text{Diff}^1(M)$  et tout  $p \in \Omega(f)$ , il existe  $g \in \mathcal{U}$  pour lequel  $p$  est un point périodique.*

À notre connaissance, il n'y a pas dans la littérature de démonstration directe du théorème de Pugh à l'aide du lemme de perturbation (par exemple, la démonstration de [143] requiert de modifier la géométrie des cubes de perturbation). Nous en proposons une, de nature combinatoire.

*Démonstration.* Fixons  $\varepsilon > 0$  tel que  $(1 + \varepsilon)^L \leq \frac{3}{2}$ ,  $L = 3^d$ , où  $d$  est la dimension de la variété. La constante  $\eta$  ne jouera pas de rôle et sera prise égale à  $\frac{1}{2}$ . Considérons un entier  $N \geq 1$  et une carte  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  au voisinage de  $p$ , donnés par le théorème 2.5 appliqué à un voisinage  $\mathcal{U}_0$  de  $f$  plus petit que  $\mathcal{U}$ . Nous pouvons supposer que  $p$  n'est pas périodique et donc que  $V$  est disjoint de ses  $N - 1$  premiers itérés.

Puisque  $p$  est non-errant, il existe deux points  $x_0, y_0$  proches de  $p$  tels que  $x_0$  soit un itéré futur de  $y_0$ . Nous considérons deux cubes  $\hat{C}_0$  et  $C_0 = \frac{1}{2}\hat{C}_0$  de  $\varphi$  tels que  $C_0$  contienne  $x_0$  et  $y_0$ . Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble (fini) des itérés intermédiaires entre  $x_0$  et  $y_0$  contenus dans  $V$ . Nous construisons

- des paires  $(x_k, y_k)$  de points de  $\mathcal{P}$  tels que  $x_k$  est un itéré futur de  $y_k$ ,
- des cubes  $\hat{C}_k$  de  $\varphi$  tels que le cube  $C_k = \frac{1}{2}\hat{C}_k$  contienne  $x_k$  et  $y_k$ ,

de sorte que  $\hat{C}_k$  soit contenu dans  $\hat{C}_{k-1}$  et de rayon moitié.

La construction se fait par récurrence (voir la figure 2.1). Puisque  $\mathcal{P}$  est fini, elle s'arrête en temps fini. Nous allons voir que l'arrêt correspond à l'existence de points  $x, y \in \hat{C}_0 \cap \mathcal{P}$  et d'un

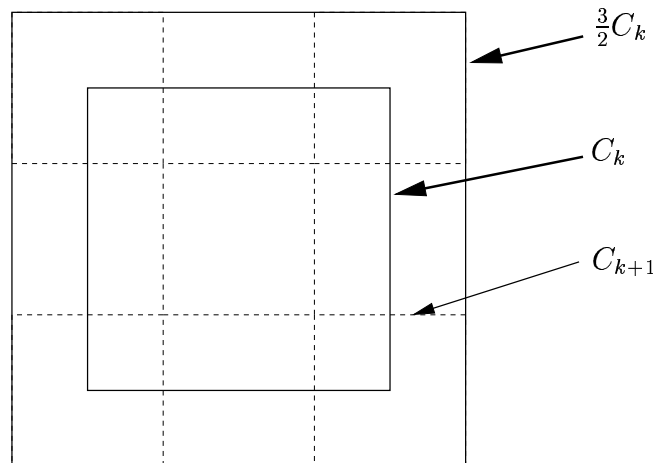


FIG. 2.1 – Construction des cubes  $C_k$ .

cube  $\hat{C}$  de  $\varphi$  tels que :

1.  $x = f^t(y)$  pour un entier  $t \geq 1$  ;
2.  $x, y$  appartiennent à  $C = \frac{1}{2} \cdot \hat{C}$  ;
3. les itérés intermédiaires  $f^s(y)$ ,  $0 < s < t$  n'appartiennent pas à  $(1 + \varepsilon) \cdot C$ .

Le théorème 2.5 permet alors de trouver un difféomorphisme  $g_0 \in \mathcal{U}_0$  tel que  $x$  est périodique. Puisque  $x$  est arbitrairement proche de  $p$ , il existe  $g \in \mathcal{U}$  conjugué à  $g_0$  tel que  $p$  est périodique.

Il reste à expliquer comment construire  $(x_{k+1}, y_{k+1}, \hat{C}_{k+1})$  à partir de  $(x_k, y_k, \hat{C}_k)$ . Le triplet  $T(0) = (x_k, y_k, \hat{C}_k)$  vérifie les propriétés 1 et 2. S'il ne vérifie pas 3, il existe un itéré  $z(1)$  intermédiaire entre  $x_k$  et  $y_k$  qui appartient à  $(1 + \varepsilon) \cdot C_k$ . Le triplet  $T(1) = (x_k, z(1), (1 + \varepsilon) \cdot \hat{C}_k)$  vérifie alors les propriétés 1 et 2. On peut répéter la construction tant que l'on ne parvient pas à satisfaire aux trois propriétés. On obtient ainsi une suite de triplets  $T(j) = (x_k, z(j), (1 + \varepsilon)^j \cdot \hat{C}_k)$  pour  $0 \leq j \leq L$ . Puisque  $(1 + \varepsilon)^L \leq \frac{3}{2}$ , les points  $z(j)$  appartiennent tous à  $\frac{3}{2} \cdot C_k$ . Le cube  $\frac{3}{2} C_k$  est réunion de  $3^d$  cubes de rayon moitié du rayon de  $C_k$ . Puisque  $L = 3^d$ , il existe donc deux points  $z(j)$  et  $z(j')$  qui sont contenus dans un même de ces cubes, noté  $C_{k+1}$ . Nous notons  $x_{k+1}$  et  $y_{k+1}$  ces points et posons  $\hat{C}_{k+1} = 2C_{k+1}$ .  $\square$

## 2.7 Exemple de démonstration de genericité : le théorème de densité de Pugh

Nous montrons à présent comment déduire un résultat de genericité (ici le théorème de densité de Pugh [137]) d'un énoncé perturbatif.

**Corollaire 2.8** (Pugh). *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  tel que l'ensemble des points périodiques de tout difféomorphisme  $f \in \mathcal{G}$  est dense dans l'ensemble non-errant  $\Omega(f)$ .*

La démonstration utilise la propriété classique suivante des espaces de Baire (voir [84]).

**Proposition 2.9.** *Soit  $\mathcal{B}$  un espace de Baire,  $X$  un espace compact métrique et  $h: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{K}(X)$  une application semi-continue inférieurement ou semi-continue supérieurement, à valeur dans l'espace des sous-ensembles compacts de  $X$ , muni de la topologie de Hausdorff. Alors, l'ensemble des points de continuité de  $h$  contient un  $G_\delta$  dense de  $\mathcal{B}$ .*

*En d'autres termes,*

- si pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , l'ensemble  $\{b \in \mathcal{B}, h(b) \cap U \neq \emptyset\}$  est ouvert, alors pour tout  $b_0$  dans un  $G_\delta$  dense de  $\mathcal{B}$  et pour tout voisinage  $U$  de  $h(b_0)$ , l'ensemble  $\{b \in \mathcal{B}, h(b) \subset U\}$  est un voisinage de  $b_0$  ;
- si pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , l'ensemble  $\{b \in \mathcal{B}, h(b) \subset U\}$  est ouvert, alors pour tout  $b_0$  dans un  $G_\delta$  dense de  $\mathcal{B}$  et pour tout voisinage  $U$  de  $h(b_0)$ , l'ensemble  $\{b \in \mathcal{B}, h(b) \cap U \neq \emptyset\}$  est un voisinage de  $b_0$ .

*Démonstration du corollaire 2.8.* Soit  $\mathcal{G}_0 \subset \text{Diff}^1(M)$  un  $G_\delta$  dense de difféomorphismes dont les points périodiques sont tous hyperboliques (donné par le théorème 2.1 de Kupka-Smale). C'est un espace de Baire. Soit  $P: \text{Diff}^1(M) \rightarrow \mathcal{K}(M)$  l'application qui associe à tout difféomorphisme  $f$  l'adhérence  $\overline{\text{Per}(f)}$  de ses points périodiques. Chaque point périodique possède une continuation hyperbolique et par conséquent  $P$  est semi-continue inférieurement. D'après la proposition 2.9 et le théorème de Baire, l'ensemble de ses points de continuité contient un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$ .

Pour  $f \in \mathcal{G}$  nous devons montrer que  $P(f)$  et  $\Omega(f)$  coïncident. Nous avons bien sûr l'inclusion  $P(f) \subset \Omega(f)$ . Considérons un point  $x \in \Omega(f)$  et un voisinage ouvert  $U$  de  $P(f)$ . Le lemme de fermeture donne l'existence d'un difféomorphisme  $g_0 \in \text{Diff}^1(M)$  proche de  $f$  tel que  $x$  est périodique. Par perturbation (donnée par le lemme de Franks, théorème 2.2), on peut supposer que  $x$  est hyperbolique; l'orbite de  $x$  peut donc être suivie par perturbation, il existe donc  $g \in \mathcal{G}_0$  proche de  $g_0$  et de  $f$  ayant un point périodique arbitrairement proche de  $x$ . Puisque  $P(g) \subset U$ , on en déduit que  $x$  appartient à  $\overline{U}$ . Le voisinage  $U$  étant arbitraire, ceci permet de conclure  $x \in P(f)$ . Par conséquent  $\Omega(f) = P(f)$ .  $\square$

## 2.8 Connexions d'orbites : le “connecting lemma”

Considérons deux points périodiques hyperboliques  $p, q$  et supposons que la variété instable de  $p$  et la variété stable de  $q$  aient un point d'accumulation commun  $z$ . Peut-on par perturbation  $C^1$  créer une orbite hétérocline entre  $p$  et  $q$ ? Cette question se pose naturellement lorsque l'on cherche à caractériser les difféomorphismes structurellement ou  $\Omega$ -stables (voir [73]) et a été contournée dans ce cadre par Mañé [98]. Lorsque  $z$  n'est pas périodique, la réponse a finalement été apportée par Hayashi [71] trente ans après la démonstration du lemme de fermeture.

**Théorème 2.10** (Lemme de connexion, Hayashi). *Soit  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $f \in \text{Diff}^1(M)$  et  $p, q, z$  trois points tels que :*

- les ensembles d'accumulation des orbites future de  $p$  et passée de  $q$  contiennent  $z$  ;
- le point  $z$  n'est pas périodique.

*Il existe alors  $g \in \mathcal{U}$  tel que  $q$  est un itéré futur de  $p$ .*

Ce résultat est également démontré dans [15, 186]. Il y a eu de nombreuses conséquences, voir par exemple [29, 15, 72, 45, 100, 16, 60] et la section 3.3. L'hypothèse que  $z$  n'est pas périodique sert dans la démonstration à placer en  $z$  un cube perturbatif (fourni par le théorème 2.5) disjoint d'un grand nombre d'itérés.

*Pourquoi est-il plus difficile de connecter que de fermer ?* Les lemmes de fermeture et de connexion semblent proches. Si l'on reprend la démonstration du lemme de fermeture, on place en  $z$  une carte  $\varphi$  fournie par le théorème 2.5 et dont le support est disjoint de  $N - 1$  premiers itérés. On considère un itéré futur  $p' = f^{n(p)}(p)$  de  $p$  et un itéré passé  $q' = f^{-n(q)}(q)$  de  $q$ , proches de  $z$ . Comme pour le lemme de fermeture, nous ne pouvons pas directement perturber et construire un difféomorphisme  $g$  tel que  $g^N(p') = f^N(q')$ , puisqu'une telle perturbation risque de briser les segments d'orbites entre  $p$  et  $p'$  et entre  $f^N(q')$  et  $q$  : nous ne serions pas certains que  $q$  soit sur l'orbite positive de  $p$ .

Fixons un voisinage  $V$  de  $z$  disjoint de ses  $N - 1$  premiers itérés. L'idée naturelle serait de trouver comme dans l'argument combinatoire de la section 2.6, deux itérés intermédiaires  $x$  entre  $p$  et  $p'$  et  $y$  entre  $q'$  et  $q$ , et un cube  $C$  de la carte les contenant, tels que le cube  $(1 + \varepsilon) \cdot C$  ne contiennent pas d'autre itéré de  $p$  ou de  $q$ . Pour cela, nous devons considérer l'ensemble  $\mathcal{P}$  de tous les itérés intermédiaires de  $p$  et  $q$  proches de  $z$ . Une difficulté nouvelle apparaît alors : nous devons sélectionner une paire de points de  $\mathcal{P}$ , mais à la différence du lemme de fermeture, cette paire doit contenir à la fois un itéré de  $p$  et un itéré de  $q$ . Les points de  $\mathcal{P}$  ne sont plus tous interchangeable et l'argument précédent ne fonctionne pas.



*La stratégie d'Hayashi.* L'argument d'Hayashi consiste à sélectionner plusieurs paires qu'il faudra connecter simultanément : on simplifie l'ensemble des retours  $\mathcal{P}$  en effaçant certains points. Si une même orbite possède deux itérés (par exemple deux itérés  $f^{n_1}(p)$  et  $f^{n_2}(p)$  de  $p$ ) qui seraient trop proches relativement à leur distance à la second orbite, nous pouvons dans ce cas considérer que ces deux points sont les mêmes, oublier les itérés intermédiaires entre ces deux points et espérer qu'une petite perturbation permettra de les connecter. En répétant cet argument, on sélectionne un grand nombre de paires de retour et nous devons appliquer, pour chacune d'elles, une perturbation donnée par le théorème 2.5. Une difficulté est de garantir que toutes ces perturbations ont des supports disjoints.

Plus précisément, notons  $\{p_0, p_1, \dots, p_r\}$  et  $\{q_{-s}, \dots, q_0\}$  les itérés de  $p$  et de  $q$  proches de  $z$ , i.e. appartenant à l'ensemble  $\mathcal{P}$ , et classés par ordre chronologique. On extrait ensuite une sous-suite de la forme  $(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_\ell, y_\ell)$  de sorte qu'il existe pour chaque  $i$  un difféomorphisme  $g_i = \psi_i \circ f$  qui satisfait  $g_i^N(x_i) = f^N(y_i)$ . Le support de  $\psi_i$  est contenu dans un petit cube  $\hat{C}_i$  proche de  $z$  et dans les  $N - 1$  premiers itérés de  $\hat{C}_i$ .

Supposons que :

1.  $x_0 = p_0, y_\ell = q_0$ ,
2. pour tout  $0 \leq i < \ell$ , le point  $x_{i+1}$  est le premier retour de l'orbite de  $y_i$  dans un voisinage de  $z$ .
3. les supports des différentes perturbations sont deux à deux disjoints.

En composant l'ensemble des perturbations  $g_i$  de  $f$ , on obtient alors un difféomorphisme  $g = \psi_0 \circ \dots \circ \psi_{N-1} \circ f \in \mathcal{U}$  envoyant  $p$  sur  $q$  par itérations positives. Après perturbation, le segment d'orbite entre  $p$  et  $q$  est plus court que la pseudo-orbite initiale  $(p, f(p), \dots, f^{n(p)}(p) = p', f(q') = f^{-n(q)+1}(q), \dots, f^{-1}(q), q)$ , voir la figure 2.2.

Le plus difficile est de choisir la sous-suite  $(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_\ell, y_\ell)$ . Elle s'obtient après deux sélections.

*Première sélection : les cubes quadrillés* Nous pavons tout d'abord un voisinage de  $z$  par des cubes de la carte  $\varphi$ , comme illustré en figure 2.3. Le voisinage lui-même est un cube  $\hat{C}_0$  et le cube central  $C_0 = \frac{1}{3} \cdot \hat{C}_0$  du pavage contient  $z$ . Nous pouvons supposer que les itérés  $p'$  et  $q'$  de  $p$  et de  $q$  sont contenus dans  $C_0$ . Nous notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des retours futurs de  $p$  et passés de  $q$  dans  $\hat{C}_0$ . Le pavage permet de déterminer s'il y a accumulation de points de  $\mathcal{P}$  dans une région du cube  $\hat{C}_0$ .

Nous extrayons une première sous-suite  $(x'_0, y'_0, x'_1, y'_1, \dots, x'_{\ell'}, y'_{\ell'})$  de  $(p_0, \dots, p_r, q_{-s}, \dots, q_0)$  satisfaisant les propriétés 1 et 2 ci-dessus, de sorte que

- pour tout  $0 \leq i \leq \ell'$ , les points  $x'_i$  et  $y'_i$  appartiennent à une même tuile  $T_i$  du pavage de  $\hat{C}_0$ ,
- chaque tuile du pavage contient au plus une paire  $(x'_i, y'_i)$ .

Nous avons utilisé ici de façon essentielle que les points  $p'$  et  $q'$  appartiennent à une même tuile du pavage. La suite extraite est représentée en figure 2.3.

En appliquant le théorème 2.5, on définit alors une suite de perturbations  $g'_i$  telles que  $(g'_i)^N(x'_i) = f^N(y'_i)$ . Elle ne permet pas de conclure la démonstration : si  $x_i, y_i$  appartiennent à une tuile  $T$  du pavage, le support de la perturbation  $g_i$  est contenu dans le cube  $(1 + \varepsilon) \cdot T$  et dans ses  $N - 1$  premiers itérés. S'il existe deux perturbations  $g'_i, g'_j$  associées à deux tuiles adjacentes, les supports des perturbations correspondantes risquent de s'intersecter et nous ne pouvons pas composer les perturbations.

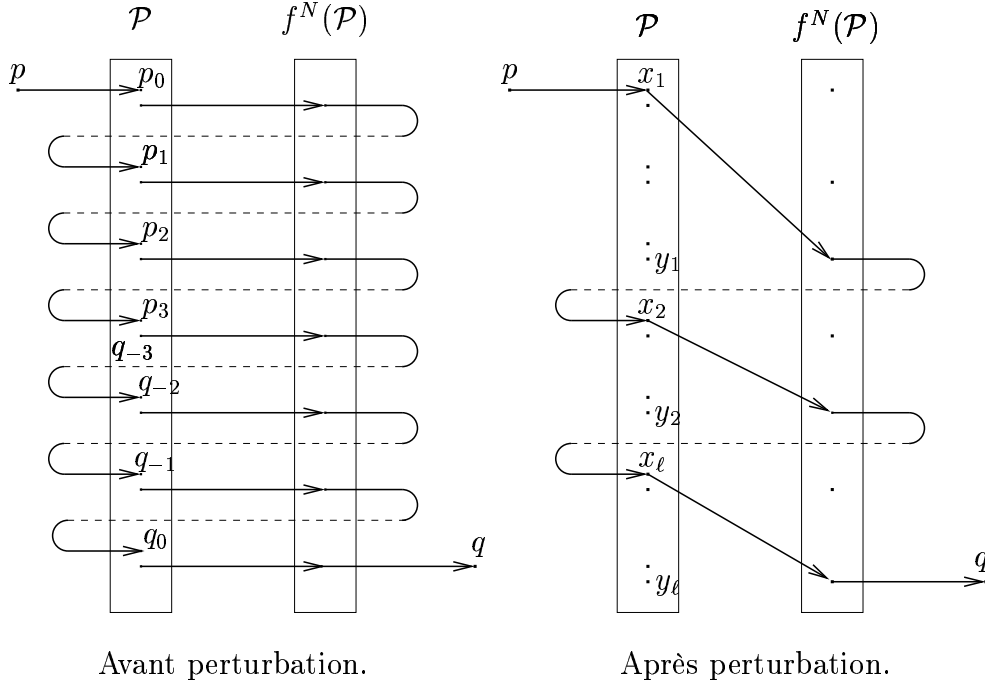


FIG. 2.2 – Combinatoire des perturbations réalisée par le lemme de connexion.

*Seconde sélection : les raccourcis.* Supposons que le support de deux perturbations  $g'_i$  et  $g'_j$  définies ci-dessus se chevauchent (remarquons que les supports peuvent être disjoints dans  $\hat{C}_0$  et se chevaucher dans des itérés  $f^k(\hat{C}_0)$  pour certains  $0 \leq k < N$ ). Cela implique que les points  $(x'_i, y'_i)$  (dans la tuile  $T_i$ ) et les points  $(x'_j, y'_j)$  (dans la tuile  $T_j$ ) ont des images proches pour un itéré  $f^k$ . Nous fixons un tel entier  $k$  et nous supposons  $i < j$ .

Afin de résoudre le conflit, nous remplaçons les deux perturbations  $g'_i, g'_j$  qui envoient respectivement  $x'_i$  sur  $f^N(y'_i)$  et  $x'_j$  sur  $f^N(y'_j)$ , par une seule perturbation envoyant  $x'_i$  sur  $f^N(y'_j)$  (figure 2.4) : il suffit pour cela de conserver la perturbation  $g'_i$  sur les itérés  $f^\ell(\hat{C}_0)$  pour  $0 \leq \ell < k$ , de conserver la perturbation  $g'_j$  sur les itérés  $f^\ell(\hat{C}_0)$  pour  $k < \ell < N$ , et d'utiliser sur  $f^k(\hat{C}_0)$  une perturbation élémentaire qui envoie  $g'^k_i(x'_i)$  sur  $g'^{k+1}_j(y'_j)$ . À l'issue de cette construction, on efface les paires de points intermédiaires  $(x'_s, y'_s)$  avec  $s \in \{i + 1, \dots, j - 1\}$  de la suite  $(x'_0, y'_0, x'_1, y'_1, \dots, x'_\ell, y'_\ell)$ , pour obtenir une nouvelle pseudo-orbite qui joint  $p$  à  $q$ . En d'autres termes, nous avons réalisé un raccourci au sein de la pseudo-orbite obtenue après la première sélection.

Les supports des perturbations  $g'_i$  et  $g'_j$  sont contenus dans des boules de rayon  $\eta$  fois plus petites que les distances  $d(\partial T_i, \partial((1 + \varepsilon) \cdot T_i))$  et  $d(\partial T_j, \partial((1 + \varepsilon) \cdot T_j))$  respectivement. En ayant choisi  $\varepsilon$  et  $\eta$  suffisamment petits, on en déduit que les tuiles  $T_i$  et  $T_j$  sont adjacentes et que le support de la nouvelle perturbation reste petit par rapport aux tailles des tuiles  $T_i, T_j$  et de leur  $N$  premiers itérés.

Nous poursuivons ces modifications tant que subsiste des conflits entre perturbations. Remarquons qu'à chaque fois qu'un conflit est levé, nous obtenons une nouvelle perturbation de support légèrement plus large que le support des perturbations précédentes. Par conséquent le

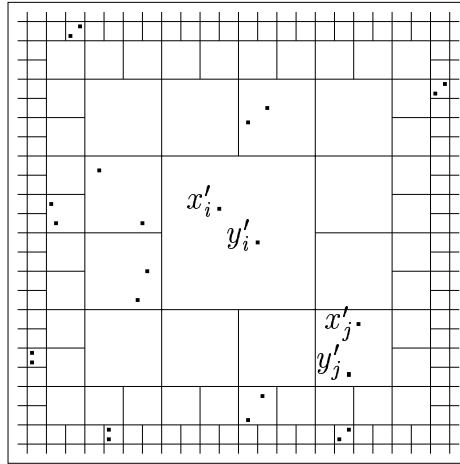


FIG. 2.3 – Un cube quadrillé et la première sélection.

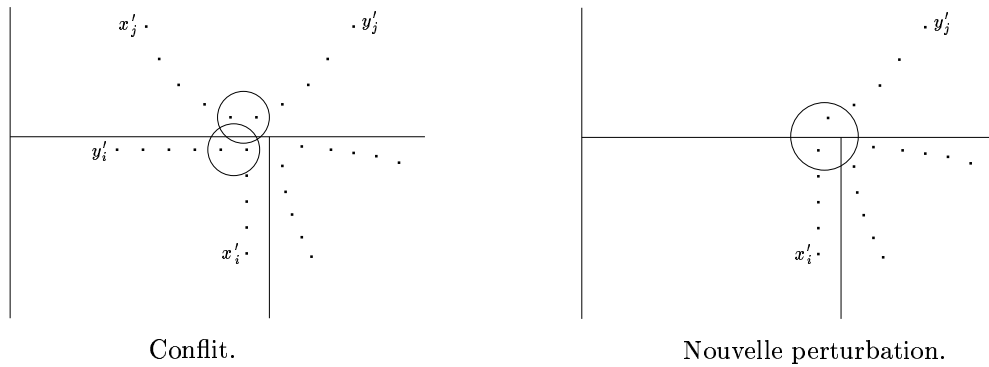


FIG. 2.4 – Un raccourci.

support de la nouvelle perturbation peut à son tour rencontrer le support d'une troisième perturbation  $g'_k$ . On peut se demander si le nombre de conflits successifs que l'on rencontre peut être arbitrairement grand, de sorte que le support de la perturbation finale devienne bien plus important que la taille de la tuile initiale  $T_i$ .

Ce n'est pas le cas : nous contrôlons a priori la taille des perturbations si bien que les conflits qui apparaissent sont toujours associés à des tuiles adjacentes à la tuile initiale  $T_i$ . Puisque la géométrie du pavage est uniforme, le nombre de tuiles adjacentes à  $T_i$  est borné (par  $4^d$ ) et partant de la perturbation initiale  $g'_i$ , il y aura au plus  $4^d$  conflits à résoudre. Si l'on choisit la constante  $\eta$  suffisamment petite, le support perturbation que l'on obtient après  $4^d$  conflits reste petit par rapport à la taille de la tuile  $T_i$ , justifiant ainsi le contrôle a priori des perturbations (voir la figure 2.5).

Après traitement des différents conflits, nous obtenons une nouvelle pseudo-orbite, une nouvelle suite  $(p_0 = x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_\ell, y_\ell = q_0)$  et une collection de perturbations  $(g_i)$  dont les supports sont deux-à-deux disjoints et telle que pour tout  $i$  on ait  $g_i^N(x_i) = y_i$ .

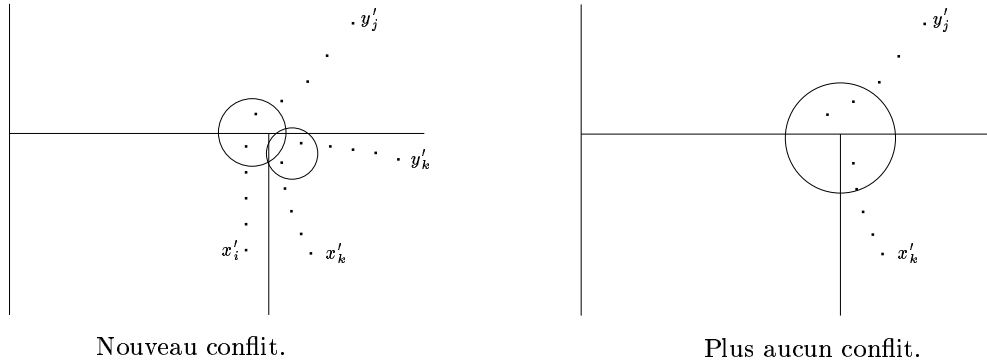


FIG. 2.5 – Le nombre de conflits est borné.

## 2.9 Espaces de perturbation

Les perturbations réalisées dans la preuve du lemme de Pugh et des différents lemmes de perturbations qui en découlent sont une succession de perturbations élémentaires données par le lemme 2.3 et de supports disjoints : nous appelons *support* d'un difféomorphisme  $h$  l'ensemble des points  $x \in M$  tels que  $h(x) \neq x$  ; le support d'une perturbation  $g$  de  $f$  est le support du difféomorphisme  $h = f \circ g^{-1}$ .

Cette remarque permet de travailler en restant dans des sous-espaces  $\mathcal{S}$  de  $\text{Diff}^1(M)$ , pourvu que les deux propriétés suivantes soit vérifiées.

- Le lemme 2.3 de perturbation élémentaire s'applique au sein de  $\mathcal{S}$ .
- Tout difféomorphisme  $f \in \mathcal{S}$  possède une base de voisinages  $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$  *flexibles*, i.e. satisfaisant pour tous difféomorphismes  $h_1, h_2 \in \text{Diff}^1(M)$  à supports disjoints

$$f \circ h_1 \in \mathcal{U} \text{ et } f \circ h_2 \in \mathcal{U} \implies f \circ h_1 \circ h_2 \in \mathcal{U}.$$

En particulier, le lemme de Pugh reste vrai si l'on travaille avec des difféomorphismes conservatifs (i.e. vérifiant une forme volume ou symplectique), ou même avec des difféomorphismes de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , pourvu que la topologie considérée soit la topologie  $C^1$ .

## 2.10 Problèmes

Il existe très peu de résultats perturbatifs en classe  $C^r$ ,  $r > 1$ .

**Question 2.11.** *Existe-t-il un lemme de fermeture en régularité supérieure ?*

Des difficultés ont été mises en évidence [139, 66, 76, 75, 77]. Des cas particuliers ont été traités [140], ainsi que le cas des flots sur les surfaces [127, 67, 68].

On peut se demander quels résultats persistent pour la dynamique des endomorphismes, i.e. des applications différentiables non injectives. Wen a étendu le lemme de fermeture à ce cadre [180], mais il n'existe pas de lemme de connexion.

**Question 2.12.** *Existe-t-il un lemme de connexion pour les endomorphismes ?*

Pour les difféomorphismes, le lemme de connexion reste valide lorsque  $z$  est périodique, si son orbite est hyperbolique, ou plus généralement s'il n'y a pas de résonance non triviale entre ses valeurs propres (voir la remarque 3.2 plus bas). Il serait intéressant pour les applications de ne plus avoir d'hypothèse sur le point  $z$ .

**Question 2.13.** *Le lemme de connexion reste-t-il vérifié lorsque le point  $z$  est périodique ?*

Hayashi a montré [72] un “make or break lemma” : si l'orbite future de  $x$  et l'orbite passée de  $y$  ont un point d'accumulation commun  $z$ , on peut alors perturber la dynamique en topologie  $C^1$  pour disjoindre ces ensembles d'accumulation, ou bien pour que  $y$  soit un itéré de  $x$ .

Terminons ce chapitre en remarquant qu'en l'absence de compacité le lemme de connexion est en général faux [142]. M.-C. Arnaud a donné une version non compacte [15] sous l'hypothèse additionnelle que l'orbite du point  $z$  a des points d'accumulation dans  $M$ .



## Chapitre 3

# Connexions de pseudo-orbites

Nous présentons le lemme de connexion pour les pseudo-orbites démontré dans [23, 17]). La démonstration nécessite de construire une section de la dynamique : on énonce pour cela un théorème d'existence de "tours topologiques", qui peut être utile pour d'autres applications (voir par exemple le chapitre 11).

### 3.1 Énoncé du lemme de connexion pour les pseudo-orbites

Rappelons que si  $K \subset M$  est un ensemble compact et  $x, y \in K$  deux points, nous notons  $x \dashv_K y$  lorsque pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite  $z_0 = x, z_1, \dots, z_n = y$  avec  $n \geq 1$  et contenue dans  $K$ .

**Théorème 3.1** (Lemme de connexion pour les pseudo-orbites, Bonatti-Crovisier ). *Soit  $\mathcal{U}$  un voisinage d'un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^1(M)$  dont les points périodiques sont hyperboliques. Pour tous points  $x, y \in M$  satisfaisant  $x \dashv y$ , il existe une perturbation  $g \in \mathcal{U}$  de  $f$  et  $n \geq 1$  tels que  $g^n(x) = y$ .*

*Remarques 3.2.* 1. Si l'on considère un ensemble compact  $K$  tel que  $x \dashv_K y$ , alors pour tout voisinage  $W$  on peut demander que la perturbation  $g$  soit à support dans  $W$ .

2. Dans [17], nous avons affaibli l'hypothèse sur le difféomorphisme. Il suffit de supposer que pour toute orbite périodique, il n'y a pas de résonance non triviale au sein des valeurs propres de module 1.

Plus précisément, pour toute orbite périodique, il n'y a pas de valeur propre qui soit racine de l'unité, les valeurs propres de module 1 sont simples, et il n'y a pas de relation de la forme

$$\lambda_0 = \prod_{j=1}^s \lambda_j^{k_j},$$

où les  $k_j$  sont des entiers strictement positifs et les  $\lambda_0, \bar{\lambda}_0, \lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s$  sont des valeurs propres de module 1 toutes distinctes.

### 3.2 Idée de la preuve

On ne peut clairement pas espérer connecter deux points liés par des pseudo-orbites en effectuant simplement une perturbation locale : nous allons devoir perturber indépendamment

dans plusieurs régions en utilisant les cubes quadrillés fournis par la démonstration du lemme de connexion d'Hayashi. En s'assurant que les supports des différentes perturbations sont disjoints, la section 2.9 garantit que la perturbation finale reste petite.

### a) Les domaines de perturbations

Considérons une carte  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Un *domaine quadrillé selon les coordonnées de  $\varphi$*  est la donnée d'un ouvert  $U \subset V$  et d'une famille  $\mathcal{C}$  de cubes de  $\varphi$  (appelés *tuiles du domaine*) tels que

1. les intérieurs des tuiles sont deux à deux disjoints ;
2. l'union des tuiles de  $\mathcal{C}$  est égale à  $U$  ;
3. la géométrie du quadrillage est bornée, i.e.
  - le nombre de tuiles est uniformément borné (par  $2^d$ ) au voisinage de chaque point,
  - pour toute paire  $(C, C')$  de tuiles adjacentes, le rapport de leur rayon est uniformément borné (par 2).

Par une construction standard, tout ouvert  $U \subset V$  peut être quadrillé selon les coordonnées de  $\varphi$  (voir la figure 3.1).

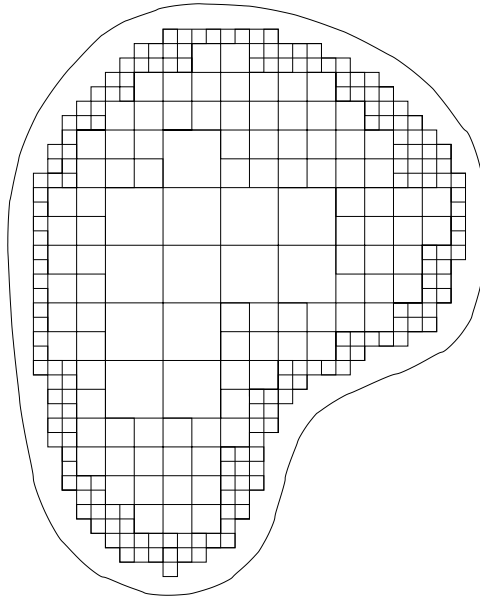


FIG. 3.1 – Domaine quadrillé.

Une pseudo-orbite  $(z_0, \dots, z_n)$  est à *sauts dans les tuiles* du domaine quadrillé  $(U, \mathcal{C})$  si pour tout  $0 \leq i < n$  les points  $f(z_i), z_{i+1}$  coïncident ou appartiennent à une même tuile de  $\mathcal{C}$ .

Finalement, si l'on fixe un voisinage  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  de  $f$ , un domaine quadrillé  $(U, \mathcal{C})$  et un entier  $N \geq 1$ , on dit que  $(U, \mathcal{C}, N)$  est un *domaine de perturbation pour  $(f, \mathcal{U})$*  si :

1.  $U$  est disjoint de ses  $N - 1$  premiers itérés par  $f$  ;
2. pour toute pseudo-orbite  $(z_0, \dots, z_n)$  avec  $z_0 \in U$  et  $z_n \in f^N(U)$  à sauts dans les tuiles  $\mathcal{C}$ , il existe une perturbation  $g \in \mathcal{U}$  de  $f$  à support dans  $U \cup f(U) \cup \dots \cup f^{N-1}(U)$  et un entier  $m \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $g^m(z_0) = z_n$ .



Le lemme de perturbation de Pugh (théorème 2.5) et le lemme de connexion d'Hayashi (théorème 2.10) assurent l'existence de domaines de perturbation.

**Théorème 3.3** (Existence de domaines de perturbation). *Pour tout voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$ , il existe un entier  $N \geq 1$  et, en tout point  $p \in M$ , il existe une carte  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  tels que pour tout domaine quadrillé  $(U, \mathcal{C})$  selon les coordonnées de  $V$  qui est disjoint de ses  $N - 1$  premiers itérés,  $(U, \mathcal{C}, N)$  est un domaine de perturbation de  $(f, \mathcal{U})$ .*

Le fait que l'entier  $N$  ne dépende pas du point  $p$  sera crucial dans la suite de la démonstration du théorème 3.1.

### b) Les tours topologiques

Afin de traiter des pseudo-orbites arbitraires, nous devons être en mesure de construire une collection de domaines de perturbation deux à deux disjoints qui couvrent l'espace des orbites de la dynamique. Le résultat suivant permet de construire une telle section de la dynamique.

**Théorème 3.4** (Tours topologiques, Bonatti-Crovisier). *Il existe  $\kappa_d > 0$  (ne dépendant que de la dimension  $d$  de la variété  $M$ ) tel que pour tout  $m \geq 1$  et tout difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^1(M)$  n'ayant pas de point périodique non hyperbolique de période inférieure à  $\kappa_d \cdot m$ , il existe un ouvert  $U \subset M$  et un ensemble compact  $D \subset U$  ayant les propriétés suivantes :*

- tout point qui n'est pas périodique de période inférieure à  $m$  possède un itéré dans  $D$  ;
- les ouverts  $U, \dots, f^{m-1}(U)$  sont deux à deux disjoints

*On peut choisir  $U$  pour que le diamètre de ses composantes connexes soit arbitrairement petit.*

La démonstration utilise le lemme de transversalité de Thom et se ramène à un problème combinatoire (exprimé en termes de coloriage).

### c) Lorsqu'il n'y a pas d'orbite périodique de basse période

Le lemme de perturbation de Pugh donne un entier  $N \geq 1$  et permet de couvrir la variété  $M$  par une famille finie de cartes  $\varphi_i: V_i \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Nous supposons pour simplifier que  $f$  n'a pas de point périodique de période inférieure à  $3\kappa_d \cdot N$ . Fixons deux points  $x, y \in M$  tels que  $x \dashv y$ .

Considérons un ouvert  $U$  disjoint de  $3N - 1$  itérés et un ensemble compact  $D \subset U$  donnés par le théorème 3.4. Quitte à remplacer  $U$  par  $f^N(U)$  ou par  $f^{2N}(U)$ , les points  $x, y$  n'appartiennent pas à  $U, f(U), \dots, f^{N-1}(U)$ . Puisque les composantes de  $U$  sont de diamètre petit, nous pouvons supposer que chacune d'entre elles est contenue dans l'une des cartes  $V_i$ . Finalement, nous quadrillons chaque composante de  $U$  selon une des cartes  $\varphi_i$  et nous construisons ainsi :

- une famille  $U_1, \dots, U_s$  de domaines de perturbations tels que  $f^k(U_i), f^\ell(U_j)$  sont disjoints pour tous  $0 \leq k, \ell < N$  et tous  $i \neq j$ ,
- une famille finie de tuiles  $\mathcal{T}$  contenue dans l'union des tuiles des domaines  $U_i, 1 \leq i \leq s$ , tels que toute orbite rencontre l'une des tuiles de  $\mathcal{T}$ .

En travaillant plus, on obtient par un argument de compacité :

- pour chaque tuile  $T \in \mathcal{T}$ , un ensemble compact  $\Delta \subset T$ ,
- un entier  $n_0 \geq 1$  et une constante  $\varepsilon_0 > 0$  tels que toute  $\varepsilon_0$ -pseudo-orbite de longueur  $n_0$  rencontre l'un des ensembles  $\Delta$ .

Considérons une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite  $x = \tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n = y$ . Si  $y$  n'est pas déjà un itéré positif de  $x$ , en prenant  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, nous pouvons supposer que la pseudo-orbite est de longueur supérieure à  $n_0$ . Nous pouvons différer les sauts de la pseudo-orbite (sur des intervalles de temps inférieurs à  $n_0$ ) et supposer qu'il n'ont lieu qu'aux points appartenant aux ensembles compacts  $\Delta$ . Si  $\varepsilon$  a été choisi petit, ceci assure la propriété suivante.

**Lemme 3.5.** *Il existe une pseudo-orbite  $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$  entre  $x$  et  $y$  à sauts dans les tuiles des domaines quadrillés  $U_1, \dots, U_s$ .*

Il ne reste plus qu'à perturber successivement dans chaque domaine de perturbation pour supprimer finalement l'ensemble des sauts de la pseudo-orbite et obtenir un segment d'orbite (en général plus court) qui joint  $x$  à  $y$ .

#### d) Lorsqu'il y a des points périodiques

En présence de points périodiques de basse période, la tour topologique ne couvre plus l'ensemble des orbites. De plus, lorsqu'une orbite s'approche d'une orbite périodique, le temps de retour dans la tour peut devenir arbitrairement long.

Dans ce cas, on utilise à nouveau que les points périodiques sont hyperboliques. Il existe une version du théorème 3.4 autorisant l'existence de points périodiques hyperboliques de petite période : il s'applique aux points qui n'appartiennent pas aux variétés invariantes des points périodiques de petite période. On rajoute de nouveaux domaines de perturbations qui couvrent des domaines fondamentaux des ensembles stables et instables des orbites périodiques de basse période. Le lemme 3.5 est encore vérifié, ce qui permet de conclure comme dans le cas précédent.

### 3.3 Conséquences immédiates

Il existe un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  formé de difféomorphismes pour lequel les propriétés suivantes sont vérifiées.

**a) Lieu de récurrence.** *Les ensembles  $\overline{\mathcal{P}er}(f)$ ,  $\Omega(f)$  et  $\mathcal{R}(f)$  coïncident.*

Il n'y a donc qu'une seule notion de récurrence. Rappelons que le lemme de fermeture de Pugh permettait déjà de conclure  $\overline{\mathcal{P}er}(f) = \Omega(f)$ .

**b) Ordre dynamique.** *Pour tout ensemble compact  $K$ , les relations  $\prec_K$  et  $\dashv_K$  coïncident.*

En particulier, les ensembles faiblement transitifs et les ensembles transitifs par chaînes coïncident ; les classes de récurrence par chaînes sont les ensembles faiblement transitifs maximaux. On en déduit aussi que la relation  $\prec_K$  est transitive (ce qui avait été montré précédemment par Arnaud [15], Gan et Wen [60]).

**c) Quasi-attracteurs.** *L'ensemble des points dont l'ensemble  $\omega$ -limite (i.e. l'ensemble des valeurs d'adhérence de son orbite future) est un quasi-attracteur contient un  $G_\delta$  dense de  $M$ .*

*Les quasi-attracteurs sont exactement les classes de récurrence par chaînes stables au sens de Lyapunov.*

*Une classe homocline  $H(p)$  est un quasi-attracteur si et seulement elle contient la variété instable de  $p$ .*

Ceci répond à une conjecture de Hurley [80] dans le cas  $C^1$  et améliore des résultats antérieurs de Arnaud [15], Morales et Pacifico [100].

Comme conséquence, une classe de récurrence par chaînes d'intérieur non vide est un quasi-attracteur à la fois pour  $f$  et  $f^{-1}$ .

**d) Classes homoclines et classes apériodiques.** *Les classes de récurrence par chaînes contenant une orbite périodique sont des classes homoclines.*

*Si  $O_1, O_2$  sont deux orbites périodiques telles que  $O_1 \dashv O_2$  et si l'indice de  $O_1$  est inférieur ou égal à celui de  $O_2$ , alors  $W^u(O_1)$  et  $W^s(O_2)$  ont un point d'intersection transverse  $z$  :*

$$T_z M = T_z W^u(O_1) + T_z W^s(O_2).$$

Les classes de récurrence par chaînes sans orbite périodique sont appelées *classes apériodiques*.

On obtient facilement d'autres propriétés.

- *Toute composante connexe de  $\text{Int}(\Omega(f))$  est entièrement contenue dans une classe homocline.*
- *Deux classes homoclines sont toujours disjointes ou confondues.*
- *Si deux orbites périodiques  $O_1$  et  $O_2$  ont même indice et sont contenus dans une même classe de récurrence par chaînes, elles sont homocliniquement reliés.*
- *Si  $O_1$  et  $O_2$  ont des indices différents et sont contenues dans une même classe de récurrence par chaînes, il existe une perturbation  $g \in \text{Diff}^1(M)$  de  $f$  telle que les continuations hyperboliques de  $O_1$  et  $O_2$  forment un "cycle hétérodimensionnel" : la variété instable de l'une rencontre la variété stable de l'autre (voir la section 8.2).*

Des versions antérieures plus faibles n'utilisant que le lemme de connexion d'Hayashi avaient été données par Arnaud [15], Bonatti et Díaz [29], Carballo, Morales et Pacifico [45], Gan et Wen [60].

**e) Classes isolées.** *Toute classe de récurrence par chaînes isolée dans  $\mathcal{R}(f)$  est une classe homocline  $H(p)$ . Pour tout difféomorphisme  $g$  proche de  $f$ , la classe de récurrence par chaînes contenant la continuation  $p_g$  de  $p$  est encore isolée.*

*Si  $f$  n'a qu'un nombre fini de classes de récurrence par chaînes, tout difféomorphisme proche de  $f$  a le même nombre de classes que  $f$ .*

La première version de ces propriétés avait été donnée par Abdenur [1, 2].

## 3.4 Exemples

Les exemples connus de dynamiques  $C^1$ -génériques non hyperboliques ont lieu en dimension supérieure ou égale à 3. Nous en citons quelques uns.

**a) Dynamiques robustement transitives.** Il existe des dynamiques non hyperboliques ayant une unique classe de récurrence par chaînes (voir la section 5.10).

**Théorème 3.6** (Shub [160]). *Il existe un ouvert non vide  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(\mathbb{T}^4)$  de difféomorphismes transitifs et non hyperboliques.*

Cet exemple est obtenu en modifiant un difféomorphisme d'Anosov. D'autres exemples similaires sur d'autres variété ont été donnés ensuite, voir [93, 41] et [35, chapitre 7]. Une autre méthode de construction, due à Bonatti-Díaz [28] consiste à perturber l'application "temps 1" d'un flot d'Anosov ou à perturber le produit d'un difféomorphisme d'Anosov et de l'application identité d'une variété compacte.

**b) Cycles hétérodimensionnels.** L'obstruction à l'hyperbolicité dans l'exemple précédent provient de l'existence (dans une même classe de récurrence par chaînes) de points périodiques d'indices différents. De tels exemples existent également pour des dynamiques qui ne sont pas transitives (voir la section 7.9).

**Théorème 3.7** (Abraham-Smale [10], Simon [165], Bonatti-Díaz [29]). *Pour toute variété compacte  $M$  de dimension  $d \geq 3$ , il existe un ouvert non vide  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  de difféomorphismes non transitifs et deux familles continues de points périodiques hyperboliques  $(p_g)_{g \in \mathcal{U}}$ ,  $(q_g)_{g \in \mathcal{U}}$  d'indices différents, ayant la même classe homocline pour tout  $g \in \mathcal{U}$ .*

La construction exploite le fait que l'ensemble stable d'un ensemble hyperbolique peut contenir des sous-variétés de dimension plus grande que la dimension du fibré stable. Le même résultat peut s'obtenir en utilisant les mélangeurs introduits par Bonatti et Díaz [28, 29].

**c) Phénomène de Newhouse.** Newhouse a construit [104, 106] des exemples de difféomorphismes de surface  $C^2$ -génériques ayant un comportement pathologique, aujourd'hui appelé *phénomène de Newhouse* : pour toute surface, il existe un ouvert non vide  $\mathcal{U}$  de l'espace des difféomorphismes de classe  $C^2$  et un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{U}$  tel que tout difféomorphisme  $f \in \mathcal{G}$  possède une infinité de puits ou de sources. Bonatti et Díaz ont ensuite utilisé les mélangeurs pour obtenir le même résultat en topologie  $C^1$  sur les variétés de dimension supérieure ou égale à 3 (voir aussi la section 7.9).

**Théorème 3.8** (Bonatti-Díaz [29]). *Pour toute variété compacte  $M$  de dimension  $d \geq 3$ , il existe un ouvert non vide  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  et un  $G_\delta$  dense de  $\mathcal{U}$  formé de difféomorphismes ayant une infinité de puits et de sources.*

**d) Classes apériodiques.** Bonatti et Díaz ont également montré que les classes apériodiques peuvent apparaître parmi les difféomorphismes  $C^1$ -génériques (voir aussi la section 8.6). Leur construction montre aussi que l'on peut trouver des classes de récurrence par chaînes (des classe homoclines ainsi que des classes apériodiques) qui sont accumulées en topologie de Hausdorff par des classes de récurrence par chaînes non triviales (ce ne sont pas des orbites périodiques isolées) ; pour ces dynamiques l'ensemble des classes de récurrence par chaînes est non dénombrable.

**Théorème 3.9** (Bonatti-Díaz [30]). *Pour toute variété  $M$  de dimension supérieure ou égale à 3, il existe un ouvert non vide  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  et un  $G_\delta$  dense de  $\mathcal{U}$  formé de difféomorphismes ayant un nombre non dénombrable de classes apériodiques.*

**e) Absence d'attracteurs.** Il est possible de garantir que tous les quasi-attracteurs sont accumulés par des sources : dans ce cas, il n'y a pas de classe de récurrence par chaînes qui est un attracteur.

**Théorème 3.10** (Bonatti-Li-Yang [39]). *Pour toute variété  $M$  de dimension supérieure ou égale à 3, il existe un ouvert non vide  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  et un  $G_\delta$  dense de  $\mathcal{U}$  formé de difféomorphismes n'ayant pas d'attracteur : il n'y a pas d'ouvert non vide attractif dont l'intersection des itérés est une classe de récurrence par chaînes.*

### 3.5 Problèmes

Voici quelques questions formulées pour les dynamiques  $C^1$ -génériques : nous demandons s'il existe un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  sur lequel on peut donner une réponse affirmative à chacune d'entre elle.

**a) Structure des classes apériodiques.** Rappelons que les classes homoclines sont toujours transitives.

**Question 3.11.** *Les classes apériodiques sont-elle toujours transitives ?*

Les classes apériodiques décrites par [30] sont (voir la section 8.6) :

- minimales et uniquement ergodiques (ce sont des odomètres),
- Lyapunov stables pour  $f$  et  $f^{-1}$  (ou “dynamiquement isolées”), i.e. il existe des voisinages ouverts arbitrairement petits  $U, V$  de la classe apériodique vérifiant  $f(\bar{U}) \subset U$  et  $f^{-1}(\bar{V}) \subset V$ .

On peut se demander si c'est toujours le cas.

**b) Cardinalité de l'ensemble des classes de récurrence par chaînes.**

**Question 3.12.** *Le nombre de classes de récurrence par chaînes est-il toujours fini ou infini non dénombrable ?*

Les difféomorphismes présentant le phénomène de Newhouse sont souvent des exemples de dynamiques pour lesquels la cardinalité de l'ensemble des classes de récurrence par chaînes n'est pas connue : peut-il exister un difféomorphisme qui présente le phénomène de Newhouse et qui n'aurait qu'un nombre dénombrable de classes de récurrence par chaînes ?

**c) Robustesse des classes isolées.** Une classe de récurrence par chaîne isolée dans  $\mathcal{R}(f)$  est une classe homocline  $H(p)$ . Pour tout difféomorphisme  $g$  proche de  $f$ , la classe de récurrence par chaînes contenant la continuation hyperbolique  $p_g$  de  $p$  est encore isolée et pour tout difféomorphisme proche appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$ , cette classe coïncide avec la classe homocline  $H(p_g)$  (voir [2]). Cette propriété deviendrait *robuste* si l'on parvenait à remplacer l'ensemble  $G_\delta$  par un ensemble ouvert.

**Question 3.13.** *Pour toute classe homocline  $H(p)$  de  $f$  isolée dans  $\mathcal{R}(f)$ , existe-t-il un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$  tel que  $H(p_g)$  est encore isolée pour tout difféomorphisme  $g \in \mathcal{U}$  ?*

Ceci montrerait que les classe homoclines isolées sont des ensembles “robustement transitifs” au sens de [33].

**d) Classes d'intérieur non vide.**

**Question 3.14.** *Si  $M$  est connexe, une classe de récurrence par chaînes d'intérieur non vide coïncide-t-elle avec  $M$  ?*

Nous avons montré [5] que c'est le cas en dimension deux. C'est aussi le cas lorsque la classe est isolée (voir Abdenur-Bonatti-Díaz [8]). En dimension supérieure des résultats partiels existent (voir [8], ou les travaux de Potrie et Sambarino [135, 134]), lorsque la classe est partiellement hyperbolique ou admet certaines décomposition dominées (voir le chapitre 5).

Une classe de récurrence par chaînes d'intérieur non vide est une classe homocline qui est stable au sens de Lyapunov pour  $f$  et  $f^{-1}$ . Les classes apériodiques étudiées dans [30] sont stables au sens de Lyapunov pour  $f$  et  $f^{-1}$ . Nous pouvons donc étendre la question précédente aux classe homoclines stables au sens de Lyapunov pour  $f$  et  $f^{-1}$  (voir [134]).

**e) Attracteurs.** Les exemples [39] de dynamiques sans attracteurs possèdent des *attracteurs essentiels* : ce sont des classes de récurrence par chaînes  $K$  ayant un voisinage  $U$  tel que l'orbite positive de tout point contenu dans un  $G_\delta$  dense de  $U$  s'accumule dans  $K$ . De plus, l'union des bassins des attracteurs essentiels est dense dans la variété.

**Question 3.15.** *Existe-t-il toujours un attracteur essentiel ?*

*L'union des bassins des attracteurs essentiels contient-il un  $G_\delta$  dense de  $M$  ? un ensemble de mesure de Lebesgue totale ?*

On peut aussi étudier les attracteurs essentiels. Remarquons que les classes apériodiques construites dans [30] sont des quasi-attracteurs dont le bassin est trivial.

**Question 3.16.** *Une classe homocline qui est un quasi-attracteur est-elle un attracteur essentiel ? (ou attire-t-elle un  $G_\delta$  dense d'un ouvert non vide de  $M$  ?)*

*Un attracteur essentiel est-il toujours une classe homocline ?*

Une réponse affirmative à la première question répondrait également à la question 3.14. Nous donnerons des réponses à ces questions pour les dynamiques loin des tangences homoclines (section 9.11) et pour les dynamiques loin des tangences homoclines et des cycles hétérodimensionnels (chapitre 10).

## Chapitre 4

# Connexions globales

Le lemme de fermeture permet de construire des points périodiques dans tout ouvert qui rencontre l'ensemble non-errant, mais il ne donne pas de contrôle sur le support des orbites périodiques créées. Dans ce chapitre, nous répondons à la question suivante.

*Étant donnés des ouverts  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , peut-on perturber la dynamique et obtenir une orbite périodique qui rencontre tous ces domaines ?*

En s'appuyant sur le lemme de perturbation de Pugh, nous démontrons le lemme de fermeture ergodique de Mañé : lorsqu'il existe une mesure ergodique  $\mu$  chargeant chaque ouvert, on peut créer une orbite périodique qui passe au moins une fraction de temps proche de  $\mu(U_i)$  dans  $U_i$  pour tout  $i$ .

Nous présentons également une propriété de pistage faible et donnons de nouvelles démonstrations de certains résultats issus de [49] : lorsqu'il existe un ensemble transitif par chaînes qui intersecte tous les  $U_i$ , on peut obtenir une orbite qui visite chacun de ces ouverts (mais nous ne contrôlons pas la statistique des visites).

### 4.1 Approximation des mesures ergodiques par orbites périodiques : l' "ergodic closing lemma"

Mañé a donné [94, 97] une contrepartie mesurée du lemme de fermeture de Pugh.

**Théorème 4.1** (Lemme de fermeture ergodique, Mañé). *Soit  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $f \in \text{Diff}^1(M)$  et  $\mu$  une mesure de probabilité  $f$ -invariante. Alors  $\mu$ -presque tout point  $x \in M$  a la propriété suivante. Pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $g \in \mathcal{U}$  et  $\tau \geq 1$  tels que  $x$  soit  $\tau$ -périodique pour  $g$  et tels que pour tout  $1 \leq k \leq \tau$ , on ait*

$$d(f^k(x), g^k(x)) \leq \delta.$$

En fixant le point  $x$  et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, les orbites périodiques  $\{x, g(x), \dots, g^{\tau-1}(x)\}$  s'équidistribuent comme l'orbite de  $x$  sous  $f$  : lorsque  $\mu$  est ergodique, elle converge donc faiblement vers  $\mu$ . Ce résultat est amélioré dans [4, Proposition 6.1] par un contrôle des exposants des mesures périodiques (voir la section 5.5).

**Addendum 4.2** (Abdenur-Bonatti-Crovisier). *On peut demander dans la conclusion du théorème 4.1 que le  $i^{\text{ème}}$  exposant de Lyapunov de  $x$  pour  $g$  soit  $\varepsilon$ -proche du  $i^{\text{ème}}$  exposant de Lyapunov de  $\mu$  pour  $f$ .*

On en déduit un résultat de généralité (voir [4, théorème 3.8]).

**Corollaire 4.3.** *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que toute mesure de probabilité  $\mu$  ergodique pour un difféomorphisme  $f \in \mathcal{G}$  est approchée faiblement par une suite de mesures invariantes portées par des orbites périodiques  $O_n$  de  $f$ . De plus, les orbites  $O_n$  convergent vers le support de  $\mu$  en topologie de Hausdorff et le vecteur de Lyapunov de  $O_n$  converge vers le vecteur de Lyapunov de la mesure  $\mu$ .*

Nous donnons ci-après une démonstration du lemme de fermeture ergodique à partir du théorème 2.5 de Pugh. Pour montrer l'addendum 4.2, nous choisissons un point  $x$  qui est régulier pour  $\mu$ , i.e. dont l'espace tangent admet une décomposition  $T_x M = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$  satisfaisant le théorème d'Oseledets (voir la section 5.5). Dans une carte autour de  $x$ , la différentielle  $D_x g^\tau$  peut s'écrire sous la forme  $P \circ D_x f^\tau$ , où  $P$  est une isométrie de  $\mathbb{R}^d$  que l'on peut choisir dans un voisinage de l'identité. On prendra  $P$  de sorte que pour tous  $i \leq j$ , l'image  $D_x g^\tau \cdot E_{i,j}$  de l'espace  $E_{i,j} = E_i \oplus \dots \oplus E_j$  est dans un cône uniforme autour de  $E_{i,j}$ . Pour une période  $\tau$  suffisamment grande, ceci garantit que les exposants de Lyapunov de  $x$  pour  $f$  et  $g$  sont proches.

**Démonstration du lemme de fermeture ergodique (théorème 4.1).** Il suffit de fixer  $\delta > 0$  et de montrer que  $\mu$ -presque tout point  $x \in M$  satisfait la conclusion du théorème 4.1 pour cette constante  $\delta$ .

Nous pouvons supposer que  $\mu$  n'est pas supportée par une orbite périodique :  $\mu$ -presque tout point  $p$  appartient au support de  $\mu$  et n'est pas périodique. Fixons  $L \geq 1$  tel que  $(3/2)^L \geq 2^{d+1}$  et  $\varepsilon > 0$  pour que  $(1 + \varepsilon)^L < \frac{3}{2}$  et posons  $\eta = \frac{1}{2}$ . Le théorème 2.5 pour  $f^{-1}$  nous donne un entier  $N \geq 1$  et une carte  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  au voisinage de  $p$ , telle que  $\varphi(V)$  coïncide avec le cube standard  $C_0 = (-1, 1)^d$  et telle que les  $N$  premiers itérés de  $V$  par  $f^{-1}$  soient disjoints et de diamètre inférieur à  $\delta$ . On note  $\nu = \varphi^* \mu$ . Soit  $X$  l'image par  $\varphi$  des points  $x \in V$  qui vérifient la conclusion du théorème. On doit montrer que  $\nu(X) = \nu(C_0)$ .

Comme avant, les cubes de  $\mathbb{R}^d$  que nous considérons sont des images du cube standard  $[-1, 1]^d$  par une homothétie-translation. Un *bon cube*  $C$  est un cube de  $C_0$  vérifiant  $(1 + \varepsilon) \cdot C \subset C_0$  et  $\nu(C) > \frac{2}{3} \nu((1 + \varepsilon) \cdot C)$ . Dans ce cas, il existe un ensemble ayant mesure plus grande que  $\frac{1}{2} \nu(C)$  formé de points  $x \in \varphi^{-1}(C)$  dont le premier retour  $f^\tau(x)$  dans  $\varphi^{-1}((1 + \varepsilon) \cdot C)$  est contenu dans  $\varphi^{-1}(C)$ . On peut alors appliquer le lemme de perturbation de Pugh (théorème 2.5) au cube  $\varphi^{-1}(C)$  de la carte  $\varphi$  pour obtenir un difféomorphisme  $g \in \mathcal{U}$  tel que  $f$  et  $g$  coïncident le long de l'orbite  $\{x, \dots, f^{\tau-N}(x)\}$  et  $g^\tau(x) = x$ . En particulier  $\nu(X \cap C) \geq \frac{1}{2} \nu(C)$ .

Supposons par l'absurde que l'ensemble  $C_0 \setminus X$  soit de mesure non nulle. On fixe  $\ell \geq 1$  grand et on considère le pavage de  $C_0$  par des cubes d'intérieurs deux à deux disjoints et de taille  $2^{-\ell}$ . Par régularité de la mesure  $\nu$ , on peut trouver une collection  $\mathcal{C}$  de cubes du pavage qui approxime  $C_0 \setminus X$  :

- d'une part  $2 \cdot \mathcal{C} \subset C_0$  pour tout  $C \in \mathcal{C}$  ;
- d'autre part l'union  $Y$  des cubes  $C$  et l'union  $\hat{Y}$  des cubes  $2 \cdot C$  pour  $C \in \mathcal{C}$  vérifient :

$$\nu(\hat{Y} \cap X) \ll \nu(Y \setminus X). \quad (4.1.1)$$

Remarquons que l'on peut "séparer" les cubes de la famille  $\mathcal{C}$  : il existe une partition de  $\mathcal{C}$  en  $2^d$  familles de cubes tels que pour tous cubes  $C_1, C_2$  appartenant à une même famille, les cubes  $2 \cdot C_1, 2 \cdot C_2$  sont d'intérieurs disjoint. Pour l'une de ces familles, l'union des cubes est de mesure supérieure à  $2^{-d} \nu(Y)$ , donc quitte à remplacer  $\mathcal{C}$  par cette famille, (4.1.1) est toujours satisfaite



et de plus,

$$\text{Pour tous } C_1, C_2 \in \mathcal{C}, \text{ les cubes } 2.C_1, 2.C_2 \text{ sont d'intérieurs disjoints.} \quad (4.1.2)$$

Nous utilisons maintenant le résultat suivant.

**Affirmation.** *Pour tout cube  $C \in \mathcal{C}$ , il existe un cube  $C'$  tel que :*

- i)  $(1 + \varepsilon).C' \subset 2.C$  (et en particulier  $C' \subset \hat{Y}$ );*
- ii)  $C'$  est un bon cube (et donc  $\nu(C' \cap X) \geq \frac{1}{2}\nu(C')$ );*
- iii)  $\nu(C') \geq 2^{-d}\nu(C)$ .*

*Démonstration.* La preuve se fait par l'absurde : on construit par récurrence une suite de cubes  $(C_n)_{n \geq 1}$  satisfaisant  $C_1 = C$  et  $2.C_n \subset 2.C_{n-1}$ ,  $\nu(C_n) \geq 2\nu(C_{n-1})$  pour tout  $n > 1$ . En particulier  $2.C_n$  est contenu dans  $2.C$  et la mesure des cubes  $C_n$  est supérieure à  $\nu(C)$  et croît exponentiellement avec  $n$ . C'est une contradiction.

On construit  $C_{n+1}$  à partir de  $C_n$  de la façon suivante : on divise  $C_n$  en  $2^d$  cubes de même rayon et d'intérieurs deux à deux disjoints. L'un d'eux, noté  $C'_n$ , est de mesure supérieure à  $2^{-d}\nu(C_n) \geq 2^{-d}\nu(C)$ . Les cubes  $(1 + \varepsilon)^k.C'_n$ ,  $0 \leq k \leq L$ , vérifient donc (iii). Puisque  $(1 + \varepsilon)^L < 3/2$ , on a  $2.(1 + \varepsilon)^L.C'_n \subset 2.C_n$ . Les cubes  $(1 + \varepsilon)^k.C'_n$ ,  $0 \leq k \leq L$ , vérifient donc également (i). Par hypothèse, (ii) n'est donc pas satisfaite et on obtient pour tout  $0 \leq k \leq L$ ,

$$2/3 \nu((1 + \varepsilon)^{k+1}.C'_n) \geq \nu((1 + \varepsilon)^k.C'_n).$$

En posant  $C_{n+1} = (1 + \varepsilon)^L.C_n$ , ceci implique

$$\nu(C_{n+1}) \geq (3/2)^L \nu(C'_n) \geq (3/2)^L 2^{-d} \nu(C_n) \geq 2\nu(C_n).$$

Ceci conclut la construction de la suite  $(C_n)$ . □

Si l'on applique l'affirmation à chaque cube  $C \in \mathcal{C}$ , on obtient donc un cube  $C'$  contenu dans l'intérieur de  $2.C$ . D'après (4.1.2) et (i), les cubes  $C'$  sont deux à deux disjoints. En particulier, leur union  $Y'$  vérifie d'après (ii) et (iii) :

$$\nu(\hat{Y} \cap X) \geq \nu(Y' \cap X) \geq \frac{1}{2}\nu(Y') \geq 2^{-(d+1)}.\nu(Y).$$

Ceci contredit (4.1.1). La mesure de  $X$  est donc pleine dans  $C_0$ . Ceci achève la démonstration du lemme de fermeture ergodique. □

## 4.2 Approximation des ensembles transitifs par chaînes par orbites périodiques

Il est naturel de se demander si l'on peut approcher un ensemble transitif par chaînes  $K$  par une orbite périodique, ou plus simplement par un segment d'orbite.

*Une difficulté : les raccourcissements d'orbites.* Si la dynamique est générique, on peut supposer que  $K$  est faiblement transitif. À l'aide du lemme de connexion, on peut assez facilement construire un segment d'orbite  $\sigma$  qui visite trois points quelconques  $x, y, z \in K$  : puisque  $K$  est faiblement transitif, il suffit de connecter en  $y$  un segment d'orbite joignant  $x$  à  $y$  avec un segment d'orbite joignant  $y$  à  $z$ . Une difficulté apparaît lorsque l'on cherche à connecter plus de points : si l'on connecte  $\sigma$  avec un segment d'orbite  $\gamma$  joignant  $z$  à un quatrième point  $t \in K$ , nous n'obtenons en général pas une orbite qui visite les quatre points  $x, y, z, t$ . En effet, si l'on applique le lemme de connexion, on obtient un segment d'orbite qui est souvent plus court que la concaténation des segments  $\sigma$  et  $\gamma$  (voir la section 2.8).

Nous avons montré dans [49] que de telles connexions globales peuvent être réalisées en prenant plus de précautions. Comme pour les lemmes de connexion précédents, nous avons besoin d'une hypothèse technique, un peu plus faible cette fois, sur les orbites périodiques du difféomorphisme.

(I) Pour tout entier  $\tau_0 \geq 1$ , les points périodiques de période  $\tau_0$  sont isolés dans  $M$ .

Nous disons qu'un ensemble fermé invariant  $K$  est une *orbite faible* si la relation  $\prec_K$  est un ordre total sur  $K$ , i.e.  $\prec_K$  est transitive et pour tous points  $x, y \in K$  distincts on a  $x \prec_K y$  ou  $y \prec_K x$  (on peut avoir les deux relations à la fois et il peut exister des points  $x \in K$  tels que  $x \prec_K x$  n'ait pas lieu). Par exemple l'adhérence, d'une orbite est toujours une orbite faible.

**Théorème 4.4** (Lemme de connexion globale, Crovisier). *Soit  $\mathcal{U}$  un voisinage d'un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^1(M)$  vérifiant (I). Pour tout  $\eta > 0$ , les propriétés suivantes sont satisfaites.*

- Pour tout ensemble faiblement transitif  $K$ , il existe  $g \in \mathcal{U}$  et une orbite périodique  $O$  de  $g$  qui est à distance de Hausdorff de  $K$  inférieure à  $\eta$ .
- Pour toute orbite faible  $K$ , il existe  $g \in \mathcal{U}$  et une orbite  $\{g^n(x)\}$  de  $g$  dont l'adhérence est à distance de Hausdorff de  $K$  inférieure à  $\eta$ .

On en déduit un lemme de pistage faible satisfait par les difféomorphismes  $C^1$ -génériques.

**Corollaire 4.5** (Pistage faible). *Il existe un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  formé de difféomorphismes vérifiant la propriété suivante.*

*Pour tout  $\delta > 0$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que toute  $\varepsilon$ -pseudo-orbite  $\{z_0, \dots, z_n\}$  est  $\delta$ -proche d'un segment d'orbite fini  $\{x, f(x), \dots, f^m(x)\}$  pour la distance de Hausdorff.*

*Si de plus  $Z$  est périodique (i.e.  $z_n = z_0$ ), on peut choisir  $x$  périodique.*

En particulier, on obtient l'approximation des ensembles transitifs par chaînes par orbites périodiques.

**Corollaire 4.6.** *Il existe un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  formé de difféomorphismes vérifiant les propriétés suivantes.*

- Un ensemble compact est transitif par chaînes si et seulement s'il est limite de Hausdorff d'une suite d'orbites périodiques.
- Les classes apériodiques sont limites de Hausdorff de classes homoclines.

Arnaud avait montré dans un travail antérieur [16] que pour un difféomorphisme  $C^1$ -générique, les ensembles  $\omega$ -limites sont limite de Hausdorff d'orbites périodiques.

Le corollaire 4.5 donne aussi des informations sur la dynamique entre les classes de récurrence par chaînes : pour tout difféomorphisme  $C^1$ -générique, si l'on considère une suite de classes de récurrence par chaînes  $K_1, \dots, K_s$ , vérifiant  $K_i \dashv K_{i+1}$  pour tout  $1 \leq i < s$ , et des voisinages  $U_1, \dots, U_s$ , il existe une orbite qui visite successivement chaque ouvert  $U_i$ .

### 4.3 Démonstration du pistage faible

La démonstration du théorème 4.4 est assez délicate puisqu'elle requiert de perturber la dynamique en plusieurs endroits. Nous allons démontrer un résultat plus faible qui impliquera le corollaire 4.5.

**Théorème 4.7** (Pistage faible, Crovisier). *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que, pour tout  $f \in \mathcal{G}$ , pour tout ensemble fermé  $K \subset M$  (non nécessairement invariant), pour tous points  $z_1, \dots, z_n \in K$  vérifiant  $z_1 \dashv_K z_2 \dashv_K \dots \dashv_K z_n$ , et pour tout  $\delta > 0$ , il existe un segment d'orbite  $\{x, \dots, f^m(x)\}$  contenu dans le  $\delta$ -voisinage de  $K$  qui rencontre chaque boule centrée en  $z_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de rayon  $\delta$ .*

*Si de plus on a  $z_n \dashv_K z_1$ , alors  $x$  peut être choisi périodique.*

Pour la suite, on introduira pour tout  $f \in \text{Diff}^1(M)$  l'ensemble  $\mathbf{Seg}(f)$  des parties compactes de  $M$  (non nécessairement invariantes) qui sont limites de Hausdorff d'une suite de segments d'orbite finis ainsi que l'ensemble  $\mathbf{pSeg}(f)$  des parties compactes de  $M$  (non nécessairement invariantes) qui sont limites de Hausdorff pour tout  $\varepsilon > 0$  d'une suite de segments de  $\varepsilon$ -pseudo-orbites finis. Finalement  $\mathbf{Per}(f)$  désigne l'ensemble des parties compactes (invariantes) de  $M$  qui sont limites d'une suite d'orbites périodiques et  $\mathbf{pTrans}(f)$  celles qui sont transitives par chaînes.

*Démonstration du corollaire 4.5 à partir du théorème 4.7.* Considérons  $f$  appartenant à l'ensemble résiduel  $\mathcal{G}$  donné par le théorème 4.7. Lorsque  $\delta > 0$  est fixé, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que tout segment de  $\varepsilon$ -pseudo-orbite est  $\delta/2$ -proche d'un élément  $K$  de  $\mathbf{pSeg}(f)$ . D'après le théorème 4.7, il existe un segment d'orbite fini de  $f$  qui est  $\delta/2$ -proche de  $K$  pour la distance de Hausdorff. Ceci démontre la première partie du corollaire 4.5.

Le même argument montre que pour  $\varepsilon$  assez petit, toute  $\varepsilon$ -pseudo-orbite périodique est  $\delta/2$ -proche d'un élément  $K$  de  $\mathbf{pTrans}(f)$ . D'après le théorème 4.7, il existe une orbite périodique de  $f$  qui est  $\delta/2$ -proche de  $K$  pour la distance de Hausdorff.  $\square$

*Démonstration du théorème 4.7 : le cas non récurrent.* L'application  $f \mapsto \mathbf{Seg}(f)$  est semi-continue inférieurement sur  $\text{Diff}^1(M)$ . Il existe donc un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  de difféomorphismes qui sont des points de continuité de cette application, qui sont Kupka-Smale, et qui satisfont à la seconde propriété de la section 3.3 ( $\dashv_K = \dashv_K$  pour tout ensemble compact  $K$ ). Nous considérons à présent un élément  $f \in \mathcal{G}$ . Nous montrons la première partie du théorème par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 1$  est évident. Remarquons aussi que nous pouvons toujours supposer que les points  $z_j$  appartiennent à des orbites distinctes (quitte à supprimer certains points) et supposer qu'ils ne sont pas périodiques (qui à les remplacer par des points proches, puisque  $f$  est un difféomorphisme dont tous les points périodiques sont hyperboliques).

Considérons  $n + 1$  points  $z_1 \dashv_K z_2 \dashv_K \dots \dashv_K z_{n+1}$  de  $K$ . Nous devons montrer qu'ils sont contenus dans un élément  $\Gamma \in \mathbf{Seg}(f)$  inclus dans  $K$ . Puisque  $f$  est un point de continuité de l'application  $g \mapsto \mathbf{Seg}(g)$ , il suffit de trouver pour tout  $\delta > 0$  et tout voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$  un difféomorphisme  $g \in \mathcal{U}$  ayant un segment d'orbite fini  $\gamma_g$  contenu dans le  $\delta$ -voisinage de  $K$  et rencontrant chaque boule  $B(z_i, \delta)$ ,  $1 \leq i \leq n + 1$ . Le lemme de perturbation de Pugh (théorème 2.5) appliqué à  $f$ ,  $\mathcal{U}$  et  $\varepsilon = \eta = \frac{1}{2}$  nous donne un entier  $N \geq 1$  et des paires de cubes  $C_j \subset \widehat{C}_j$  centrés en chaque point  $z_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , dont les  $N$  premiers itérés sont disjoints deux à deux et de diamètre inférieur à  $\delta$ . On choisit enfin  $\delta' \ll \delta$  tel que chaque boule  $B(z_j, \delta')$  est contenue dans  $C_j$ .

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient un segment d'orbite  $\gamma = \{f^k(x)\}_{0 \leq k \leq L}$  qui intersecte chaque cube  $C_j$  et qui est contenue dans le  $\delta$ -voisinage de  $K$ . Soit alors  $\sigma_0 = \{f^k(x)\}_{0 \leq k \leq N_0} \subset \gamma$  le plus petit segment d'orbite contenu dans  $\gamma$  qui contienne  $x$  et rencontre chaque cube  $\widehat{C}_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ; nous notons  $\zeta_f = f^{N_0}$  le point final de  $\sigma_0$ . Remarquons que par minimalité de  $\sigma_0$ , les points  $f^k(x)$  pour  $0 \leq k < N_0$  ne rencontrent pas le cube  $\widehat{C}_f$  contenant  $\zeta_f$ . Il existe donc un itéré  $f^\ell(\zeta_f)$ ,  $\ell \leq L - N_0$ , qui appartient à  $C_f$ .

Puisque  $\prec_K = \dashv_K$  pour  $f$ , il existe un segment d'orbite  $\gamma' = \{f^{-m}(y), \dots, y\}$  contenu dans le  $\delta$ -voisinage de  $K$  tel que  $f^{-m}(y)$  appartient à  $C_f$  et  $y$  à la boule  $B(z_{n+1}, \delta)$ . On applique alors le lemme de connexion : il existe  $g \in \mathcal{U}$  tel que  $y$  est un itéré positif de  $\zeta_f$ . Les difféomorphismes  $f$  et  $g$  coïncident hors de  $\widehat{C}_f$  et de ses  $N - 1$  premiers itérés. Le segment d'orbite  $\sigma_0$  n'a pas été modifié. On en déduit que  $y$  est un itéré positif de  $x$  et que l'ensemble  $\gamma_g$  des itérés compris entre  $x$  et  $y$  rencontre chaque boule  $B(z_j, \delta)$  pour  $1 \leq j \leq n + 1$ . Par ailleurs, le nouveau segment d'orbite est inclus dans l'union de  $\gamma$ ,  $\gamma'$  et des  $N$  premiers itérés de  $\widehat{C}_f$ . Par conséquent, il est contenu dans le  $\delta$ -voisinage de  $K$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 4.7 : le cas récurrent.* Nous montrons à présent la seconde partie du théorème : nous supposons  $z_j \dashv_K z_{j+1}$  pour tout  $1 \leq j < n$  et  $z_n \dashv_K z_1$ . Quitte à considérer un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G}$  plus petit, nous pouvons supposer que  $f \in \mathcal{G}$  (dont tous les points périodiques sont hyperboliques) est un point de continuité de l'application  $g \mapsto \mathbf{Per}(g)$ . Il suffit donc de construire  $g \in \text{Diff}^1(M)$  proche de  $f$  possédant une orbite périodique contenue dans le  $\delta$ -voisinage de  $K$  qui intersecte chaque boule  $B(z_j, \delta)$ . Nous introduisons comme précédemment les cubes  $C_j \subset \widehat{C}_j$ . Nous supposerons de plus que chaque  $\widehat{C}_j$  est un cube quadrillé dont  $C_j$  est une tuile centrale (comme pour la section 2.8).

D'après la première partie du théorème, il existe un segment d'orbite  $\gamma = \{f^k(x)\}_{0 \leq k \leq L}$  qui rencontre chaque cube  $C_j$  et qui est contenu dans le  $\delta$ -voisinage de  $K$ . Nous considérons un segment d'orbite  $\sigma_0 = \{f^k(x)\}_{L_i \leq k \leq L_f}$  qui rencontre chaque cube  $\widehat{C}_j$  et qui est minimal (pour l'inclusion) pour cette propriété. Nous notons  $\zeta_i = f^{L_i}(x)$  et  $\zeta_f = f^{L_f}(x)$  ses points initial et final : ils sont chacun contenus dans un cube  $\widehat{C}_i$  et  $\widehat{C}_f$ . Nous montrons que, quitte à remplacer  $\sigma_0$  par un autre segment minimal, nous pouvons supposer que

- a)  $\zeta_i$  a un itéré négatif  $f^{-\ell_i}(\zeta_i)$ ,  $\ell_i \leq L_i$ , dans  $C_i$ ,
- b)  $\zeta_f$  a un itéré positif  $f^{\ell_f}(\zeta_f)$ ,  $\ell_f \leq L - L_i$  dans  $C_f$ .

Supposons par exemple que a) n'est pas satisfait. Puisque  $\gamma$  rencontre  $C_i$  et puisque  $\sigma_0$  est minimal, il existe  $L'_f > L_f$  tel que  $f^{L'_f}(x)$  appartient à  $\widehat{C}_i$  et possède un itéré positif  $f^{\ell'_f + L'_f}(x)$ ,  $\ell'_f + L'_f \leq L$ , dans  $C_i$ . Il existe alors  $L'_i > L_i$  tel que le segment  $\sigma'_0 = \{f^k(x)\}_{L'_i \leq k \leq L'_f}$  soit un nouveau segment minimal. Par construction la propriété b) est satisfaite par  $\sigma'_0$ . Si a) n'est toujours pas satisfaite, on répète cette construction. À chaque étape,  $L'_f$  augmente et puisque  $\gamma$  est fini, ce procédé doit s'arrêter : on obtient alors à la fois a) et b).

Introduisons à présent un segment d'orbite  $\gamma'$  contenu dans le  $\delta$ -voisinage de  $K$  et rencontrant les cubes  $C_i$  et  $C_f$ . La réunion de  $\gamma'$  et de  $\gamma$  contient une pseudo-orbite à sauts dans les tuiles de  $\widehat{C}_i$  et  $\widehat{C}_f$  et contenant  $\sigma_0$ . Par construction  $\sigma_0 \setminus \{\zeta_i, \zeta_f\}$  évite les cubes  $\widehat{C}_i$  et  $\widehat{C}_f$  et rencontre les autres cubes  $\widehat{C}_j$ . Nous pouvons donc, comme en section a), perturber  $f$  et construire un difféomorphisme  $g \in \mathcal{U}$  possédant une orbite périodique qui contient  $\sigma_0$  et donc rencontre chaque cube  $\widehat{C}_j$ . Cette orbite est contenue dans le  $\delta$ -voisinage de  $K$ .  $\square$

## 4.4 Application : étude de la stabilité molle

Un des buts des systèmes dynamiques consiste à décrire comment les invariants dynamiques varient lorsque l'on perturbe le système. Ceci conduit à la notion de stabilité. Puisque la stabilité structurelle et l' $\Omega$ -stabilité (voir section 7.7) ne sont pas dense dans  $\text{Diff}^1(M)$ , d'autres formes de stabilité ont été proposées. En suivant une idée de Zeeman, Takens a introduit [176] une stabilité affaiblie. La stabilité structurelle a lieu lorsque l'espace des orbites est rigide; la stabilité molle exprime que l'espace des orbites du système change peu lorsque l'on perturbe la dynamique.

Par exemple, si  $\mathcal{K}(M)$  désigne l'espace des ensembles compacts de  $M$  muni de la topologie de Hausdorff, Takens montre le théorème suivant [176].

**Théorème 4.8** (Takens). *L'ensemble des points de continuité de chaque application  $f \mapsto \overline{\text{Per}(f)}$ ,  $f \mapsto \Omega(f)$  et  $f \mapsto \mathcal{R}(f)$  définies sur  $\text{Diff}^1(M)$  et à valeurs dans  $\mathcal{K}(M)$  contient un  $G_\delta$  dense.*

Pour  $\mathcal{R}(f)$ , c'est une simple conséquence de la proposition 2.9. Pour  $\overline{\text{Per}(f)}$ , c'est une conséquence du théorème 2.1 de Kupka-Smale et pour  $\Omega(f)$ , c'est une conséquence du lemme de fermeture de Pugh (théorème 2.7).<sup>1</sup>

Pour décrire comment  $M$  se décompose en orbites, on travaille dans l'espace  $\mathcal{K}(\mathcal{K}(M))$  des familles fermées d'ensembles compacts de  $M$  et on introduit pour tout difféomorphisme  $f$ ,

**Orb**( $f$ ) : l'ensemble des parties compactes invariantes de  $M$  qui sont limite de Hausdorff d'adhérences d'orbite de  $f$ .

Un difféomorphisme  $f$  est *mollement stable* ("tolérance stable") si c'est un point de continuité de l'application  $f \mapsto \mathbf{Orb}(f)$  définie sur  $\text{Diff}^1(M)$ .

**Conjecture de stabilité molle** (Zeeman). *L'ensemble des difféomorphismes mollement stables contient un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$ .*

À notre connaissance, cette conjecture reste ouverte, mais nous pouvons traiter des questions analogues. La structure de l'espace des orbites est décrite par les éléments suivants de  $\mathcal{K}(\mathcal{K}(M))$  :

**Cl**( $f$ ) : l'ensemble des parties compactes invariantes de  $M$ ,

**Per**( $f$ ) : l'ensemble des parties compactes invariantes de  $M$  qui sont limites de Hausdorff d'orbites périodiques,

**fTrans**( $f$ ) : l'ensemble des parties compactes invariantes de  $M$  qui sont faiblement transitives,

**pTrans**( $f$ ) : l'ensemble des parties compactes invariantes de  $M$  qui sont transitives par chaînes,

**OrbF**( $f$ ) : l'ensemble des parties compactes invariantes de  $M$  qui sont limites de Hausdorff de segments d'orbites finis,

**pOrb**( $f$ ) : l'ensemble des parties compactes invariantes de  $M$  qui sont limites de  $\varepsilon$ -pseudo-orbites pour tout  $\varepsilon > 0$  (parfois appelées *orbites étendues* de  $f$ ).

Les propriétés de stabilité correspondantes sont vérifiées.

**Proposition 4.9.** *L'ensemble des points de continuité des ensembles **Cl**( $f$ ), **Per**( $f$ ), **fTrans**( $f$ ), **pTrans**( $f$ ), **OrbF**( $f$ ) et **pOrb**( $f$ ) contient un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$ .*

<sup>1</sup>Remarquons que puisque génériquement dans  $\text{Diff}^1(M)$ , on a  $\Omega(f) = \mathcal{R}(f)$ , il n'y a pas de  $C^0$   $\Omega$ -explosion, répondant ainsi au problème 19 de [120].

Takens avait traité [176, 177] le cas des ensembles  $\mathbf{Cl}(f)$ ,  $\mathbf{Per}(f)$  et  $\mathbf{pOrb}(f)$ . La proposition s'obtient par des arguments de semi-continuité. Pour  $\mathbf{Per}(f)$ , on utilise le lemme de fermeture et pour  $\mathbf{fTrans}(f)$ , on utilise le corollaire 4.6.

Concernant la conjecture initiale de Zeeman, Takens a donné [177] le critère suivant.

**Théorème 4.10** (Takens). *Si l'ensemble des difféomorphismes  $f$  tels que  $\mathbf{Orb}(f) = \mathbf{pOrb}(f)$  contient un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$ , alors la conjecture de stabilité molle est vraie.*

Du théorème 4.4, on déduit que  $\mathbf{OrbF}(f) = \mathbf{pOrb}(f)$  pour un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$ . La conjecture de Zeeman est donc reliée au problème suivant.

**Question 4.11.** *A-t-on  $\mathbf{Orb}(f) = \mathbf{OrbF}(f)$  pour  $f$  dans un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  ?*

Le théorème 4.4 montre aussi que  $\mathbf{Per}(f) = \mathbf{fTrans}(f) = \mathbf{pTrans}(f)$ .

## 4.5 Problèmes

D'autres problèmes de connexion d'orbites restent ouverts et peuvent être intéressants pour des applications.

### a) Fermeture asymptotique.

**Question 4.12** (Fermeture asymptotique). *Considérons un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f \in \text{Diff}^1(M)$  et  $x$  un point de  $M$ .*

- *Existe-t-il  $g \in \mathcal{U}$  pour lequel  $x$  appartient à la variété stable d'une orbite périodique hyperbolique  $\mathcal{O}$  ?*
- *Peut-on demander de plus que les adhérences des orbites positives de  $x$  sous  $f$  et sous  $g$  restent proches en topologie de Hausdorff ? Que  $\mathcal{O}$  et l'ensemble des valeurs d'adhérences de l'orbite positive de  $x$  sous  $f$  soient proches pour la distance de Hausdorff ?*

Une réponse positive impliquerait la densité des variétés stables et instables d'orbites périodiques pour un difféomorphisme  $C^1$ -générique (voir [36] pour une réponse partielle). Elle permettrait également de montrer la conjecture de stabilité de Zeeman (voir [49]).

### b) Orbites avec visites rares.

**Question 4.13.** *Supposons que  $f$  vérifie une condition  $C^1$ -générique et considérons un ensemble compact et transitif par chaînes  $\Lambda$  contenu dans une classe de récurrence par chaînes  $K$ . Fixons un point  $x \in K \setminus \Lambda$ , un voisinage  $U$  de  $\Lambda$  et  $\theta > 0$ .*

*Existe-t-il une orbite périodique ayant un point proche de  $x$  et passant une proportion de temps supérieure à  $\theta$  dans  $U$  ?*

Un tel résultat permettrait d'étendre à toute la classe  $K$  certaines propriétés satisfaites sur  $\Lambda$ . Voir la section 7.10. On renvoie à [60] pour d'autres problèmes de connexion d'orbite.

## Chapitre 5

# Hyperbolicité non uniforme

Certaines propriétés connues pour les systèmes hyperboliques s'étendent à des classes plus générales de dynamiques. C'est l'objet par exemple de la théorie de Pesin [128] qui décrit la dynamique associée à une mesure ergodique dont aucun exposant de Lyapunov ne s'annule, pour des difféomorphismes de classe  $C^{1+\varepsilon}$  (les arguments ne se généralisent pas à la topologie  $C^1$ , voir [141]). Nous présentons dans ce chapitre de tels résultats, non perturbatifs et valables en classe  $C^1$ .

### 5.1 Décomposition dominée

**Domination.** Considérons un ensemble invariant  $K$  dont le fibré unitaire tangent est la somme directe de deux sous-fibrés linéaires invariants par l'application tangente :  $T_K M = E \oplus F$ . C'est une *décomposition dominée* s'il existe un entier  $N \geq 1$  tel que pour tout  $x \in K$  et tous  $u \in E(x)$ ,  $v \in F(x)$  unitaires on a

$$\|D_x f^N . u\| \leq \frac{1}{e} \|D_x f^N . v\|.$$

On dira aussi que la décomposition est *N-dominée* lorsque l'on souhaitera préciser l'entier  $N$ . La décomposition est *non triviale* si les dimensions de  $E$  et  $F$  ne sont pas nulles. On étend cette définition et on considérera aussi des décompositions dominées ayant plus de deux facteurs.

**Propriétés.** Voici quelques propriétés des décompositions dominées (voir [35, appendice B]).

- Tout ensemble invariant  $K$  possède une décomposition dominée  $T_K M = E_1 \oplus \dots \oplus E_\ell$  la plus fine : pour toute autre décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$ , il existe  $0 \leq k \leq \ell$  tel que  $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} E_i$  et  $F = \bigoplus_{k+1 \leq i \leq \ell} E_i$ .
- Les décompositions dominées s'étendent à l'adhérence de  $K$ . Elles passent à la limite : si  $(f_n)$  est une suite de difféomorphismes convergeant vers  $f$ , si  $(K_n)$  est une suite d'ensembles compacts  $f_n$ -invariants qui converge en topologie de Hausdorff vers  $K$ , si chaque ensemble  $K_n$  porte une décomposition  $N$ -dominée  $E_n \oplus F_n$  telle que la dimension de  $E_n$  ne dépende pas de  $n$ , alors les fibrés  $E_n$  et  $F_n$  convergent vers des fibrés  $E, F$  au-dessus de  $K$  qui induisent une décomposition  $N$ -dominée  $T_K M = E \oplus F$ .
- Si l'ensemble compact  $K$  possède une décomposition dominée  $E \oplus F$  pour  $f$ , tout ensemble contenu dans un voisinage de  $K$  et invariant par un difféomorphisme  $g$  proche de  $f$  possède également une décomposition dominée en sous-fibrés de la même dimension.

**Hyperbolicité partielle.** Un ensemble  $K$  est dit *partiellement hyperbolique* s'il admet une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  et un entier  $N \geq 1$  tels que  $E^s$  et  $E^u$  soient respectivement  $N$ -uniformément contractés et  $N$ -uniformément dilatés (i.e. on a (1.4.1)) et ne soient pas tous deux triviaux.

Les notions d'hyperbolicité, hyperbolicité partielle, décompositions dominées ne dépendent pas de la métrique riemannienne. Gourmelon a montré [63] que l'on peut toujours trouver une métrique pour que dans ces définitions l'hyperbolicité ou la domination se voient dès la première itération, i.e. en tout point  $x \in K$  on a :

$$\sup \left( \|D_x f|_{E^s(x)}\|, \|D_x f|_{E^u(x)}^{-1}\|, \|D_x f|_{E^s(x)}\| \cdot \|D_{f(x)} f|_{E^c(f(x))}^{-1}\|, \|D_x f|_{E^c(x)}\| \cdot \|D_{f(x)} f|_{E^u(f(x))}^{-1}\| \right) < 1.$$

## 5.2 Familles de plaques

On peut associer à tout ensemble ayant une décomposition dominée une famille de sous-variétés qui généralise les variétés invariantes locales des ensembles hyperboliques.

**Définition 5.1.** Soit  $K$  un ensemble invariant avec une décomposition dominée  $T_K M = F_1 \oplus E \oplus F_2$ .

Une *famille de plaques* tangente à  $E$  est une application continue  $\mathcal{W}: E \rightarrow M$  satisfaisant :

- pour tout  $x \in K$ , l'application induite  $\mathcal{W}_x: E_x \rightarrow M$  est un plongement  $C^1$  pour lequel  $\mathcal{W}_x(0) = x$  et dont l'image est tangente en  $x$  à  $E_x$  ;
- $(\mathcal{W}_x)_{x \in K}$  est une famille continue de plongements  $C^1$ .

La famille de plaques  $\mathcal{W}$  est *localement invariante* s'il existe  $\rho > 0$  tel que pour tout  $x \in K$ , l'image de la boule  $B(0, \rho) \subset E_x$  par  $f \circ \mathcal{W}_x$  est contenue dans la plaque  $\mathcal{W}_{f(x)}$ .

D'après [79, théorème 5.5], il existe toujours des familles de plaques localement invariantes.

**Théorème 5.2** (Hirsch-Pugh-Shub). *Pour tout ensemble compact invariant  $K$  dont l'espace tangent possède une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$ , il existe une famille de plaques localement invariante tangente à  $E$ .*

*Remarque 5.3.* a) En général, les plaques ne sont pas définies dynamiquement. Par conséquent, deux plaques peuvent avoir des points d'intersection isolés et la famille de plaques n'est pas unique a priori.

b) On peut énoncer une version uniforme de ce résultat : il existe des voisinages  $U$  de  $K$  et  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  de  $f$  et une collection de familles de plaques  $(\mathcal{W}_g)_{g \in \mathcal{U}}$  tangentes aux continuations  $(E_g)_{g \in \mathcal{U}}$  du fibré  $E$  et définies au-dessus des ensembles invariants maximaux  $(K_g)$  de  $U$  tels que

- $(\mathcal{W}_{g,x})_{g \in \mathcal{U}, x \in K_g}$  est une famille continue de plongements  $C^1$ ,
- les familles de plaques sont uniformément localement invariantes : il existe  $\rho > 0$  tel que pour tous  $g \in \mathcal{U}$  et  $x \in K_g$ , l'image de la boule  $B(0, \rho) \subset E_{g,x}$  par  $f \circ \mathcal{W}_{g,x}$  est contenue dans la plaque  $\mathcal{W}_{g,g(x)}$ .

c) Lorsqu'il y a une décomposition dominée  $T_K M = F_1 \oplus E \oplus F_2$  en trois fibrés, on peut obtenir une famille de plaques localement invariante tangente à  $E$  en intersectant des familles de plaques localement invariantes tangentes à  $F_1 \oplus E$  et à  $E \oplus F_2$  respectivement.

d) Les plaques seront généralement de petit diamètre.



### 5.3 Points hyperboliques

Considérons un entier  $N \geq 1$  et un ensemble compact invariant  $K$  muni d'une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$ .

**Définition 5.4.** Un point  $x \in K$  est  $N$ -hyperbolique le long de  $E$  si pour tout  $k \geq 0$  on a :

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|D_{f^{iN}(x)} f|_E^N\| \leq e^{-k}.$$

L'existence de points hyperboliques fait souvent appel au lemme de Pliss [130]. Dans le cas d'orbites périodiques, on obtient le résultat suivant.

**Proposition 5.5** (Conséquence du lemme de Pliss). *Pour ensemble invariant  $K$  ayant une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$ , il existe  $\rho \in (0, 1)$  avec la propriété suivante. Pour tout  $N \geq 1$  suffisamment grand et pour toute orbite périodique hyperbolique  $O = \{x, \dots, f^\tau(x) = x\}$  de  $K$  satisfaisant*

$$\prod_{i=0}^{\tau-1} \|D_{f^i(x)} f|_E\| \leq e^{-\tau}, \quad (5.3.1)$$

*l'ensemble des points  $N$ -hyperboliques de  $O$  a une proportion supérieure à  $\rho$ .*

*Remarque 5.6.* Lorsque la condition 5.3.1 est également satisfaite pour les itérations de  $Df^{-1}$  le long de  $F$ , on obtient des points simultanément hyperboliques le long des espaces  $E$  et  $F$ .

En effet, on choisit un entier  $N$  premier. On applique la proposition au fibré  $E$  et on considère un point  $x \in O$  qui est  $N$ -hyperbolique le long du fibré  $E$ . On applique ensuite la proposition au fibré  $F$  : il existe un point  $y \in O$  qui est  $N$ -hyperbolique le long de  $F$  pour  $f^{-1}$ . Puisque  $N$  est premier, on peut le mettre sous la forme  $y = f^{-kN}(x)$ . On choisit  $k \geq 0$  minimal avec cette propriété. Le fait que les points  $f^N(y), f^{2N}(y), \dots, f^{kN}(y)$  ne soient pas  $N$ -hyperboliques le long de  $F$  implique pour tout  $1 \leq j \leq k$ ,

$$\prod_{i=1}^j \|D_{f^{iN}(y)} f|_F^{-N}\| > e^{-j}.$$

La domination entre  $E$  et  $F$  entraîne alors (si  $N$  est suffisamment grand),

$$\prod_{i=0}^{j-1} \|D_{f^{iN}(y)} f|_E^N\| \leq e^{-j}$$

pour tout  $1 \leq j \leq k$ . Puisque  $x = f^{kN}(y)$  est  $N$ -hyperbolique pour  $E$ , ceci est encore vrai pour tout  $k \geq 0$ . Par conséquent,  $y$  est simultanément  $N$ -hyperbolique le long de  $E$  et  $F$ .

### 5.4 Variétés invariantes

Par un argument classique (voir par exemple [4, section 8]), tout point qui est  $N$ -hyperbolique le long de  $E$  possède une variété stable tangente à  $E$ .

**Proposition 5.7.** *Considérons un ensemble compact invariant  $K$  dont l'espace tangent possède une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$ , une famille de plaques localement invariante  $\mathcal{W}$  tangente à  $E$  et un entier  $N \geq 1$ . Il existe  $\varepsilon, \delta > 0$  tels que pour tout point  $x \in K$  qui est  $N$ -hyperbolique le long de  $E$ , l'ensemble*

$$W_{E^s}(x) := \left\{ y \in M, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(f^n(y), f^n(x))}{e^{n\varepsilon} \|D_x f|_{E^s}^n\|} < +\infty \right\}$$

a les propriétés suivantes :

- $W_{E^s}(x)$  est une sous-variété injectivement immergée tangente à  $E^s(x)$  et ne dépend pas de  $\varepsilon$  ;
- la boule  $B(0, \delta) \subset \mathcal{W}_x$  est contenue dans  $W_{E^s}(x)$  et son image par  $f^k$  est contenue dans  $\mathcal{W}_{f^k(x)}$  pour tout  $k \geq 0$ .

L'ensemble  $W_{E^s}(x)$  est appelé *variété stable forte de  $x$  associée à  $E^s$*  et noté  $W^{ss}(x)$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le fibré  $E^s$ . On définit de façon symétrique la *variété instable forte*  $W_{E^u}(x)$  (encore notée  $W^{uu}(x)$ ). Dans le cas de la décomposition  $E^s \oplus E^u$  d'un ensemble hyperbolique, la variété  $W_{E^s}(x)$  coïncide avec l'ensemble stable  $W^s(x)$ .

*Remarque 5.8.* On peut énoncer une version uniforme de ce résultat.

Le résultat suivant découle des propositions 5.5 et 5.7 et peut servir à borner le nombre de classes homoclines d'un difféomorphisme. Il a été démontré initialement par Pliss [130] dans le cas d'une décomposition dominée triviale ( $T_K M = E$ ) pour majorer le nombre de puits d'un difféomorphisme.

**Corollaire 5.9.** *Pour tout ensemble invariant  $K$  ayant une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$  et tout entier  $N \geq 1$ , il existe  $k \geq 1$  ayant la propriété suivante.*

*Dans toute famille d'orbites périodiques  $\{O_1, \dots, O_k\}$  de  $K$  vérifiant pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,*

$$\prod_{x \in O_i} \|D_x f|_E^N\| \leq e^{-\text{Card}(O_i)} \quad \text{et} \quad \prod_{x \in O_i} \|D_x f|_F^{-N}\| \leq e^{-\text{Card}(O_i)}, \quad (5.4.1)$$

*il existe au moins deux orbites  $O_i, O_j$  homocliniquement reliées.*

## 5.5 Mesures hyperboliques

Si  $\mu$  est une mesure de probabilité invariante sur  $M$ , le théorème d'Oseledets (voir [69, théorème S.2.9]) associe à  $\mu$ -presque tout point  $x \in M$  une unique décomposition invariante  $T_x M = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$  et des réels  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_s$  tels que pour tout  $u \in E_i \setminus \{0\}$  la quantité

$$\frac{1}{n} \log \|D_x f^n \cdot u\|$$

converge vers  $\lambda_i$  lorsque  $n$  tend vers  $\pm\infty$ .

On appelle  $\lambda_i$  l'*exposant de Lyapunov* de  $x$  selon l'espace  $E_i$  et on lui affecte la multiplicité  $\dim(E_i)$ . La suite ordonnée des exposants de Lyapunov de  $\mu$ , comptés avec multiplicité, est le *vecteur de Lyapunov*  $L(x, \mu)$  de  $x$ . Lorsque  $\mu$  est ergodique, le vecteur de Lyapunov ne dépend pas du point  $x$ .

Considérons une mesure ergodique dont le support  $K$  ait une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$ . Alors l'exposant de Lyapunov maximal de  $\mu$  en restriction au fibré  $E$  est égal (voir [85]) à la limite

$$\lambda^+(\mu, E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int \log \|Df|_E^n\| d\mu.$$

La proposition suivante issue de [4] permet de construire des variétés invariante en tout point régulier d'une mesure ergodique. Il permet de retrouver une partie de la théorie de Pesin lorsque la régularité du difféomorphisme est seulement  $C^1$  mais en présence d'une décomposition dominée.

**Proposition 5.10** (théorème 3.11 de [4]). *Considérons une mesure ergodique dont le support  $K$  ait une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$ . Lorsque l'exposant de Lyapunov maximal de  $\mu$  en restriction au fibré  $E$  est strictement négatif,  $\mu$ -presque tout point est hyperbolique le long de  $E$  et possède donc une variété stable forte tangente à  $E$ .*

Lorsque  $\mu$  est ergodique et que les exposants de Lyapunov sont tous non nuls en  $\mu$ -presque tout point, nous disons que  $\mu$  est *hyperbolique*.

## 5.6 Pistage généralisé

**Définition 5.11.** Fixons  $N \geq 1$  et un ensemble invariant  $K$  muni d'une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$ . Un segment d'orbite  $\{x, f(x), \dots, f^n(x)\}$  de longueur  $n = \ell.N > 0$  contenu dans  $K$  est  *$N$ -hyperbolique* pour la décomposition dominée  $E \oplus F$  si pour tout  $1 \leq k \leq \ell$  on a :

$$\prod_{i=0}^{k-1} \|D_{f^{i.N}(x)} f|_E^N\| \leq e^{-k} \quad \text{et} \quad \prod_{i=0}^{k-1} \|D_{f^{(\ell-i).N}(x)} f|_F^{-N}\| \leq e^{-k}.$$

Liao a démontré [90, 91] le lemme de pistage suivant qui généralise le lemme de pistage classique de la théorie hyperbolique (voir aussi [59]).

**Théorème 5.12** (Pistage généralisé, Liao). *Soit  $K$  un ensemble invariant muni d'une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$ . Fixons  $N \geq 1$  et  $\delta > 0$ .*

*Il existe alors  $\varepsilon > 0$  tel que pour toute famille de segments d'orbites  $\{x_i, f(x_i), \dots, f^{n_i}(x_i)\}$ ,  $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ , contenus dans  $K$ , qui sont  $N$ -hyperboliques et satisfont*

$$\forall i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}, \quad d(f^{n_i}(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon,$$

*il existe une orbite périodique  $\{y, f(y), \dots, f^\tau(y) = y\}$  de période  $\tau = n_1 + \dots + n_s$  telle que*

$$\forall i \in \{1, \dots, s\} \text{ et } k \in \{0, \dots, n_i\}, \quad d(f^{n_1 + \dots + n_{i-1} + k}(y), f^k(x_i)) < \delta.$$

Avec la proposition 5.10, ceci permet d'approximer les mesures ergodiques par des orbites périodiques.

**Corollaire 5.13.** *Soit  $\mu$  une mesure ergodique dont le support  $K$  possède une décomposition dominée non triviale  $T_K M = E \oplus F$  telle que les exposants de Lyapunov de  $\mu$  soient strictement négatifs le long de  $E$  et strictement positifs le long de  $F$ .*

*Il existe alors une suite d'orbites périodiques hyperboliques  $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $K$  en topologie de Hausdorff et dont les mesures induites convergent vers  $\mu$ .*

*De plus, il existe un entier  $N \geq 1$  tel que (5.4.1) ait lieu pour tout  $i$  assez grand. En particulier, toutes les orbites  $O_i$ , sauf un nombre fini, sont homocliniquement liées et  $K$  est contenu dans leur classe homocline.*

## 5.7 Lemmes de sélection

Liao [88, 91] (voir aussi [184]) et Mañé [99] ont donné d'autres cadres où le lemme de pistage généralisé s'applique : la difficulté est de sélectionner des segments d'orbites hyperboliques.

**Théorème 5.14** (Lemme de sélection de Liao). *Considérons un ensemble compact invariant  $K$  muni d'une décomposition 1-dominée non triviale  $T_K M = E \oplus F$  et  $\lambda \in (0, 1)$ , tels que les deux conditions suivantes soient satisfaites.*

- *Tout sous-ensemble compact invariant de  $K$  contient un point  $x$  vérifiant pour tout  $n \geq 1$  :*

$$\prod_{i=0}^{n-1} \|Df|_E(f^i(x))\| \leq \lambda^n.$$

- *Il existe un point  $y \in K$  tel que pour tout  $n \geq 1$  on ait :*

$$\prod_{i=0}^{n-1} \|Df|_E(f^i(y))\| \geq 1.$$

*Pour tous  $\lambda_- < \lambda_+ < 1$  proches de 1, il existe alors dans tout voisinage de  $K$  une orbite périodique contenant un point  $p$  satisfaisant pour tout  $n \geq 1$  :*

$$\prod_{k=0}^n \|Df|_E(f^k(p))\| \leq \lambda_+^n \text{ et } \prod_{k=0}^n \|Df|_E(f^{-k}(p))\| \geq \lambda_-^n.$$

*En particulier, on peut trouver une suite de points périodiques homocliniquement reliés entre eux et qui converge vers un point de  $K$ .*

Le lemme de sélection de Mañé suppose que l'un des fibrés de la décomposition est uniforme.

**Théorème 5.15** (Lemme de sélection de Mañé). *Considérons un ensemble compact invariant  $K$  muni d'une décomposition 1-dominée non triviale  $T_K M = E \oplus F$  et  $\lambda \in (0, 1)$  tels que*

- *le fibré  $F$  est uniformément dilaté,*
- *la dynamique restreinte à  $K$  n'a pas d'ouvert errant,*

*et tels que les deux conditions suivantes soient satisfaites.*

- *Il existe un ensemble dense  $\mathcal{D} \subset K$  de points  $x$  vérifiant :*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{n-1} \|Df|_E(f^{-i}(x))\|^{1/n} \leq \lambda.$$

- *Il existe un point  $y \in K$  tel que pour tout  $n \geq 1$  on ait :*

$$\prod_{i=0}^{n-1} \|Df|_E(f^i(y))\| \geq 1.$$

*Alors, la conclusion du théorème 5.14 a lieu.*

Dans le cas où  $K$  est une classe homocline  $H(q)$ , on peut choisir un ensemble dense  $\mathcal{D}$  de points périodiques homocliniquement liés à  $q$ . Les points périodiques obtenus par le théorème 5.15 peuvent être choisis “homocliniquement reliés” à un point de  $\mathcal{D}$ . On obtient alors le résultat suivant, démontré dans [37].

**Corollaire 5.16** (Bonatti-Gan-Yang). *Considérons une classe homocline  $H = H(p)$  munie d’une décomposition dominée  $T_H M = E \oplus F$  telle que  $F$  soit uniformément dilaté et  $\dim(F) = \dim(E^u(p))$ . Si  $E$  n’est pas uniformément contracté, il existe alors une suite d’orbites périodiques hyperboliques  $(O_i)$  homocliniquement liées à  $p$  et pour tout  $N \geq 1$ , l’une de ces orbites n’a pas de point  $N$ -hyperbolique le long de  $E$ .*

## 5.8 Fibrés non uniformes

Voici une application du lemme de sélection de Liao, issue de [51], qui permet d’analyser l’existence de fibrés non uniformes.

**Théorème 5.17.** *Supposons que pour tout  $1 \leq i < d$  et tout difféomorphisme  $g$   $C^1$ -proche de  $f$  l’ensemble  $\text{Per}_i(g)$  des points périodiques d’indice  $i$  ait une décomposition dominée  $T_{\text{Per}_i(g)} M = E_i \oplus F_i$  telle que  $\dim(E_i) = i$ .*

*Considérons un ensemble compact invariant  $K$  ayant une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$ . Si le fibré  $E$  n’est pas uniformément contracté, l’un des cas suivant se produit.*

1.  *$K$  intersecte une classe homocline  $H(p)$  associée à un point périodique d’indice strictement plus petit que  $\dim(E)$ .*
2.  *$K$  intersecte des classes homoclines  $H(p_n)$  associées à des points périodiques ayant un indice égal à  $\dim(E)$  et ayant un exposant de Lyapunov le long de  $E$  arbitrairement proche de 0.*
3.  *$K$  contient un ensemble compact invariant  $\Lambda$  muni d’une structure partiellement hyperbolique  $T_\Lambda M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  telle que  $E^c$  est de dimension 1 et  $\dim(E^s) < \dim(E)$ . De plus, pour toute mesure ergodique supportée par  $\Lambda$ , l’exposant de Lyapunov le long de  $E^c$  est égal à 0.*

Ce théorème fait naturellement apparaître des ensembles hyperboliques ayant une structure partiellement hyperbolique avec un fibré central de dimension 1. Puisque les exposants de Lyapunov de toute mesure invariante supportée sur cet ensemble sont nuls le long du fibré central, les techniques présentées dans ce chapitre ne permettent pas de décrire plus précisément la dynamique. Nous introduirons au chapitre 9 les modèles centraux qui permettent d’analyser la dynamique dans la direction centrale d’un point de vue topologique.

*Démonstration.* Puisque  $E$  n’est pas uniformément contracté, il existe une mesure ergodique  $\mu$  supportée par  $K$  dont l’exposant de Lyapunov maximal le long de  $E$  est positif ou nul.

D’après le lemme de fermeture ergodique (théorème 4.1) et son addendum, il existe une suite de difféomorphismes  $g_n \rightarrow f$ , et une suite d’orbites périodiques associées  $(O_n)$  qui converge vers le support de  $\mu$  en topologie de Hausdorff et dont les exposants de Lyapunov convergent vers ceux de  $\mu$ . D’après l’hypothèse sur la domination des orbites périodiques, les orbites  $O_n$  ont au plus un exposant proche de 0. Par conséquent  $\mu$  a au plus un exposant de Lyapunov proche de 0.

Si  $\mu$  est hyperbolique, l'indice des orbites  $O_n$  est égal à la dimension des espaces stables de  $\mu$ . Par passage à la limite, il existe donc une décomposition dominée  $T_{\text{Supp}(\mu)}M = E' \oplus F'$ , avec  $\dim(E') < \dim(E)$ . D'après le corollaire 5.13,  $K$  intersecte une classe homocline d'indice  $\dim(E')$ . Ceci donne le premier cas du théorème.

Si  $\mu$  n'est pas hyperbolique, on construit de la même façon une décomposition dominée  $T_{\text{Supp}(\mu)}M = E' \oplus E^c \oplus F'$ , telle que les exposants de  $\mu$  sont strictement négatifs le long de  $E'$ , strictement positifs le long de  $F'$  et nuls le long de  $E^c$ . On a  $\dim(E^c) = 1$ .

On peut choisir  $\mu$  pour que la dimension de  $E'$  soit minimale et on note  $K = \text{Supp}(\mu)$ . On en déduit que pour toute mesure  $\nu$  supportée par  $K$ , l'exposant le long du fibré central  $E^c$  de  $K$  est négatif ou nul.

On peut aussi avoir choisi  $K$  minimal pour l'inclusion et ces propriétés. Ainsi, pour tout sous-ensemble compact invariant propre  $K' \subsetneq K$ , l'exposant de toute mesure  $\nu$  le long du fibré central est strictement négatif. Il est même inférieur à une constante  $-\varepsilon$  car dans le cas contraire la mesure  $\nu$  serait hyperbolique (il y a au plus un exposant proche de 0). Comme précédemment,  $K$  intersecterait une classe homocline ayant des orbites périodiques d'indice  $\dim(E') + 1 \leq \dim(E)$  dont l'exposant le long de  $E^c$  est  $\varepsilon$ -proches de 0. On serait alors dans le cas 1) (si  $\dim(E') + 1 < \dim(E)$ ) ou dans le cas 2) (si  $\dim(E') + 1 = \dim(E)$ ) du théorème.

Si  $K$  contient une mesure d'exposant central strictement négatif, on peut appliquer le lemme de sélection de Liao et  $K$  intersecte une classe homocline ayant des orbites périodiques d'indice  $\dim(E') + 1$  dont l'exposant le long de  $E^c$  est arbitrairement proche de 0. On est alors à nouveau dans le cas 1) ou 2).

Si toutes les mesures supportées par  $K$  ont un exposant central nul, on est dans le cas 3) du théorème.  $\square$

## 5.9 Classes hyperboliques par chaînes

Considérons un ensemble invariant  $K$ , une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$  et une famille de plaques  $\mathcal{W}$  tangente à  $E$ . On définit les notions suivantes.

- $\mathcal{W}$  est *piégée* si pour tout  $x \in K$  on a

$$f(\overline{\mathcal{W}_x}) \subset \mathcal{W}_{f(x)}.$$

- $\mathcal{W}$  est *finement piégée* si pour une base de voisinages  $U$  de la section 0 de  $E$ , il existe :
  1. une famille de difféomorphismes  $(\varphi_x)_{x \in K}$  de  $(E_x)_{x \in K}$  qui est continue en topologie  $C^1$  et supportée dans  $U$  ;
  2. une constante  $\rho > 0$  telle que pour tous  $x \in K$  on a  $B(0, \rho) \subset U \cap E_x$  et :

$$f(\overline{\mathcal{W}_x \circ \varphi_x(B(0, \rho))}) \subset \mathcal{W}_{f(x)} \circ \varphi_{f(x)}(B(0, \rho)).$$

Bien sûr, si  $\mathcal{W}$  est finement piégée, il existe une famille de plaques tangentes à  $E$  (et de diamètres arbitrairement petits) qui est piégée. Par ailleurs, toute autre famille de plaques  $\mathcal{W}'$  tangente à  $E$  et localement invariante est également finement piégée : il existe  $\rho > 0$  tel que pour tout  $x \in K$  la boule  $B(0, \rho) \subset E_x$  est envoyée par  $\mathcal{W}'_x$  dans  $\mathcal{W}_x$ . Ceci justifie la définition :

- $E$  est *finement piégée* s'il existe une famille de plaques tangente à  $E$  et finement piégée.

Nous avons proposé [52] une nouvelle définition d'hyperbolicité affaiblie.

**Définition 5.18.** Une classe homocline  $H(p)$  est *hyperbolique par chaînes* si

- elle possède une décomposition dominée  $T_{H(p)}M = E^{cs} \oplus E^{cu}$  en deux fibrés ;
- il existe une famille de plaques  $\mathcal{W}^{cs}$  tangente à  $E^{cs}$  piégée par  $f$  et une famille de plaques  $\mathcal{W}^{cu}$  tangente à  $E^{cu}$  et piégée par  $f^{-1}$  ;
- il existe un point périodique hyperbolique  $q_s$  homocliniquement relié à l'orbite de  $p$  dont l'ensemble stable contient  $\mathcal{W}_{q_s}^{cs}$  et il existe un point périodique hyperbolique  $q_u$  homocliniquement relié à l'orbite de  $p$  dont l'ensemble instable contient  $\mathcal{W}_{q_u}^{cu}$ .

Les familles de plaques  $\mathcal{W}^{cs}$  et  $\mathcal{W}^{cu}$  jouent alors le rôle des variétés stables et instables locales des ensembles hyperboliques : elles sont respectivement contenues dans les ensembles stables et instables par chaînes de la classe  $H(p)$ . Ceci justifie la terminologie “hyperbolicité par chaînes”. En particulier, une propriété de produit local est satisfaite (voir [52]).

**Lemme 5.19.** *Considérons une classe homocline  $H(p)$  hyperbolique par chaînes.*

1. *il existe un sous-ensemble dense d'orbite périodiques  $O$  homocliniquement reliées à  $p$  telles que pour tout  $q \in O$  on a  $\mathcal{W}_q^{cs} \subset W^s(q)$  et  $\mathcal{W}_q^{cu} \subset W^u(q)$  ;*
2. *pour tout  $x \in H(p)$  on a  $\mathcal{W}_x^{cs} \subset pW^s(x)$  et  $\mathcal{W}_x^{cu} \subset pW^u(x)$  ;*
3. *tout point d'intersection transverse entre deux plaques  $\mathcal{W}_x^{cs}$  et  $\mathcal{W}_y^{cu}$ ,  $x, y \in H(p)$ , est contenu dans  $H(p)$ .*

L'hyperbolicité par chaînes est robuste aux perturbations (voir [52]).

**Théorème 5.20** (Crovisier-Pujals). *Considérons une classe homocline  $H(p)$  hyperbolique par chaînes telle que :*

- $H(p)$  coïncide avec sa classe de récurrence par chaînes,
- les familles de plaques  $\mathcal{W}^{cs}$  et  $\mathcal{W}^{cu}$  sont finement piégées respectivement par  $f$  et  $f^{-1}$ .

*Alors pour tout difféomorphisme  $g \in \text{Diff}^1(M)$  proche de  $f$  la classe homocline  $H(p_g)$  de  $g$  associée à la continuation hyperbolique de  $p$  est encore hyperbolique par chaînes.*

Nous donnons des exemples de classes hyperboliques par chaînes robustement non hyperbolique en section suivante.

## 5.10 Difféomorphismes dérivés d'Anosov robustement non hyperboliques

Smale a construit [171] un difféomorphisme hyperbolique ayant un attracteur non trivial en modifiant un difféomorphisme d'Anosov linéaire du tore  $\mathbb{T}^2$ . Il est obtenu en déformant le difféomorphisme initial près d'un point fixe : la perturbation est petite en topologie  $C^0$  mais grande en topologie  $C^1$ .

Cette idée de déformer au voisinage d'un point fixe a été reprise par Mañé [93], puis par Bonatti-Viana [41] pour construire un difféomorphisme robustement transitif et non hyperbolique. (Avec cet argument, on peut aussi construire des exemples d'attracteurs robustes non hyperboliques (voir [46]).) Nous expliquons ici comment construire de telles dynamiques dans le cas le plus simple. Voir aussi [35, section 7.1].

On considère un difféomorphisme d'Anosov linéaire  $A$  du tore  $\mathbb{T}^3$  avec valeurs propres réelles  $0 < \lambda_1^s < \lambda_2^s < 1 < \lambda^u$ , et un point fixe  $p$ . L'application  $A$  peut donc être écrite localement

$$A : (x, y, z) \mapsto (\lambda^u \cdot x, \lambda_1^s \cdot y, \lambda_2^s \cdot z).$$

Introduisons un difféomorphisme  $g$  qui fixe  $p$ , coïncide avec  $A$  hors d'un petit voisinage de  $p$  et de la forme

$$g : (x, y, z) \mapsto (\lambda^u \cdot x, g_x(y, z)).$$

Il préserve donc le feuilletage stable  $\mathcal{F}^{cs}$  de  $A$ . On demande également que

- $\|Dg|_{E^{cs}}\| < \lambda^u$ , de sorte que  $g$  préserve une domination entre l'espace centre-stable (tangent aux feuilles de  $\mathcal{F}^{cs}$ ) et un fibré instable,
- $g$  contracte strictement les aires le long des feuilles de  $\mathcal{F}^{cs}$ .

Le difféomorphisme initial  $A$  possède ces propriétés mais nous allons voir que d'autres difféomorphismes peuvent être intéressants.

Fixons alors  $a, b \gg 1$  et définissons un difféomorphisme  $f$  qui coïncide avec  $A$  hors d'un voisinage de  $p$  et prend la forme suivante au voisinage de  $p$

$$f : (x, y, z) \mapsto (\lambda^u \cdot x, (ab)^{-1} \cdot g_{ax}(aby, abz)).$$

Pour  $a$  grand,  $f$  diffère de  $A$  dans une boule centrée en  $p$  de rayon arbitrairement petit. Pour  $b$  grand, le fibré instable de  $f$  est arbitrairement proche de celui de  $A$  et sa dilatation est arbitrairement proche de  $\lambda^u$ .

Les difféomorphismes  $C^1$ -proches de  $f$  possèdent encore un feuilletage centre-stable. Ceci découle de [79, théorèmes 7.1 et 7.2] puisque le feuilletage centre-stable de  $f$  est lisse et normalement hyperbolique.

Les difféomorphismes proches de  $f$  n'ont qu'une seule classe de récurrence par chaînes.

**Proposition 5.21.** *Si l'on choisit  $a, b$  assez grands, tout difféomorphisme  $C^1$ -proche de  $f$  est transitif. Plus précisément,  $\mathbb{T}^3$  est une classe homocline.*

*Démonstration.* L'argument est le même que dans [41, section 6.2]. □

**Proposition 5.22.** *Si  $a, b$  sont assez grands,  $\mathbb{T}^3$  est une classe hyperbolique par chaînes pour tout difféomorphisme  $C^1$ -proche de  $f$ .*

*Démonstration.* Considérons un point périodique  $q \neq p$  de  $A$  et une famille de plaques centre-stable  $\mathcal{W}^{cs}$  piégée pour  $A$  (i.e. une famille continue de variétés stables locales). Puisque  $f$  préserve le feuilletage stable  $\mathcal{F}^{cs}$  de  $A$  et est arbitrairement proche de  $A$  en topologie  $C^0$ , les plaques  $\mathcal{W}^{cs}$  sont piégées par  $f$ . Pour  $a, b$  suffisamment grands, l'orbite de  $q$  coïncide pour  $A$  et pour  $f$  et de plus  $\mathcal{W}_q^{cs} \subset \mathcal{W}^s(q)$  pour  $f$ . Pour les difféomorphismes  $h$  proches de  $f$  en topologie  $C^1$ , il existe un feuilletage centre-stable proche de  $\mathcal{F}^{cs}$ . Par conséquent il existe encore une famille de plaques centre-stable  $\mathcal{W}_h^{cs}$  qui est proche de la famille  $\mathcal{W}^{cs}$  pour la topologie  $C^1$ . Cette famille est donc également piégée pour  $h$  et la plaque de la continuation  $q_h$  de  $q$  est contenue dans la variété stable de  $q_h$ .



Puisque le fibré  $E^u$  est uniformément dilaté par  $f$ , il existe une famille de plaques  $\mathcal{W}^u$  tangente à  $E^u$  piégée par  $f^{-1}$  et satisfaisant  $\mathcal{W}_q^u \subset W^u(q)$ . Ceci est également vérifié par tout difféomorphisme  $h$  proche de  $f$  en topologie  $C^1$ .

Avec la proposition 5.21, ceci montre que  $\mathbb{T}^3$  est une classe hyperbolique par chaînes.  $\square$

Pour obtenir une dynamique robustement non hyperbolique, il suffit de choisir  $g$  avec des points fixes hyperboliques  $p_1, p_2$  d'indices 1 et 2. Voir la figure 5.1. Puisque  $p_1, p_2$  appartiennent à une même classe homocline robustement, tout difféomorphisme proche de  $f$  peut être approché par un difféomorphisme ayant un cycle hétérodimensionnel.

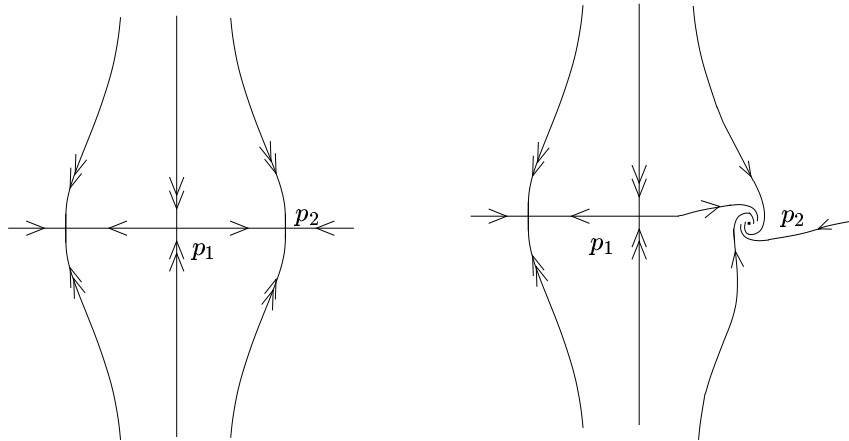


FIG. 5.1 – Déformations de  $A$  dans la variété stable locale de  $p$ .

On peut construire  $g$  avec une structure partiellement hyperbolique  $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  avec trois fibrés de dimension 1. Aucun difféomorphisme au voisinage de  $f$  ne peut alors avoir de tangence homocline (voir la section 7.5).

On peut aussi choisir  $p_2$  avec des valeurs propres stables complexes. Dans ce cas, pour aucun difféomorphisme proche de  $f$ , la classe homocline  $H(p_1)$  (contenant  $p_2$ ) n'a pas de décomposition dominée de la forme  $TM = E \oplus F$  avec  $\dim(E) = 1$ . On en déduit (voir le théorème 7.15 plus loin) que tout difféomorphisme proche de  $f$  est accumulé par des difféomorphismes pour lesquels  $p_1$  a une tangence homocline.

Ceci fournit des exemples de dynamiques modérées hétérodimensionnelle et critique mentionnées en introduction.

**Corollaire 5.23.** *Il existe sur  $\mathbb{T}^3$  des dynamiques génériques modérées hétérodimensionnelles critiques et non critiques.*



## Chapitre 6

# Réduction de la dimension ambiante

On peut toujours représenter les dynamiques  $C^1$ -génériques de dimension  $d$  au sein des dynamiques génériques de dimension supérieure : il suffit de les réaliser sur des sous-variétés invariantes normalement hyperboliques (voir la construction en section 7.9). Ceci permet d'obtenir très simplement de nouvelles classes d'exemples : du phénomène de Newhouse, on déduit l'existence (en dimension 4) de classes de récurrence par chaînes accumulées par des selles isolées (des orbites périodiques hyperboliques qui ne sont ni des sources ni des puits et dont la classe homocline est triviale). Dans ce chapitre nous étudions le problème réciproque : *étant donné un ensemble invariant  $K$ , peut-on détecter l'existence d'une sous-variété invariante qui le contient ?* Nous présentons le critère issu de [24].

### 6.1 Variété normalement hyperbolique

Considérons un ensemble compact invariant  $K$  muni d'une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus E^u$  telle que  $E^u$  est uniformément dilaté. Supposons qu'il existe une sous-variété  $N \subset M$  contenant  $K$ , tangente à  $E$  (et de dimension  $\dim(E)$ ), qui soit *localement invariante* : il existe un voisinage  $U$  de  $K$  dans  $N$  tel que  $f(U) \subset N$  (voir la figure 6.1).

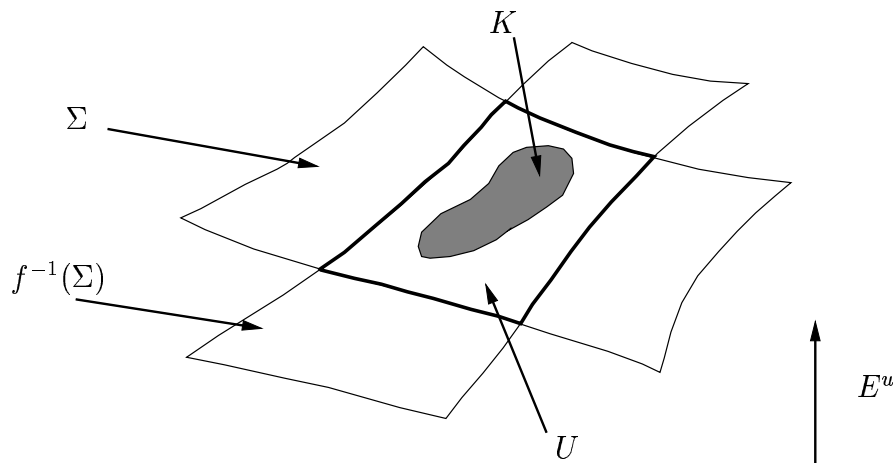


FIG. 6.1 – Variété normalement hyperbolique localement invariante au voisinage de  $K$ .

Il est facile de voir que tout point dont l'orbite est contenue dans un petit voisinage de  $K$  appartient à  $N$ . Un argument classique de transformée de graphe (voir [79, 24]) entraîne que cette propriété est encore vérifiée pour les difféomorphismes proches.

**Théorème 6.1.** *Considérons un ensemble compact invariant  $K$  muni d'une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus E^u$  telle que  $E^u$  est uniformément dilaté, et une sous-variété  $N \subset M$  contenant  $K$ , tangente à  $E$ , qui est localement invariante au voisinage de  $K$ .*

*Il existe alors un voisinage  $\Sigma$  de  $K$  dans  $N$  qui est une sous-variété à bord localement invariante par  $f$ , un voisinage  $U$  de  $K$  dans  $M$  et un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f$  dans  $\text{Diff}^1(M)$  tels que pour tout  $g \in \mathcal{U}$  il existe  $\Sigma_g$  sous-variété à bord  $C^1$ -proche de  $\Sigma$  vérifiant : l'ensemble maximal invariant de  $g$  dans  $U$  est contenu dans  $\Sigma_g$  et  $g(\Sigma_g \cap U) \subset \Sigma_g$ .*

## 6.2 Existence de sous-variété localement invariante

Reprenons le cadre de la section précédente. Tout point  $x \in K$  possède une variété instable forte  $W^{uu}(x) = W_{E^u}(x)$  tangente à  $E^u(x)$ . Il est alors facile de voir que pour tout  $x \in K$ , la variété  $W^{uu}(x)$  n'intersecte  $K$  qu'au point  $x$ . En effet, si  $W^{uu}(x)$  recoupe  $K$  en  $y$ , en considérant les images de  $x, y$  pour un itéré  $f^{-n}$  avec  $n \geq 0$  large, on obtient deux points  $f^{-n}(x), f^{-n}(y)$  arbitrairement proches et joints par une courbe tangente à un champ de cône instable, transverse à la direction  $E$ .

Cette propriété admet une réciproque (voir [24]).

**Théorème 6.2** (Bonatti-Crovisier). *Considérons un ensemble compact invariant  $K$  ayant une décomposition dominée  $T_K = E \oplus E^u$  telle que  $E^u$  est uniformément dilaté.*

*Il existe alors une sous-variété à bord  $N \subset M$  de dimension  $\dim(E)$  qui :*

- contient  $K$  dans son intérieur,
- est tangente à  $E$  aux points de  $K$ ,
- est localement invariante au voisinage de  $K$ ,

*si (et seulement si) la propriété suivante est vérifiée.*

- (I) *Pour tout  $x \in K$ , la variété instable  $W^{uu}(x)$  ne rencontre  $K$  qu'au point  $x$ .*

## 6.3 Idée de la preuve du théorème 6.2

Nous utilisons le théorème d'extension de Whitney en classe  $C^1$  (voir par exemple [9, Appendice A]).

**Théorème 6.3** (Whitney). *Considérons une partie fermée  $A \subset \mathbb{R}^s$  et  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^{d-s}$  une application continue. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  *$\varphi$  s'étend en une fonction  $\Phi: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{d-s}$  de classe  $C^1$ ,*
2. *il existe une application continue  $D$  définie sur  $A$  et à valeurs dans l'espace d'applications linéaires  $L(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^{d-s})$ , telle que l'application  $R: A \times A \rightarrow \mathbb{R}^{d-s}$  définie par :*

$$R(x, y) = (\varphi(y) - \varphi(x)) - D(x).(y - x),$$

*vérifie : pour tout  $z \in A$ , la quantité  $\frac{\|R(x, y)\|}{\|y - x\|}$  tend vers 0 lorsque les points  $x \neq y$  de  $K$  tendent vers  $z$ .*

En travaillant dans des cartes, l'ensemble  $K$  du théorème 6.2 peut être localement décrit comme le graphe d'une application  $\varphi: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{d-s}$ , où  $s = \dim(E)$  : les axes  $\mathbb{R}^s \times \{y\}$  et  $\{x\} \times \mathbb{R}^{d-s}$  sont respectivement tangents à des champs de cônes autour des directions  $E$  et  $E^u$ . En effet, si l'on fixe une section locale  $S$  de la lamination par variétés instables fortes, on peut projeter localement  $K$  sur  $S$  par holonomie. L'hypothèse (I) du théorème 6.2 se traduit par l'injectivité de cette application.

Le fibré  $E$  définit une application  $K \rightarrow L(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^{d-s})$ . Si la condition (2) n'est pas satisfaite, on peut trouver des paires de points proches  $x, y$  telles que  $y - x$  soit uniformément transverse à un champ de cônes autour de la direction  $E$ . Par conséquent, la dynamique dilate le vecteur  $y - x$  par itérations positives : il existe  $n \geq 1$  tel que la distance  $d(f^n(y), f^n(x))$  soit proche de 1 ; par ailleurs, le vecteur  $f^n(y) - f^n(x)$  (vu dans une carte) est proche du champ  $E^u$ . En prenant une suite de points  $(x, y)$  telle que  $d(x, y)$  tende vers 0, l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$ . Le long d'une suite extraite,  $f^n(x)$  converge vers un point  $x_0 \in K$  et  $f^n(y)$  vers un point  $y_0 \in K \cap W^{uu}(x_0)$ , contredisant l'hypothèse (I). La condition (2) du théorème de Whitney est donc satisfaite.

À l'aide d'une partition de l'unité, on obtient une variété différentiable à bord  $\Sigma_0$  de dimension  $\dim(E)$  qui contient  $K$  dans son intérieur et qui est tangente à  $E$  aux points de  $K$ . Un argument de transformée de graphe, permet de modifier  $\Sigma_0$  pour obtenir une variété localement invariante au voisinage de  $K$ .

## 6.4 Application : existence de feuilletages stables

Nous pouvons retrouver très simplement l'existence d'un feuilletage stable au voisinage de tout ensemble hyperbolique pour les difféomorphismes de surface de classe  $C^2$  (voir [123, appendice A] pour une démonstration classique).

**Théorème 6.4.** *Considérons un difféomorphisme  $f$  de classe  $C^2$  d'une surface  $M$  et un ensemble hyperbolique  $K \subset M$ . Il existe alors un feuilletage  $\mathcal{F}^s$  de classe  $C^1$ , défini au voisinage de  $K$  et localement invariant par  $f$ , qui est tangent au fibré stable de  $K$ .*

*Démonstration.* Puisque  $f$  est de classe  $C^2$ , il induit un difféomorphisme  $\widehat{f}$  de classe  $C^1$  sur le fibré unitaire tangent  $\pi: T^1M \rightarrow M$ . Le fibré stable  $E^s$  au-dessus de  $K$  définit un ensemble compact invariant  $\widehat{K} \subset T^1M$  qui relève  $K$ .

En tout point  $\widehat{x} \in \widehat{K}$ , notons  $\widehat{E}^{uu}(x)$  le sous-espace de  $T_{\widehat{x}}T^1M$  tangent aux fibres de  $\pi$ . Ceci définit un fibré continu invariant  $\widehat{E}^{uu}$  au-dessus de  $K$ . On vérifie facilement qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $n \geq 1$ , on ait pour tout  $\widehat{x} \in \widehat{K}$ ,

$$\|D_{\widehat{x}}\widehat{f}^n|_{\widehat{E}^{uu}}\| \geq C^{-1} \cdot \frac{\|D_{\pi(\widehat{x})}f^n|_{E^u}\|}{\|D_{\pi(\widehat{x})}f^n|_{E^s}\|}.$$

Transversalement aux fibres, la norme de  $D\widehat{f}^n$  est bornée par  $\|D_{\pi(\widehat{x})}f^n|_{E^u}\|$ . Ceci montre que  $\widehat{K}$  possède une décomposition dominée en trois fibrés  $\widehat{E}^s \oplus \widehat{E}^u \oplus \widehat{E}^{uu}$  telle que  $\widehat{E}^s$  et  $\widehat{E}^u$  se projettent par  $\pi$  respectivement sur  $E^s$  et  $E^u$ .

En chaque point  $\widehat{x}$ , on peut considérer la variété instable forte  $\widehat{W}^{uu}(x)$ , tangente à  $\widehat{E}^{uu}(x)$  : par construction c'est l'ensemble  $T_{\pi(\widehat{x})}^1M \setminus \{E^u(x)\}$ . Par conséquent, elle coupe  $\widehat{K}$  en  $\widehat{x}$  uniquement. Nous pouvons donc appliquer le théorème 6.2 et considérer une sous-variété  $\widehat{N} \subset T^1M$  contenant

$\widehat{K}$ , tangente à  $\widehat{E}^s \oplus \widehat{E}^u$  et localement invariante. La projection  $\widehat{N} \rightarrow M$  induite par  $\pi$  est un difféomorphisme local, injectif sur  $\widehat{K}$ , donc injectif au voisinage de  $\widehat{K}$ . On peut donc interpréter  $\widehat{N}$  comme un champ de droites  $C^1$  au voisinage de  $K$  qui est localement invariant par  $Df$  et qui étend le champ  $E^s$  défini au-dessus  $K$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}^s$  s'obtient alors en intégrant ce champ de droites.  $\square$

## 6.5 Problèmes

**a) Classes pelliculaires.** Nous avons vu en introduction qu'il existe des classes de récurrence par chaînes accumulées par des orbites périodiques qui ne sont ni des puits ni des sources : pour les exemples construits, la dynamique est supportée par une sous-variété normalement hyperbolique. On peut se demander s'il existe des exemples plus intéressants.

**Question 6.5.** *Existe-t-il un ouvert non vide  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  et un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}$  formé de difféomorphismes ayant une classe homocline  $H(p)$  avec la propriété suivante ? La classe  $H(p)$  n'est pas contenue dans une sous-variété normalement hyperbolique et est accumulée par des orbites périodiques selles dont l'indice n'appartient pas à l'ensemble des indices des points périodiques de  $H(p)$ .*

L. Díaz appelle *classe pelliculaire* une classe homocline ayant de telles propriétés.

**b) Connexions fortes.** Lorsque la condition (I) n'est pas vérifiée, il peut être utile de chercher un point périodique  $x \in K$  tel que  $W^{uu}(x) \setminus \{x\}$  rencontre  $K$ . Ceci peut permettre de créer des connexions fortes (voir la section 8.2 pour la définition). Nous sommes alors intéressés par des énoncés de la forme :  *$K$  satisfait (I) ou bien possède une connexion forte.*

Nous obtiendrons dans certains cas de tels énoncés en sections 10.3 et 10.5.

# Chapitre 7

## Bifurcations de points périodiques

Nous avons rassemblé dans ce chapitre divers résultats perturbatifs sur les suites périodiques d'applications linéaires. Grâce au lemme de Franks (théorème 2.2), on obtient des résultats perturbatifs sur les orbites périodiques des difféomorphismes. Comme conséquence, nous déduisons que les difféomorphismes  $C^1$ -génériques dont l'ensemble récurrent par chaînes n'admet pas de décomposition dominée possède une infinité de puits ou de sources (phénomène de Newhouse). Nous démontrons aussi le théorème d' $\Omega$ -stabilité en utilisant le lemme de connexion pour les pseudo-orbites. Finalement, nous présentons le théorème de Pujals-Sambarino-Wen-Gourmelon qui fait le lien entre les tangences homoclines et l'absence de décomposition dominée.

### 7.1 Cocycles linéaires périodiques

**Définition.** Un *cocycle linéaire périodique*  $A$  est la donnée d'une suite  $E$  d'espaces euclidiens  $(E_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  de dimension  $d$ , d'une suite d'isomorphismes linéaires  $A_i: E_i \rightarrow E_{i+1}$  et d'un entier  $\tau \geq 1$ , tels que  $E_{i+\tau} = E_i$  et  $A_{i+\tau} = A_i$  pour tout  $i$ . On appelle  $\tau$  sa *période*. Les *valeurs propres* de  $A$  sont les valeurs propres de l'endomorphisme  $A_\tau \dots A_1$ . Ses *exposants* sont les quantités  $\lambda = \frac{1}{\tau} \log |\sigma|$  où  $\sigma$  parcourt l'ensemble des valeurs propres.

On dit que  $A$  est *borné* par  $K \geq 1$  si pour tout  $i$  on a

$$\sup (\|A_i\|, \|A_{i-1}^{-1}\|) \leq K.$$

On dit que les cocycles  $A$  et  $B$  sont  $\varepsilon$ -proches si pour tout  $i$  on a

$$\sup (\|A_i - B_i\|, \|A_i^{-1} - B_i^{-1}\|) \leq \varepsilon.$$

**Sous-fibrés.** Si  $E' = (E'_i)$  est une suite de sous-espaces de dimension  $d'$ , également  $\tau$ -périodique, qui est invariante par  $A$ , on obtient par restriction un cocycle  $A'$  de  $E'$ . Si  $A$  est borné par  $K$ , le cocycle  $A'$  l'est également. Réciproquement si  $A'$  est un cocycle de  $E'$  borné par  $K$ , c'est la restriction d'un cocycle  $A$  de  $E$  borné par  $K$ . Si  $A'$  et  $B'$  sont  $\varepsilon$ -proches, leurs extensions  $A$  et  $B$  seront également  $\varepsilon$ -proches.

**Hyperbolicité.** On dit que  $E$  est *uniformément contracté à la période*, s'il existe  $N \geq 1$  tel que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  on ait :

$$\prod_{0 \leq j < \tau/N} \|(A_{(j+1).N-1+i} \dots A_{j.N+i})\| \leq e^{-\tau/N}. \quad (7.1.1)$$

C'est une propriété plus forte que la contraction à la période (toutes les valeurs propres du produit  $A_\tau \dots A_1$  sont de module strictement plus petit que 1) mais plus faible que la contraction uniforme (il existe  $N \geq 1$  tel que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  on a  $\|(A_{i+N-1} \dots A_i)\| \leq e^{-1}$ ).

On dit que  $E$  admet une *décomposition dominée*  $E = F \oplus G$ , s'il existe deux suites  $\tau$ -périodiques  $F = (F_i)$  et  $G = (G_i)$  de sous-espaces supplémentaires qui sont  $A$ -invariantes et s'il existe  $N \geq 1$  tel que, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tous  $u \in F_i, v \in G_i$  unitaires, on ait :

$$\|(A_{i+N-1} \dots A_i).u\| \leq \frac{1}{e} \|(A_{i+N-1} \dots A_i).v\|. \quad (7.1.2)$$

La décomposition est *non triviale* si les dimensions de  $F$  et de  $H$  ne sont pas nulles.

On dit aussi que  $E$  est  *$N$ -uniformément contracté à la période* ou que la décomposition  $E = F \oplus G$  est  *$N$ -dominée* pour la dynamique de  $A$ , lorsque (7.1.1) ou (7.1.2) se produisent.

## 7.2 Contraction uniforme à la période

Le résultat suivant a été obtenu par Pliss [130] (voir aussi [89, 91, 94]).

**Théorème 7.1** (Pliss). *Pour tous  $d, K \geq 1, \varepsilon > 0$ , il existe  $N, \tau_0 \geq 1$  et  $\delta > 0$  tels que pour tout cocycle périodique linéaire  $A$  de dimension  $d$ , borné par  $K$  et de période  $\tau \geq \tau_0$  l'un des cas suivants se produit :*

- $E$  est  $N$ -uniformément contracté à la période ;
- il existe une  $\varepsilon$ -perturbation  $B$  de  $A$  qui possède un exposant positif.

## 7.3 Valeurs propres réelles simples

Il est possible par perturbation de rendre les valeurs propres d'un cocycle linéaire périodique réelles. Ceci a été démontré dans [23] pour la dimension 2 et généralisé en dimension supérieure dans [38].

**Proposition 7.2** (lemme 6.6 de [23] et théorème 2.1 de [38]). *Pour tous  $d, K \geq 1, \varepsilon > 0$ , il existe  $\tau_0 \geq 1$  tel que tout cocycle périodique linéaire  $A$  de dimension  $d$ , borné par  $K$  et de période  $\tau \geq \tau_0$  possède une  $\varepsilon$ -perturbation  $B$  telle que :*

- les valeurs propres de  $B$  sont toutes réelles et simples ;
- pour  $1 \leq i \leq d$ , les  $i^{\text{èmes}}$  exposants de  $A$  et de  $B$  (comptés avec multiplicité) sont  $\varepsilon$ -proches.

## 7.4 Domination

Mañé a démontré [94] qu'en l'absence de décomposition dominée, on peut faire bifurquer les orbites périodiques de type selle d'un difféomorphisme de surface pour les transformer en puits ou source. Ceci a été généralisé en dimension 3 par Díaz, Pujals et Ures [54] puis en dimension quelconque par Bonatti, Pujals et Díaz dans le cadre des dynamiques robustement transitives [33] : supposons que les difféomorphismes proches de  $f \in \text{Diff}^1(M)$  soient tous transitifs, alors  $M$  possède une décomposition dominée pour  $f$ . Plus récemment, Bonatti, Gourmelon et Vivier ont donné [38] une preuve différente de ce résultat qui autorise à travailler avec des orbites périodiques n'appartenant pas à un même ensemble transitif.



**Théorème 7.3** (Bonatti-Gourmelon-Vivier). *Pour tous  $d, K \geq 1, \varepsilon > 0$ , il existe  $N, \tau_0 \geq 1$  tel que pour tout cocycle périodique linéaire  $A$  de dimension  $d$ , borné par  $K$  et de période  $\tau \geq \tau_0$  l'un des cas suivants se produit :*

- $E$  possède une décomposition  $N$ -dominée non triviale ;
- il existe une  $\varepsilon$ -perturbation  $B$  de  $A$  dont toutes les valeurs propres sont réelles et de même module.

Comme conséquence des théorèmes 7.1 et 7.3, on retrouve un résultat de Mañé [94].

**Corollaire 7.4** (Mañé). *Pour tous  $d, K \geq 1, \varepsilon > 0$ , il existe  $N, \tau_0 \geq 1$  tel que pour tout cocycle périodique linéaire  $A$  de dimension  $d$ , borné par  $K$  et de période  $\tau \geq \tau_0$  l'un des cas suivants se produit :*

- il existe une décomposition  $N$ -dominée  $E = E^s \oplus E^u$  telle que  $E^s$  et  $E^u$  sont  $N$ -uniformément contractés à la période par  $A$  et  $A^{-1}$  respectivement ;
- il existe une  $\varepsilon$ -perturbation  $B$  de  $A$  ayant une valeur propre de module 1.

*Démonstration.* Considérons des entiers  $N, \tau_0$  supérieur aux entiers donnés par les théorèmes 7.1 et 7.3 et considérons un cocycle  $A$  pour lequel le deuxième cas du corollaire ne se produit pas.

Considérons une décomposition  $N$ -dominée  $E = F \oplus G \oplus H$  (éventuellement triviale) telle que tous les exposants selon  $F$  soient strictement négatifs et tous les exposants selon  $H$  soient strictement positifs. Il existe une telle décomposition qui maximise les dimensions de  $F$  et de  $G$ . Nous pouvons appliquer le théorème 7.3 à la restriction de  $A$  au fibré  $G$ . Puisqu'il n'existe pas de décomposition  $N$ -dominée de  $G$ , on peut perturber le cocycle  $A$  pour rendre tous ses exposants selon  $G$  de mêmes signes. Puisque nous ne sommes pas dans le second cas du corollaire, les exposants selon  $G$  doivent déjà être de mêmes signes pour  $A$ , ce qui contredit la maximalité de  $F$  ou de  $H$ . Nous avons donc montré qu'il existe une décomposition  $N$ -dominée  $E = E^s \oplus E^u$  telle que tous les exposants de  $A$  selon  $E^s$  sont strictement négatifs et tous ceux selon  $E^u$  sont strictement positifs.

En appliquant à présent le théorème 7.1 à chacun des fibrés  $E^s$  et  $E^u$ , on obtient que  $E^s$  et  $E^u$  sont  $N$ -uniformément contractés à la période par  $A$  et  $A^{-1}$  respectivement.  $\square$

## 7.5 Tangences homoclines

D'autres bifurcations associées aux orbites périodiques hyperboliques font intervenir les variétés invariantes. C'est la cas des tangences homoclines, particulièrement importantes puisqu'elles engendrent des modifications importantes de la dynamique (voir [123, 35]).

**Définition 7.5.** Une orbite périodique hyperbolique  $O$  a une *tangence homocline* s'il existe un point d'intersection non transverse  $z$  entre les variétés stables et instables de  $O$ .

En dimension deux, Pujals et Sambarino ont montré [149] que si l'on ne peut pas approcher  $f$  par des difféomorphismes présentant des tangences homoclines, l'ensemble des points périodiques de type selle de  $f$  possède une décomposition dominée. Ceci a été généralisé par Wen [182] en dimension quelconque. Gourmelon [64] a amélioré ces énoncés en donnant une version quantitative qui autorise à considérer chaque orbite périodique séparément.

**Théorème 7.6** (Pujals-Sambarino, Wen, Gourmelon). *Pour tout voisinage  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  de  $f$ , il existe  $N, \tau_0 \geq 1$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $f$  tels que pour  $g_0 \in \mathcal{V}$  et toute orbite périodique hyperbolique  $O$  de  $g_0$  de période  $\tau \geq \tau_0$ , l'un des deux cas suivants se produit :*

- la décomposition  $T_O M$  en espaces stables et instables est  $N$ -dominée,
- il existe une perturbation  $g \in \mathcal{U}$  qui coïncide avec  $g_0$  sur  $O$  et sur un voisinage arbitrairement petit de  $O$  telle que  $O$  a une orbite de tangence homocline contenue dans un petit voisinage de  $O$ .

Avec le théorème 7.1 et la proposition 7.2, on en déduit (par une démonstration similaire à celle du corollaire 7.4, voir [183, lemmes 3.3 et 3.4]),

**Corollaire 7.7** (Wen). *Supposons que  $f$  n'est pas limite dans  $\text{Diff}^1(M)$  de difféomorphismes ayant une tangence homocline.*

*Il existe alors un voisinage  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  de  $f$  et  $N, \tau_0, \delta \geq 1$  tels que pour tout  $g \in \mathcal{U}$  et toute orbite périodique  $O$  de  $g$ , la décomposition  $T_O M = E_\delta^s \oplus E_\delta^c \oplus E_\delta^u$  en espaces caractéristiques dont les exposants de Lyapunov appartiennent respectivement à  $(-\infty, -\delta]$ ,  $(-\delta, \delta)$ ,  $[\delta, +\infty)$  vérifie :*

- $E_\delta^c$  est de dimension 0 ou 1,
- la décomposition  $E_\delta^s \oplus E_\delta^c \oplus E_\delta^u$  est  $N$ -dominée,
- si la période de  $O$  est supérieure à  $\tau_0$ , alors  $E_\delta^s$  et  $E_\delta^u$  sont  $N$ -uniformément contractés à la période par  $g$  et  $g^{-1}$  respectivement.

Ce résultat se généralise aux mesures ergodiques (voir [51, Corollaire 1.3] et [189]).

L'existence d'une tangence homocline est un phénomène de codimension 1 et d'après le théorème 2.1 de Kupka-Smale l'ensemble des difféomorphismes ayant une tangence homocline forme une partie maigre. On peut toutefois généraliser la définition précédente et définir une propriété qui apparaît sur des ouverts de difféomorphismes.

**Définition 7.8.** Une orbite périodique hyperbolique  $O$  possède une *tangence homocline robuste* si elle appartient à un ensemble hyperbolique transitif  $K$  tel que pour tout difféomorphisme  $g \in \text{Diff}^1(M)$  proche de  $f$  la continuation hyperbolique  $K_g$  de  $K$  pour  $g$  possède deux points  $x, y$  tels que  $W^s(x)$  et  $W^u(y)$  aient une intersection non transverse.

Toute variété de dimension supérieure ou égale à 3 possède des difféomorphismes ayant des tangences homocline robustes (voir [108, section 8], [18] et la section 7.9). En dimension 2, Newhouse a montré [106] qu'en topologie  $C^2$ , il existe des tangences homoclines robustes. Moreira a montré [101] que ce n'est pas le cas en topologie  $C^1$ .

**Théorème 7.9** (Moreira). *Lorsque  $\dim(M) = 2$ , il n'existe pas de tangence homocline robuste dans  $\text{Diff}^1(M)$ .*

## 7.6 Application (1) : phénomène de Newhouse en l'absence de décomposition dominée

D'après le théorème 3.8, le phénomène de Newhouse existe en topologie  $C^1$  sur toute variété de dimension supérieure ou égale à 3. Parallèlement à ces exemples, Mañé a montré [94] que tout difféomorphisme de surface  $C^1$ -générique est hyperbolique ou bien possède une infinité de puits ou de sources. Díaz, Pujals, Ures en dimension 3 (voir [54]), puis Bonatti, Díaz, Pujals en dimension quelconque [33] ont obtenu un résultat similaire.

**Théorème 7.10** (Bonatti-Díaz-Pujals-Ures). *Pour tout difféomorphisme appartenant à un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$ , toute classe homocline possède une décomposition dominée non triviale ou est contenue dans l'adhérence des puits ou des sources.*

En particulier, toute classe de récurrence par chaînes ayant de l'intérieur ou isolée dans  $\mathcal{R}(f)$  possède une décomposition dominée non triviale.

En appliquant le corollaire 4.6 et le théorème 7.3, nous obtenons [] une version du résultat précédent pour les ensembles transitifs par chaînes.

**Théorème 7.11** (Abdenur-Bonatti-Crovisier). *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que tout ensemble transitif par chaînes d'un difféomorphisme  $f \in \mathcal{G}$  possède une décomposition dominée non triviale ou bien est limite pour la distance de Hausdorff d'une suite de puits ou de sources.*

On en déduit un énoncé sur la dynamique globale.

**Corollaire 7.12** (Abdenur-Bonatti-Crovisier). *Pour tout difféomorphisme  $C^1$ -générique, – ou bien il existe une décomposition de  $\Omega(f)$  en un nombre fini d'ensembles compacts invariants*

$$\Omega(f) = \Lambda_0 \cup \dots \cup \Lambda_d$$

*tels que  $\Lambda_0 \cup \Lambda_d$  est l'union d'un nombre fini de puits et de sources et  $\Lambda_i$  possède une décomposition dominée non triviale,*

*– ou bien  $f$  possède une infinité de puits ou de sources.*

Au voisinage d'une classe homocline isolée, le phénomène de Newhouse n'a pas lieu et on peut obtenir dans ce cadre un résultat plus fort.

**Théorème 7.13** (Bonatti-Diaz-Pujals). *Pour tout difféomorphisme  $f$  appartenant à un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$ , toute classe homocline  $H$  qui est isolée dans  $\mathcal{R}(f)$  est hyperbolique en volume.*

*Plus précisément,  $H$  est une source, ou un puits, ou possède une décomposition dominée  $T_{H(O)}M = E \oplus E^c \oplus F$  telle que*

*–  $E$  et  $F$  sont non dégénérés,*

*– il existe  $N \geq 1$  tel que  $Df^N$  contracte uniformément le volume le long de  $E$  et dilate uniformément le volume le long de  $F$ .*

*Démonstration.* Si  $H(O)$  n'est pas un puits ou une source, il existe une décomposition dominée non triviale  $T_{H(O)}M = E \oplus F$ . Nous pouvons supposer que  $\dim(E)$  est minimale et il s'agit de montrer qu'il existe  $N \geq 1$  tel que  $Df^N$  contracte uniformément le volume le long de  $E$ .

La structure riemannienne sur  $M$  permet de définir le jacobien  $J(f, E)$  le long de  $E$  en chaque point de  $H(O)$  comme le module du déterminant de  $Df|_E$ . On obtient une fonction multiplicative sur  $K$ , i.e.  $J(f^n, E) = (J(f, E) \circ f^{n-1}) \dots J(f, E)$  pour tout  $n \geq 1$ . Si l'on suppose par l'absurde que le volume le long de  $E$  n'est uniformément contracté par  $Df^N$  pour aucun entier  $N \geq 1$ , il existe une mesure de probabilité invariante supportée par  $K$  telle que  $\int J(f, E) d\mu \geq 0$ . Le lemme de fermeture ergodique (théorème 4.1) implique qu'il existe une suite d'orbites périodiques  $(O_n)$  s'accumulant sur une partie de  $H(O)$  telles que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la moyenne de  $J(f, E)$  le long de  $O_n$  soit supérieure à  $-\varepsilon$  pour tout  $n$  suffisamment grand. Puisque  $f$  satisfait une condition de généralité, on en déduit que tout voisinage de  $H(O)$  contient une orbite périodique  $O_E$  telle que la moyenne de  $J(f, E)$  le long de  $O_E$  soit strictement positive.

Nous utilisons à présent le fait que  $H(O)$  est isolée pour conclure que  $O_E$  est contenue dans  $H(O)$ . La généralité de  $f$  implique alors que  $H(O) = H(O_E)$ . La définition des classes homoclines implique que  $H(O)$  est limite de Hausdorff d'orbites périodiques sur lesquelles la moyenne de  $J(f, E)$  est strictement positive. Puisque  $\dim(E)$  est minimale, en appliquant le théorème 7.3,

on peut faire bifurquer l'une de ces orbites périodiques pour que tous les exposants de Lyapunov le long de  $E$  soient strictement positifs : on obtient alors une source dans un voisinage de  $H(O)$  arbitraire. Par un argument de généralité, nous en déduisons que  $H(O)$  est limite de Hausdorff de sources, contredisant le fait que cette classe soit isolée et ne soit pas elle-même une source.  $\square$

*Remarque 7.14.* Le point clé de la démonstration consiste à montrer que s'il existe une suite d'orbites périodiques  $(O_n)$  s'accumulant sur une partie  $K$  de  $H(O)$  et dont la moyenne de  $J(f, E)$  long de  $O_n$  soit positive, on peut se ramener à  $K = H(O)$ .

Nous avons utilisé le fait que  $H(O)$  est isolé pour voir que les orbites  $O_n$  sont contenues dans  $H(O)$  puis nous nous sommes servi de la notion de points périodiques homocliniquement reliés pour conclure  $K = H(O)$ . Ce second argument sera pleinement exploité au chapitre 8.

## 7.7 Application (2) : caractérisation de la stabilité

Un problème, formulé par Palis et Smale [122] et qui a occupé les dynamiciens pendant les années 1970-1980, est la caractérisation des dynamiques structurellement stables. Abraham et Smale ont montré [10, 170] que ces dynamiques ne sont pas dense dans  $\text{Diff}^1(M)$  lorsque  $\dim(M) \geq 3$ .

**Définition.** Nous disons qu'un difféomorphisme  $f$  est *structurellement stable* (pour la topologie  $C^1$ ) si tout difféomorphisme  $g$  appartenant à un voisinage de  $f$  dans  $\text{Diff}^1(M)$  est conjugué à  $f$  par un homéomorphisme de  $M$ . Plus généralement,  $f$  est  $\Omega$ -stable (pour la topologie  $C^1$ ) si pour tout difféomorphisme  $g$  appartenant à un voisinage de  $f$ , les systèmes  $(\Omega(f), f)$  et  $(\Omega(g), g)$  sont conjugués par un homéomorphisme  $h: \Omega(f) \rightarrow \Omega(g)$ .

**Conditions suffisantes.** Smale a montré [171, 172] que les difféomorphismes axiome A sans cycle sont  $\Omega$ -stables.

Une fois que l'on sait que les difféomorphismes axiome A sans cycles sont les difféomorphismes hyperboliques (voir la section 1.6), son résultat est une conséquence du lemme de pistage pour les dynamiques hyperboliques.

Pour un difféomorphisme axiome A satisfaisant l'hypothèse suivante :

$$(\text{transversalité forte}) \quad \forall x, y \in \Omega(f), \forall z \in W^s(x) \cap W^u(y), \quad T_z M = T_z W^s(x) + T_z W^u(y),$$

Robbin [153] et Robinson [157] ont montré que  $f$  est structurellement stable (la démonstration est bien plus délicate que pour l' $\Omega$ -stabilité).

**Conditions nécessaires.** Palis et Robinson ont montré [113, 154] que pour un difféomorphisme axiome A, les conditions "sans cycle" ou "transversalité forte" sont nécessaires pour avoir l' $\Omega$ -stabilité ou la stabilité structurelle respectivement. Palis et Mañé ont montré plus tard que l'axiome A lui-même est nécessaire [99, 114].

On obtient alors le théorème suivant.

**Théorème d' $\Omega$ -stabilité.** *Pour tout difféomorphisme il y a équivalence entre les propriétés :*

- $f$  est  $\Omega$ -stable (pour la topologie  $C^1$ ),
- $f$  est hyperbolique (définition 1.3),
- $f$  possède la propriété (\*) suivante :

(\*) Toute orbite périodique de tout  $g \in \text{Diff}^1(M)$  proche de  $f$  est hyperbolique.

L'équivalence avec la troisième propriété a été montrée par Franks, Aoki et Hayashi [57, 13, 70].

**Démonstration de l' $\Omega$ -stabilité.** Nous avons déjà expliqué pourquoi les difféomorphismes hyperboliques sont  $\Omega$ -stables. Supposons à présent que  $f \in \text{Diff}^1(M)$  est  $\Omega$ -stable. D'après le théorème de Kupka-Smale, il existe des perturbations arbitrairement petites de  $f$  dont le nombre d'orbites périodiques de chaque période est fini. La stabilité implique que  $f$  a aussi cette propriété. Supposons que  $f$  ait un point périodique  $p$  non hyperbolique : avec le lemme de Franks, il est possible de perturber  $f$  pour que  $p$  ait une valeur propre racine de l'unité et que la dynamique au voisinage de l'orbite de  $p$  soit topologiquement conjuguée à la partie linéaire de  $f$  le long de l'orbite de  $p$  : on obtient ainsi une infinité de points périodiques de même période au voisinage de  $p$  pour une petite perturbation de  $f$ , ce qui contredit la stabilité. Puisque l' $\Omega$ -stabilité est une propriété ouverte, nous avons montré que l' $\Omega$ -stabilité entraîne la propriété (\*).

Supposons finalement que  $f$  satisfait (\*). Remarquons que cette propriété permet de suivre continûment toute orbite périodique le long d'un chemin de difféomorphismes proches de  $f$ . D'après le corollaire 7.4, il existe un entier  $N \geq 1$  tel que pour tout  $0 \leq i \leq d$  et tout difféomorphisme  $g$  proche de  $f$ , l'ensemble  $\mathcal{P}er_i(g)$  des points périodiques d'indice  $i$  possède une décomposition  $N$ -dominée et leurs directions stables et instables sont  $N$ -uniformément contractées à la période par  $g$  et  $g^{-1}$  respectivement. Le corollaire 5.9 montre que  $f$  n'a qu'un nombre fini de classes homoclines distinctes. Nous en déduisons :

**Affirmation.**  $f$  n'a qu'un nombre fini de classe de récurrence par chaînes.

*Démonstration.* Si ce n'était pas le cas, on peut considérer une suite arbitrairement longue  $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_k = M$  d'ouverts filtrants (i.e.  $f(\overline{U}_i) \subset U_i$ ) telle que  $U_{i+1} \setminus \overline{U}_i$  contient une classe de récurrence par chaînes. Par une perturbation arbitrairement petite donnée par le lemme de fermeture, on peut créer dans  $U_{i+1} \setminus \overline{U}_i$  une orbite périodique. Puisque (\*) est satisfaite cette orbite peut être associée à une orbite périodique  $O$  de  $f$  et puisque la suite  $(U_0, U_1, \dots, U_k)$  est filtrante,  $O$  appartient à  $U_{i+1} \setminus \overline{U}_i$ . On peut donc trouver  $k$  orbites périodiques pour  $f$  qui ne sont pas homocliniquement reliées, contredisant la borne sur le nombre de classes homoclines de  $f$ .  $\square$

Nous montrons par l'absurde que  $f$  est hyperbolique. Si ce n'est pas le cas, il existe une classe de récurrence par chaînes  $K$  qui n'est pas hyperbolique. Nous avons vu qu'elle est isolée dans  $\mathcal{R}(f)$ . Puisque  $f$  a la propriété (\*), toute orbite périodique contenue dans un voisinage de  $K$  pour un difféomorphisme  $g$  proche de  $f$  peut être associée à une orbite périodique de  $K$ . D'après le lemme de fermeture,  $K$  contient donc des orbites périodiques. Soit  $i$  l'indice maximal des points périodiques contenus dans  $K$ .

**Affirmation.**  $\mathcal{P}er_i(K)$  n'est pas hyperbolique.

*Démonstration.* En effet si  $\overline{\mathcal{P}er_i(K)}$  est un ensemble hyperbolique  $\Lambda$ , il se décompose en un nombre fini de classes homoclines hyperboliques disjointes. Soit  $H(p)$  l'une d'entre elles. Puisque  $H(p)$  est strictement contenu dans la classe de récurrence par chaînes  $K$ , on peut trouver

$x^s \in K \cap W^s(H(p)) \setminus \Lambda$  et  $x^u \in K \cap W^u(H(p)) \setminus \Lambda$ . Le lemme de connexion pour les pseudo-orbites permet par une perturbation de créer une orbite homocline transverse en  $x^s$  pour l'ensemble hyperbolique  $H(p)$  et un difféomorphisme proche  $g$ . Le difféomorphisme  $g$  possède donc un ensemble hyperbolique  $\Lambda_g$  qui est la continuation hyperbolique de  $\Lambda$ , ainsi que des points périodiques d'indice  $i$  proches de  $x^s$  : nous avons créé par perturbation de nouvelles orbites périodiques, contredisant (\*).  $\square$

L'ensemble  $\overline{\text{Per}_i(K)}$  est union d'un nombre fini de classes homoclines associées à des points périodiques d'indice  $i$ . L'une d'entre elles, notée  $H(p)$ , n'est pas hyperbolique. D'après ce qui précède, elle possède une décomposition dominée  $T_{H(p)}M = E \oplus F$  telle que  $\dim(E)$  est égale à la dimension stable de  $p$ .

**Affirmation.** *Le fibré  $F$  est uniformément dilaté.*

*Démonstration.* Si l'on suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas, il existe une mesure ergodique  $\mu$  supportée par  $H(p)$  qui vérifie  $\int \|Df|_F^{-N}\| d\mu \geq 1$ . En appliquant le lemme de fermeture ergodique, on obtient une orbite périodique  $O$  proche de  $H(p)$  pour un difféomorphisme  $g$  proche de  $f$  pour laquelle le fibré  $F$  n'est pas  $N$ -uniformément contracté à la période par  $g^{-1}$ . Si  $O$  est d'indice  $i$ , ceci contredit la propriété (\*). Sinon  $O$  est d'indice supérieur à  $i$ , contredisant le choix d'un indice maximal  $i$ .  $\square$

Pour conclure, nous appliquons le lemme de sélection de Mañé (théorème 5.15) à l'ensemble  $H(p)$  et à la décomposition  $E \oplus F$ . Nous en déduisons que  $f$  possède une orbite périodique qui n'est pas  $N$ -uniformément contractée à la période le long de  $E$ . C'est une contradiction.  $\square$

## 7.8 Contrôle des variétés invariantes

Les techniques de Gourmelon permettent de faire bifurquer une orbite périodique comme dans les sections précédentes, tout en contrôlant certaines orbites homoclines (voir [65]). En particulier, ceci permet [64] de créer des tangences à l'intérieur d'une classe homocline.

**Théorème 7.15** (Gourmelon). *Toute classe homocline  $H(O)$  de  $f$  a l'une de ces propriétés :*

- *il existe une perturbation  $g$  de  $f$  telle que  $O$  possède une tangence homocline,*
- *il existe une décomposition dominée  $T_{H(O)}M = E \oplus F$  telle que  $\dim(E) = \dim(E^s(O))$ .*

Potrie a appliqué [134] les techniques de ce chapitre à l'étude des classes homoclines qui sont stable au sens de Lyapunov à la fois pour  $f$  et  $f^{-1}$  : puisqu'une telle classe  $H(p)$  reste un quasi-attracteur pour tout difféomorphisme générique proche, il n'est pas possible de faire bifurquer l'une de ses orbites périodiques  $O$  en un puits tout en préservant l'intersection  $W^u(p) \cap W^s(O)$ .

**Théorème 7.16** (Potrie). *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{G}$ , toute classe homocline qui est stable au sens de Lyapunov à la fois pour  $f$  et  $f^{-1}$  possède une décomposition dominée non triviale.*

Les bifurcations d'orbites périodiques avec contrôle de la classe homocline seront plus largement étudiée au chapitre 8.

## 7.9 Exemples d'Abraham-Smale

Nous reprenons la méthode de construction de Abraham-Smale pour obtenir les résultats déjà mentionnés de [10, 165, 29, 18] et [108, section 8]. L'idée est de considérer des ensembles hyperboliques transitifs d'une variété de dimension trois dont le fibré stable est un fibré en droites, mais dont la variété stable est de dimension deux (elle est feuilletée par les variétés stables des points de l'ensemble hyperbolique qui sont des sous-variétés de dimension un).

**Théorème 7.17** (Newhouse [108], Asaoka [18]). *Toute variété  $M$  de dimension  $\geq 3$ , possède un ouvert non vide  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  de difféomorphismes ayant une orbite périodique  $O$  qui présente une tangence homocline robuste. De plus, la classe homocline  $H(O)$  n'a pas de décomposition dominée non triviale.*

D'après le théorème 7.11, pour tout difféomorphisme  $f$  appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\mathcal{U}$ , la classe homocline  $H$  est donc limite d'une infinité de puits ou de sources. (Phénomène de Newhouse identifié par Bonatti-Díaz.) Ceci fournit un exemple de dynamique sauvage, mentionné en introduction.

*Démonstration.* La construction utilise l'exemple dû à Plykin [131] (voir aussi [158, section 8.9 ]) en dimension deux d'un difféomorphisme  $f_0$  ayant un ensemble hyperbolique transitif  $\Lambda$  d'indice 1 qui est un attracteur. Sa variété stable locale est un voisinage  $\Sigma$  de  $\Lambda$  feuilleté par les variétés locales  $W_{loc}^s(x)$ ,  $x \in \Lambda$ . Voir la figure 7.1.

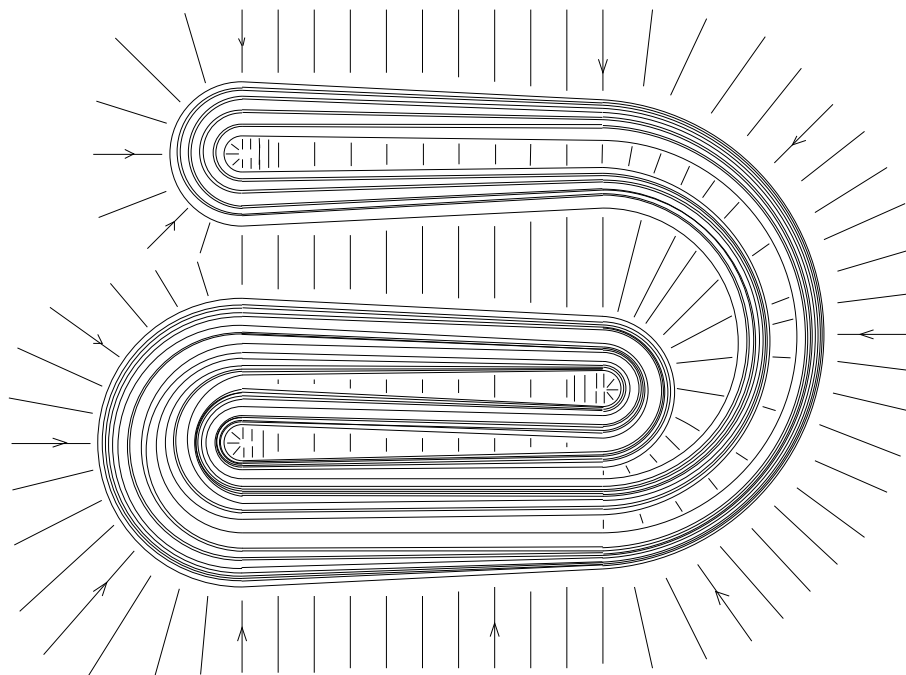


FIG. 7.1 – Exemple d'attracteur de Plykin.

On peut alors plonger  $\Sigma \times (-1, 1)$  dans  $M$  et considérer des difféomorphismes  $f \in \text{Diff}^1(M)$  coïncidant avec l'application  $(x, y) \mapsto (f_0(x), \mu \cdot y)$  sur  $\Sigma \times (-1, 1)$ . Pour  $\mu > 1$  suffisamment

grand, la décomposition  $T_z M = E^x \oplus E^y$  aux points  $z \in \Lambda$  correspondant aux coordonnées  $(x, y)$  est dominée. On en déduit (voir par exemple le théorème 6.1) que pour tout difféomorphisme  $g$  proche de  $f$ , la continuation hyperbolique  $\Lambda_g$  de  $\Lambda$  est contenue dans une sous-variété invariante  $\Sigma_g$  qui est  $C^1$ -proche de  $\Sigma$ .

Pour tout  $g$  proche de  $f$ , la surface  $\Sigma_g$  est encore contenue dans l'ensemble stable de  $\Lambda_g$  et possède un feuilletage  $\mathcal{F}^{ss}$  en variétés stables  $W_{loc}^{ss}(z)$ ,  $z \in \Lambda_g$ . Fixons une orbite périodique  $O \subset \Lambda$ . Sa continuation  $O_g$  appartient à une variété instable  $W^u(O_g)$  de dimension 2 possédant un feuilletage  $\mathcal{F}^{uu}$  par variétés instables fortes de dimension 1. Voir la figure 7.2.

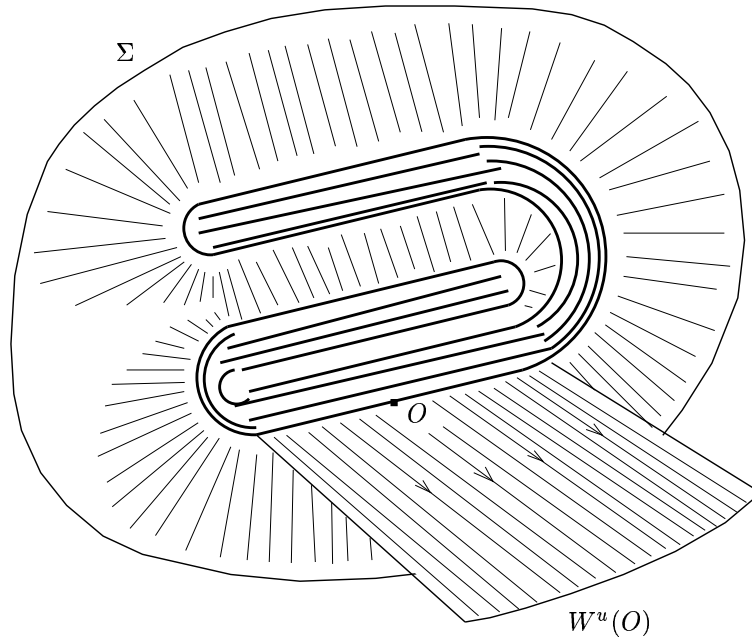


FIG. 7.2 – Plongement de l'attracteur de Plykin en dimension 3.

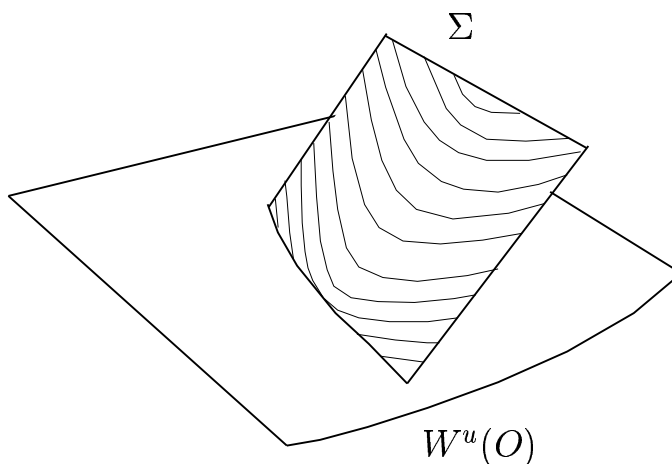
On peut alors modifier  $f$  hors d'un voisinage de  $\Sigma$  pour que  $W^{uu}(O)$  et  $\Sigma$  aient un point d'intersection transverse  $\zeta$  hors de  $\Lambda$  tel que la feuille  $\mathcal{F}^{ss}(\zeta)$  soit tangente à  $W^{uu}(O)$  et de sorte que ces propriétés restent satisfaites pour tout difféomorphisme  $g \in \text{Diff}^1(M)$  proche de  $f$  et un point  $\zeta_g$  proche de  $\zeta$ . Par conséquent, l'ensemble hyperbolique  $\Lambda_g$  possède une tangence homocline robuste. Voir la figure 7.3.

On peut demander qu'au voisinage de  $\xi$ , il existe une feuille de  $\mathcal{F}^{ss}$  qui soit transverse à  $W^u(O)$ . Pour tout  $g$  proche de  $f$ , il existe donc un point d'intersection non transverse  $\zeta_g$  entre une feuille de  $\mathcal{F}^{ss}$  et  $W^u(O)$  qui soit accumulé par des points d'intersections transverses. Ceci implique que  $\zeta_g$  appartient à la classe homocline  $H(O_g)$  associée à  $\Lambda_g$ .

De la même manière, on peut construire indépendamment un point d'intersection transverse  $\xi$  hors de  $\Lambda$  entre  $W^u(O)$  et  $\Sigma$  tel que la feuille  $\mathcal{F}^{uu}(\xi)$  soit tangente à  $\Sigma$  et de sorte que ces propriétés restent satisfaites pour tout difféomorphisme  $g \in \text{Diff}^1(M)$  proche de  $f$  et un point  $\xi_g$  proche de  $\xi$ .

La classe homocline  $H(O_g)$  ne possède pas de décomposition dominée non triviale. En effet, si elle possédait par exemple une décomposition  $T_{H(O_g)} M = E \oplus F$  avec  $\dim(E) = 1$ , il est facile de voir que l'espace  $E_{\zeta_g}$  coïnciderait avec l'espace tangent à la feuille  $\mathcal{F}^{ss}(\zeta_g)$  en  $\zeta_g$  et l'espace



FIG. 7.3 – Intersection critique de  $\mathcal{F}^{ss}$  et  $W^u(O)$ .

$F_{\zeta_g}$  avec l'espace tangent à  $W^u(O)$ . Par construction ces espaces ne sont pas transverse et on obtiendrait une contradiction.  $\square$

**Addenda.** Cette construction offre beaucoup de souplesse. On peut plonger indépendamment les dynamiques  $(x, y) \mapsto (f_0(x), \mu \cdot y)$  et  $(x, y) \mapsto (f_0^{-1}(x), \mu^{-1} \cdot y)$  et ainsi construire un difféomorphisme  $f$  de  $M$  qui possède deux ensembles hyperboliques  $\Lambda, \Lambda'$ , l'un d'indice 1 et l'autre d'indice 2, tels que :

- $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont chacun contenu dans une surface  $\Sigma, \Sigma'$  invariante par  $f$  et  $f^{-1}$  respectivement, ayant un point d'intersection transverse.
- $\Lambda, \Lambda'$  possèdent chacun une orbite périodique  $O, O'$  telles que les variétés invariantes (de dimension deux)  $W^u(O)$  et  $W^s(O')$  aient un point d'intersection transverse.

On obtient donc la propriété suivante qui permet d'obtenir le théorème 3.7.

*Il existe un ouvert non vide  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  de difféomorphismes ayant des ensembles hyperboliques  $\Lambda, \Lambda'$  d'indice 1 et 2 respectivement qui présentent un cycle robuste :  $W^u(\Lambda) \cap W^s(\Lambda')$  et  $W^u(\Lambda') \cap W^s(\Lambda)$  sont non vides.*

En dimension plus grande, la même construction permet de lier robustement des ensembles hyperboliques de tout indice compris entre 1 et  $d - 1$  et d'empêcher l'existence de décomposition dominée non triviale.

## 7.10 Problèmes

**a) Autres perturbations d'orbites périodiques.** D'autres types de perturbations de cocycles pourraient se révéler intéressants et donner lieu à des résultats perturbatifs dans le même esprit que ceux qui ont été présentés dans ce chapitre. Par exemple, on peut poser les questions suivantes.

- *Sous quelles conditions peut-on perturber une orbite périodique pour obtenir  $k > 1$  valeur propres de module 1 ?*
- *Quels sont les indices que l'on peut atteindre par bifurcation ?*

– *Sous quelles conditions peut-on créer des valeurs propres complexes ?*

Nous renvoyons aussi à [65] pour d'autres types de contraintes sur les perturbations de cycles.

**b) Hyperbolicité en volume des classes isolées.** La démonstration du théorème 7.13 permet de préciser la question 4.13.

**Question 7.18.** Supposons que  $f$  vérifie une condition  $C^1$ -générique, considérons une mesure ergodique  $\mu$  pour  $f$  et un point  $x$  appartenant à la classe de récurrence par chaînes du support de  $\mu$ .

*Existe-t-il une suite de points périodiques  $(p_n)$  convergeant vers  $x$  telles que la suite des mesures périodiques associées converge faiblement vers  $\mu$  ?*

On obtiendrait alors une version plus forte des théorèmes 7.10 et 7.13 et une réponse affirmative à la question suivante.

**Question 7.19.** Supposons que  $f$  vérifie une condition  $C^1$ -générique.

*Est-ce que toute classe homocline  $H$  (ou plus généralement tout ensemble transitif par chaînes) vérifie la dichotomie suivante ?*

- $H$  est hyperbolique en volume ;
- $H$  (ou une partie de  $H$ ) est limite de Hausdorff d'une infinité de puits ou de sources.

**c) Stabilité structurelle en régularité supérieure.** Nous avons déjà signalé que peu de résultats perturbatifs sont connus en régularité plus grande. En particulier, le lemme de Franks (qui est la motivation principale pour les résultats de ce chapitre) devient faux (voir [152, théorème D]). Nous renvoyons à [147] pour une discussion de la stabilité structurelle  $C^r$ ,  $r > 1$ .

## Chapitre 8

# Points périodiques homocliniquement liés

Au chapitre 7, nous avons considéré séparément les orbites périodiques d'un difféomorphisme. Nous étudions à présent les orbites contenues dans une même classe de récurrence par chaînes : elles sont liées par la dynamique. Ceci permet d'une part de propager certaines propriétés vérifiées sur une partie à l'ensemble de la classe et d'autre part d'obtenir de nouvelles orbites périodiques comme moyenne d'orbites périodiques de la classe (spécification).

### 8.1 Spécification au sein d'une classe homocline (indice fixé)

Bowen a montré [42] que l'ensemble des orbites périodiques contenues dans un ensemble basique d'un difféomorphisme hyperbolique possède une propriété de spécification.

**Définition 8.1.** Un ensemble d'orbites périodiques  $\mathcal{O}$  a la *propriété de spécification* si pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour toute collection finie d'orbites  $O_1, \dots, O_s \in \mathcal{O}$ , il existe  $N \geq 1$  vérifiant : pour toute suites finies  $\{i_1, \dots, i_\ell\} \subset \{1, \dots, s\}$  et  $\{n_1, \dots, n_\ell\} \subset \mathbb{N}$ , il existe une orbite périodique  $O = \{x, f(x), \dots, f^\tau(x) = x\}$  appartenant à  $\mathcal{O}$  et des entiers  $k_1, \dots, k_\ell$  tels que :

- $0 \leq k_{j+1} - (k_j + n_j) \leq N$  pour tout  $j \in \{1, \dots, \ell - 1\}$  et  $0 \leq (k_1 + \tau) - (k_\ell + n_\ell) \leq N$  ;
- $f^k(x)$  appartient au  $\varepsilon$ -voisinage de  $O_{i_j}$  pour tous  $j \in \{1, \dots, \ell\}$  et  $k_j \leq k \leq k_j + n_j - 1$ .

Pour les ensembles hyperboliques, l'entier  $N$  ne dépend pas des orbites  $O_1, \dots, O_s$ . Le résultat de Bowen a été généralisée [33] aux classes homoclines.<sup>1</sup>

**Proposition 8.2** (lemme 1.9 de [33]). *Pour tout point périodique hyperbolique  $p$ , l'ensemble des orbites périodiques hyperboliques homocliniquement reliées à  $p$  possède la propriété de spécification.*

Les cocycles linéaires au-dessus d'une familles d'orbites périodiques ayant la propriété de spécification permettent plus de perturbations que les cocycles linéaires généraux étudiés au chapitre 7. (Il devient possible de remplacer une orbite périodique  $O$  par une orbite périodique  $O'$  passant une grande proportion de temps proche de  $O$ . La nouvelle orbite ressemble à  $O$ , mais

---

<sup>1</sup>La notion de spécification définie dans [42] est plus générale, puisqu'elle autorise à travailler avec des segments d'orbites qui ne sont pas périodiques. La définition proposée par [33], sous le terme de "transition", est, elle aussi, un peu différente : elle décrit les cocycles linéaires au-dessus d'une famille d'orbites périodiques.

tout événement qui apparaît le long de l'orbite de  $O$  apparaît un grand nombre de fois le long de l'orbite de  $O'$ .) On obtient une version plus forte du théorème 7.3.

**Théorème 8.3** (Bonatti-Díaz-Pujals). *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \geq 1$  tel que toute famille d'orbites périodiques  $\mathcal{O}$  de  $f$  ayant la propriété de spécification satisfait l'un de ces deux cas :*

- *il existe une décomposition  $N$ -dominée non triviale au-dessus de  $\mathcal{O}$ ,*
- *il existe une orbite  $O = \{x, f(x), \dots, f^\tau(x) = x\}$  dans  $\mathcal{O}$  et une  $\varepsilon$ -perturbation  $B_1, \dots, B_\tau$  de la différentielle  $Df(f(x)), \dots, Df(f^\tau(x))$  de  $f$  le long de  $O$  tels que le produit  $B_\tau \dots B_1$  soit une homothétie.*

## 8.2 Cycles hétérodimensionnels

Une autre bifurcation introduite dans [110] et mettant en jeu les variétés invariantes d'orbites périodiques s'est révélée importante (voir [35, chapitre 6]). Elle permet en particulier d'obtenir une propriété de spécification entre points périodiques d'indices différents.

**Définition 8.4.** Deux orbites périodiques hyperboliques  $O_1, O_2$  forment un *cycle hétérodimensionnel* si leurs indices sont différents et si  $W^u(O_1) \cap W^s(O_2)$  et  $W^u(O_2) \cap W^s(O_1)$  ne sont pas vides.

Ce type de bifurcation a été étudié intensivement notamment par L. Díaz et ses collaborateurs. Bien sûr, l'ensemble des difféomorphismes ayant un cycle hétérodimensionnel forme une partie maigre de  $\text{Diff}^1(M)$ . On peut toutefois renforcer la définition précédente.

**Définition 8.5.** Deux orbites périodiques hyperboliques  $O_1, O_2$  forment un *cycle hétérodimensionnel robuste* s'il existe des ensembles hyperboliques transitifs  $K, L$  contenant respectivement  $O_1$  et  $O_2$ , tels que pour tout difféomorphisme  $g \in \text{Diff}^1(M)$  proche de  $f$ , on a  $W^u(K_g) \cap W^s(L_g) \neq \emptyset$  et  $W^s(K_g) \cap W^s(L_g) \neq \emptyset$  pour les continuations hyperboliques  $K_g, L_g$  de  $K$  et  $L$ .

La section 7.9 présente des difféomorphismes avec cycles hétérodimensionnels robustes.

**Connexions fortes.** Nous présentons maintenant un cadre qui permet d'obtenir un cycle hétérodimensionnel par perturbation. Considérons le cas où  $K$  est muni d'une structure partiellement hyperbolique  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  avec  $\dim(E^c) = 1$  et supposons que pour tout voisinage  $U$  de  $K$  et tout  $\delta > 0$ , il existe un difféomorphisme  $f'$  proche de  $f$  et une orbite périodique  $O$  contenue dans  $U$  dont l'exposant central appartient à  $(-\delta, \delta)$  et telle que  $W^{uu}(O) \setminus O$  et  $W^{ss}(O) \setminus O$  s'intersectent. On peut alors créer un cycle hétérodimensionnel en appliquant la remarque suivante.

**Lemme 8.6.** *Soit  $O$  une orbite périodique ayant un unique exposant nul et telle que  $W^{uu}(O) \setminus O$  et  $W^{ss}(O) \setminus O$  s'intersectent. Il existe alors un difféomorphisme  $C^1$ -proche ayant un cycle hétérodimensionnel.*

*Démonstration.* Par perturbation, on crée au voisinage de  $O$  deux orbites périodiques  $O_1, O_2$  ayant des exposants respectivement positifs et négatifs dans la direction centrale et connecté par un segment central. L'intersection entre  $W^{uu}(O) \setminus O$  et  $W^{ss}(O) \setminus O$  permet d'obtenir une intersection entre  $W^{uu}(O_2) \setminus O_2$  et  $W^{ss}(O_1) \setminus O_1$ . Voir la figure 8.1.  $\square$

Nous dirons qu'une orbite périodique  $O \subset K$  possède une *connexion forte* lorsque  $W^{uu}(O) \setminus O$  et  $W^{ss}(O) \setminus O$  s'intersectent.

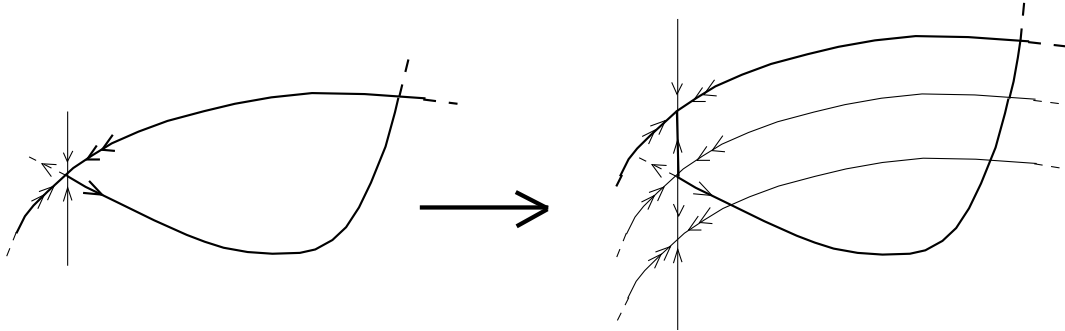


FIG. 8.1 – Création d'un cycle hétérodimensionnel.

**Connexions fortes généralisées.** Nous donnons maintenant un mécanisme plus général que le lemme précédent pour engendrer des cycles hétérodimensionnels (voir par exemple [52]).

**Lemme 8.7.** *Considérons une classe homocline  $H(p)$  vérifiant :*

- *il existe une décomposition dominée  $T_{H(p)}M = E \oplus E^c \oplus F$  telle que  $\dim(E^c) = 1$  et  $\dim(E \oplus E^c)$  coïncide avec la dimension stable de  $p$ ,*
  - *la variété stable forte  $W^{ss}(p)$  tangente à  $E_p$  coupe  $H(p)$  en un point différent de  $p$ ,*
- et supposons qu'il existe des orbites périodiques homocliniquement reliées à  $p$  ayant des exposants centraux arbitrairement proches de 0.*

*Il existe alors un difféomorphisme  $C^1$ -proche ayant un cycle hétérodimensionnel.*

Nous dirons qu'une classe homocline possède *une connexion forte généralisée* si elle vérifie les deux propriétés du lemme précédent.

### 8.3 Spécification au sein d'une classe homocline (indice variable)

Afin de travailler avec des orbites périodiques d'indices différents nous affaiblissons la propriété de spécification.

**Définition 8.8.** Un ensemble d'orbites périodiques  $\mathcal{O}$  a la *propriété du barycentre* si pour tous  $\varepsilon > 0$ ,  $\rho \in (0, 1)$  et  $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ , il existe  $O = \{x, f(x), \dots, f^\tau(x) = x\}$  appartenant à  $\mathcal{O}$  et des parties disjointes  $I, J \subset \{1, \dots, \tau\}$  tels que :

- $\text{Card}(I) \geq (\rho - \varepsilon) \cdot \tau$  et  $\text{Card}(J) \geq (1 - \rho - \varepsilon) \cdot \tau$  ;
- $f^k(x)$  appartient au  $\varepsilon$ -voisinage de  $O_1$  (resp. de  $O_2$ ) pour tout  $k \in I$  (resp.  $k \in J$ ).

Pour un difféomorphisme  $C^1$ -générique, la propriété du barycentre est vérifiée [4] au sein des classes homoclines.

**Théorème 8.9** (Abdenur-Bonatti-Crovisier). *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{G}$  et toute classe homocline  $H(p)$  de  $f$ , l'ensemble des orbites périodiques de  $f$  contenues dans  $H(p)$  a la propriété du barycentre.*

La démonstration reprend des arguments perturbatifs de [34, 6] : considérons deux orbites périodiques  $O_1, O_2$  de périodes  $\tau_1, \tau_2$ , contenues dans  $H(p)$ . En utilisant la proposition 7.2, on

peut toujours supposer que leurs valeurs propres sont réelles et de multiplicité égale à 1. On peut alors perturber  $f$  et obtenir un difféomorphisme  $\tilde{f}$  pour lequel  $O_1$  et  $O_2$  sont reliées par un cycle hétérodimensionnel (voir la section 3.3).

On peut supposer de plus que le cycle est *linéaire* : il existe  $x \in W^u(O_1) \cap W^s(O_2)$ ,  $y \in W^u(O_2) \cap W^s(O_1)$  et des cartes  $\varphi_1: V_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\varphi_2: V_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  au voisinage de  $O_1$  et  $O_2$  tels que

- dans les cartes  $\varphi_1, \varphi_2$ , l'application  $f$  est affine et sa différentielle est diagonale ;
- il existe un itéré négatif  $f^{n_x^-}(x)$  (resp.  $f^{n_y^-}(y)$ ) dont l'orbite négative reste proche de  $O_1$  (resp.  $O_2$ ) et un itéré positif  $f^{n_x^+}(x^+)$  (resp.  $f^{n_y^+}(x^-)$ ) dont l'orbite positive reste proche de  $O_2$  (resp.  $O_1$ ) tels que l'application  $f^{n_x^-+n_x^+}$  (resp.  $f^{n_y^-+n_y^+}$ ) est affine au voisinage de  $f^{n_x^-}(x)$  (resp.  $f^{n_y^-}(y)$ ) et sa différentielle est diagonale.

Pour tous  $\ell_1, \ell_2$  suffisamment grands, on crée alors par perturbation de  $f$  au voisinage de  $x$ , une orbite périodique de période  $\ell_1 \cdot \tau_1 + \ell_2 \cdot \tau_2 + n_x^- + n_x^+ + n_y^- + n_y^+$  qui possède  $\ell_1 \cdot \tau_1$  itérés consécutifs dans  $V_1$  et  $\ell_2 \cdot \tau_2$  itérés consécutifs dans  $V_2$ . Par construction l'indice de l'orbite créée  $O$  est compris entre ceux de  $O_1$  et  $O_2$ . De plus, pour un ouvert de difféomorphismes,  $W^u(O)$  intersecte la variété stable de l'une des orbites  $O_1, O_2$  et  $W^s(O)$  intersecte la variété instable de l'autre. Puisque pour tout difféomorphisme  $C^1$ -générique au voisinage de  $f$  les classes homoclines de  $O_1$  et  $O_2$  coïncident, il existe un difféomorphisme proche de  $f$  pour lequel  $O$  appartient à cette classe.

## 8.4 Application (1) : indices des classes homoclines

Ceci permet de retrouver des résultats de [34, 6].

**Corollaire 8.10** ([34, 6]). *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{G}$  et toute classe homocline  $H(p)$  de  $f$ , l'ensemble des indices des orbites périodiques de  $f$  contenues dans  $H(p)$  est un intervalle de  $\mathbb{N}$ .*

En combinant ce résultat avec le théorème 7.15, on obtient l'existence de fibrés centraux de dimension 1 au-dessus des classes homoclines loin des tangences homoclines.

**Corollaire 8.11** (Gourmelon [64]). *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{G}$  et toute classe homocline  $H(p)$  de  $f$  l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée.*

- $H(p)$  possède une décomposition dominée

$$T_{H(p)}M = E \oplus E_1^c \oplus \cdots \oplus E_\ell^c \oplus F,$$

telle que  $\dim(E)$  et  $d - \dim(F)$  sont respectivement l'indice minimal et l'indice maximal de  $H(p)$  et chaque fibré  $E_i^c$  est de dimension 1.

- Il existe une orbite périodique  $O$  homocliniquement reliée à  $p$  et une perturbation  $g \in \text{Diff}^1(M)$  de  $f$  telle que la continuation hyperbolique de  $O$  a une tangence homocline.

## 8.5 Application (2) : mesures génériques portées par une classe homocline isolée

Voici d'autres conséquences tirées de [4].

**Corollaire 8.12** (Abdenur-Bonatti-Crovisier). *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{G}$  et toute classe de récurrence par chaînes  $K$  de  $f$ , qui est isolée dans  $\mathcal{R}(f)$ , toute mesure de probabilité invariante supportée sur  $K$  est limite faible de mesures de probabilité supportées sur des orbites périodiques de  $K$ .*

En effet, la propriété est vérifiée pour les mesures ergodiques d'après le lemme de fermeture ergodique (théorème 4.1). Les orbites périodiques appartiennent nécessairement à  $K$ . Les mesures invariantes non ergodiques sont approchées par des barycentres de mesures ergodiques et on conclut en utilisant la propriété du barycentre.

On en déduit le résultat suivant, démontré par Sigmund [164] dans le cas des ensembles hyperboliques localement maximaux transitifs et annoncé par Mañé [95].

**Théorème 8.13** (Abdenur-Bonatti-Crovisier). *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{G}$  et toute classe de récurrence par chaînes  $K$  de  $f$ , qui est isolée dans  $\mathcal{R}(f)$ , l'ensemble des mesures de probabilité invariantes  $\mu$  supportées dans  $K$  contient un  $G_\delta$  dense de mesures qui sont :*

- ergodiques,
- de support total ( $\text{Supp}(\mu) = K$ ),
- d'entropie nulle,
- hyperboliques,
- et dont la décomposition d'Oseledets  $T_x M = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$  en  $\mu$ -presque tout point s'étend à l'espace tangent au-dessus de  $K$  en une décomposition dominée.

Voici une conséquence du théorème précédent et de la proposition 5.10.

**Corollaire 8.14** (Abdenur-Bonatti-Crovisier). *Pour toute classe homocline isolée  $H(O)$  d'un difféomorphisme  $C^1$ -générique et toute mesure générique  $\mu$  supportées sur  $H(O)$ , presque tout point possède une variété stable et une variété instable.*

Utilisant la spécification, Díaz et Gorodetski [53] obtiennent l'existence de mesures ergodiques non hyperboliques.

**Théorème 8.15** (Díaz-Gorodetski). *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{G}$  toute classe homocline contenant des points périodiques d'indices différents contient également une mesure invariante ergodique ayant au moins un exposant de Lyapunov nul.*

## 8.6 Application (3) : dynamique universelle

Pour  $k \geq 1$ , notons  $\mathbb{D}^k$  la boule standard fermée unité de  $\mathbb{R}^k$  et  $\text{Diff}_{\text{Int},+}^r(\mathbb{D}^k)$  l'espace des plongements  $C^r$  préservant l'orientation de  $\mathbb{D}^k$  dans l'intérieur d'elle-même, muni de la topologie  $C^r$ ,  $r \in [0, +\infty]$ .

Un difféomorphisme est  $k$ -universel si sa dynamique contient les dynamiques associées à une partie dense d'éléments de  $\text{Diff}_{\text{Int},+}^1(\mathbb{D}^k)$ . Donnons une définition plus précise.

**Définition 8.16.** Considérons un entier  $1 \leq k \leq d$ . Un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^1(M)$  est  $k$ -universel au voisinage d'un ensemble compact invariant  $K$  par  $f$  si pour tout ouvert  $\mathcal{O} \subset \text{Diff}_{\text{Int},+}^1(\mathbb{D}^k)$  et tout voisinage  $U$  de  $K$ , il existe un plongement  $\varphi: \mathbb{D}^k \rightarrow M$  et un entier  $\ell \geq 1$  vérifiant :

1. l'image  $D$  de  $\mathbb{D}^k$  dans  $M$  est disjointe de ses  $\ell - 1$  premiers itérés,
2. les ensembles  $f^i(D)$ ,  $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$  sont contenus dans  $U$ ,
3.  $f^\ell(D)$  est contenu dans  $D$  et l'application  $\varphi^{-1} \circ f^\ell \circ \varphi$  définie sur  $\mathbb{D}^k$  appartient à  $\mathcal{O}$ .

Lorsque  $K = M$  nous dirons simplement que  $f$  est  $k$ -universel.

*Remarque 8.17.* 1. Si  $f$  est  $k$ -universel au voisinage de  $K$ , l'application  $f^{-1}$  l'est également puisque pour tout difféomorphisme  $h \in \text{Diff}_{\text{Int},+}^1(\mathbb{D}^k)$ , il existe  $g \in \text{Diff}_{\text{Int},+}^1(\mathbb{D}^k)$  tel que l'image de la boule standard  $\frac{1}{2}\mathbb{D}^k$  de rayon  $1/2$  par  $g$  contient dans son intérieur  $\frac{1}{2}\mathbb{D}^k$  et l'application  $x \mapsto 2.g^{-1}(x/2)$  coïncide avec  $h$  sur  $\mathbb{D}^k$ .

2. Les dynamiques génériques  $d$ -universelles sur une variété de dimension  $d$  sont les dynamiques génériques les plus compliquées puisqu'elles contiennent toutes les pathologies associées aux difféomorphismes génériques de  $\text{Diff}_{\text{Int},+}^1(\mathbb{D}^d)$  : lorsque  $d \geq 3$ , une telle dynamique possède une infinité de puits et de sources, des cycles hétérodimensionnels robustes, des tangences homoclines robustes,...

Voici un critère [28] d'existence de dynamique universelle.

**Théorème 8.18** (Bonatti-Díaz). *Il existe un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  dont les difféomorphismes sont  $d$ -universels au voisinage de toute classe homocline  $H(O)$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- $H(O)$  n'a pas de décomposition dominée non triviale,
- $H(O)$  contient des orbites périodiques  $\{x, f(x), \dots, f^{\tau-1}(x)\}$  dont le jacobien à la période  $|\det Df_x^\tau|$  est de module strictement plus grand que 1, et des orbites dont le jacobien moyen à la période est de module strictement plus petit que 1.

*Idée de la démonstration.* On utilisera le lemme élémentaire suivant (voir [78, Chapitre 8]).

**Lemme 8.19.** *Pour tout  $k \geq 1$ , et tout élément  $h \in \text{Diff}_{\text{Int},+}^\infty(\mathbb{D}^k)$ , il existe une application différentiable  $H: \mathbb{R}^k \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  telle que*

- pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $h_t = H(\cdot, t)$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^k$  qui coïncide avec l'identité hors d'une partie compacte de  $\mathbb{R}^k$  ;
- $h_0$  est l'identité de  $\mathbb{R}^k$  ;
- la restriction de  $h_1$  à  $\mathbb{D}^k$  coïncide avec  $h$ .

*Démonstration du lemme.* On peut se ramener au cas où  $h$  fixe 0.

On construit tout d'abord une application  $H: \mathbb{D}^k \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  de classe  $C^\infty$  telle que  $h_0$  est l'identité sur  $\mathbb{D}^k$  et  $h_1$  coïncide avec  $h$  sur  $\mathbb{D}^k$ . En effet, on peut choisir un chemin différentiable dans  $GL(n, \mathbb{R})$  entre  $\text{Id}$  et  $D_0h$  paramétré par  $[0, 1/2]$ . Pour  $s \in (0, 1/2]$ , on définit  $h_{s+1/2}$  comme restriction à  $\mathbb{D}^d$  de l'application  $x \mapsto s^{-1}.h(s.x)$ .

En différentiant l'application  $(x, t) \mapsto (h_t(x), t)$  on obtient un champs de vecteurs de la forme  $(\frac{\partial}{\partial t}h_t, 1)$ . En l'étendant au moyen d'une partition de l'unité, on définit un champs de vecteurs dépendant du temps  $(X_t)_{t \in [0,1]}$  sur  $\mathbb{R}^d$  à support compact. L'application  $H$  est alors le flot associé.  $\square$

Considérons un voisinage ouvert  $U$  de  $H(O)$  et un élément  $h \in \text{Diff}_{\text{Int},+}^\infty(\mathbb{D}^d)$ .

En utilisant le théorème 8.9, on déduit qu'il existe dans  $H(O)$  un ensemble dense de points périodiques  $\{x, f(x), \dots, f^{\tau-1}(x)\}$  dont le jacobien  $\det Df_x^\tau$  est positif et dont le jacobien moyen à la période  $(\det Df_x^\tau)^{1/\tau}$  est arbitrairement proche de 1. On peut aussi choisir cet ensemble



pour qu'il ait la propriété de spécification. Puisque  $H(O)$  n'a pas de décomposition dominée, il existe (théorème 8.3) une telle orbite périodique  $\{x, f(x), \dots, f^{\tau-1}(x)\}$  et une perturbation arbitrairement petite  $f_1$  de  $f$  pour laquelle  $D_x f_1^\tau$  est une homothétie. Puisque le jacobien moyen à la période de l'orbite de  $x$  est proche de 1, on peut aussi perturber pour que  $D_x f_1^\tau$  soit l'identité de  $T_x M$ . Une nouvelle perturbation  $f_2$  permet de créer un plongement  $\varphi_0: \mathbb{D}^d \rightarrow M$  vérifiant les propriétés 1 et 2 de la définition 8.16 et telle que  $f_2^\tau$  coïncide avec l'identité sur  $D_0 = \varphi_0(\mathbb{D}^d)$ .

D'après le lemme 8.19, il existe une famille de difféomorphismes  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  de  $\mathbb{R}^d$  et  $\rho > 0$  tels que  $h_0 = \text{Id}$ ,  $h_1$  coïncide avec  $h$  sur  $\mathbb{D}^d$  et pour tout  $t \in [0, 1]$  le support du difféomorphisme  $h_t$  soit contenu dans la boule de rayon  $\rho$ . On choisit alors un entier  $L \geq 1$  suffisamment grand pour que chaque difféomorphisme  $g_i := h_{(i+1)/L} \circ h_{i/L}^{-1}$  pour  $0 \leq i < L$  soit arbitrairement proche de l'identité de  $\mathbb{R}^d$  en topologie  $C^1$ . Nous avons ainsi fragmenté le difféomorphisme  $h$  :

$$h_1 = g_{L-1} \circ \dots \circ g_0.$$

On peut perturber  $f_2$  en un difféomorphisme  $f_3$  ayant les mêmes propriétés sauf que  $\varphi_0^{-1} \circ f_3^\tau \circ \varphi_0$  coïncide avec la rotation  $R$  d'angle  $1/L \in [0, 1]$  sur  $\mathbb{D}^d$ . Si  $L$  est suffisamment grand, cette perturbation de  $f_3$  est suffisamment petite. Il existe une boule  $B \subset \mathbb{D}^d$  disjointe de ses  $L - 1$  premiers itérés par  $R$  : c'est l'image de la boule standard  $\rho \cdot \mathbb{D}^d$  de rayon  $\rho$  par une homothétie  $T$ . Sur  $\varphi_0(R^i(B))$ , pour  $0 \leq i < L$ , on remplace  $f_3$  par la composition

$$f_3 \circ (\varphi_0 \circ R^i \circ T) \circ g_i \circ (T^{-1} \circ R^{-i} \circ \varphi_0^{-1}).$$

Par construction, cette application  $f_4$  est une petite perturbation de  $f$  dans  $\text{Diff}^1(M)$ . Si l'on pose  $\ell = L \cdot \tau$ , la boule  $\varphi_0(B)$  est  $\ell$ -périodique, disjointe de ses  $\ell - 1$  premiers itérés et le plongement  $\varphi = \varphi_0 \circ T$  envoie  $\mathbb{D}^d$  sur une boule  $D \subset B$  et vérifie  $h = \varphi^{-1} \circ f_4^\ell \circ \varphi$  sur  $\mathbb{D}^d$ .

Puisque  $\text{Diff}_{\text{Int},+}^\infty(\mathbb{D}^d)$  est dense dans  $\text{Diff}_{\text{Int},+}^1(\mathbb{D}^d)$ , nous avons montré que pour tout difféomorphisme  $f$  ayant une classe homocline  $H(O)$  vérifiant les hypothèses du théorème 8.18, pour tout voisinage  $U$  de  $H(O)$ , pour tout ouvert non vide  $\mathcal{O} \subset \text{Diff}_{\text{Int},+}^1(\mathbb{D}^d)$ , il existe une perturbation  $h' \in \text{Diff}^1(M)$  de  $f$  et un plongement  $\varphi: \mathbb{D}^d \rightarrow M$  tel que les propriétés 1, 2, 3 de la définition 8.16 soient satisfaites. On conclut la démonstration par un argument de généralité.  $\square$

Les constructions de la section 7.9 montrent que pour toute variété  $M$  de dimension  $d \geq 3$ , il existe un ouvert non vide  $\mathcal{O} \subset \text{Diff}^1(M)$  de difféomorphismes ayant une classe homocline qui vérifie les propriétés du théorème 8.18. Voici une conséquence.

**Corollaire 8.20.** *Pour toute variété de dimension  $d \geq 3$ , il existe un ouvert non vide  $\mathcal{O} \subset \text{Diff}^1(M)$  et un  $G_\delta$  dense de  $\mathcal{O}$  formé de difféomorphismes qui sont  $d$ -universels au voisinage d'une classe homocline  $H(O)$ .*

Les dynamiques  $d$ -universelles impliquent l'existence de classes apériodiques.

**Proposition 8.21** (Bonatti-Díaz). *Pour  $d \geq 3$ , il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que tout difféomorphisme  $d$ -universel  $f \in \mathcal{G}$  possède un ensemble non dénombrable de classes apériodiques qui sont stables au sens de Lyapunov pour  $f$  et pour  $f^{-1}$ .*

*Démonstration.* Il existe un ouvert  $\mathcal{O} \subset \text{Diff}_{\text{Int},+}^1(\mathbb{D}^d)$  de difféomorphismes ayant une classe homocline  $H(O)$  vérifiant les propriétés du théorème 8.18. En appliquant inductivement le théorème 8.18, on en déduit qu'il existe une suite de plongements  $\varphi_n: \mathbb{D}^d \rightarrow M$  et d'entiers  $\ell_n$  tels que pour tout  $n \geq 1$  :

- l'image  $D_n = \varphi_n(\mathbb{D}^d)$  est disjointe de ses  $\ell_n$  premiers itérés et vérifie  $f^{\ell_n}(D_n) \subset \text{Int}(D_n)$  pour  $n$  pair et  $f^{-\ell_n}(D_n) \subset \text{Int}(D_n)$  pour  $n$  impair ;
- le supremum des diamètres des ensembles  $f^k(\varphi_n(\mathbb{D}^d))$  pour  $n \geq 1$  et  $|k| \leq \ell_n$  tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$  ;
- $\varphi_n^{-1} \circ f^{\ell_n} \varphi_n$  pour  $n$  pair et  $\varphi_n^{-1} \circ f^{-\ell_n} \varphi_n$  pour  $n$  impair appartiennent à  $\mathcal{O}$  ;
- la suite  $(D_n)$  est décroissante.

L'intersection décroissante

$$K = \bigcap_n \bigcup_{0 \leq k < \ell_n} f^k(D_n)$$

possède une base de voisinages attractifs pour  $f$  et une base de voisinages attractifs pour  $f^{-1}$ . Par conséquent  $K$  est une classe de récurrence par chaînes qui est stable au sens de Lyapunov pour  $f$  et  $f^{-1}$ . Par construction elle n'a pas de point périodique.

Remarquons que dans chaque orbite  $D_n \cup \dots \cup f^{\ell_n-1}(D_n)$  on peut choisir deux orbites  $D_{n+1}^+, \dots, f^{\ell_{n+1}^+-1}(D_{n+1}^+)$  et  $D_{n+1}^-, \dots, f^{\ell_{n+1}^- -1}(D_{n+1}^-)$  disjointes. Il existe donc une collection non dénombrable de suites  $(D_n)$  ayant les propriétés énoncées ci-dessus qui engendrent des classes apériodiques deux à deux disjointes.  $\square$

*Remarque 8.22.* Les classes apériodiques ainsi obtenues sont des odomètres. En particulier, leur dynamique est minimale, uniquement ergodique.

## 8.7 Mélangeurs, obtention de bifurcations robustes

Dans le cadre des dynamiques  $C^1$ -génériques, Bonatti et Díaz ont identifié [28, 31] un mécanisme (les *mélangeurs*) permettant de construire des cycles hétérodimensionnels robustes. On peut se demander si tout difféomorphisme ayant un cycle hétérodimensionnel peut être approché par un difféomorphisme ayant un cycle hétérodimensionnel robuste.

**Théorème 8.23** (Bonatti-Díaz). *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que, tout  $f \in \mathcal{G}$  ayant deux orbites périodiques hyperboliques  $O_1, O_2$  d'indices différents et contenues dans une même classe de récurrence par chaînes possède un cycle hétérodimensionnel robuste.*

Le cycle hétérodimensionnel robuste est contenu dans un petit voisinage de la classe  $H(O_1) = H(O_2)$ . (Dans les bons cas, il appartient à la classe.)

Bonatti et Díaz ont annoncé [32] pouvoir rendre robuste une tangence homocline liée à une classe homocline ayant plusieurs indices. Ceci complète le théorème 7.15.

**Théorème 8.24** (Bonatti-Díaz). *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^1(M)$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{G}$  et toute classe homocline  $H(O)$  contenant un point périodique d'indice différent de  $O$ , la dichotomie (robuste) suivante est vérifiée :*

- $O$  possède une tangence robuste,
- il existe une décomposition dominée  $T_{H(O)}M = E \oplus F$  telle que  $\dim(E) = \dim(E^s(O))$ .

## 8.8 Problèmes

Au cours des chapitres 7 et 8, nous avons obtenu des résultats d'existence d'orbites périodiques par bifurcation de la dynamique au sein d'une classe de récurrence par chaînes  $K$ . Nous pouvons distinguer trois sortes d'orbites périodiques :

- les orbites périodiques contenues dans la classe  $K$ ,
- celles qui sont proches de  $K$  en topologie de Hausdorff,
- celles contenues dans un voisinage de  $K$ .

**a) Complétude des indices.** Par exemple, le corollaire 8.10 donne des informations sur l'ensemble des indices d'une classe homocline. Nous pouvons naturellement formuler des questions sur l'ensemble des indices des orbites périodiques contenues dans un voisinage d'une classe homocline. Le problème de l'existence de classes pelliculaires (question 6.5) consiste à décrire le lien entre l'ensemble des indices d'une classe et l'ensemble des indices des orbites périodiques proches de la classe.

**Question 8.25.** Supposons que  $f$  vérifie une condition  $C^1$ -générique et soit  $K$  une classe de récurrence par chaînes.

- *Supposons que  $K$  soit limite de Hausdorff d'orbites périodiques d'indice  $i$  et  $j > i$ . Est-elle également limite d'orbites d'indice  $\ell$  pour tout  $i < \ell < j$  ?*
- *Supposons qu'une partie de  $K$  soit limite de Hausdorff d'orbites périodiques d'indice  $i$ . Est-ce également le cas de la classe  $K$  toute entière ?*

Cette seconde question est bien sûr reliée à la question 4.13. Une réponse positive permettrait à partir de la remarque 7.14 de répondre à la question 7.19. (Voir aussi la discussion de la section 9.4)

**b) Dynamique au sein des classes homoclines.** Il serait très intéressant d'étendre le corollaire 8.12 aux classes homoclines non isolées. Les résultats de ce chapitre montrent que l'on peut se ramener au cas des mesures ergodiques.

**Question 8.26.** Supposons que  $f$  vérifie une condition  $C^1$ -générique et soit  $H(O)$  une classe homocline de  $f$ .

*Les mesures ergodiques supportées par  $H(O)$  sont-elles limites faibles de mesures de probabilité invariantes supportées par des orbites périodiques de  $H(O)$  ?*

Un tel "lemme de fermeture ergodique au sein des classes homoclines" permettrait par exemple de répondre à la question 7.19 ainsi qu'à la question 4.13 pour les classes homoclines.

Nous avons une compréhension relativement fine des orbites périodiques à l'intérieur d'une classe homocline, mais la dynamique reste mal comprise, en particulier les questions de théorie ergodique.

**Question 8.27.** *Considérons une classe homocline  $H(O)$  d'un difféomorphisme  $C^1$ -générique. Existe-t-il une mesure d'entropie maximale ?*

**c) Importance des cycles hétérodimensionnels.** Tous les exemples connus de dynamiques robustement non hyperboliques possèdent un cycle hétérodimensionnel. Bonatti et Díaz [31] ont conjecturé que c'est toujours le cas.

**Conjecture d'hyperbolicité** (Bonatti-Díaz). *Tout difféomorphisme peut être approché dans  $\text{Diff}^1(M)$  par un difféomorphisme qui est hyperbolique ou possède un cycle hétérodimensionnel robuste.*

Cette conjecture concerne exclusivement la topologie  $C^1$  puisqu'elle n'est pas vérifiée par les difféomorphismes  $C^2$  des surfaces (du fait du phénomène de Newhouse). Une étape dans cette direction serait de montrer que la présence de tangences homoclines implique l'existence de cycles hétérodimensionnels.

On peut énoncer des versions semi-locales de cette conjecture.

**Question 8.28.** Supposons que  $f$  vérifie une condition  $C^1$ -générique.

*Est-ce que tout voisinage d'un ensemble transitif par chaîne non hyperbolique contient un cycle hétérodimensionnel robuste ?*

*Est-ce que toute classe homocline non hyperbolique contient un cycle hétérodimensionnel robuste ?*

**d) Dynamique sur les surfaces.** Le théorème 3.7 montre que sur toute variété de dimension supérieure ou égale à 3, il existe des ouverts  $C^1$  de difféomorphismes non hyperboliques. Cette question reste ouverte en dimension 2. Smale a conjecturé<sup>2</sup> que ce n'était pas le cas. C'est un cas particulier de la conjecture d'hyperbolicité.

**Conjecture** (Smale). *Lorsque  $\dim(M) = 2$ , l'ensemble des difféomorphismes hyperboliques est dense dans  $\text{Diff}^1(M)$ .*

**e) Tangences robustes.** Par analogie avec les cycles hétérodimensionnels [31], on aimerait savoir dans quelle mesure un difféomorphisme présentant une tangence homocline est approché par des difféomorphismes ayant des tangences robustes.

**Question 8.29.** *Considérons un ouvert  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  qui contient un ensemble dense de difféomorphismes présentant une tangence homocline. Existe-t-il un difféomorphisme dans  $\mathcal{U}$  qui possède une tangence robuste ?*

Cette question peut-être décomposée en deux sous-problèmes (voir [5, 22]).

**Question 8.30.** *Considérons un difféomorphisme  $C^1$ -générique qui est limite de difféomorphismes ayant une tangence homocline. Existe-t-il une classe homocline  $H(O)$  sans décomposition dominée  $T_{H(O)}M = E \oplus F$  avec  $\dim(E) = \dim(E^s(O))$  ?*

**Question 8.31.** *Considérons un difféomorphisme  $C^1$ -générique et une classe homocline  $H(O)$  n'ayant pas de décomposition dominée  $T_{H(O)} = E \oplus F$  avec  $\dim(E) = \dim(E^s(O))$ . Est-ce que  $O$  possède une tangence robuste ?*

---

<sup>2</sup>Je n'ai pas trouvé de trace de cette conjecture sur les surfaces. Au début des années 1960, il a explicitement posé le problème de la densité des dynamiques structurellement stables [167]. Dans ses textes récents [174, 175], Smale conjecturait la densité des dynamiques hyperboliques pour les endomorphismes en dimension 1.

Sur les surfaces, le théorème 7.9 montre qu'il n'y a pas de tangence robuste et une réponse positive à la question 8.29 entraînerait la conjecture de Smale. Une approche possible consiste à contrôler les *points critiques* de la dynamique : il résulte du travail de Pujals et Sambarino [149] que les difféomorphismes de surface génériques et non hyperboliques possèdent des classes sans décomposition dominée. Lorsque la dynamique sur une telle classe est dissipative (le jacobien de toute mesure invariante est strictement négatif), Pujals et Rodriguez-Hertz [148] ont introduit un ensemble critique : un ensemble fermé tel que tout compact invariant transitif qui ne le rencontre pas est un puits ou possède une décomposition dominée.



## Chapitre 9

# Dynamique loin des tangences homoclines : modèles centraux

L'un des objectifs de ce chapitre est l'étude des dynamiques qui ne peuvent pas être approchés par des difféomorphismes ayant des tangences homoclines. Une motivation est la conjecture de Palis présentée en section 9.1.

Un aspect fondamental de cette approche consiste à comprendre la dynamique le long d'un fibré de dimension un. Lorsque les exposants de Lyapunov sont nuls pour toute mesure invariante, la dynamique de l'application tangente donne très peu d'informations. Nous développons de nouveaux outils, introduits dans [50, 51] pour obtenir des propriétés d'hyperbolicité topologique ou pour trouver des obstructions à l'hyperbolicité qui apparaissent sur les orbites périodiques.

Nous utilisons les modèles centraux pour montrer [50] que tout difféomorphisme peut être approché dans  $\text{Diff}^1(M)$  par un difféomorphisme Morse-Smale ou par un difféomorphisme ayant une intersection homocline transverse. Nous établissons un résultat [51] en direction de la conjecture de Palis : tout difféomorphisme qui ne peut pas être approché dans  $\text{Diff}^1(M)$  par un difféomorphisme ayant une tangence homocline ou un cycle hétérodimensionnel est partiellement hyperbolique : l'ensemble récurrent par chaînes se décompose en un nombre fini d'ensembles compacts invariants partiellement hyperboliques dont le fibré central est de dimension au plus égale à deux. Finalement, nous étudions les quasi-attracteurs des dynamiques génériques loin des tangences homoclines : en particulier, J. Yang a montré [188] que ce sont des classes homoclines.

### 9.1 Mécanismes versus phénomènes

Un des buts de l'étude des difféomorphismes  $C^1$ -génériques est de structurer l'espace des difféomorphismes en fonction des types de dynamiques qui apparaissent. Voir [161, 173]. Par exemple, les difféomorphismes hyperboliques peuvent être classés en trois ouverts de complexité croissante : les difféomorphismes Morse-Smale, les difféomorphismes structurellement stables et les difféomorphismes  $\Omega$ -stables. Plus généralement, on cherche des parties (de préférence ouvertes) de l'espace des difféomorphismes pour lesquelles la dynamique peut être décrite globalement, avec un degré de précision variable : on peut simplement chercher à décrire la décomposition en classes de récurrence par chaînes (*Est-elle finie ? sans classe aperiodiques ?...*) ou vouloir comprendre la dynamique au sein de chaque classe de récurrence par chaînes.

Une autre approche consiste à caractériser les ouverts précédemment introduits en exhibant

des obstructions qui apparaissent dans leur complémentaire. Par exemple, nous verrons en section 9.10 que l'ensemble des difféomorphismes ayant une intersection homocline non triviale est dense dans le complémentaire de l'ensemble (ouvert) des dynamiques Morse-Smale.

On cherche des obstructions qui soient simples et faciles à détecter (en général mettant en jeu des orbites périodiques). Elle ne décrivent pas la dynamique de façon satisfaisante puisque ce sont souvent des bifurcations locales, mais elles peuvent engendrer une modification importante de la dynamique. Une telle décomposition de l'espace des difféomorphismes en parties possédant un ensemble dense de bifurcations et en ouverts de dynamiques globalement bien décrite est appelée par E. Pujals décomposition par *mécanismes et phénomènes*.

## 9.2 Caractérisation des dynamiques hyperboliques

Un autre exemple de dichotomie est une des conjecture proposée par Palis [116, 117, 118] qui cherche à caractériser l'ouvert des dynamiques hyperboliques.

**Conjecture (Palis).** *Tout difféomorphisme peut être approché dans  $\text{Diff}^1(M)$  par un difféomorphisme hyperbolique ou par un difféomorphisme qui présente une tangence homocline ou un cycle hétérodimensionnel.*

Nous verrons au chapitre 10 que cette conjecture a été résolue sur les surfaces par Pujals et Sambarino. Une réponse positive à la conjecture d'hyperbolicité entraînerait la conjecture de Palis. (Précisons toutefois que la conjecture de Palis a été également formulée en régularité  $C^k$ ,  $k > 1$  et que la conjecture d'hyperbolicité n'est pas satisfaite dans ce cadre.) Nous allons voir maintenant que cette conjecture peut être généralisée d'une autre façon.

**Notation.** *Par la suite, nous noterons  $\mathcal{T}$  l'ensemble des difféomorphismes ayant une tangence homocline et  $\mathcal{C}$  l'ensemble de ceux qui possèdent un cycle hétérodimensionnel.*

La conjecture de Palis est vérifiée si l'on se restreint aux difféomorphismes dont le nombre de classe de récurrence par chaînes est robustement fini (voir [1, 60]).

**Théorème 9.1 (Abdenur, Gan-Wen).** *Tout difféomorphisme peut être approché dans  $\text{Diff}^1(M)$  par un difféomorphisme  $g$  ayant l'une des propriétés suivantes :*

- $g$  est hyperbolique,
- $g$  présente un cycle hétérodimensionnel,
- $g$  possède une infinité de classes de récurrence par chaînes.

*Démonstration.* Considérons un difféomorphisme  $f$  qui ne peut pas être approché par un difféomorphisme ayant une infinité de classes de récurrence par chaînes. Quitte à le perturber, on peut supposer qu'il vérifie une condition de généricité. En particulier, ses classes sont des classes homoclines  $H(p_1), \dots, H(p_k)$  et tout difféomorphisme proche de  $f$  possède exactement  $k$  classes de récurrence par chaînes.

Supposons que la classe  $H(p_i)$  (non triviale) n'est pas hyperbolique. Nous montrons que par perturbation, il est possible de créer au voisinage de  $H(p_i)$  un point périodique  $q$  d'indice différent de l'indice de  $p_i$ . Par hypothèse le point  $q$  appartient à la même classe que  $p_i$  et une nouvelle perturbation permet alors de créer par perturbation un cycle hétérodimensionnel (section 3.3).



Si la décomposition du fibré tangent au-dessus des orbites périodiques homocliniquement reliée à  $p_i$  en espaces stables et instables n'est pas uniformément dominée, le théorème 7.3 permet de conclure directement.

Si  $H(p_i)$  possède une décomposition dominée  $T_{H(p_i)} = E \oplus F$  avec  $\dim(E) = \dim(E^s(p_i))$ , et si par exemple le fibré  $E$  n'est pas uniformément contracté, il existe une mesure ergodique supportée sur  $H(p_i)$  ayant un exposant de Lyapunov selon  $E$  positif ou nul. Le théorème 4.1 et son addendum permettent alors de créer un point périodique d'indice strictement plus petit que  $\dim(E)$ .  $\square$

Nous avons déjà mentionné l'existence de difféomorphismes  $C^1$ -génériques dont le nombre de classes de récurrence par chaînes n'est pas fini. Les exemples connus sont toujours associés à la présence de tangences homoclines et Bonatti a conjecturé [22] que c'est toujours le cas. Cette nouvelle conjecture entraînerait donc la conjecture de Palis.

**Conjecture de finitude** (Bonatti). *Il existe un ouvert dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T}}$  formé de difféomorphismes dont le nombre de classes de récurrence par chaînes est fini ?*

Newhouse, Palis-Viana et Romero [109, 124, 159] ont montré que l'on obtient une infinité de puits ou de sources pour certains difféomorphismes proches des tangences homoclines. Une réponse positive à la conjecture de finitude donnerait une réciproque en topologie  $C^1$  en répondant à la question suivante.

*Est-ce que tout difféomorphisme  $C^1$ -générique présentant le phénomène de Newhouse peut être approché par un difféomorphisme ayant une tangence homocline ?*

### 9.3 Dynamiques non critiques

La discussion qui précède motive l'étude des difféomorphismes (non hyperboliques) loin des tangences homoclines. Nous connaissons plusieurs classes d'exemples :

- certaines dynamiques de type “dérivé d'Anosov” décrites en section 5.10,
- les dynamiques proches du temps 1 d'un flot d'Anosov ou du produit d'un difféomorphisme d'Anosov par l'identité sur le cercle [28].

Une classe d'exemples est fournie par la construction de Mañé (section 5.10). La démonstration du théorème 9.1 nous montre que, pour de telles dynamiques, toute classe homocline non hyperbolique est accumulée par des points périodiques d'indices différents. La question principale consiste alors à comprendre si ces points appartiennent tous à une même classe (on obtient ainsi des cycles hétérodimensionnels par perturbation) ou si le difféomorphisme possède une infinité de classes distinctes.

Pour des dynamiques loin des tangences homoclines, le théorème 7.6 montre que la décomposition du fibré tangent en espaces stables et instables au-dessus des orbites périodiques est uniformément dominée. Le théorème 7.1 implique que tout fibré qui n'est pas uniformément contracté ou dilaté permet de changer l'indice d'orbites périodiques. Une réponse positive à la conjecture de finitude permettrait donc de répondre affirmativement au problème suivant (voir [6]).

**Question 9.2.** *Existe-t-il un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T}}$  formé de difféomorphismes dont toutes les classe homoclines  $H$  ont une décomposition dominée*

$$T_H M = E^s \oplus E^c \oplus E^u,$$

où  $E^s$  et  $E^u$  sont uniformément contractés et dilatés et où  $\dim(E^s)$  et  $\dim(E^s \oplus E^c)$  sont respectivement le plus petit et le plus grand indice de la classe  $H$  ?

## 9.4 Ensembles minimaux non hyperboliques

Considérons un difféomorphisme  $f$  non hyperbolique. Il possède un ensemble transitif par chaînes  $K$  qui n'est pas hyperbolique. On peut choisir  $K$  minimal pour l'inclusion : un tel ensemble est alors appelé *ensemble minimal non hyperbolique*.

Lorsque  $f$  appartient à  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T}}$ , le théorème 5.17 implique le résultat suivant [61] qui est une première réponse locale à la question 9.2.

**Théorème 9.3** (Gan-Wen-Yang). *Pour tout difféomorphisme non hyperbolique  $f$  appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T}}$ , tout ensemble minimal non hyperbolique  $K$  admet une décomposition dominée*

$$T_K M = E^s \oplus E_1^c \oplus \cdots \oplus E_k^c \oplus E^u,$$

telle que  $E^s$  et  $E^u$  sont uniformément contractés respectivement par  $f$  et  $f^{-1}$  et chaque fibré central  $E_i^c$  est de dimension 1.

Pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , l'ensemble  $K$  est limite de Hausdorff d'une suite d'orbites périodiques  $(O_n)$  dont l'exposant de Lyapunov le long de  $E_i^c$  est arbitrairement proche de 0. Lorsque  $k > 1$ ,  $K$  est contenu dans une classe homocline  $H(p)$  et on peut choisir les orbites  $O_n$  dans  $H(p)$ .

En particulier lorsque  $f$  est loin des cycles hétérodimensionnels, une classe homocline possède un unique indice (section 3.3). La dimension centrale est donc égale à 1 ou 2.

**Corollaire 9.4** (Wen [183]). *Pour tout difféomorphisme non hyperbolique  $f$  appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T} \cup \mathcal{C}}$ , tout ensemble minimal non hyperbolique  $K$  admet une décomposition dominée de type  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  ou  $T_K M = E^s \oplus E_1^c \oplus E_2^c \oplus E^u$ , telle que  $E^s$  et  $E^u$  sont uniformément contractés respectivement par  $f$  et  $f^{-1}$  et chaque fibré central  $E^c$  ou  $E_1^c, E_2^c$  est de dimension 1.*

Dans le deuxième cas,  $K$  est contenu dans une classe homocline d'indice  $\dim(E^s) + 1$ .

*Démonstration du théorème 9.3.* Le corollaire 7.7 implique que pour tout  $1 \leq i < d$ , l'ensemble  $\text{Per}_i(f)$  des points périodiques de  $f$  d'indice  $i$  a une décomposition dominée  $T_{\text{Per}_i(f)} M = E_i \oplus F_i$  telle que  $\dim(E_i) = i$ . En particulier, le théorème 5.17 s'applique.

Si  $K$  est contenu dans une classe apériodique (en considérant par exemple la décomposition dominée triviale  $T_K M = E$ ) seul le troisième cas du théorème 5.17 peut avoir lieu :  $K$  contient un ensemble partiellement hyperbolique  $\Lambda$  ayant un fibré central de dimension 1. Puisque  $K$  est un ensemble minimal non hyperbolique, il coïncide avec  $\Lambda$ .

Si  $K$  est contenu dans une classe homocline  $H$ , le théorème 5.17 assure que l'ensemble des indices de  $H$  est un intervalle. Ceci entraîne l'existence d'une décomposition dominée

$$T_H M = F_0 \oplus F_1^c \oplus \cdots \oplus F_\ell^c \oplus F_{\ell+1},$$

telle que les fibrés  $F_i^c$  soient de dimension 1 et telle que  $H$  ne contienne pas de point d'indice  $i < \dim(F_0)$  ou  $i > d - \dim(F_{\ell+1})$ . On peut supposer de plus que  $\dim(F_0)$  et  $d - \dim(F_{\ell+1})$  sont minimales pour ces propriétés.

Si  $F_0$  n'est pas uniformément contracté au-dessus de  $K$ , nous envisageons les trois cas du théorème 5.17.

- Le premier cas n'apparaît pas puisque  $H$  ne contient pas de point d'indice  $i < \dim(F_0)$ .
- Dans le second cas,  $H$  contiendrait des points périodiques d'indice  $\dim(F_0)$  ayant un exposant de Lyapunov stable proche de 0. Puisque  $H$  est une classe homocline, l'ensemble de ces points périodiques est dense dans  $H$ . Le théorème 5.17 implique alors que  $F_0$  possède une décomposition dominée  $F_0 = E \oplus E^c$  telle que  $\dim(E^c) = 1$ . Ceci contredit la minimalité de  $\dim(F_0)$ .
- Dans le troisième cas, l'ensemble  $K = \Lambda$  est partiellement hyperbolique et la dimension du fibré central vaut 1.

Nous obtenons donc une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E_1^c \oplus \dots \oplus E_k^c \oplus E^u$  où  $E^s$  et  $E^u$  sont uniformément contracté et dilaté et où chaque fibré  $E_i^c$  est de dimension 1 et n'est pas uniformément contracté ni dilaté.

Si l'on suppose que  $k > 1$ , le troisième cas du théorème 5.17 n'a pas lieu. Le théorème appliqué à la décomposition  $(E^s \oplus E_1^c) \oplus (E_2^c \oplus \dots \oplus E^u)$  pour  $f^{-1}$  montre alors que  $K$  est contenu dans une classe homocline  $H$  ayant des orbites périodiques d'indice supérieur ou égal à  $\dim(E^s) + 1$ . Appliquons le théorème à la décomposition  $(E^s \oplus E_1^c) \oplus (E_2^c \oplus \dots \oplus E^u)$  pour  $f$  :

- dans le premier cas du théorème,  $H$  possède aussi des orbites périodiques d'indice  $\dim(E^s)$  et, d'après le théorème 8.9,  $H$  contient des orbites périodiques dont le  $(\dim(E^s) + 1)$ -ème exposant est arbitrairement proche de 0 ;
- dans le second cas, nous concluons directement que  $H$  possède des orbites périodiques dont le  $(\dim(E^s) + 1)$ -ème exposant est arbitrairement proche de 0.

□

**Passage du local au global.** Nous souhaitons étendre la décomposition dominée donnée par le théorème 9.3 sur l'ensemble minimal non hyperbolique  $K$  à toute la classe de récurrence par chaînes  $C$  contenant  $K$ .

Pour chaque décomposition dominée  $E \oplus F$  sur  $K$  donnée par ce théorème, il existe une suite d'orbites périodiques  $(O_n)$  qui convergent vers  $K$  en topologie de Hausdorff et dont l'indice est égal à  $\dim(E)$ . On peut espérer utiliser la transitivité par chaînes de  $C$  pour construire une suite d'orbites périodiques  $(O'_n)$  ayant le même indice que les orbites  $O_n$  mais convergeant vers  $C$ . (Ce serait le cas si les questions 8.25 ou 8.26 admettaient des réponses positives.) Si le difféomorphisme  $f$  est loin des tangences homoclines, le corollaire 7.7 impliquerait alors que la décomposition  $E \oplus F$  s'étend à toute la classe  $C$ .

La construction d'une telle suite d'orbites périodiques  $O'_n$  est délicate et fait l'objet des résultats principaux de ce chapitre. Si l'on sait montrer que les orbites périodiques  $O_n$  appartiennent à la classe  $C$ , nous concluons directement puisque  $C$  coïncide alors avec la classe homocline  $H(O_n)$  et contient une orbite périodique du même indice que  $O_n$  qui est  $\varepsilon$ -dense dans  $C$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

## 9.5 Modèles centraux

### a) Définition

Afin de décrire la dynamique centrale pour un ensemble  $K$  ayant une décomposition dominée  $T_K M = E_1 \oplus E^c \oplus E_3$  avec  $\dim(E^c) = 1$ , nous introduisons le modèle suivant.

**Définition 9.5.** Un *modèle central* est une paire  $(\widehat{K}, \widehat{f})$  formée

- d'un espace compact métrique  $\widehat{K}$ , (sa *base*),
- d'une application continue  $\widehat{f}: \widehat{K} \times [0, 1] \rightarrow \widehat{K} \times [0, +\infty)$ ,

satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\widehat{f}(\widehat{K} \times \{0\}) = \widehat{K} \times \{0\}$  ;
- $\widehat{f}$  est un homéomorphisme local au voisinage de  $\widehat{K} \times \{0\}$  : il existe une application continue  $\widehat{g}: \widehat{K} \times [0, 1] \rightarrow \widehat{K} \times [0, +\infty)$  telle que  $\widehat{f} \circ \widehat{g}$  et  $\widehat{g} \circ \widehat{f}$  coïncident avec l'identité respectivement sur  $\widehat{g}^{-1}(\widehat{K} \times [0, 1])$  et  $\widehat{f}^{-1}(\widehat{K} \times [0, 1])$  ;
- $\widehat{f}$  est un produit fibré de la forme  $\widehat{f}(x, t) = (\widehat{f}_1(x), \widehat{f}_2(x, t))$ .

Puisque  $\widehat{K} \times [0, 1]$  n'est pas préservé, la dynamique hors de  $\widehat{K} \times \{0\}$  n'est pas toujours bien définie. C'est pourtant cette partie qui nous intéresse ici.

**Définition 9.6.** – Un sous-ensemble  $S \subset \widehat{K} \times [0, +\infty)$  est une *bande* si pour tout  $\widehat{x} \in \widehat{K}$ , l'intersection  $S \cap \{\widehat{x}\} \times [0, +\infty)$  est un intervalle.

- Une bande ouverte  $S$  qui satisfait  $\widehat{f}(S) \subset S$  est dite *attractive* pour  $\widehat{f}$ .
- Un intervalle  $\{\widehat{x}\} \times [0, a]$  avec  $a > 0$  est un *segment récurrent par chaînes* s'il est contenu dans un ensemble compact invariant transitif par chaînes  $\Lambda \subset \widehat{K} \times [0, +\infty)$ .

Des arguments similaires à ceux de Conley pour obtenir le théorème 1.1 donnent un critère d'existence de bandes attractives.

**Proposition 9.7** (proposition 2.5 de [50] et proposition 2.2 de [51]). *Considérons un modèle central  $(\widehat{K}, \widehat{f})$  dont la base est transitive par chaînes. Il y a 4 cas disjoints possibles.*

- *Les ensembles stables et instables par chaînes de  $\widehat{K} \times \{0\}$  ne sont pas triviaux. De façon équivalente, il existe un segment récurrent par chaînes.*
- *Les ensembles stables et instables par chaînes de  $\widehat{K} \times \{0\}$  sont triviaux. De façon équivalente, il existe une base de voisinages de  $\widehat{K} \times \{0\}$  par bandes attractives pour  $\widehat{f}$  et une base de voisinages de  $\widehat{K} \times \{0\}$  par bandes attractives pour  $\widehat{f}^{-1}$ .*
- *L'ensemble instable par chaînes est trivial, l'ensemble stable par chaînes contient un voisinage de  $\widehat{K} \times \{0\}$ . Il existe alors une base de voisinages de  $\widehat{K} \times \{0\}$  par bandes attractives.*
- *L'ensemble stable par chaînes est trivial, l'ensemble instable par chaînes contient un voisinage de  $\widehat{K} \times \{0\}$ . (C'est le cas symétrique du précédent.)*

En particulier, l'existence d'un segment récurrent par chaînes est une propriété locale au voisinage de  $\widehat{K} \times \{0\}$ .

## b) Modèles centraux en dynamique différentiable

Considérons un ensemble compact  $f$ -invariant  $K \subset M$  ayant une décomposition dominée  $T_K M = E_1 \oplus E^c \oplus E_3$  avec  $\dim(E^c) = 1$ .

**Définition 9.8.** Un modèle central  $(\widehat{K}, \widehat{f})$  est *associé* à  $(K, f)$  s'il existe une application continue  $\pi: \widehat{K} \times [0, +\infty) \rightarrow M$  ayant les propriétés suivantes :

- $\pi(\widehat{K} \times \{0\}) = K$  ;
- $\pi \circ \widehat{f} = f \circ \pi$  sur  $\widehat{K} \times [0, 1]$  ;
- les applications  $t \mapsto \pi(\widehat{x}, t)$  pour  $\widehat{x} \in \widehat{K}$  forment une famille continues de plongements  $C^1$  de  $[0, +\infty)$  dans  $M$  ;
- pour tout  $\widehat{x} \in \widehat{K}$ , la courbe  $\pi(\{\widehat{x}\} \times [0, +\infty))$  est tangente à  $E_{\pi(\widehat{x}, 0)}^c$ .

Deux cas peuvent être distingués :

- **Le cas orientable.** Il existe une orientation continue de  $E^c$  préservée par  $Df$ . Ceci permet de définir les fibrés en demi-droites  $E^{c,+}$  et  $E^{c,-}$ .
- **Le cas non orientable.** Lorsque  $K$  est transitif par chaînes, la dynamique induite par  $Df$  sur le fibré unitaire associé à  $E^c$  est encore transitif par chaînes.

Considérons une famille de plaques localement invariante  $\mathcal{W}$  et tangente à  $E^c$ , donnée par le théorème 5.2. La dynamique de  $f$  se relève par  $\mathcal{W}$  en une dynamique  $\hat{f}$  localement définie au voisinage de la section  $0 \subset E^c$ . Dans le cas orientable, on note  $\hat{K} = K$  et les fibrés  $E^c, E^{c,+}, E^{c,-}$  s'identifient à  $K \times \mathbb{R}, K \times [0, +\infty)$  et  $K \times (-\infty, 0]$  respectivement. Dans le cas non orientable, on note  $\hat{K}$  l'espace unitaire de  $E^c$  et on considère l'application surjective  $\hat{K} \times [0, +\infty) \rightarrow E^c$  définie par  $(\hat{x}, t) \mapsto t.\hat{x}$ . Ceci entraîne l'existence d'un modèle central pour  $K$ .

**Proposition 9.9** (proposition 3.2 de [50]). *Associé à un ensemble compact invariant  $K$  ayant une décomposition dominée  $T_K M = E_1 \oplus E^c \oplus E_3$  avec  $\dim(E^c) = 1$ , il existe un modèle central  $(\hat{K}, \hat{f})$ . Lorsque  $K$  est transitif par chaînes, on peut choisir  $\hat{K}$  transitive par chaînes :*

- dans le cas non orientable, l'ensemble  $\hat{K}$  coïncide avec l'espace unitaire de  $E^c$  et  $\pi$  est la restriction de la projection  $E^c \rightarrow K$  ;
- dans le cas orientable, l'application  $\pi$  est un homéomorphisme et on peut choisir l'orientation de chaque courbe  $\pi(\{\hat{x}\} \times [0, +\infty))$  compatible avec  $E^{c,+}$ .

### c) Classification des dynamiques centrales

Supposons que  $K$  soit transitif par chaînes. Considérons une famille de plaques localement invariante  $\mathcal{W}$  et la dynamique  $\hat{f}$  induite par  $f$  sur un voisinage de la section  $0$  dans  $E^c$ .

Nous obtenons les cas suivants, non disjoints en général (voir la figure 9.1).

- **Le type (R), récurrent par chaînes.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un point  $x \in K$  et un segment  $\gamma \subset \mathcal{W}_x$  contenant  $x$  tel que tous les itérés  $f^n(\gamma)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , soient de longueur bornée par  $\varepsilon$  et tel que  $\gamma$  est inclus dans un ensemble transitif par chaînes contenu dans le  $\varepsilon$ -voisinage de  $K$ .

Une telle courbe  $\gamma$  est appelée *segment central* de  $K$ .

- **Le type (N), neutre par chaînes.** Il existe une base de voisinages ouverts  $U$  de la section  $0 \subset E^c$  qui sont attractifs (i.e.  $\hat{f}(\overline{U}) \subset U$ ) et une base de voisinages répulsifs.
- **Le type (H), hyperbolique par chaînes.** Il existe une base de voisinages ouverts de la section  $0 \subset E^c$  qui sont attractifs pour  $\hat{f}$  (le cas *attractif*) ou pour  $\hat{f}^{-1}$  (le cas *répulsif*) et dont l'image par  $\mathcal{W}$  est respectivement contenue dans l'ensemble stable par chaînes ou dans l'ensemble instable par chaînes de  $K$ .
- **Le type (P), parabolique par chaînes.** Nous sommes alors dans le cas orientable. Trois possibilités apparaissent.
  - **Le type (P<sub>SU</sub>).** Quitte à renverser l'orientation sur  $E^c$ , il existe une base de voisinages ouverts de la section  $0 \subset E^{c,+}$  qui sont attractifs pour  $\hat{f}$  et qui se projettent par  $\mathcal{W}$  dans l'ensemble stable par chaînes de  $K$  ; il existe également une base de voisinages ouverts de la section  $0 \subset E^{c,-}$  qui sont attractifs pour  $\hat{f}^{-1}$  et qui se projettent par  $\mathcal{W}$  dans l'ensemble instable par chaînes de  $K$ .

- **Les types  $(P_{SN})$  et  $(P_{UN})$**  respectivement. Quitte à renverser l’orientation sur  $E^c$ , il existe une base de voisinages ouverts de la section  $0 \subset E^{c,+}$  qui sont attractifs pour  $\widehat{f}$  (resp.  $\widehat{f}^{-1}$ ) et qui se projettent par  $\mathcal{W}$  dans l’ensemble stable (resp. instable) par chaînes de  $K$  ; il existe également une base de voisinages ouverts de la section  $0 \subset E^{c,-}$  qui sont attractifs (i.e.  $\widehat{f}(\overline{U}) \subset U$ ) et une base de voisinages de  $0 \subset E^{c,-}$  qui sont répulsifs.

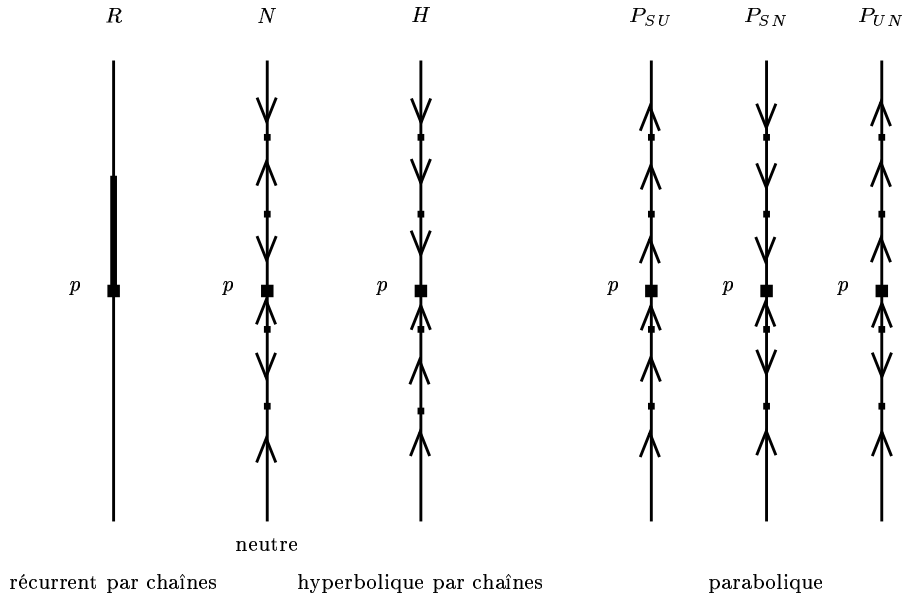


FIG. 9.1 – Types de dynamiques centrales.

Le type de la dynamique centrale ne dépend pas du choix d’une famille de plaques  $\mathcal{W}$ .

**Proposition 9.10** (Corollaire 2.6 de [51]). *Considérons un ensemble compact invariant  $K$  transitif par chaînes muni d’une décomposition dominée  $T_K M = E_1 \oplus E^c \oplus E_3$  avec  $\dim(E^c) = 1$  et deux familles de plaques  $\mathcal{W}, \mathcal{W}'$  localement invariantes tangentes à  $E^c$ . Alors les types de dynamiques centrales associés à  $\mathcal{W}, \mathcal{W}'$  coïncident.*

Les types du fibré  $E^c$  seront donc définis comme étant les types de dynamiques centrales associés à un choix de famille de plaques centrales localement invariantes.

## 9.6 Lorsqu’un fibré est dégénéré

Nous nous intéressons au cas où le fibré  $E_3$  est dégénéré : dans les bons cas, l’ensemble  $K$  est un puits ou bien le fibré  $E^c$  est “topologiquement répulsif”.

**Proposition 9.11** (proposition 2.7 de [51]). *Considérons un ensemble compact invariant  $K$  transitif par chaînes muni d’une décomposition dominée  $T_K M = E_1 \oplus E^c$  avec  $\dim(E^c) = 1$ . Si  $E^c$  est de type (N), (H)-attractif ou (P), l’ensemble  $K$  contient un point périodique.*

En particulier si  $f$  est un difféomorphisme Kupka-Smale, le fibré  $E^c$  ne peut pas avoir les types (P) ou (N). S’il est de type (H)-attractif, l’ensemble  $K$  est un puits.

Si  $f$  satisfait une condition de généralité, le type (R) ne peut pas non plus apparaître<sup>1</sup>. On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 9.12.** *Si  $f$  appartient à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  et si  $K$  est un ensemble compact invariant transitif par chaînes muni d'une décomposition dominée  $T_K M = E_1 \oplus E^c$  avec  $\dim(E^c) = 1$ , alors ou bien  $K$  est un puits, ou bien  $E^c$  est de type (H)-répulsif.*

Lorsque  $f$  est de classe  $C^2$ , Pujals et Sambarino remplacent l'hypothèse de généralité par un argument "à la Denjoy-Schwartz". En voici une re-formulation.

**Théorème 9.13** (Pujals-Sambarino, section 3.3 de [149] et théorème 3.1 de [150]). *Considérons un ensemble compact invariant muni d'une décomposition dominée  $T_K M = E_1 \oplus E^c$  avec  $\dim(E^c) = 1$  et  $\mathcal{W}$  une famille de plaques localement invariante tangente à  $E^c$ . Si  $f$  est de classe  $C^2$ , l'un des cas suivants se produit.*

- a)  *$K$  contient un point périodique dont l'exposant selon  $E^c$  est négatif ou nul.*
- b)  *$K$  contient une courbe fermée  $C$  tangente au fibré  $E^c$  et invariante par un itéré  $f^n$ ,  $n \geq 1$ . La dynamique sur la courbe est conjuguée à une rotation irrationnelle.*
- c) *La dynamique centrale de  $K$  est stable au sens de Lyapunov pour  $\widehat{f}^{-1}$  :*
  - *pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in K$ , les itérés négatifs du  $\varepsilon$ -voisinage de  $x$  dans  $\mathcal{W}_x$  sont tous de taille inférieure à  $\delta$  ;*
  - *pour tout  $x \in K$ , il existe  $\eta(x) > 0$  tel que le  $\eta(x)$ -voisinage de  $x$  dans  $\mathcal{W}_x$  est contenu dans l'ensemble instable de  $x$ .*

*Remarque 9.14.* Lorsque  $K$  est transitif par chaînes, on peut compléter le cas c) de la proposition précédente et garantir que le fibré  $E^c$  est de type (H)-répulsif, comme pour la proposition 9.12.

En effet, la dynamique centrale ne peut posséder de bandes attractives contenues dans un voisinage arbitrairement petit de la section  $O \subset E^c$  (puisque, d'après l'item c), chaque point de  $K$  possède une variété instable tangente à  $E^c$ ).

Il ne peut y avoir non plus de segment transitif par chaînes  $\gamma$  : d'après le théorème 3.1 de [150], quitte à remplacer  $\gamma$  par son ensemble  $\omega$ -limite,  $\gamma$  est une courbe périodique bordée par un point périodique hyperbolique  $p \in K$  d'indice  $d - 1$  et un point périodique  $q$  ayant un exposant négatif ou nul selon  $E^c$ . Il doit alors exister une pseudo-orbite de segments centraux  $(\gamma_n)_{0 \leq n \leq s}$  au-dessus d'une pseudo-orbite  $(x_n)$  de  $K$  vérifiant  $\gamma_0 = \gamma$  et  $|\gamma_s| = 0$ . Ceci implique que  $K$  contient un point périodique ayant un exposant négatif ou nul selon  $E^c$ .

## 9.7 Dynamique centrale récurrente par chaînes

Lorsque  $K$  est partiellement hyperbolique avec un fibré central récurrent par chaînes, on en déduit facilement que certaines orbites périodiques sont contenues dans la classe de récurrence par chaînes de  $K$ .

**Proposition 9.15** (section 3.3 de [50] et proposition 4.1 de [51]). *Si  $f$  appartient à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  et si  $K$  est un ensemble compact transitif par chaînes ayant une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  telle que*

<sup>1</sup>Voir [51, proposition 4.3] ; l'énoncé suppose  $E_1$  uniformément contracté, mais la démonstration ne l'utilise pas.

- $E^s$  et  $E^u$  sont uniformément contractés par  $f$  et  $f^{-1}$  respectivement,
- $E^c$  est de dimension 1 et de type  $(R)$ ,

alors tout voisinage de  $K$  contient une orbite périodique appartenant à la même classe de récurrence par chaînes que  $K$ .

Plus précisément, il existe un voisinage  $U$  de  $K$  tel que pour tout segment central  $\gamma$  de  $K$  ayant ses itérés contenus dans  $U$ , pour tout point  $z \in \gamma$  qui n'est pas une extrémité et pour toute orbite périodique hyperbolique  $O \subset U$  ayant un point suffisamment proche de  $z$ ,

- l'orbite  $O$  est contenue dans la classe de récurrence par chaînes de  $K$  ;
- il existe  $g \in \text{Diff}^1(M)$  arbitrairement proche de  $f$  tel que les variétés fortes  $W^{ss}(O_g) \setminus O_g$  et  $W^{uu}(O_g) \setminus O_g$  de la continuation de  $O$  pour  $g$  s'intersectent.

La démonstration s'appuie sur l'idée suivante : l'union des variétés stables et instables locales fortes des points de  $\gamma$  définissent des variétés topologiques  $\mathcal{D}^{cs}, \mathcal{D}^{cu}$  de dimension  $\dim(E^s) + 1$  et  $\dim(E^u) + 1$ . Si  $p \in O$  est proche de  $z \in \gamma$ , les variétés  $W^{ss}(p)$  et  $W^{uu}(p)$  intersectent respectivement  $\mathcal{D}^{cu}$  et  $\mathcal{D}^{cs}$ . Par conséquent  $p$  appartient à la classe de récurrence par chaînes de  $K$ . Le lemme de fermeture pour les pseudo-orbites permet alors de créer une intersection entre  $W^{ss}(O)$  et  $W^{uu}(O)$ . Voir la figure 9.2.

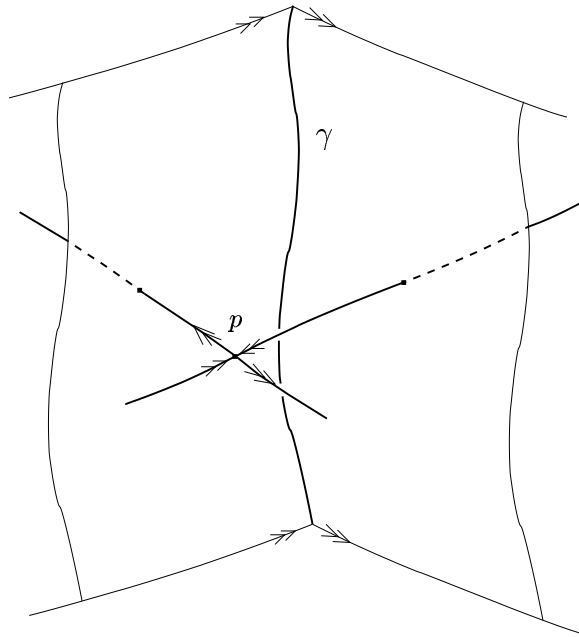


FIG. 9.2 – Un point  $p$  proche d'un segment central  $\gamma$ .

Parfois, le même argument s'applique sans que l'ensemble  $K$  soit partiellement hyperbolique.

**Proposition 9.16** (proposition 4.2 de [51]). *Si  $f$  appartient à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  et si  $H$  est une classe homocline ayant une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  telle que*

- $E^s$  est uniformément contractée,
- $E^c$  est de dimension 1 et de type  $(R)$ ,



- $H$  contient des orbites périodiques dont l'exposant de Lyapunov le long de  $E^c$  est arbitrairement proche de 0,
- la classe  $H$  contient alors des points périodiques d'indice  $\dim(E^s)$ .

## 9.8 Le type hyperbolique par chaînes et situations similaires

### a) Dynamique centrale hyperbolique par chaînes

Comme dans le cas d'une dynamique hyperbolique, les ensembles partiellement hyperboliques ayant un fibré central hyperboliques par chaînes sont contenus dans une classe homocline.

**Proposition 9.17** (section 3.4 de [50] et proposition 4.4 de [51]). *Si  $f$  appartient à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  et si  $K$  est un ensemble compact transitif par chaînes ayant une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  telle que*

- $E^s$  et  $E^u$  sont uniformément contractés par  $f$  et  $f^{-1}$  respectivement,
- $E^c$  est de dimension 1 et de type (H)-attractif,

*il existe alors, dans tout voisinage  $U$  de  $K$ , une orbite périodique d'indice  $\dim(E^s) + 1$  contenue dans la classe de récurrence par chaînes de  $K$ .*

*Idée de la démonstration.* Considérons une suite d'orbites périodiques  $(O_n)$  qui s'accumule sur une partie de  $K$ . Puisque  $E^c$  est de type (H)-attractif, il existe une famille de plaques  $\mathcal{W}^{cs}$  tangentes à  $E^s \oplus E^c$  qui sont piégées et contenues dans l'ensemble stable par chaînes de  $K$ . La famille s'étend aux points des orbites  $O_n$  (pour  $n$  suffisamment grand).

Considérons un point  $x \in K$  proche d'un point périodique  $p$  appartenant à une orbite  $O_n$ . La plaque  $W_{loc}^{uu}(x)$  intersecte  $\mathcal{W}_p^{cs}$  en un point  $z$ . Puisque la famille  $\mathcal{W}^{cs}$  est piégée et puisque  $p$  est périodique,  $z$  appartient à l'ensemble stable d'une orbite périodique,  $q_0$ . Si l'indice de  $q_0$  est égal à  $\dim(E^s) + 1$ , on définit  $q = q_0$ . Sinon,  $W^u(q_0)$  intersecte l'ensemble stable d'un autre point périodique  $q \in \mathcal{W}_p^{cs}$ , d'indice  $\dim(E^s) + 1$ . Dans tous les cas,  $z$  appartient à l'ensemble stable par chaînes de  $q$ . On remarque que puisque  $\mathcal{W}^{cs}$  est piégée,  $q$  appartient aussi à  $f(\overline{\mathcal{W}_{f^{-1}(p)}^{cs}})$ . Puisque  $p$  et  $x$  sont proches, on en déduit que  $W_{loc}^{uu}(q)$  intersecte  $\mathcal{W}_x^{cs}$  et en particulier l'ensemble stable par chaînes de  $K$ . Par conséquent  $q$  et  $K$  ont la même classe de récurrence par chaînes.  $\square$

### b) Ensembles non vrillés

Dans le cas parabolique, l'ensemble  $K$  est "hyperbolique par chaînes d'un côté". On peut appliquer le même raisonnement lorsque la dynamique de  $K$  "voit" l'hyperbolicité par chaînes dans la direction centrale : c'est le cas sauf si la géométrie de  $K$  est "vrillée".

Considérons un ensemble compact invariant  $K$  muni d'une structure partiellement hyperbolique  $E^s \oplus E^c \oplus E^u$ , telle que  $E^s, E^u$  ne soient pas dégénérés et telle que  $\dim(E^c) = 1$ .

On peut prolonger continûment le fibré  $E^c$  sur un voisinage de  $K$ . Si l'on considère une boule  $B \subset M$  suffisamment petite rencontrant  $K$ , le fibré  $E_B^c$  est orientable. Deux points distincts et proches  $p, q \in K$  sont en *position vrillée* si l'on peut joindre  $W_{loc}^{ss}(p)$  à  $W_{loc}^{uu}(q)$  et  $W_{loc}^{ss}(q)$  à  $W_{loc}^{uu}(p)$  par deux courbes tangentes à  $E^c$  ayant la même orientation. (En particulier, lorsque  $W_{loc}^{ss}(p)$  et  $W_{loc}^{uu}(q)$  s'intersectent,  $p$  et  $q$  sont en position vrillée.) Voir la figure 9.3. Cette notion dépend du choix d'un prolongement  $E^c$ , mais est bien définie lorsque la distance  $d(p, q)$  tend vers 0.

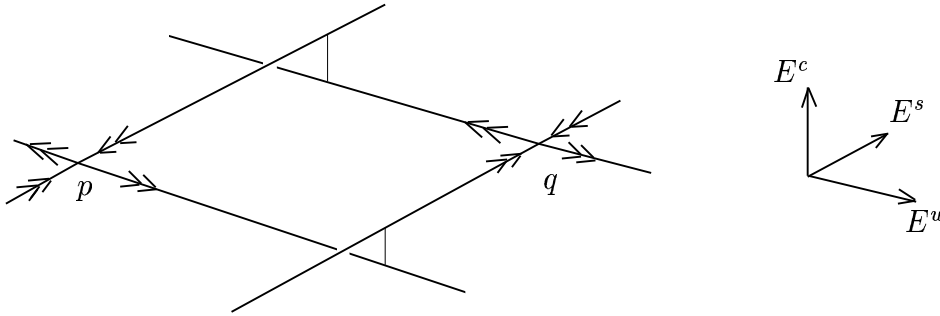


FIG. 9.3 – Deux points en position vrillée.

**Définition 9.18.** L'ensemble  $K$  est *vrillé* s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que toute paire de points  $p, q \in K$  vérifiant  $d(p, q) < \varepsilon$  est en position vrillée.

La démonstration de la proposition 9.17 entraîne le résultat suivant.

**Proposition 9.19** (section 3.4 de [50] et proposition 4.4 de [51]). *Si  $f$  appartient à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  et si  $K$  est un ensemble compact transitif par chaînes ayant une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  telle que*

- $E^s$  et  $E^u$  sont uniformément contractés par  $f$  et  $f^{-1}$  respectivement,
- $E^c$  est de dimension 1 et de type  $(PSU)$  ou  $(PSN)$ ,
- $K$  n'est pas vrillé,

*il existe alors, dans tout voisinage  $U$  de  $K$ , une orbite périodique d'indice  $\dim(E^s) + 1$  contenue dans la classe de récurrence par chaînes de  $K$ .*

### c) Dynamique centrale piégée

Nous avons vu que lorsque le fibré central de  $K$  est hyperbolique par chaînes, l'ensemble  $K$  est contenu dans une classe homocline. Des hypothèses plus faibles entraînent par le même argument l'existence d'une classe homocline non triviale au voisinage de  $K$ .

**Proposition 9.20.** *Si  $f$  appartient à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  et si  $K$  est un ensemble compact transitif par chaînes ayant une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  telle que*

- $E^s$  et  $E^u$  sont uniformément contractés par  $f$  et  $f^{-1}$  respectivement,
- $E^c$  est de dimension 1 et de type  $(H)$ -attractif,  $(PSN)$  ou  $(N)$ ,
- $K$  n'est pas une orbite périodique,

*il existe alors, dans tout voisinage  $U$  de  $K$ ,*

- une orbite périodique  $O$  d'indice  $\dim(E^s) + 1$  dont la classe homocline est non triviale,
- un point  $z \in K$ ,

*tels que  $W^{uu}(z)$  intersecte  $W^s(O)$ .*

## 9.9 Les autres types

### a) Ensembles vrillés

La géométrie des ensembles vrillés permet de créer une intersection entre les variétés invariantes fortes d'un point périodique.

**Proposition 9.21** (proposition 3.2 de [51]). *Considérons un ensemble compact partiellement hyperbolique vrillé  $K$ . Si  $K \cap \Omega(f)$  contient un point non périodique, alors pour tout voisinage  $\mathcal{U}$  de  $f \in \text{Diff}^1(M)$  et  $U$  de  $K$ , il existe  $g \in \mathcal{U}$  ayant une orbite périodique  $O \subset U$  telle que les variétés fortes  $W^{ss}(O) \setminus O$  et  $W^{uu}(O) \setminus O$  s'intersectent.*

Une première étape consiste à créer une orbite périodique  $O$  proche de  $K$ . En reprenant la démonstration du lemme de fermeture, on s'assure que l'orbite ainsi obtenue est "presque vrillée" : pour tous points  $p, q \in O$  proches, les variétés fortes  $W_{loc}^{ss}(p)$  et  $W_{loc}^{uu}(q)$  d'une part ainsi que  $W_{loc}^{ss}(q)$  et  $W_{loc}^{uu}(p)$  d'autre part, peuvent être reliées par des courbes tangentes à un fibré central et dont la longueur est arbitrairement petite par rapport à la distance entre  $p$  et  $q$ .

On peut alors appliquer l'argument de [36, section 6.1] ou [50, théorème 3.18] pour les orbites périodiques vrillées : on choisit une paire de points distincts  $p, q \in O$  qui minimise la distance  $d(p, q)$ . Les variétés  $W_{loc}^{uu}(p)$  et  $W_{loc}^{ss}(q)$  contiennent des points  $x_p$  et  $x_q$  proches. On obtient les propriétés suivantes :

- la distance  $d(x_p, x_q)$  est arbitrairement petite par rapport aux distances de  $x_p, x_q$  à  $p$  et  $q$ , car  $O$  est "presque vrillée" ;
- la distance  $d(x_p, x_q)$  est arbitrairement petite par rapport aux distances de  $x_p, x_q$  aux autres points de  $O$ , car si  $z \in O$  est proche de  $x_q \in W^{ss}(q)$ , il possède des itérés futurs  $f^k(z)$  proches de  $f^k(q)$ , contredisant le fait que  $d(p, q)$  est minimale.

Une perturbation élémentaire  $g$  de  $f$  permet d'envoyer  $x_p$  sur  $f(x_q)$ , sans perturber l'orbite  $O$ , l'orbite passée de  $x_p$ , ni l'orbite future de  $f(x_q)$ . Par conséquent les variétés fortes  $W_{loc}^{uu}(p)$  et  $W_{loc}^{ss}(q)$  pour  $g$  s'intersectent.

### b) Dynamique centrale neutre

Si  $K$  est de type N et est strictement contenu dans un ensemble transitif par chaînes, alors ou bien  $K$  est contenu dans une classe homocline ayant des orbites périodiques faibles, ou bien on peut créer un cycle hétérodimensionnel par perturbation.

**Proposition 9.22** (proposition 5.1 de [51]). *Si  $f$  appartient à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T}}$  et si  $K$  est un ensemble compact transitif par chaînes ayant une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  telle que*

- $E^s$  et  $E^u$  sont uniformément contractés par  $f$  et  $f^{-1}$  respectivement,
- $E^c$  est de dimension 1 et de type (N),
- $K$  est strictement contenu dans sa classe de récurrence par chaînes,

alors, l'un des deux cas suivants se produit.

1.  $K$  est contenu dans une classe homocline d'indice  $\dim(E^s)$  ou  $\dim(E^s)$  qui possède des orbites périodiques dont le  $(\dim(E^s) + 1)$ -ème exposant de Lyapunov est arbitrairement proche de 0.
2. Pour tout voisinage  $U$  de  $K$ , il existe une perturbation  $g \in \text{Diff}^1(M)$  de  $f$  ayant une orbite périodique contenue dans  $U$  telle que  $W^{ss}(O) \setminus O$  et  $W^{uu}(P) \setminus O$  s'intersectent.

La démonstration est bien plus délicate que pour les propositions précédentes. En voici une idée grossière (qui ne fonctionne que dans certains cas). Fixons un point  $z \notin K$  appartenant à la classe de récurrence par chaînes de  $K$ . Il existe des orbites qui quittent un voisinage arbitraire de  $K$  pour atteindre (par itérations passées ou futures) un voisinage arbitraire de  $z$ . Les orbites qui s'échappent d'un petit voisinage de  $K$  suivent l'«ensemble instable par chaînes local» de  $K$ . Puisque la dynamique centrale est piégée ( $E^c$  est de type (N)) on s'attend à ce que l'ensemble instable par chaînes local de  $K$  soit réunion de plaques  $W_{loc}^{uu}(x)$  pour  $x \in K$ . Il est donc possible (dans certains cas) par perturbation de créer hors de  $K$  une intersection entre deux variétés  $W^{uu}(x)$  et  $W^{ss}(y)$ , avec  $x, y \in K$ . Si l'on considère une orbite périodique  $O$  suffisamment proche de  $K$  en topologie de Hausdorff, on peut alors créer une intersection entre les variétés  $W^{ss}(O) \setminus O$  et  $W^{uu}(P) \setminus O$ .

### c) Ensembles instables par chaînes

On peut espérer que tout point de la classe de récurrence par chaînes contenant  $K$  est accumulé par des orbites périodiques d'indice  $\dim(E_1)$ . Le résultat suivant est démontré dans [134, section 5], voir aussi [188] et [51, proposition 1.10]. La démonstration n'utilise pas les modèles centraux.

**Proposition 9.23** (Potrie). *Si  $f$  appartient à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  et si  $K$  est un ensemble compact transitif par chaînes ayant une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  telle que*

- $E^s$  et  $E^u$  sont uniformément contractés par  $f$  et  $f^{-1}$  respectivement,
- $E^c$  est de dimension 1,
- l'exposant de Lyapunov le long de  $E^c$  de toute mesure supportée par  $K$  est nul,

*alors, pour tout  $\delta > 0$ , il existe un voisinage  $U$  de  $K$  tel que tout point  $z \in U$  vérifiant :*

- $z$  appartient à l'ensemble instable par chaînes local de  $K$ , i.e. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite contenue dans  $U$  qui joint  $K$  à  $z$  ;
- $z$  appartient à la classe de récurrence par chaînes de  $K$ ,

*vérifie également :*

*$z$  est limite d'une suite de points périodiques dont le  $\dim(E^s) + 1$ -ème exposant de Lyapunov appartient à  $(-\delta, \delta)$ .*

## 9.10 Application (1) : dynamique simple versus intersections homoclines

Nous avons démontré dans [50] un résultat plus faible que la conjecture de Palis, également conjecturé par Palis dans [115, 116, 117, 118]. Nous avons introduit au chapitre 1 les difféomorphismes Morse-Smale : leur dynamique est très simple puisque leur ensemble récurrent par chaînes est fini. À l'opposé, les difféomorphismes ayant une classe homocline non triviale possèdent une infinité d'orbites périodiques : ce sont les difféomorphismes qui possèdent une intersection homocline transverse, i.e. une orbite périodique hyperbolique  $O$  dont les variétés invariantes  $W^s(O) \setminus O$  et  $W^u(O) \setminus O$  ont un point d'intersection transverse.

**Théorème 9.24** (Crovisier). *L'espace  $\text{Diff}^1(M)$  contient un ouvert dense qui est l'union disjointe  $\mathcal{MS} \cup \mathcal{I}$  de deux ouverts :*

- $\mathcal{MS}$  est l'ensemble des difféomorphismes Morse-Smale,

–  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des difféomorphismes qui possèdent une intersection homocline transverse.

Ce résultat découle de [127] en dimension 1, de [149] en dimension 2 et a été démontré initialement par Bonatti-Gan-Wen [36] en dimension 3. Il implique que l'intérieur de l'ensemble des difféomorphismes d'entropie non nulle a la même adhérence que  $\mathcal{I}$  et que l'intérieur de l'ensemble des difféomorphismes d'entropie nulle a la même adhérence que  $\mathcal{MS}$ . Voir aussi [149, 58] pour une discussion de l'entropie dans le cas des dynamiques  $C^1$  sur les surfaces et comparer au théorème de Katok [81] qui implique qu'un difféomorphisme  $C^2$  de surface ayant une entropie non nulle a toujours une intersection homocline transverse.

*Démonstration du théorème 9.24.* Remarquons qu'un difféomorphisme ayant une tangence homocline ou un cycle hétérodimensionnel peut être perturbé en un difféomorphisme ayant une intersection homocline transverse. Par conséquent, il nous suffit de considérer un difféomorphisme  $f$  loin des bifurcations homoclines. Nous pouvons également supposer que  $f$  appartient à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  fixé à l'avance : nous supposons en particulier que  $f$  vérifie la propriété de Kupka-Smale.

Si  $f$  est hyperbolique, l'ensemble récurrent par chaînes se décompose en un nombre fini de classe homoclines. Si toutes les classes homoclines sont triviales, l'ensemble récurrent par chaînes est fini et, puisque  $f$  est un difféomorphisme Kupka-Smale, pour tous  $x, y \in \mathcal{R}(f)$ , l'intersection  $W^s(x) \cap W^u(y)$  est transverse : par conséquent  $f$  est Morse-Smale. Si l'une des classes homocline n'est pas triviale,  $f$  possède une intersection homocline transverse.

Si  $f$  n'est pas hyperbolique, il possède un ensemble minimal non hyperbolique  $K$ . Puisque  $f$  vérifie la propriété de Kupka-Smale,  $K$  n'est pas une orbite périodique et par conséquent si  $K$  est contenu dans une classe homocline,  $f$  possède une intersection homocline transverse. Nous pouvons donc supposer que  $K$  est contenu dans une classe apériodique. D'après le corollaire 9.4,  $K$  possède une structure partiellement hyperbolique  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  avec  $\dim(E^c) = 1$ . D'après les propositions 9.15, 9.17, 9.20, si le fibré  $E^c$  est de type (R), (H) ou (N), ou si  $K$  n'est pas vrillé et  $E^c$  est de type (P),  $f$  possède une classe homocline non triviale et une intersection homocline transverse. Si  $K$  est vrillé, la proposition 9.21 permet de construire une intersection homocline transverse. Dans tous les cas  $f$  appartient donc à l'adhérence de  $\mathcal{I}$ .  $\square$

## 9.11 Application (2) : étude des quasi-attracteurs

On peut utiliser les modèles centraux pour obtenir des propriétés sur les quasi-attracteurs des difféomorphismes génériques loin des tangences homoclines : J. Yang a montré [188] que ce sont des classes homoclines. Voici une version légèrement améliorée de son résultat.

**Théorème 9.25** (Yang). *Pour tout difféomorphisme dans un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T}}$ , tout quasi-attracteur est une classe homocline  $H$ .*

*De plus, si  $i$  est l'indices minimal des orbites périodiques qu'il contient,  $H$  possède une décomposition dominée  $T_H M = E^s \oplus E^c \oplus F$  telle que :*

- $E^s \oplus E^c$  est de dimension  $i$  et  $E^c$  est de dimension 0 ou 1 ;
- $E^s$  est uniformément contracté,  $E^c$  est de type (H)-attractif ;
- si  $E^c$  est de dimension 1 et non uniformément contracté, il existe des orbites périodiques dans  $H$  dont l'exposant de Lyapunov le long de  $E^c$  est arbitrairement proche de 0.

*Démonstration.* Soit  $\Lambda$  un quasi-attracteur. Nous pouvons supposer que ce n'est pas un ensemble hyperbolique et considérer un sous-ensemble non hyperbolique minimal  $K \subset \Lambda$ . D'après le théorème 9.3,  $K$  possède une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  avec  $\dim(E^c) \geq 1$ . Nous pouvons supposer que  $K$  a été choisi pour que la dimension  $\dim(E^s)$  soit minimale.

**Affirmation.**  $\Lambda$  est une classe homocline qui contient des orbites périodiques

- qui sont arbitrairement proches de  $K$  en topologie de Hausdorff,
- ou dont l'indice est inférieur ou égal à  $\dim(E^s)$ ,
- ou dont le  $(\dim(E^s) + 1)$ -ème exposant de Lyapunov est arbitrairement proche de 0.

*Démonstration.* Lorsque  $\dim(E^c) > 1$ , d'après le théorème 9.3,  $\Lambda$  est une classe homocline contenant des orbites périodiques dont le  $(\dim(E^s) + 1)$ -ème exposant de Lyapunov est arbitrairement proche de 0. Nous supposons donc que  $\dim(E^c) = 1$  et considérons le type de  $E^c$ .

Lorsque  $E^c$  est de type (R) ou (H), les propositions 9.15, 9.17 entraînent directement que  $\Lambda$  est une classe homocline qui contient des orbites périodiques contenues dans des voisinages arbitrairement petits de  $K$ .

Lorsque  $E^c$  est de type (N) ou  $(P_{SN})$ , la proposition 9.20 montre que l'ensemble instable de  $\Lambda$  s'accumule sur une orbite périodique  $O$  contenue dans un voisinage arbitraire de  $K$ . Puisque  $\Lambda$  est un quasi-attracteur, il contient  $O$  et  $\Lambda$  est une classe homocline.

Nous nous plaçons finalement dans le cas où  $E^c$  est de type  $(P_{SU})$  ou  $(P_{UN})$ . L'ensemble  $K$  possède un modèle central (correspondant à l'une des orientations du fibré  $E^c$ ) pour lequel il existe des voisinages arbitrairement petits de  $\widehat{K} \times \{0\}$  qui sont répulsifs et contenus dans l'ensemble instable par chaînes de  $\widehat{K} \times \{0\}$ .

En particulier, pour tout voisinage  $U$  de  $K$ , et tout  $x \in K$ , il existe une courbe  $\gamma \subset U$  tangente à  $E^c(x)$  en  $x$  telle que pour tout  $z \in \gamma$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une  $\varepsilon$ -pseudo-orbite contenue dans  $U$  qui joint  $K$  à  $z$ . Puisque  $\Lambda$  est un quasi-attracteur, il contient  $\gamma$  et la proposition 9.23 s'applique.

Fixons  $\delta > 0$  proche de 0. Tout point  $z$  proche de  $x$  est limite d'une suite d'orbites périodiques  $(O_n)$  dont le  $(\dim(E^s) + 1)$ -ème exposant de Lyapunov appartient à  $(-\delta, \delta)$ . Nous pouvons supposer que  $(O_n)$  converge en topologie de Hausdorff vers un ensemble compact invariant  $D \subset \Lambda$  qui, d'après le corollaire 7.7 possède une décomposition dominée  $T_D M = E_1 \oplus E_2$  avec  $\dim(E_1) = \dim(E^s)$ . Deux cas sont possibles.

- Si  $E_1$  n'est pas uniformément contracté, puisque  $\dim(E^s)$  a été choisie minimale, le théorème 5.17 montre que  $\Lambda$  est une classe homocline contenant des points périodiques d'indice inférieur ou égal à  $\dim(E^s)$ .
- Si  $E_1$  est uniformément contracté, les variétés stables fortes de dimension  $\dim(E^s)$  des orbites  $O_n$  sont de taille uniforme : pour  $n$  suffisamment grand,  $W^s(O_n)$  intersecte donc la variété instable forte (de dimension  $\dim(E^u)$ ) d'un point  $z' \in \gamma$  proche de  $z$ . Puisque  $\Lambda$  est un quasi-attracteur, il contient  $O_n$ . Nous en déduisons que  $\Lambda$  est une classe homocline qui contient des orbites périodiques dont le  $(\dim(E^s) + 1)$ -ème exposant de Lyapunov est arbitrairement proche de 0.

Dans tous les cas l'affirmation est démontrée. □

Considérons l'indice  $i$  minimal des points périodiques contenus dans  $\Lambda$ . D'après le corollaire 7.7, il existe une décomposition dominée  $T_\Lambda M = E \oplus F$  avec  $\dim(E) = i$ . Si  $E$  est uniformément contracté, nous obtenons la conclusion du théorème 9.25 avec  $E^s = E$  et  $\dim(E^c) = 0$ .

Si  $E$  n'est pas uniformément contracté, nous appliquons le théorème 5.17. Le premier cas du théorème n'apparaît pas puisque  $i$  est minimal.

- Dans le second cas, on obtient une décomposition dominée  $E = E' \oplus E^c$  sur  $\Lambda$  avec  $\dim(E^c) = 1$ .
- Dans le troisième cas, il existe un ensemble minimal  $K \subset \Lambda$  avec structure partiellement hyperbolique  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  tel que  $\dim(E^s) < \dim(E)$  et tel que toute orbite périodique proche de  $K$  a un exposant de Lyapunov central proche de 0. Puisque  $i$  est minimal,  $\Lambda$  ne contient pas d'orbite périodique d'indice inférieur ou égal à  $\dim(E^s)$ . D'après l'affirmation, la classe  $\Lambda$  contient donc des orbites périodiques dont le  $\dim(E)$ -ème exposant de Lyapunov est arbitrairement proche de 0. Nous obtenons à nouveau une décomposition dominée  $E = E' \oplus E^c$  sur  $\Lambda$  avec  $\dim(E^c) = 1$ .

Dans les deux cas,  $E$  se décompose et  $H$  contient des orbites périodiques dont l'exposant de Lyapunov le long de  $E^c$  est proche de 0. Le fibré  $E'$  est uniformément contracté : dans le cas contraire on pourrait répéter le raisonnement et conclure que  $\Lambda$  contient des points périodiques d'indice strictement inférieurs à  $i$ .

Puisque  $H$  contient des orbites périodiques hyperboliques d'indice  $i$ , le fibré  $E^c$  ne peut être que de type (H)-attractif ou de type (R). La proposition 9.16 montre que le type (R) n'apparaît pas puisque  $H$  ne contient pas de point périodique d'indice  $i - 1$ .  $\square$

Ceci permet de répondre aux questions 3.14 et 4.12 pour les difféomorphismes loin des tangences homoclines.

**Corollaire 9.26** (J. Yang [188]). *Pour tout difféomorphisme dans un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T}}$ , la réunion des ensembles stables des orbites périodiques est dense dans  $M$ .*

**Corollaire 9.27** (Potrie [134]). *Si  $M$  est connexe, pour tout difféomorphisme dans un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T}}$ , toute classe de récurrence par chaînes qui est stable au sens de Lyapunov pour  $f$  et  $f^{-1}$  coïncide avec  $M$ .*

Bonatti, Gan, Li et D. Yang [40] ont donné récemment une réponse aux questions 3.15 et 3.16 dans ce cadre.

**Théorème 9.28** (Bonatti-Gan-Li-Yang). *Pour tout difféomorphisme appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T}}$ , chaque quasi-attracteur est un attracteur essentiel.*

J. Yang montre également [187] que loin des tangences homoclines le phénomène de Newhouse n'a lieu qu'au voisinage de classes homoclines particulières.

**Théorème 9.29** (J. Yang). *Pour tout difféomorphisme dans un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T}}$ , si  $K$  est la limite de Hausdorff d'une suite de puits  $(O_n)$ ,  $K$  est contenu dans une classe homocline ayant des points périodiques d'indice  $d - 1$  dont le plus grand exposant de Lyapunov est arbitrairement proche de 0.*

*Démonstration.* D'après le corollaire 5.9, les puits  $(O_n)$  ne sont pas  $N$ -uniformément contractés à la période pour un entier  $N \geq 1$ . Puisque  $f$  est générique, on déduit du théorème 7.1 que  $\Lambda$  est limite de Hausdorff d'une suite de puits  $(\tilde{O}_n)$  ayant un exposant de Lyapunov arbitrairement proche de 0. D'après le corollaire 7.7,  $\Lambda$  possède donc une décomposition dominée  $E \oplus E^c$  avec  $\dim(E^c) = 1$ . De plus  $E^c$  n'est pas uniformément dilaté. Le théorème 5.17 implique donc que l'un des cas suivants se produit.

- $K$  est contenu dans une classe homocline ayant des orbites périodiques d'indice  $d - 1$  dont le plus grand exposant de Lyapunov est arbitrairement proche de 0.
- $K$  contient un ensemble minimal  $K'$  dont les exposants de Lyapunov le long de  $E^c$  pour toute mesure invariante supportée sur  $K'$  sont nuls. La proposition 9.17 entraîne alors que  $K'$  est contenu dans une classe homocline ayant des orbites périodiques d'indice  $d - 1$  arbitrairement proches de  $K'$ . En particulier,  $H$  contient des orbites périodiques d'indice  $d - 1$  dont le plus grand exposant de Lyapunov est arbitrairement proche de 0.

Le théorème est démontré dans tous les cas.  $\square$

## 9.12 Application (3) : loin des cycles hétérodimensionnels

Les résultats de ce chapitre permettent d'étendre [51] le résultat local de Wen (corollaire 9.4).

**Théorème 9.30** (Crovisier). *Tout difféomorphisme  $f$  appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T} \cup \mathcal{C}}$  est partiellement hyperbolique : son ensemble récurrent par chaînes  $\mathcal{R}(f)$  se décompose en un nombre fini d'ensembles compacts disjoints  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_s$ . Chaque ensemble  $\Lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , possède une décomposition dominée  $T_{\Lambda_i}M = E^s \oplus E_1^c \oplus E_2^c \oplus E^u$  qui est partiellement hyperbolique et telle que chaque fibré central  $E_1^c, E_2^c$  est de dimension 0 ou 1.*

De plus,

- les classes homoclines de  $f$  sont hyperboliques par chaînes,
- si  $H(p)$  est une classe homocline ayant un fibré  $E_i^c$  non hyperbolique, elle possède des orbites périodiques homocliniquement reliées à  $p$  avec un exposant de Lyapunov le long de  $E_i^c$  arbitrairement proche de 0,
- les classes apériodiques ont une dynamique minimale et un fibré central de dimension 1 et de type (N).

*Remarque 9.31.* Nous verrons en section 10.4 que les fibrés  $E^s$  et  $E^u$  ne sont pas dégénérés, sauf dans le cas des puits et des sources (qui sont en nombre fini).

*Démonstration.* Considérons tout d'abord un ensemble minimal  $K$  ayant une structure partiellement hyperbolique  $T_KM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  avec  $\dim(E^c) = 1$  telle que toute mesure invariante supportée sur  $K$  ait un exposant central nul. D'après la proposition 9.21 et le lemme 8.6, l'ensemble  $K$  n'est pas vrillé. D'après les propositions 9.15, 9.17 et 9.19, si  $E^c$  est de type (R), (H) ou (P), tout voisinage de  $K$  contient une orbite périodique contenue dans la classe de récurrence par chaînes de  $K$ . En particulier,  $K$  est contenu dans une classe homocline ayant des points périodiques d'indice  $\dim(E^s)$  ou  $\dim(E^s) + 1$  et dont le  $(\dim(E^s) + 1)$ -ème exposant de Lyapunov est arbitrairement proche de 0. Lorsque  $E^c$  est de type (N) et que  $K$  est strictement contenu dans sa classe de récurrence par chaînes, nous obtenons la même conclusion d'après la proposition 9.22. Ainsi  $K$  satisfait l'un des cas suivants.

- $K$  est contenu dans une classe homocline ayant des points périodiques d'indice  $\dim(E^s)$  ou  $\dim(E^s) + 1$  et dont le  $(\dim(E^s) + 1)$ -ème exposant de Lyapunov est arbitrairement proche de 0,
- ou  $K$  coïncide avec sa classe de récurrence par chaînes et  $E^c$  est de type (N).

Considérons à présent une classe de récurrence par chaînes  $C$  de  $f$ . Si  $C$  est une classe apériodique, elle contient un ensemble minimal non hyperbolique  $K$  dont le fibré central est de dimension 1. D'après le corollaire 5.13, toutes les mesures supportées sur  $K$  ont un exposant de



Lyapunov selon  $E^c$  qui est nul. Nous pouvons donc appliquer la discussion du premier paragraphe et conclure que  $K = C$  et que le fibré central est de type (N).

Si l'on suppose que  $C$  est une classe homocline  $H(p)$ , elle possède un unique indice. D'après le corollaire 7.7, elle supporte une décomposition dominée  $E \oplus F$  telle que  $\dim(E)$  coïncide avec la dimension stable de  $p$ . Si  $E$  n'est pas uniformément contracté, on peut appliquer le théorème 5.17.

- Nous excluons le premier cas puisque  $H(p)$  possède un unique indice.
- Dans le second cas, la classe possède des points périodiques ayant un exposant stable proche de 0.
- Dans le troisième cas, la classe contient un ensemble minimal non hyperbolique  $K$ . Le premier paragraphe montre que la classe contient des orbites périodiques ayant un exposant central proche de 0. Puisque  $\dim(E^s) < \dim(E)$ , l'exposant central est un exposant stable. Nous concluons (des deux derniers cas) que le fibré  $E$  se décompose  $E = E' \oplus E_1^c$  avec  $\dim(E^c) = 1$ . En reprenant le raisonnement avec le fibré  $E'$ , nous en déduisons que  $E'$  est uniformément contracté. Puisque la classe contient des points périodiques pour lesquels  $E_1^c$  est un fibré stable, le type de  $E_1^c$  ne peut pas être (N), (P) ou (H)-répulsif. D'après la proposition 9.16, il ne peut être de type (R). Il est donc de type (H)-attractif. Le même raisonnement montre que  $F$  est uniformément dilaté ou se décompose en  $F = E_2^c \oplus E^u$  avec  $\dim(E_2^c) = 1$  et  $E_2^c$  est de type (H)-répulsif. On en déduit que  $H(p)$  est hyperbolique par chaînes.  $\square$

Nous obtenons aussi un résultat [52] sur la structure des quasi-attracteurs (comparer au théorème 9.25).

**Corollaire 9.32** (Crovisier-Pujals). *Pour tout difféomorphisme  $f$  appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T} \cup \mathcal{C}}$ , les quasi-attracteurs sont des classes homoclines hyperboliques par chaînes  $H$  ayant une structure partiellement hyperbolique  $T_H = E^{cs} \oplus E^{cu} = (E^s \oplus E^c) \oplus E^u$  avec  $\dim(E^c) = 0$  ou 1.*

*Démonstration.* Considérons une classe apériodique  $K$ . D'après le théorème précédent, elle possède une structure partiellement hyperbolique  $T_K M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  avec  $\dim(E^c) = 1$ . De plus  $E^c$  est de type (N). La proposition 9.20 implique alors que l'ensemble instable de  $K$  coupe la variété stable d'une orbite périodique. On en déduit que  $K$  ne contient pas sa variété instable et n'est donc pas un quasi-attracteur.

Un quasi-attracteur est donc une classe homocline hyperbolique par chaînes  $H(p)$ . Nous devons montrer qu'elle n'admet pas de fibré non hyperbolique  $E_2^c$  de dimension 1 de type (H)-répulsif. Si c'était le cas, il existerait des orbites périodiques homocliniquement reliées à  $p$  ayant un exposant de Lyapunov le long de  $E_2^c$  positif et arbitrairement proche de 0. Puisque  $f$  satisfait une condition de généralité, il existe des points périodiques  $q$  d'orbites homocliniquement reliées à  $p$  avec une demi-variété centrale tangente à  $E_2^c$  arbitrairement courte : l'autre extrémités de la variété centrale de  $q$  est bordée par un point périodique  $q'$  pour lequel  $E_2^c$  est un fibré stable. On en déduit que  $q'$  a une variété stable de dimension plus grande que celle de  $p$ . Puisque  $H(p)$  est un quasi-attracteur, il contient la variété instable de  $q$  : par conséquent il contient  $q'$ . La classe  $H(p)$  contient donc des points périodiques d'indices différents. La section 3.3 montre alors qu'il existe des perturbation de  $f$  qui possèdent un cycle hétérodimensionnel. C'est une contradiction. La classe  $H(p)$  n'a donc pas de fibré non hyperbolique de type (H)-répulsif.  $\square$

Nous terminons par un premier résultat vers la finitude des quasi-attracteurs.

**Proposition 9.33** (Crovisier-Pujals). *Pour tout difféomorphisme  $f$  appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T} \cup \mathcal{C}}$ , l'union des quasi-attracteurs non-triviaux est fermée.*

Nous verrons en section 10.4 que l'on peut enlever l'hypothèse que les quasi-attracteurs sont triviaux.

*Démonstration.* Considérons une suite de quasi-attracteurs non triviaux  $(A_n)$  qui converge en topologie de Hausdorff vers un ensemble compact invariant  $K$ , contenu dans une classe de récurrence par chaînes  $\Lambda$ . Nous devons montrer que  $\Lambda$  est un quasi-attracteur. D'après le théorème 9.30,  $\Lambda$  est partiellement hyperbolique. Nous notons  $E^u$  son fibré instable fort.

**Affirmation 1.**  $\Lambda$  est une classe homocline  $H(p)$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $\Lambda$  est une classe apériodique. Elle a une décomposition dominée  $T_\Lambda M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ , avec  $\dim(E^c) = 1$  et  $E^c$  de type (N). La proposition 9.11 implique que  $E^u$  est non dégénéré. Pour  $n$  grand, le fibré  $E^u$  est également défini au-dessus des ensembles  $A_n$ . Puisque les ensembles  $A_n$  sont des quasi-attracteurs, ils sont saturés en variétés instables fortes tangentes à  $E^u$ . Par passage à la limite,  $K$  est également saturé en variétés instables fortes. Ceci contredit la proposition 9.20 puisque  $\Lambda$  ne contient pas de points périodiques.  $\square$

**Affirmation 2.** *Nous pouvons nous ramener au cas où la dimension stable de  $p$  est strictement inférieure à celle des points périodiques des classes  $A_n$ .*

*Démonstration.* Supposons que la dimension instable de  $p$  est inférieure ou égale à celle des classes  $A_n$ . Considérons des familles de plaques  $\mathcal{W}^{cs}, \mathcal{W}^{cu}$  définissant sur  $H(p)$  une structure de classe hyperbolique par chaînes. Elles s'étendent également au-dessus des quasi-attracteurs  $A_n$ .

Si  $E^{cu}$  est uniformément dilaté, les quasi-attracteurs  $A_n$  sont saturés en plaques de  $\mathcal{W}^{cu}$ .

Sinon, il y a une décomposition  $E^{cu} = E^c \oplus E^u$  et l'on peut aussi considérer une famille de plaques centrales  $\mathcal{W}^c$  tangentes à  $E^c$  et piégées par  $f^{-1}$ . Nous remarquons que les plaques  $\mathcal{W}_x^c$  pour  $x \in A_n$  sont contenues dans  $A_n$ . En effet, si ce n'était pas le cas il existerait un point périodique  $q$  homocliniquement relié à l'orbite de  $p$  dont la variété instable ne contient pas entièrement la plaque  $\mathcal{W}_q^c$  : il existe un point périodique  $q' \in \mathcal{W}_q^c$  qui borde la variété instable de  $q$ . Puisque  $A_n$  est un quasi-attracteur, il contient la variété instable de  $q$  et donc le point  $q'$ . Cependant le point  $q'$  est d'indice différent de l'indice de  $q$  et la section 3.3 montre que l'on peut créer un cycle hétérodimensionnel par perturbation. C'est une contradiction.

Dans les deux cas les quasi-attracteurs  $A_n$  sont saturés en plaques  $\mathcal{W}^{cu}$ . Par passage à la limite c'est aussi le cas de  $K$ .

D'après le lemme 5.19, il existe un ensemble dense de points périodiques  $q$  homocliniquement reliés à l'orbite de  $p$  tels que  $\mathcal{W}_q^{cs} \subset W^s(q)$  et  $\mathcal{W}_q^{cu} \subset W^u(q)$ . Il existe un tel point  $q$  proche de  $K$  dont la variété stable intersecte transversalement une plaque centre-instable de  $K$ . On en déduit finalement que  $H(p)$  contient la variété instable de  $p$ . D'après la section 3.3,  $H(p)$  est un quasi-attracteur. Ceci conclut la démonstration. Par conséquent, nous sommes ramenés au cas où la dimension instable de  $p$  est strictement plus grande que celles des classes  $A_n$ .  $\square$

Nous en déduisons que  $H(p)$  a une décomposition dominée  $T_{H(p)} = E^{cs} \oplus E^c \oplus E^u$  avec  $\dim(E^c) = 1$  telle que  $E^c$  est de type (H)-répulsif au-dessus de  $H(p)$  et de type (H)-attractif au-dessus des quasi-attracteurs  $A_n$ . Nous allons montrer que ceci mène à une contradiction.

On considère un point  $z \in K$  et on fixe un petit voisinage  $U$  de  $z$ . En utilisant l'expansion uniforme le long de  $E^u$ , on en déduit que pour tout  $n$  grand, il existe une orbite de  $A_n$  qui évite le voisinage  $U$ . D'après le théorème de densité (corollaire 2.8), il existe une orbite périodique  $\tilde{O}_n$  contenue dans un petit voisinage de  $A_n$  qui évite  $U$ . En considérant des plaques centre-stable piégée suffisamment petites au-dessus de la dynamique proche de  $A_n$ , on montre que  $A_n$  contient une orbite périodique  $O_n$  rencontrant les mêmes plaques centre-stable que  $\tilde{O}_n$ . Par conséquent l'orbite périodique  $O_n \subset A_n$  évite l'ouvert  $U$ .

**Affirmation 3.** *Pour tout  $n$  assez grand, il existe un voisinage  $\mathcal{U}_n$  de  $f$  formé de difféomorphismes pour lesquels les continuations de  $W^s(O_n)$  et  $W^u(p)$  s'intersectent.*

*Démonstration.* D'après l'affirmation précédente,  $E^c$  est un fibré stable de  $O_n$ . Il existe donc un point  $x \in O_n$  tel que pour tout  $k \geq 0$  on ait  $\prod_{i=0}^{k-1} \|Df(f^i(x))\| \leq 1$ . La domination entre  $E^{cs}$  et  $E^c$  implique alors que  $W_x^{cs}$  est contenue dans l'ensemble stable de  $O_n$ . Par ailleurs,  $K$  est contenu dans l'adhérence de la variété  $W^u(p)$ . On en déduit que  $W^s(O_n)$  et  $W^u(p)$  ont un point d'intersection transverse  $z$ , i.e.  $T_z M = T_z W^s(O_n) + T_z W^u(p)$ . Cette propriété est robuste aux petites perturbations dans  $\text{Diff}^1(M)$ .  $\square$

Pour  $n$  grand,  $W^u(O_n)$  rencontre un voisinage arbitrairement petit de  $z$ . Par ailleurs, la variété  $W^s(f^k(p))$  rencontre tout voisinage de  $z$  pour un entier  $k$ . Le lemme de connexion permet de créer une perturbation  $g$ ,  $C^1$ -proche de  $f$ , telle que  $W^u(O_n)$  et  $W^s(f^k(p))$  s'intersectent. On en déduit que  $p$  et  $O_n$  sont liés par des orbites hétéroclines de  $g$ . Puisque leurs indices diffèrent, nous avons créé un cycle hétérodimensionnel, ce qui est une contradiction.  $\square$



## Chapitre 10

# Hyperbolicités topologique et uniforme

Ce chapitre traite de la conjecture de Palis. Nous savons (théorème 9.30) que les difféomorphismes loin des bifurcations homoclines sont partiellement hyperboliques. Nous devons à présent montrer que les fibrés centraux des dynamiques partiellement hyperboliques du théorème 9.30 sont des fibrés uniformément contractés ou dilatés.

La conjecture de Palis a été résolue sur les surfaces par Pujals et Sambarino [149].

**Théorème 10.1** (Pujals-Sambarino). *Lorsque  $M$  est de dimension 2, tout difféomorphisme peut être approché dans  $\text{Diff}^1(M)$  par un difféomorphisme hyperbolique ou par un difféomorphisme ayant une tangence homocline.*

En dimension supérieure, nous avons montré avec Pujals [52] que, loin des bifurcations homoclines, sur un ouvert dense de  $M$  la dynamique se comporte comme une dynamique hyperbolique. Plus précisément, un difféomorphisme est dit *essentiellement hyperbolique* s'il possède un nombre fini d'attracteurs hyperboliques dont l'union des bassins est dense dans  $M$ , ainsi qu'un nombre fini de répulseurs hyperboliques dont l'union des bassins est denses dans  $M$ .

**Théorème 10.2** (Crovisier-Pujals). *Tout difféomorphisme peut être approché dans  $\text{Diff}^1(M)$  par un difféomorphisme essentiellement hyperbolique ou par un difféomorphisme qui présente une tangence homocline ou un cycle hétérodimensionnel.*

La démonstration du théorème 10.1 (et ses généralisations) repose essentiellement sur un argument de distorsion et utilise pour cela le passage en régularité  $C^2$ . La démonstration du théorème 10.2 est plus géométrique : c'est pour cette raison que l'on obtient seulement l'hyperbolicité des attracteurs et que l'on ne contrôle pas la dynamique sur les pièces de type "selle".

### 10.1 Hyperbolicité des fibrés extrêmes

Nous avons vu en section 9.6, qu'au-dessus d'un ensemble transitif par chaînes  $K$  qui n'est pas un puits, un fibré extrême de dimension 1 est "topologiquement hyperbolique" (il est de type (H)). Dans certains cas, il est possible de démontrer qu'il est uniformément hyperbolique.

Sur les surfaces, la symétrie entre  $E$  et  $F$  permet [149] d'obtenir l'hyperbolicité de  $K$ .

**Théorème 10.3** (Pujals-Sambarino). *Lorsque  $M$  est de dimension 2, pour tout difféomorphisme appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$ , tout ensemble compact invariant  $K$  ayant une décomposition dominée non triviale est hyperbolique.*

Ceci entraîne la conjecture de Palis sur les surface.

*Démonstration du théorème 10.1.* Considérons un difféomorphisme qui ne peut pas être approché par un difféomorphisme ayant une tangence homocline. Nous pouvons l’approcher par un difféomorphisme  $f$  appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$ . D’après le théorème 9.30, chaque classe de récurrence par chaînes de  $f$  possède une décomposition dominée non triviale, elle est donc hyperbolique d’après le théorème précédent.  $\square$

Ce résultat se généralise [151] en dimension supérieure lorsque  $E$  est uniformément contracté.

**Théorème 10.4** (Pujals-Sambarino). *Pour tout difféomorphisme appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$ , toute classe homocline  $H$  ayant une décomposition dominée  $T_H M = E \oplus F$  avec  $\dim(F) = 1$  et  $E$  uniformément contracté est hyperbolique.*

Nous avons étendu [52] ces travaux dans un cadre où  $E$  n’est plus uniformément contracté : nous supposons à la place que  $E$  est finement piégée et qu’il existe une famille de plaques localement invariante  $\mathcal{W}$  tangente à  $E$  (rappelons que d’après la section 5.9, une telle famille de plaques est essentiellement unique) et telle que pour tout  $x \in H$  l’intersection  $H \cap \mathcal{W}_x$  est totalement discontinue.

**Théorème 10.5** (Crovisier-Pujals). *Pour tout difféomorphisme appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  et toute classe homocline  $H$  ayant une décomposition dominée  $T_H M = E \oplus F$  avec  $\dim(F) = 1$  et vérifiant :*

- $E$  est finement piégée,
- il existe une famille de plaques  $\mathcal{W}$  localement invariante et tangente à  $E$  telle que  $\mathcal{W}_x \cap H$  est totalement discontinu pour tout  $x \in H$ ,

le fibré  $F$  est uniformément dilaté ou  $H$  est un puits.

*Remarque 10.6.* Ces résultats restent vrais pour des ensemble compacts invariants  $K$  contenus dans une variété localement invariante  $N$  normalement hyperbolique. Par exemple, si  $N$  est une surface et si  $K$  possède une décomposition dominée tangente à  $N$  non triviale, alors  $K$  est un ensemble hyperbolique.

## 10.2 Technique de Mañé-Pujals-Sambarino

Mañé avait démontré un résultat similaire [96] pour les endomorphismes du cercle. Pour les difféomorphismes en dimension plus grande, l’idée est d’exploiter la contraction (topologique ou uniforme) le long des plaques tangentes à  $E$  pour “quotienter” la dynamique dans la direction centre-stable et se ramener ainsi à un cadre essentiellement unidimensionnel.

Les théorèmes 10.3, 10.4 et 10.5 sont la contrepartie de résultats non perturbatifs en classe  $C^2$ . Nous considérons donc dans la suite un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^2(M)$  et un ensemble compact invariant  $K$  muni d’une décomposition dominée  $T_K M = E \oplus F$  avec  $\dim(F) = 1$ . Nous supposons que :

- a) pour tout point périodique de  $K$ , le fibré  $F$  est uniformément dilaté ;
- b)  $K$  ne contient pas de courbe fermée simple tangente à  $F$ , invariante par un itéré de  $f$ .

En effet, si l'on suppose que  $f$  est un difféomorphisme Kupka-Smale, tous les points périodiques qui ne vérifient pas la première condition sont des puits et les courbes de la seconde condition sont normalement hyperboliques et portent une dynamique très simple. En retirant toutes les courbes (en nombre fini), tous les puits de  $K$  et leur bassins, on se ramène aux conditions énoncées ci-dessus.

On démontre alors que  $F$  est uniformément dilaté au-dessus de  $K$  par une "récurrence" : on se ramène aisément à un ensemble  $K$  ayant la propriété supplémentaire suivante :

c) Pour tout sous-ensemble compact invariant  $K' \subsetneq K$ , le fibré  $F|_{K'}$  est uniformément dilaté. Nous introduisons également une famille de plaques piégées  $\mathcal{W}^{cs}$  tangente à  $E$ .

La démonstration comporte plusieurs étapes.

- 1) **Hyperbolicité topologique.** En utilisant que pour tout sous-ensemble,  $F$  est uniformément dilaté, on montre qu'il existe une famille de plaques  $\mathcal{W}^{cu}$  localement invariante et tangente à  $F$  telle que  $|f^n(\mathcal{W}_x^{cu})| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . C'est cet argument, de type Denjoy-Schwartz, qui permet de démontrer le théorème 9.13.
- 2) **Construction de boîtes markoviennes.** On construit alors une "boîte" munie d'une lamination centre-instable, i.e. une réunion  $B$  de courbes contenues dans des plaques de  $\mathcal{W}^{cu}$  telle que  $B \cap K$  est d'intérieur non vide dans  $K$ . Nous demandons également à  $B$  de vérifier des propriétés de type "rectangles de partitions de Markov".
- 3) **Hyperbolicité uniforme.** En induisant dans  $B$ , les propriétés markoviennes de  $B$ , la contraction topologique des plaques de  $\mathcal{W}$  et un contrôle de distorsion montrent alors que  $\|D_x f|_F^{-n}\| \rightarrow 0$  en tout  $x \in K$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Les étapes 1) et 3) sont identiques pour chacun des théorèmes 10.3, 10.4 et 10.5 mais la partie 2) est spécifique.

- Dans le cas des surfaces, on exploite le fait que les plaques  $\mathcal{W}^{cu}$  et  $\mathcal{W}^{cs}$  sont de dimension 1 pour chercher à construire un rectangle géométrique bordé par deux plaques de  $\mathcal{W}^{cs}$  et deux plaques de  $\mathcal{W}^{cu}$ .
- Dans le cas où le fibré  $E$  est uniformément dilaté, il est possible de construire une partition de Markov pour la classe homocline  $H$ . La boîte  $B$  est construite à partir de l'un des rectangles de la partition.
- Dans le cas où  $E$  est seulement finement piégée, l'hypothèse de discontinuité dans les plaques permet à nouveau de construire une partition adaptée. Plus précisément, pour tout  $x \in H$ , il existe un ensemble compact  $C_x \subset \mathcal{W}_x^{cs}$  vérifiant :
  - i) pour  $x, x' \in H$  on a  $C_x = C_{x'}$  ou  $C_x \cap C_{x'} = \emptyset$ ,
  - ii) pour tout  $x \in H$ , on a  $f(C_x) \subset C_{f(x)}$ ,
  - iii)  $(C_x)$  varie continûment en topologie de Hausdorff avec  $x \in H$ .

La boîte  $B$  s'obtient alors en fixant  $x \in H$ , en considérant des segments de courbes contenus dans les plaques  $\mathcal{W}_y^{cu}$  pour  $y \in H \cap C_x$  à extrémités contenues dans deux plaques  $\mathcal{W}_{x^-}^{cs}$  et  $\mathcal{W}_{x^+}^{cs}$  proches de  $\mathcal{W}_x^{cs}$ .

### 10.3 Classes homoclines à plaques centre-stables discontinues

Nous énonçons à présent dans le cadre des ensembles hyperboliques un résultat non perturbatif qui permet de satisfaire l'hypothèse topologique du théorème 10.5.

**Théorème 10.7** (Crovisier-Pujals). *Considérons un ensemble hyperbolique  $K$  localement maximal muni d'une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^u = (E^{ss} \oplus E^c) \oplus E^u$  avec  $\dim(E^c) = \dim(E^u) = 1$ . Alors l'un des trois cas suivants se produit :*

- $K$  est contenu dans une sous-variété localement invariante tangente à  $E^c \oplus E^u$  ;
- $K$  possède une connexion forte généralisée ;
- pour tout  $x \in K$  l'intersection  $W_{loc}^s(x) \cap K$  est totalement discontinue.

Ce résultat s'étend aux classes homoclines hyperboliques par chaînes.

**Théorème 10.8** (Crovisier-Pujals). *Considérons une classe homocline  $H$  et une décomposition dominée  $T_H M = E^{cs} \oplus E^{cu} = (E^{ss} \oplus E^c) \oplus E^{cu}$  avec  $\dim(E^c) = \dim(E^{cu}) = 1$  telle que  $E^{cs}$  et  $E^{cu}$  soient finement piégés par  $f$  et  $f^{-1}$  respectivement. Alors l'un des trois cas suivants se produit :*

- $H$  est contenue dans une sous-variété localement invariante tangente à  $E^c \oplus E^{cu}$  ;
- $H$  possède une connexion forte généralisée ;
- il existe une famille de plaques  $\mathcal{W}^{cs}$  localement invariante et tangente à  $E^{cs}$  telle que pour tout  $x \in H$  l'intersection  $\mathcal{W}_x^{cs} \cap H$  est totalement discontinue.

*Idee de la démonstration.* Supposons  $H$  sans connexion forte généralisée.

**Affirmation.** *Il n'existe pas d'ensemble connexe  $C \subset H$  non réduit à un point et contenu dans une variété stable forte.*

*Démonstration.* Supposons le contraire. Nous utilisons les deux propriétés suivantes.

- En itérant  $C$  négativement, on obtient des ensembles connexes de diamètre arbitrairement grand dans les feuilles stables fortes.
- Les projections de  $C$  par holonomie le long des plaques centre-instables, préservent les feuilles stables fortes : en effet, si l'image  $C'$  de  $C$  par holonomie est contenue dans une plaque centre-stable et rencontre plusieurs variétés stables fortes, on choisit un point périodique  $q$  proche de  $C'$  et on en déduit que la plaque centre-instable  $\mathcal{W}_q^{cu}$  de  $q$  rencontre  $C$ . Les itérés  $f^{-n}(C)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  convergent vers une partie connexe non triviale contenue dans  $H \cap W^{ss}(q)$ . Ceci contredit l'hypothèse sur  $H$ .

En transportant  $C$  par holonomie sur une variété stable d'orbite périodique  $q$  contenue dans  $H$ , ces propriétés impliquent que  $W^{ss}(q)$  rencontre  $H$  sur un ensemble connexe non trivial, contredisant l'hypothèse que  $H$  n'a pas de connexion forte généralisée.  $\square$

Supposons que  $H$  contienne un ensemble connexe non trivial  $C$  contenu dans une plaque centre-stable. Puisque  $C$  intersecte chaque variété stable forte selon un ensemble totalement discontinu,  $C$  est un graphe au-dessus de la direction centrale : c'est une courbe.

Considérons à présent une orbite périodique  $O$  ayant un point  $q$  proche de  $C$ . La projection de  $C$  sur la plaque centre-stable de  $q$  définit une nouvelle courbe  $C_q \subset H$  ; puisque  $W^{ss}(q) \setminus \{q\}$  n'intersecte pas  $C$ , cette courbe contient  $q$ . En itérant, on obtient également une courbe en chaque point de  $O$ . Puisque  $H$  contient un ensemble dense de points périodiques, on construit par passage à la limite une courbe  $C_x \subset H$  en chaque point de  $H$ .

Supposons que  $H$  n'est pas contenue dans une variété tangente à  $E^c \oplus E^{cu}$ . D'après le théorème 6.2, il existe deux points  $x \neq y$  tels que  $W^{ss}(x) = W^{ss}(y)$ . Soit  $q$  un point périodique proche de  $y$ . La projection par holonomie de  $C_x$  sur la plaque centre-stable de  $q$  coupe  $W^{ss}(q)$  en un point de  $W^{ss}(q) \setminus \{q\}$  appartenant à  $H$ . Nous avons à nouveau contredit l'existence d'une



connexion forte généralisée. Par conséquent, les composantes connexes de  $H$  dans les plaques centre-stables sont triviales.  $\square$

## 10.4 Application : non dégénérescence des fibrés uniformes

Nous déduisons des sections précédentes un résultat [52] qui complète le théorème 9.30.

**Corollaire 10.9** (Crovisier-Pujals). *Pour tout difféomorphisme appartenant à un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T} \cup \mathcal{C}}$ , toute classe de récurrence par chaînes qui n'est pas un puits ou une source possède une structure partiellement hyperbolique avec fibrés stables et instables forts non dégénérés.*

*Démonstration.* Nous appliquons le théorème 9.30 sur la structure partiellement hyperbolique des classes de récurrence par chaînes.

Considérons une classe apériodique. Elle possède une structure partiellement hyperbolique avec central de dimension 1 de type (N). La proposition 9.11 montre alors directement que les fibrés uniformes sont non dégénérés.

Considérons une classe homocline non hyperbolique  $H(p)$  : elle admet une structure partiellement hyperbolique de la forme  $E^s \oplus E^c \oplus E^u$  ou  $E^s \oplus E_1^c \oplus E_2^c \oplus E^u$ . Dans le premier cas, le théorème 10.4 montre que  $E^s$  et  $E^u$  ne sont pas dégénérés si la classe n'est pas un puits ou une source. Dans le second cas, la classe est hyperbolique par chaînes avec une décomposition  $E^{cs} \oplus E^{cu} = (E^s \oplus E_1^c) \oplus (E_2^c \oplus E^u)$ . Si  $E^u$  est dégénéré, le théorème 10.8 montre que l'on est dans l'un des cas suivants.

- La classe est contenue dans une surface tangente à  $E_1^c \oplus E_2^c$  et d'après le théorème 10.3 et la remarque 10.6 elle est hyperbolique : c'est une contradiction.
- La classe possède une connexion forte. Si le fibré  $E_1^c$  n'est pas uniformément contracté, il existe des orbites périodiques homocliniquement reliées à  $p$  ayant un exposant selon  $E_1^c$  arbitrairement faible d'après le théorème 9.30. On déduit du lemme 8.7 que l'on perturber le difféomorphisme pour créer un cycle hétérodimensionnel. C'est à nouveau une contradiction.
- La classe est totalement discontinue le long des plaques centre-stables.

On applique alors le théorème 10.5 et on en déduit que  $E_2^c$  est uniformément dilaté.  $\square$

**Corollaire 10.10** (Crovisier-Pujals). *Tout difféomorphisme dans un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M) \setminus \overline{\mathcal{T} \cup \mathcal{C}}$ , possède au plus un nombre fini de puits et de sources.*

*Démonstration.* Une suite de puits ou de source doit s'accumuler sur une partie d'une classe de récurrence par chaînes qui n'est ni un puits ni une source.  $\square$

## 10.5 Hyperbolicité des quasi-attracteurs

Voici un nouveau résultat sur la géométrie des ensemble hyperboliques : quitte à perturber, l'existence de variété stables fortes rencontrant la classe en plusieurs points peut être détectée sur les orbites périodiques. Ceci reprend un travail antérieur de Pujals [145, 146].

**Théorème 10.11** (Crovisier-Pujals). *Soit  $K$  un attracteur hyperbolique avec une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^u = (E^{ss} \oplus E^c) \oplus E^u$ ,  $\dim(E^c) = 1$ .*

*Il existe alors une perturbation  $g \in \text{Diff}^1(M)$  de  $f$  telle que*

- ou bien  $W^{ss}(x) \cap K = \{x\}$  pour tout  $x \in K$ ,
- ou bien  $K$  possède une connexion forte généralisée.

Ce résultat s'étend aux classes hyperboliques par chaînes.

**Théorème 10.12** (Crovisier-Pujals). *Soit  $H$  un quasi-attracteur qui est une classe homocline avec une décomposition dominée  $T_H M = E^{cs} \oplus E^{cu} = (E^s \oplus E^c) \oplus E^u$ ,  $\dim(E^c) = 1$  telle que  $E^{cs}$  est finement piégé.*

*Il existe alors une perturbation  $g \in \text{Diff}^1(M)$  de  $f$  telle que*

- ou bien  $W^{ss}(x) \cap H = \{x\}$  pour tout  $x \in K$ ,
- ou bien  $H$  possède une connexion forte généralisée.

Nous pouvons à présent terminer la démonstration du théorème 10.2.

*Démonstration du théorème 10.2.* Par symétrie, il suffit de traiter le cas des attracteurs.

Nous savons d'après le théorème 9.32 que chaque quasi-attracteur qui n'est pas un ensemble hyperbolique est une classe homocline avec une décomposition dominée  $T_H M = E^{cs} \oplus E^{cu} = (E^s \oplus E^c) \oplus E^u$ ,  $\dim(E^c) = 1$ . Nous pouvons alors appliquer le théorème 10.12. Dans le premier cas, le théorème 6.2 montre que  $H$  est contenue dans une sous-variété localement invariante tangente à  $E^c \oplus E^u$ . Le théorème 10.4 et la remarque 10.6 impliquent alors que  $H$  est un ensemble hyperbolique. Dans le second cas, puisque  $H$  possède des orbites périodiques faibles homocliniquement reliées à  $p$ , il existe d'après le lemme 8.7 une perturbation de  $f$  admettant un cycle hétérodimensionnel : c'est une contradiction. Nous avons donc montré que tous les quasi-attracteurs sont des ensembles hyperboliques.

D'après les résultats de la section 3.3, l'union des bassins des attracteurs est dense dans  $M$ . D'après le corollaire 10.10, l'ensemble des puits de  $f$  est fini. D'après la proposition 9.33, l'union des attracteurs non triviaux est fermée : il n'y a donc qu'un nombre fini d'attracteurs.  $\square$

## 10.6 Classification des connexions fortes

Abordons maintenant certains arguments importants de la démonstration du théorème 10.12.

**Proposition 10.13.** *Considérons une classe homocline  $H(p)$  ayant les mêmes propriétés qu'au théorème 10.12. Elle satisfait alors l'un des cas suivants :*

- a) *il existe  $g$   $C^1$ -proche de  $f$  tel que, pour tout  $x$  appartenant à la continuation  $H(p_g)$  de  $H(p)$  pour  $g$ , on ait  $W^{ss}(x) \cap H(p_g) = \{x\}$  ;*
- b) *il existe  $g$   $C^1$ -proche de  $f$  ayant une connexion forte généralisée ;*
- c) *il existe deux points périodiques  $p_x, p_y$  homocliniquement reliés à l'orbite de  $p$ , et un ouvert  $\mathcal{U}$  de difféomorphismes  $g$   $C^1$ -proche de  $f$  tels que pour tout  $g \in \mathcal{U}$  il existe deux points distincts  $x \in W^u(p_x)$  et  $y \in W^u(p_y)$  dans  $H(p_g)$  avec  $W^{ss}(x) = W^{ss}(y)$  ;*
- d) *il existe un point périodique  $q$  homocliniquement relié à l'orbite de  $p$  et pour tout difféomorphisme  $g$   $C^1$ -proche de  $f$  deux points  $x_g \neq y_g$  dans  $W^s(q_g) \cap H(p_g)$  tels que  $W^{ss}(x_g) = W^{ss}(y_g)$ .*

*Idée de la démonstration lorsque  $K = H(p)$  est un ensemble hyperbolique.* Nous pouvons supposer qu'il existe  $x \neq y$  dans  $K$  avec  $W^{ss}(x) = W^{ss}(y)$  car sinon nous sommes dans le cas a).

Fixons une famille de plaques centre-instables  $\mathcal{W}^{uu}$  et une petite constante  $\varepsilon > 0$ . Nous comparons alors les variétés instables  $W_{loc}^u(x)$  et  $W_{loc}^u(y)$  en projetant  $W_{loc}^u(y)$  sur la plaque centre-instable de  $x$  par l'holonomie  $\Pi^{ss}$  le long des variétés stables fortes. Trois cas sont possibles.

- **Intersection transverse.** Il existe  $x \neq y$  dans  $K$  avec  $W^{ss}(x) = W^{ss}(y)$  tels que la projection  $\Pi^{ss}(W_{loc}^u(y))$  intersecte les deux composantes connexes de  $B(x, \varepsilon) \cap (\mathcal{W}_x^{cu} \setminus W_{loc}^{uu}(x))$ .
- **Intégrabilité jointe.** Il existe  $x \neq y$  dans  $K$  avec  $W^{ss}(x) = W^{ss}(y)$  et tels que  $\Pi^{ss}(W_{loc}^u(y))$  et  $W_{loc}^u(x)$  coïncident dans  $B(x, \varepsilon)$ .
- **Intersection strictement non transverse.** Pour tout  $x \neq y$  avec  $W^{ss}(x) = W^{ss}(y)$ , la projection  $\Pi^{ss}(W_{loc}^u(y))$  est disjointe de l'une des composantes connexes de  $B(x, \varepsilon) \cap (\mathcal{W}_x^{cu} \setminus W_{loc}^{uu}(x))$  et intersecte l'autre.

Dans le cas transverse, on choisit  $p_x, p_y$  périodiques proches de  $x$  et  $y$  respectivement. Par continuité du feuilletage instable, nous sommes dans le cas c).

Dans le cas de l'intégrabilité jointe, on choisit  $q$  périodique proche de  $x$ . Sa variété stable locale coupe  $W^u(x)$  et  $W^u(y)$  en deux points  $x', y' \in K$ . On a  $W^{ss}(x') = W^{ss}(y')$ . Pour tout difféomorphisme  $C^1$ -proche  $g$ , les continuations hyperboliques  $x'_g, y'_g \in K_g$  de  $x', y'$  pour  $g$  appartiennent toujours à la variété stable locale  $W_{loc}^s(q_g)$ . Si  $y'_g$  appartient à la variété  $W_{loc}^{ss}(x'_g)$  pour tout  $g$   $C^1$  proche de  $f$ , nous sommes dans le cas d). Si  $y'_g$  n'appartient plus à la variété  $W_{loc}^{ss}(x'_g)$ , on considère un arc  $(g_t)$  entre  $f$  et  $g$  dans un petit voisinage de  $f$  dans  $\text{Diff}^1(M)$ . Puisque  $x'$  est accumulé par des points périodiques de  $K$ , nous en déduisons qu'il existe  $g_t$  tel que  $\Pi^{ss}(y'_{g_t})$  appartient à la variété instable d'un tel point périodique. Nous obtenons donc une connexion forte généralisée (cas b).

Il reste à examiner le cas strictement non transverse. Puisqu'il n'y a pas d'intersection transverse, les points  $x \neq y$  avec  $W^{ss}(x) = W^{uu}(y)$  ne sont accumulés par  $K \cap W_{loc}^s(x)$  que d'un seul côté de  $W_{loc}^{ss}(x)$  (voir la figure 10.1). De tels points sont appelés *points de frontière stable forte*.

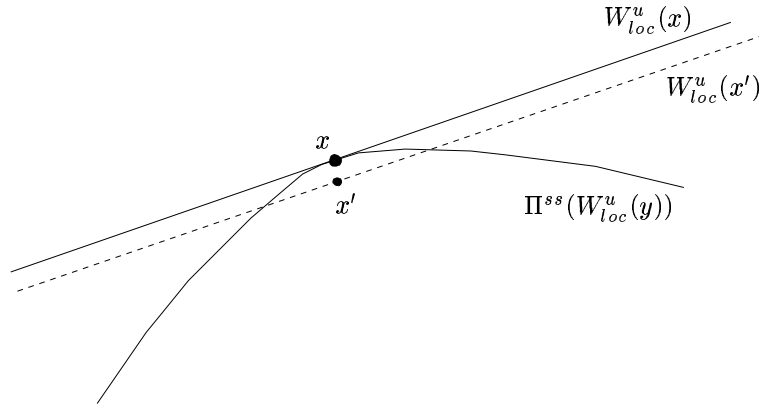


FIG. 10.1 – Intersection strictement non transverse.

**Lemme 10.14.** *Les points de frontière stable forte appartiennent à la variété instable d'un point périodique qui est un point de frontière stable forte. Ces points périodiques frontière sont en nombre fini.*

Considérons les points périodiques frontière stable forte  $p_1, \dots, p_\ell$  de  $f$  et leur variétés instables locales. S'il existe un arc  $(g_t)$  de difféomorphismes proches de  $f$  et un point  $y \in W_{loc}^u(p_i)$  tel que

- $x_{g_0} := \Pi^{ss}(y_{g_0})$  appartient à une autre variété  $W_{loc}^u(p_j)$ ,

- $\Pi^{ss}(y_{g_1})$  appartient à la composante connexe de  $W_{loc}^s(x_{g_1}) \setminus W_{loc}^{ss}(x_{g_1})$  dans laquelle  $K$  accumule  $x_g$ ,

nous concluons comme précédemment que l'un des difféomorphismes  $g_t$  a une connexion forte. Nous sommes dans le cas b).

Dans le cas contraire, s'il existe un difféomorphisme  $g$   $C^1$ -proche de  $f$  tel que toutes les intersections  $\Pi^{ss}(W_{loc}^u(p_i)) \cap W_{loc}^u(p_j)$  sont disjointes, nous sommes dans le cas a).

Finalement, il existe un ouvert  $\mathcal{U}$  de difféomorphismes proche de  $f$  en topologie  $C^1$  et deux points  $p_i, p_j$  tels que pour tout  $g \in \mathcal{U}$  les variétés  $\Pi^{ss}(W_{loc}^u(p_i))$  et  $W_{loc}^u(p_j)$  s'intersectent. Nous sommes alors dans le cas c).  $\square$

## 10.7 Connexions de variétés instables périodiques

Nous discutons à présent le cas c) du théorème 10.12 (dans le cadre hyperbolique) et montrons que l'on peut perturber  $f$  pour obtenir une connexion forte.

**Proposition 10.15.** *Considérons un attracteur hyperbolique  $K$  avec une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^u = (E^{ss} \oplus E^c) \oplus E^u$  telle que  $\dim(E^c) = 1$ . Supposons qu'il existe deux points périodiques  $p_x, p_y \in K$  et, pour tout  $g$   $C^1$ -proche de  $f$ , deux points distincts  $x \in W^u(p_{x,g})$  et  $y \in W^u(p_{y,g})$  de  $K_g$  tels que  $W^{ss}(x) = W^{ss}(y)$ .*

*Il existe alors  $g$   $C^1$ -proche de  $f$  et  $q \in H(p_g)$  périodique tel que  $W^{ss}(q)$  intersecte  $W^u(p_y)$ .*

*Idée de la démonstration.* Soient :

- $\lambda_u > 1$  une constante qui minore la dilatation des itérés positifs de  $f$  le long de  $E^u$ ,
- $\lambda \in (0, 1)$  une constante qui minore la domination entre  $E^{ss}$  et  $E^c$ ,
- $\log(\lambda_c)$  l'exposant de Lyapunov de l'orbite de  $p_x$  le long de  $E^c$ .

Quitte à le remplacer par un difféomorphisme proche, nous pouvons supposer que  $f$  est de classe  $C^2$  et linéaire au voisinage de  $p_x$ . Nous pouvons supposer également que  $W^{ss}(p_x) \setminus \{p_x\}$  est disjoint de  $K$  puisque dans le cas contraire le lemme de connexion permet de créer par perturbation une intersection entre  $W^{ss}(p_x)$  et  $W^u(p_y)$  et de conclure directement la démonstration de la proposition. Nous noterons  $W_{loc}^u(p_y)$  et  $W_{loc}^u(p_x)$  des variétés locales de  $p_x$  et  $p_y$  contenant  $x, y$  respectivement.

**Connexion à retours lents.** Nous dirons que la connexion est à retours lents s'il existe des échelles  $d > 0$  arbitrairement petites telles que le temps d'entrée pour  $x$  et  $y$  dans la boule  $U = B(f^{-1}(x), d)$  est supérieur à  $C_0 \cdot |\log(d)|$  pour une certaine constante  $C_0 > 0$ . Dans ce cas, nous perturbons  $f$  dans la boule  $U$  pour obtenir un difféomorphisme  $g$  tel que  $g(f^{-1}(x))$  appartienne à la plaque centrale de  $x$ . La distance  $r$  entre  $g(f^{-1}(x))$  et  $x$  vérifie  $r/d > \varepsilon$  où  $\varepsilon$  ne dépend que de la taille de la perturbation  $C^1$  autorisée.

Après perturbation les continuations  $x_g$  et  $y_g$  de  $x, y$  appartiennent à  $g(W_{loc}^u(p_x))$  et à  $W_{loc}^u(p_y)$  mais ne coïncident pas nécessairement avec  $g(f^{-1}(x))$  et  $y$ . On a les estimées

$$d(x_g, g(f^{-1}(x))) < \lambda_u^{-n_x}, \quad d(y_g, y) < \lambda_u^{-n_y},$$

où  $n_x, n_y$  sont les temps d'entrée de  $x$  et  $y$  dans  $U$ .

Puisque  $f$  est de classe  $C^2$ , l'holonomie  $\Pi_f^{ss}$  du feuilletage stable fort (défini sur un voisinage de  $K$ ) est hölderienne [144] : il existe  $\alpha$  tels que

$$d(\Pi_f^{ss}(y_g), \Pi_f^{ss}(y)) < d(y_g, y)^\alpha.$$

Nous comparons également les holonomies  $\Pi_f^{ss}, \Pi_g^{ss}$  pour  $f$  et pour  $g$  :

$$d(\Pi_f^{ss}(y_g), \Pi_g^{ss}(y_g)) < \lambda^{n_{y_g}},$$

où  $n_{y_g}$  est le temps d'entrée de  $y_g$  dans  $U$ .

Puisque  $\Pi_f^{ss}(y) = x$ , on a

$$d(x_g, \Pi_g^{ss}(y_g)) > d(g(f^{-1}(x)), x) - d(g(f^{-1}(x)), x_g) - d(\Pi_g^{ss}(y_g), \Pi_f^{ss}(y_g)) - d(\Pi_f^{ss}(y_g), \Pi_f^{ss}(y)).$$

Par conséquent  $x_g \neq \Pi_g^{ss}(y_g)$  lorsque

$$r - \lambda_u^{-n_x} - \lambda_u^{-\alpha \cdot n_y} - \lambda^{n_{y_g}} > 0.$$

Les temps d'entrée  $n_x, n_y, n_{y_g}$  sont essentiellement les mêmes car  $y_g$  est la continuation de  $y$  et  $x, y$  appartiennent à une même variété stable forte. Nous notons  $n = \inf(n_x, n_y, n_{y_g})$ . Puisque  $r > \varepsilon \cdot d$ , la connexion entre  $x$  et  $y$  est brisée par perturbation lorsque  $n > C_0 \cdot |\log(d)|$  pour une certaine constante  $C_0 > 0$ , ce qui est le cas puisque la connexion est à retours lents.

Considérons un arc de difféomorphismes  $(g_t)$  proche de  $f$  et joignant  $f$  à  $g$ . Par continuité, il existe un difféomorphisme  $g_t$  tel que  $W_{loc}^{ss}(y_{g_t})$  intersecte la variété instable d'un point périodique de  $K$  proche de  $x$ . Ceci conclut la démonstration de la proposition dans ce cas.

**Connexion à retours rapides.** Dans ce cas, pour tout  $d > 0$ , le temps de retour de  $x$  et  $y$  dans la boule  $U = B(f^{-1}(x), d)$  est inférieur à  $C_0 \cdot |\log(d)|$ . Ceci implique le lemme clé suivant.

**Lemme 10.16.** *Il existe  $a > b > 0$  et  $n$  arbitrairement grand tel que :*

- $f^n(x)$  est à distance inférieure à  $e^{-a \cdot n}$  de  $x$ ,
- les itérés  $f^k(x)$ ,  $0 < k < n$ , sont à distance supérieure à  $e^{-b \cdot n}$  de  $x$ .

*Démonstration.* Considérons la suite des plus proches retours  $f^{n_i}(x)$  de  $x$  près de lui-même. Nous fixons un voisinage  $W$  de l'union des variétés stables et instables locale de l'orbite de  $p_x$ . Nous supposons que l'orbite passée de  $f^{-1}(x)$  est contenue dans  $W$ , mais  $x \notin W$ . Pour chaque retour  $f^{n_i}(x)$  de  $x$  près de lui-même, nous notons  $\{f^{m_i}(x), \dots, f^{n_i-1}(x)\}$  le segment d'orbite maximal contenu dans  $W$ .

Pour chaque  $i$ , la longueur  $\ell_i = n_i - m_i$  est de l'ordre de  $|\log(d_i)|$ , où  $d_i$  est la distance entre  $f^{n_i}(x)$  et la variété  $W_{loc}^u(x)$ . En effet, puisque  $W^{ss}(p_x) \setminus \{p_x\}$  est disjoint de  $K$ , les retours près de  $x$  et de  $p_x$  se font le long de la direction centrale unidimensionnelle. Puisque  $f$  est linéaire au voisinage de  $p_x$ , la distance  $d_i$  est de l'ordre de  $\lambda_c^{\ell_i}$ .

Par hypothèse nous avons donc

$$n_i \leq C_0 \cdot |\log(d_i)| \leq C_1 \cdot \ell_i.$$

Posons

$$R = \limsup_i \frac{\ell_i}{n_i}.$$

Pour  $\varepsilon > 0$  petit, nous choisissons  $j_0$  tel que pour tout  $j > j_0$  on ait

$$\frac{\ell_j}{n_j} < (1 + \varepsilon) \cdot R.$$

Nous choisissons ensuite  $n_i$  arbitrairement grand pour que

$$\frac{\ell_i}{n_i} > (1 - \varepsilon).R.$$

Pour tout  $j_0 < j < i$  nous avons  $n_j < n_i - \ell_i$  et donc

$$\ell_j < (1 + \varepsilon).R.n_j < (1 + \varepsilon).R.(1 - (1 - \varepsilon).R).n_i.$$

Nous posons  $a_0 = (1 - \varepsilon)^2.R$  et  $b_0 = (1 + \varepsilon)^2.R.(1 - (1 - \varepsilon).R)$ . Puisque  $R$  appartient à  $[C_1^{-1}, 1]$ , nous avons  $a_0 > b_0 > 0$ . On a bien

$$d_i < \lambda_c^{(1-\varepsilon)\ell_i} < \lambda_c^{a_0.n_i}$$

et pour tout  $j < i$ ,

$$d_j > \lambda_c^{(1+\varepsilon)\ell_j} > \lambda_c^{b_0.n_i}.$$

Le lemme est donc démontré avec  $a = a_0|\log \lambda_c|$  et  $b = b_0|\log \lambda_c|$ .  $\square$

Pour conclure la démonstration de la proposition 10.15 dans ce cas, nous considérons un disque  $D$  contenu dans la variété stable forte de  $y$  et contenant  $x$  et  $y$ . Pour tout point  $z \in D$  et tout retour  $f^n(z)$  près de  $x$ , le rayon de  $f^n(D)$  est très petit devant la distance  $d$  de  $f^n(z)$  à  $W_{loc}^u(p_x)$  : si  $\ell$  est le temps de passage près de l'orbite de  $p_x$ , la distance  $d$  est de l'ordre de  $\lambda_c^\ell$  et le rayon de  $f^n(D)$  est inférieur à  $\lambda_s^\ell$ , où  $\lambda_s < \lambda_c$  majore la contraction de  $Df_{p_x}^n$  le long de  $E^s$ .

Choisissons  $n$  comme dans le lemme précédent :  $f^n(D)$  est contenu dans une boule centrée en  $x$  et de rayon très petit devant les distances à  $x$  des images  $f^k(D)$ ,  $0 < k < n$ . Il existe donc une perturbation  $g$  de  $f$  près de  $f^{-1}(x)$  telle que  $g^n(D) \subset D$ . On en déduit que  $g$  possède un point périodique  $q \in D$  dont la variété stable forte contient  $D$ . Puisque  $W_{loc}^u(p_y)$  n'a pas été perturbé,  $W^{ss}(q)$  et  $W^u(p_y)$  s'intersectent.  $\square$

## 10.8 Connexions contenues dans une variété stable périodique

Pour terminer la démonstration du théorème 10.11, nous devons expliquer comment perturber dans le cas d) de la proposition 10.13 afin de créer une connexion forte.

**Proposition 10.17.** *Considérons un ensemble hyperbolique  $K$  localement maximal muni d'une décomposition dominée  $T_K M = E^s \oplus E^u = (E^{ss} \oplus E^c) \oplus E^u$  avec  $\dim(E^c) = 1$ . Supposons qu'il existe  $q \in K$  périodique et deux points  $x \neq y$  de  $K$  et tels que pour tout  $g \in C^1$  proche de  $f$  les continuations  $x_g$  et  $y_g$  vérifient  $x_g \in W^{ss}(y_g)$ .*

*Il existe alors un arc de difféomorphismes  $(g_t)$   $C^1$ -proche de  $f$  et des points  $x', y' \in K$  tels que  $W_{loc}^{ss}(x'_{g_t})$  traverse  $W_{loc}^u(y'_{g_t})$  lorsque  $t$  varie.*

On obtient la connexion forte en remplaçant  $z$  par un point périodique proche.

Nous supposons pour simplifier que  $q$  est un point fixe et (quitte à remplacer  $f$  par un difféomorphisme proche) que la dynamique est linéaire au voisinage de  $q$ . Dans une carte,  $f$  est de la forme :

$$(x^{ss}, x^c, x^u) \mapsto (A^s(x^{ss}), \lambda_c.x^c, A^u(x^u)),$$

où  $A^s, (A^u)^{-1}$  sont des applications linéaires contractantes et  $\lambda_c$  appartient à  $(-1, 0) \cup (0, 1)$ . Nous notons  $d^{ss}$  la dimension du fibré  $E^{ss}$ .

Dans la variété stable locale  $W_{loc}^s(q)$  (qui coïncide avec  $\mathbb{R}^{d^{ss}+1} \times \{0\}$  localement), le feuilletage stable fort  $\mathcal{F}^{ss}$  coïncide avec le feuilletage en sous-espaces affines parallèles à  $\mathbb{R}^{d^{ss}} \times \{0\}$ .

Il existe un point  $z \in W^u(q) \cap W^s(q) \cap K$  d'orbite distincte de celles de  $x$  et  $y$ . Fixons un disque  $D$  de  $W^s(q)$  qui contient  $z$ . Quitte à remplacer  $z$  par un itéré négatif, nous pouvons supposer que tous ses itérés négatifs sont contenus dans le voisinage linéarisant de  $q$ . Par petite perturbation, nous pouvons redresser  $D$  et le feuilletage stable fort dans  $D$  : le disque  $D$  est alors contenu dans un plan parallèle à  $\mathbb{R}^{d^{ss}+1} \times \{0\}$  et  $\mathcal{F}^{ss}$  est le feuilletage en sous-espaces parallèles à  $\mathbb{R}^{d^{ss}} \times \{0\}$ .

Nous comparons à présent les espaces instables aux points de  $K$  proches de  $q$  : nous nous intéressons ainsi aux angles entre deux espaces instables dans la direction centrale, i.e. à l'angle entre leurs projections dans l'espace de coordonnées  $E^c(q) \oplus E^u(q)$ .

En remplaçant  $x, y$  par des itérés positifs,  $E^u(x), E^u(y)$  sont arbitrairement proches de  $E^u(q)$ .

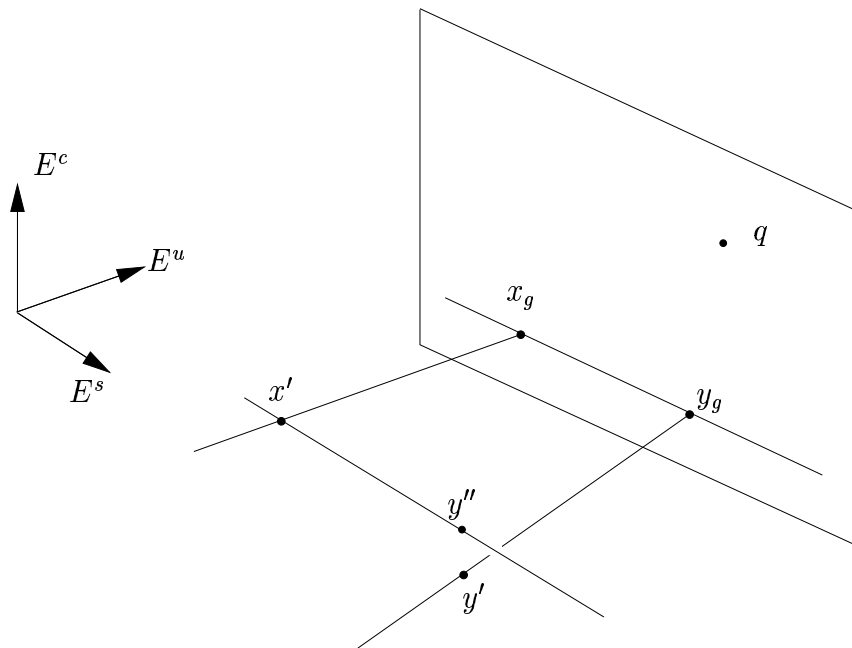


FIG. 10.2 – Perturbation dans une variété stable périodique.

Nous fixons une petite constante  $\alpha > 0$ . Nous perturbons  $f$  au voisinage de  $f^{-1}(x)$  en un difféomorphisme  $g$  de sorte que  $g$  coïncide avec  $f$  au voisinage de  $f^{-1}(x)$  sur  $W^s(q)$  mais  $Dg_{f^{-1}(x)} \cdot E^u(f^{-1}(x))$  est envoyé sur un espace faisant un angle  $\alpha$  avec  $E^u(x)$ .

La norme  $C^0$  de la perturbation peut être rendue arbitrairement  $C^0$ -petite si le support de la perturbation est contenu dans un voisinage arbitrairement petit de  $f^{-1}(x)$ . En revanche l'angle  $\alpha$  est donné par la taille de la perturbation  $C^1$ . On en déduit que les continuations  $x_g, y_g$  restent arbitrairement proches de  $x, y$ . Par conséquent,  $E^u(x_g)$  fait un angle proche de  $\alpha$  avec  $E^u(x)$  et  $E^u(q)$  ; l'espace  $E^u(y_g)$  un angle arbitrairement petit avec  $E^u(y)$  et  $E^u(q)$ .

Les itérés  $g^{-n}(D)$  pour  $n \geq 0$  grand s'accumulent sur  $W_{loc}^s(q)$  et recourent  $W_{loc}^u(x_g), W_{loc}^u(y_g)$  en deux points  $x', y'$ . Pour  $n$  grand les vecteurs  $(x_g, x')$  et  $(y_g, y')$  sont proches de  $E^u(x_g)$  et  $E^u(y_g)$ . Soit  $y''$  la projection de  $x'$  sur la plaque centre-instable de  $y'_g$ , par l'holonomie le long des variétés stables fortes. Voir la figure 10.2.

Les orbites positives de  $x'$  par  $g$  et  $f$  coïncident. Par conséquent la variété stable forte locale de  $x'$  est la même pour  $f$  et pour  $g$  : c'est un sous-espace affine parallèle à  $W_{loc}^{ss}(x')$ . On en déduit que les vecteurs  $(x_g, x')$  et  $(y_g, y'')$  ont la même direction. Par conséquent pour  $g$ ,  $(y_g, y'_g)$  fait un angle proche de  $\alpha$  avec  $E^u(y_g)$  et  $E^u(q)$ .

Considérons à présent un arc de difféomorphismes en faisant varier l'angle  $\alpha$  : par continuité nous pouvons assurer que la direction du vecteur  $(y_g, y'_g)$  traverse  $E_g^u$ , en projection dans l'espace de coordonnées  $E^c(q) \oplus E^{ss}(q)$ . On en déduit que  $W_{loc}^{ss}(x'_g)$  traverse  $W_{loc}^u(y_g)$ .  $\square$

## 10.9 Continuation des classes hyperboliques par chaînes

Pour généraliser les raisonnements des sections précédentes dans le cas des classes hyperboliques par chaînes (i.e. dans le cadre du théorème 10.12), nous avons besoin de définir la notion de continuation de la classe (qui ne pose pas de problème dans le cadre hyperbolique).

On considère une classe de récurrence par chaînes qui est une classe homocline  $H(p)$  avec une structure partiellement hyperbolique  $T_{H(p)}M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ ,  $\dim(E^c) = 1$ , telle que  $E^c$  est finement piégée. Pour tout  $g$   $C^1$ -proche de  $f$ , la classe homocline  $H(p_g)$  est contenue dans un petit voisinage de  $H(p)$ , possède la même structure partiellement hyperbolique, et reste hyperbolique par chaînes (théorème 5.20).

Remarquons que  $H(p)$  possède un ensemble dense  $\mathcal{P}$  de points périodiques  $q$  pour lesquels l'exposant de Lyapunov central est uniformément majoré par une constante strictement négative, et il existe également une famille de plaques  $\mathcal{W}^{cs}$  tangente à  $E^s \oplus E^c$ , piégée, telle que  $\mathcal{W}_q^{cs} \subset W^s(q)$  pour chaque point  $q \in \mathcal{P}$ .

**Lemme 10.18.** *Il existe un voisinage  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  de  $f$  formé de difféomorphismes  $g$  pour lesquels la continuation hyperbolique  $q_g$  de chaque point  $q \in \mathcal{P}$  est bien définie et tels que l'ensemble  $\{q_g, q \in \mathcal{P}\}$  est dense dans  $H(p_g)$ .*

**Définition 10.19.** Pour  $g, g' \in \mathcal{U}$ , deux points  $x \in H(p_g), x' \in H(p_{g'})$  ont la même continuation s'il existe une suite  $(q_n)$  de  $\mathcal{P}$  telle que  $(q_{n,g})$  converge vers  $x$  et  $(q_{n,g'})$  converge vers  $x'$ .

Le lemme 10.18 implique que pour tout  $g, g' \in \mathcal{U}$  et tout  $x \in H(p_g)$ , il existe  $x' \in H(p_{g'})$  ayant la même continuation que  $x$ . Cette notion ne dépend pas du choix de l'ensemble de points périodiques  $\mathcal{P}$ . En général la continuation d'un point n'est pas unique mais si  $x'_1, x'_2$  ont la même continuation que  $x$ , alors  $x'_1$  et  $x'_2$  appartiennent à la même plaque centre-stable.

Pour les difféomorphismes loin des connexions fortes, chaque point possède au plus deux continuations. En effet, si  $x'_1, x'_2, x'_3$  sont des continuations de  $x$ , on introduit trois suites  $(q_{1,n}), (q_{2,n}), (q_{3,n})$  dans  $\mathcal{P}$  telles que leurs continuations pour  $g$  convergent toutes vers  $x$  et leurs continuations pour  $g'$  convergent vers  $x'_1, x'_2, x'_3$  respectivement. Si  $(g_t)$  est un arc de difféomorphismes dans  $\mathcal{U}$  joignant  $g$  à  $g'$ , il existe  $g_t$  ayant une connexion forte pour l'un des points périodiques considérés. Nous allons donner un énoncé plus précis.

Pour chaque  $g \in \mathcal{U}$ , nous introduisons  $\widetilde{H(p_g)}$ , l'ensemble des paires  $(x, \sigma)$  où  $x$  est un point de  $H(p_g)$  et  $\sigma$  est une orientation de  $E^c(x)$  telle que  $x$  est accumulé par  $H(p_g)$  dans la composante



de  $\mathcal{W}^{cs}(x) \setminus \mathcal{W}_{loc}^{ss}(x)$  déterminée par  $\sigma$ . C'est une partie du fibré unitaire associé à  $E_{H(p_g)}^c$ . La dynamique de  $g$  s'étend donc en une dynamique  $\tilde{g}$  sur  $\widetilde{H(p_g)}$ . On introduit aussi la projection  $\pi_g: \widetilde{H(p_g)} \rightarrow H(p_g)$  telle que  $\pi_g(x, g) = x$ .

**Proposition 10.20.** *Considérons une classe de récurrence par chaînes de  $f$  qui est une classe homocline non triviale  $H(p)$  munie d'une structure partiellement hyperbolique  $T_{H(p)}M = E^s \oplus E^c \oplus E^u$  avec  $\dim(E^c) = 1$  et telle que  $E^{cs} = E^s \oplus E^c$  est finement piégé. Supposons aussi que pour tout difféomorphisme  $g$   $C^1$ -proche de  $f$ , la classe  $H(p_g)$  n'a pas de connexion forte.*

*Il existe alors un voisinage  $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^1(M)$  de  $f$  tel que pour tout  $g, g' \in \mathcal{U}$  on ait les propriétés suivantes.*

- (Relèvement.) *L'application  $\pi_g: \widetilde{H(p_g)} \rightarrow H(p_g)$  est surjective et semi-conjugue  $\tilde{g}$  et  $g$ .*
- (Continuation du relèvement.) *Pour tout  $\tilde{x}_g = (x_g, \sigma) \in \widetilde{H(p_g)}$ , il existe un unique  $\tilde{x}_{g'} = (x_{g'}, \sigma') \in \widetilde{H(p_{g'})}$  tel que  $\pi_g(\tilde{x}_g) = x_g$  et  $\pi_{g'}(\tilde{x}_{g'}) = x_{g'}$  ont la même continuation et les orientations  $\sigma$  sur  $E^c(x_g)$  et  $\sigma'$  sur  $E^c(x_{g'})$  coïncident. Ceci définit une bijection*

$$\Phi_{g, g'}: \widetilde{H(p_g)} \rightarrow \widetilde{H(p_{g'})}.$$

- (Continuation de la projection.) *Pour tout  $x_g \in H(p_g)$  et  $x_{g'} \in H(p_{g'})$  ayant la même continuation il existe  $\tilde{x} \in \widetilde{H(p)}$  tel que  $\pi_g(\Phi_{f, g}(\tilde{x})) = x_g$  et  $\pi_{g'}(\Phi_{f, g'}(\tilde{x})) = x_{g'}$ .*



# Chapitre 11

## Centralisateurs de difféomorphismes

Nous utilisons les résultats des chapitres précédents pour décrire le centralisateur des difféomorphismes de classe  $C^1$  dans le groupe  $\text{Diff}^1(M)$ . Dans [26, 27] nous montrons que le centralisateur d'un difféomorphisme  $C^1$ -générique  $f$  est trivial, i.e. coïncide avec le groupe engendré par  $f$ . Ceci répond à une conjecture de Smale [174, 175]. Pour obtenir ce résultat, nous devons avoir une bonne description de la dynamique globale : on peut donc voir ce chapitre comme un test de notre compréhension des dynamiques  $C^1$ -génériques. La démonstration nécessite de savoir perturber un difféomorphisme en préservant sa dynamique topologique mais en modifiant la dynamique de son application tangente. Par ailleurs, dans [25] nous construisons un ouvert non vide  $\mathcal{O}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  et une partie dense de  $\mathcal{O}$  constituée de difféomorphismes dont le centralisateur est non dénombrable, donc non trivial.

### 11.1 Difféomorphismes commutant

Si  $f, g$  sont des difféomorphismes qui commutent,  $g$  préserve l'ensemble des orbites de  $f$  ainsi que les invariants dynamiques différentiables et topologiques de  $f$ . Un argument facile de transversalité (voir [62, proposition 4.5]) montre que pour tout  $p$ -uplet générique  $(f_1, \dots, f_p) \in (\text{Diff}^r(M))^p$  avec  $p \geq 2$  et  $r \geq 0$ , le groupe  $\langle f_1, \dots, f_p \rangle$  est libre. Ceci motive la question suivante posée par Smale [174, 175].

Considérons une variété connexe compacte sans bord  $M$  et pour tout difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^r(M)$ , définissons son *centralisateur*

$$Z^r(F) = \{g \in \text{Diff}^1(M), fg = gf\}.$$

Il contient le groupe cyclique  $\langle f \rangle$ . Nous disons que  $f$  a un *centralisateur trivial* si  $Z^r(f) = \langle f \rangle$ .

**Question 1** (Smale). Pour  $r \geq 1$ , considérons l'ensemble des difféomorphismes  $C^r$  ayant un centralisateur trivial.

1. Cet ensemble est-il dense dans  $\text{Diff}^r(M)$  ?
2. Cet ensemble contient-il un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^r(M)$  ?
3. Cet ensemble contient-il un ouvert dense de  $\text{Diff}^r(M)$  ?

Ce problème remonte au travail de Kopell [82] qui a donné une réponse complète pour  $r \geq 2$  et  $M = S^1$  : dans ce cas, l'ensemble des difféomorphismes à centralisateur trivial contient un ouvert dense.

En dimension plus grande, la description du centralisateur demande une compréhension fine de la dynamique globale : puisqu'un élément du centralisateur d'un difféomorphisme peut coïncider avec l'identité sur certaines parties de  $M$ , nous devons tenir compte des orbites pour  $f$  d'une partie dense de  $M$ . Seules certaines classes de difféomorphismes ont été traitées.

- En régularité  $C^\infty$ , l'ensemble des difféomorphismes à centralisateur trivial contient un ouvert dense de l'ensemble des difféomorphismes possédant un puits ou une source et satisfaisant l'axiome  $A$  et la condition de transversalité forte [125]. Sur le tore  $\mathbb{T}^n$ , il contient un ouvert dense de l'ensemble des difféomorphismes d'Anosov [126] (voir aussi [55]). Il contient aussi un  $G_\delta$  dense d'un ouvert de difféomorphismes partiellement hyperboliques avec fibré central de dimension 1 [44].
- En régularité  $C^1$ , Togawa [178, 179] a montré que l'ensemble des difféomorphismes de classe  $C^1$  à centralisateur trivial contient un  $G_\delta$  dense de l'ensemble des difféomorphismes satisfaisant l'axiome  $A$ ; en particulier, les difféomorphismes  $C^1$ -génériques du cercle ont un centralisateur trivial [178, 179].

Nous avons obtenu une réponse complète à la question de Smale en classe  $C^1$ .

**Théorème 11.1** (Bonatti-Crovisier-Wilkinson [27]). *Il existe dans  $\text{Diff}^1(M)$  un  $G_\delta$  dense formé de difféomorphismes  $f$  ayant un centralisateur  $Z^1(f)$  trivial.*

**Théorème 11.2** (Bonatti-Crovisier-Vago-Wilkinson [25]). *Il existe un ouvert non vide  $\mathcal{U}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  et une partie dense  $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$  formée de difféomorphismes  $f$  ayant un centralisateur  $Z^1(f)$  non dénombrable. En particulier l'ensemble des difféomorphismes à centralisateur trivial ne contient pas un ouvert dense de  $\text{Diff}^1(M)$ .*

Dans le cas conservatif (lorsque qu'une forme volume ou une forme symplectique est préservée), l'analogie du théorème 11.1 reste vrai [26]. L'analogie du théorème 11.2 reste vrai dans le cadre symplectique mais nous n'avons pas de construction pour l'espace des difféomorphismes préservant une forme volume.

## 11.2 Stratégie pour montrer que le centralisateur est trivial

### a) Centralisateur localement trivial

Bien souvent, la première étape pour montrer que le centralisateur d'un difféomorphisme est trivial consiste à montrer qu'il est "localement trivial".

**Définition 11.3.** Le centralisateur  $Z^1(f)$  d'un difféomorphisme  $f$  est *localement trivial* si pour tout  $g \in Z^1(f)$ , il existe un ouvert dense  $U \subset M$  et une application localement constante  $\alpha: U \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que  $g(x) = f^{\alpha(x)}(x)$  pour tout  $x \in U$ .

Dans [82], le contrôle de la distorsion de la dérivée des applications  $C^2$  est un des ingrédients principaux pour montrer que le centralisateur est trivial. Dans le cadre des difféomorphismes  $C^1$  génériques, nous devons changer d'argument puisque la distorsion n'est pas bornée : curieusement, c'est cette fois le fait que la distorsion explose qui nous permet d'amorcer la démonstration.

**Propriété (MD $^{M \setminus \Omega}$ ).** Un difféomorphisme  $f$  satisfait la *propriété de mauvaise distorsion sur l'ensemble errant*, s'il existe une partie dense  $\mathcal{D} \subset M \setminus \Omega(f)$  telle que pour tout  $K > 0$  et tous  $x \in \mathcal{D}$ ,  $y \in M \setminus \Omega(f)$  appartenant à des orbites différentes, il existe  $n \geq 1$  tel que

$$|\log |\det Df^n(x)| - \log |\det Df^n(y)|| > K.$$

**Propriété (MD<sup>s</sup>).** Un difféomorphisme  $f$  satisfait la *propriété de mauvaise distorsion sur les variétés stables* (MD<sup>s</sup>) si, pour toute orbite périodique hyperbolique  $O$ , il existe une partie dense  $\mathcal{D} \subset W^s(O)$  (pour la topologie intrinsèque de  $W^s(O)$ ) telle que pour tout  $K > 0$  et tous  $x \in \mathcal{D}$ ,  $y \in W^s(O)$  appartenant à des orbites différentes, il existe  $n \geq 1$  tel que

$$|\log |\det Df_{|W^s(O)}^n(x)| - \log |\det Df_{|W^s(O)}^n(y)|| > K.$$

D'après les théorèmes 2.1 et 2.2 ainsi que les résultats de la section 3.3, les propriétés suivantes sont  $C^1$ -génériques :

1. toutes les orbites périodiques sont hyperboliques ;
2. des orbites périodiques distinctes ont des valeurs propres distinctes ;
3. pour toute composante connexe  $U$  appartenant à l'intérieur de l'ensemble non-errant  $\Omega$ , il existe une orbite périodique  $O \subset \text{Int}(\Omega)$  telle que  $U$  est contenue dans l'adhérence de  $W^s(O)$ .

**Conséquence.** *Tout difféomorphisme  $f$  ayant les propriétés  $C^1$ -génériques 1, 2, 3 ci-dessus et qui satisfait les propriétés (MD<sup>M\Omega</sup>) et (MD<sup>s</sup>) a un centralisateur localement trivial.*

*Démonstration.* Les propriétés (MD) permettent d'individualiser les orbites : si  $f$  satisfait la propriété (MD<sup>M\Omega</sup>), alors tout difféomorphisme  $g \in Z^1(f)$  doit préserver chaque orbite de  $\mathcal{D}$ . Ceci permet de construire la fonction  $\alpha$  de la définition 11.3 sur  $\mathcal{D}$ . Sur l'ensemble errant, la fonction  $\alpha$  doit être localement constante. Par conséquent,  $\alpha$  s'étend continûment sur tout  $M \setminus \Omega(f)$  (en particulier, elle est constante sur chaque composante de l'ensemble errant).

Si  $f$  satisfait la propriété (MD<sup>s</sup>), le même argument s'applique à la variété stable de toute orbite périodique hyperbolique préservée par  $g \in Z^1(f)$  ; en particulier  $Dg$  et  $Df^\alpha$  coïncident aux points de l'orbite  $O$  et  $\alpha$  est constante sur toute la variété stable. Puisque les orbites périodiques de  $f$  ont des valeurs propres distinctes,  $g$  fixe individuellement chacune d'entre elles et l'on peut donc appliquer la propriété (MD<sup>s</sup>). Pour toute composante connexe  $U$  de  $\text{Int}(\Omega(f))$ , il existe une orbite périodique  $O \subset \text{Int}(\Omega(f))$  telle que  $U$  est contenue dans l'adhérence de  $W^s(O)$ . On en déduit que  $\alpha$  s'étend continûment en une fonction localement constante sur  $\text{Int}(\Omega(f))$ .  $\square$

La première étape vers le théorème 11.1 consiste donc à montrer le résultat suivant.

**Théorème 11.4.** *Il existe un  $G_\delta$  dense de  $\text{Diff}^1(M)$  formé de difféomorphismes qui satisfont les propriétés (MD<sup>M\Omega</sup>) et (MD<sup>s</sup>).*

La propriété (MD<sup>s</sup>) peut s'obtenir comme variante des arguments de [178, 179]. La propriété (MD<sup>M\Omega</sup>) est beaucoup plus délicate à obtenir. En effet, les points d'une même variété stable d'orbite périodique ont la même dynamique future, proche d'une application linéaire. Au contraire dans l'ensemble errant les orbites distinctes peuvent avoir des comportements très différents. La démonstration de ce résultat utilise la notion de perturbation fantôme (section 11.3 plus bas) mais nous ne l'expliquons pas ici.

## b) Du local au global

Nous introduisons une nouvelle propriété.

**Propriété (GD).** Un difféomorphisme  $f$  satisfait la *propriété de grande dilatation* sur un ensemble  $X \subset M$  si, pour tout  $K > 0$ , il existe  $n(K) \geq 1$  et pour tous  $x \in X$  et  $n \geq n(K)$ , il existe  $j \in \mathbb{Z}$  tels que

$$\sup\{\|Df^n(f^j(x))\|, \|Df^{-n}(f^{j+n}(x))\|\} > K.$$

**Conséquence.** Soit  $f$  un difféomorphisme d'une variété connexe  $M$  de dimension  $d \geq 2$  et  $\text{Per}(f)$  l'ensemble de ses points périodiques. Supposons que  $f$  ait un centralisateur localement trivial, ait toutes ses orbites périodiques hyperboliques et satisfait la propriété (GD) sur  $M \setminus \text{Per}(f)$ . Alors  $f$  a un centralisateur trivial.

*Démonstration.* Considérons  $g$  dans le centralisateur de  $f$  et  $K > \max_{x \in M}(\|D_x g\|, \|D_x g^{-1}\|)$ . Puisque le centralisateur de  $f$  est localement trivial, on a  $g = f^\alpha$  où  $\alpha: M \rightarrow \mathbb{Z}$  est une fonction localement constante sur un ouvert dense de  $M$ . La propriété (GD) permet de borner  $\alpha$  par  $n(K)$ . Puisque les orbites périodiques de  $f$  sont hyperboliques, l'ensemble des points périodiques  $\mathcal{P}_0$  de période inférieure à  $2n(K)$  est fini. Considérons à présent une collection d'ouverts  $\{U_i\}_{|i| \leq n(K)}$  d'union dense dans  $M$  et telle que  $g = f^i$  sur  $U_i$ . Sur  $M \setminus \mathcal{P}_0$ , les ensembles  $\overline{U}_i$  sont deux à deux disjoints. Puisque  $M \setminus \mathcal{P}_0$  est connexe, seul un des ensembles  $U_i$  est non vide. Ceci montre que  $g = f^i$  pour un certain entier  $i$ . Le centralisateur de  $f$  est donc trivial.  $\square$

Pour obtenir le théorème 11.1, nous montrons l'énoncé suivant.

**Théorème 11.5.** Soit  $f$  un difféomorphisme dont les points périodiques sont hyperboliques. Il existe  $g \in \text{Diff}^1(M)$  arbitrairement proche de  $f$  tel que la propriété (GD) soit satisfaite sur  $M \setminus \text{Per}(f)$ .

De plus,

- $f$  et  $g$  sont conjugué par un homéomorphisme  $\Phi$  de  $M$ , ;
- pour tout orbite périodique  $O$  de  $f$ , les dérivées de  $f$  le long de  $O$  et de  $g$  le long de  $\Phi(O)$  sont conjuguées ;
- si  $f$  satisfait les propriétés  $(MD^{M \setminus \Omega})$  et  $(MD^s)$ , alors  $g$  les satisfait également.

### c) Densité et généralité

Nous pouvons déduire des sections précédentes qu'il existe un ensemble dense de difféomorphismes de  $\text{Diff}^1(M)$  ayant un centralisateur trivial. En effet, on peut perturber tout difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^1(M)$  pour que les propriétés génériques 1, 2 et 3 de la section a) ainsi que  $(MD^{M \setminus \Omega})$  et  $(MD^s)$  soient satisfaites. On perturbe ensuite  $f$  en un difféomorphisme  $g$  donné par le théorème 11.5 qui satisfait la propriété (GD). Les propriétés 1, 2,  $(MD^{M \setminus \Omega})$  et  $(MD^s)$  sont préservées. Puisque  $f$  et  $g$  sont conjuguées, la propriété 3 l'est également. Ceci implique que le centralisateur de  $g$  est trivial.

Nous ne pouvons pas obtenir la généralité des difféomorphismes à centralisateur trivial de cette façon puisque la propriété  $GD$  n'est pas vérifiée sur un  $G_\delta$  dense. Pour conclure nous faisons un argument de généralité : pour des raisons de compacité, nous travaillons avec l'espace des homéomorphismes bilipschitziens  $\text{Lip}(M)$ . Les raisonnements des sections précédentes permettent de montrer que l'ensemble des difféomorphismes  $f$  ayant un centralisateur trivial dans  $\text{Lip}(M)$  forme une partie dense de  $\text{Diff}^1(M)$ . En utilisant la proposition 2.9, nous en déduisons qu'il contient un  $G_\delta$  dense, ce qui conclut la démonstration du théorème 11.1.

### 11.3 Perturbations fantômes

Nous présentons à présent quelques ingrédients importants pour la démonstration du théorème 11.5. Certains de ces arguments sont aussi utilisés pour obtenir le théorème 11.4.

Le théorème 11.5 permet de perturber un difféomorphisme  $f$  pour changer la dynamique de son application tangente sans changer la classe de conjugaison topologique de  $f$ . Pour cela, nous considérons des domaines ouverts  $U \subset M$  et un entier  $n \geq 1$  tels que les itérés  $\bar{U}, f(\bar{U}), \dots, f^n(\bar{U})$  soient deux-à-deux disjoints. La perturbation  $g_1$  de  $f$  est conjuguée à  $f$  par un difféomorphisme  $\phi_1$  qui coïncide avec l'identité hors de l'union des  $f^i(\bar{U})$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Pour la construire, nous modifions  $f$  sur les ouverts  $U, f(U), \dots, f^{j-1}(U)$  pour un certain entier  $1 \leq j < n$  et nous utilisons les domaines restants  $f^j(U), \dots, f^{n-1}(U)$  pour compenser la perturbation de sorte que  $f^n$  et  $g_1^n$  coïncident sur  $U$ . Une telle modification est appelée *perturbation fantôme* de  $f$ .

Pour modifier les propriétés de l'application tangente  $Df$ , il est commode de pouvoir supposer que les composantes connexes de chaque ouvert  $f^i(U)$ ,  $0 \leq i \leq n$  sont petites de sorte que  $f$  y soit proche d'une application linéaire. Par ailleurs, afin de modifier la dynamique le long de l'orbite de tout point non périodique, nous souhaitons que  $U$  contienne un itéré de chaque point  $x \in M \setminus \text{Per}(f)$ . C'est exactement ce que permet le théorème 3.4 d'existence de tours topologiques.

Après avoir effectué une telle perturbation fantôme, les dynamiques des applications tangentes  $Df$  et  $Dg_1$  restent conjuguées par  $D\phi_1$ . Pour modifier effectivement la dynamique, nous introduisons une suite de perturbations fantômes  $(g_i)$  convergeant dans  $\text{Diff}^1(M)$  vers un difféomorphisme  $g$ . On l'obtient en conjuguant successivement par une suite de difféomorphismes  $(\varphi_i)$ . En choisissant la taille des composantes connexes du support de chaque application  $\varphi_i$  suffisamment petite, nous garantissons que la suite  $(\varphi_i)$  converge vers un homéomorphisme  $\varphi$  de  $M$  qui conjugue  $f$  et  $g$ .

Cette technique de construction de perturbation comme limite de difféomorphismes conjugués a déjà été utilisée en dynamiques par Anosov et Katok [12] pour des dynamiques lisses ou par Rees (voir [20]) en régularité  $C^0$ .

### 11.4 Problèmes

Nous n'avons pas obtenu d'analogue au théorème 11.2 dans le cadre conservatif.

**Question 11.6.** Considérons une forme volume  $v$  sur  $M$ .

*Existe-t-il un ouvert non vide  $\mathcal{U}$  de l'espace  $\text{Diff}_v^1(M)$  des difféomorphismes préservant  $v$  et une partie dense  $\mathcal{D}$  dont les éléments ont un centralisateur dans  $\text{Diff}_v^1(M)$  non trivial ?*

Les théorèmes 11.1 et 11.2 suggèrent que la topologie de l'ensemble des difféomorphismes à centralisateur trivial doit être compliquée et motive les questions suivantes.

**Question 11.7.** 1. Considérons l'ensemble des difféomorphismes ayant un centralisateur trivial. *Quel est son intérieur ?*

[125] implique que pour  $r \geq 2$ , l'intérieur est non vide. Pour  $M = S^1$  et  $r = 1$ , [25] implique que l'intérieur est vide.

2. *Est-ce un ensemble borélien ?*

(Voir [56] pour une réponse négative dans le cadre mesurable.)

3. L'ensemble  $\{(f, g) \in (\text{Diff}^1(M))^2, fg = gf\}$  est fermé. *Quelle est sa topologie locale ? Est-il localement connexe ?*

Pour démontrer le théorème 11.1, nous exhibons des propriétés dynamiques qui impliquent que le centralisateur est trivial. Ceci illustre l'existence de liens entre la dynamique d'un difféomorphisme et ses propriétés algébriques dans le groupe  $\text{Diff}^1(M)$ . En voici un autre exemple : la relation de Baumslag-Solitar  $gfg^{-1} = f^n$ , où  $n > 1$  est un entier, implique que les points périodiques de  $f$  ne sont pas hyperboliques.

- Question 11.8.** 1. *Considérons un groupe finiment engendré  $G = \langle a_1, \dots, a_k | r_1, \dots, r_m \rangle$  où  $\{a_i\}$  est une partie génératrice et les  $r_i$  sont des relations. Quelle est la taille de l'ensemble des difféomorphismes  $f \in \text{Diff}^r(M)$  tels qu'il existe un morphisme injectif  $\rho: G \rightarrow \text{Diff}^r(M)$  satisfaisant  $\rho(a_1) = f$  ? Le théorème 11.1 implique que cet ensemble est maigre lorsque  $G$  est abélien (ou même nilpotent) et différent de  $\mathbb{Z}$ .*
2. *Existe-t-il un difféomorphisme  $f \in \text{Diff}^r(M)$  tel que pour tout  $g \in \text{Diff}^r(M)$  le groupe engendré par  $f$  et  $g$  est  $\langle f \rangle$  lorsque  $g \in \langle f \rangle$  ou le produit libre  $\langle f \rangle * \langle g \rangle$  ?*



# Bibliographie

- [1] F. Abdenur, Generic robustness of spectral decompositions. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **36** (2003), 213–224.
- [2] F. Abdenur, Attractors of generic diffeomorphisms are persistent. *Nonlinearity* **16** (2003), 301–311.
- [3] F. Abdenur, C. Bonatti, S. Crovisier, Global dominated splittings and the  $C^1$  Newhouse phenomenon. *Proceedings of the AMS* **134** (2006), 2229–2237.
- [4] F. Abdenur, C. Bonatti, S. Crovisier, *Nonuniform hyperbolicity for  $C^1$ -generic diffeomorphisms*. ArXiv :0809.3309 (2008). À paraître à *Israel J. Math.*
- [5] F. Abdenur, C. Bonatti, S. Crovisier, L. Díaz, Generic diffeomorphisms on compact surfaces. *Fundamenta Mathematicae* **187** (2005), 127–159.
- [6] F. Abdenur, C. Bonatti, S. Crovisier, L. Díaz, L. Wen, Periodic points and homoclinic classes. *Ergodic Theory & Dynam. Systems* **27** (2007), 1–22.
- [8] F. Abdenur, C. Bonatti, L. Díaz, Non-wandering sets with non-empty interiors. *Nonlinearity* **17** (2004), 175–191.
- [9] R. Abraham, J. Robbin, *Transversal mappings and flows*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam (1967).
- [10] R. Abraham, S. Smale, Nongenericity of  $\Omega$ -stability. *Global analysis I*, Proc. Symp. Pure Math. AMS **14** (1970), 5–8.
- [11] E. Akin, M. Hurley, J. Kennedy, Dynamics of topologically generic homeomorphisms. *Mem. Amer. Math. Soc.* **164** (2003).
- [12] D. Anosov, A. Katok, New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms. *Transactions of the Moscow Mathematical Society* **23** (1970), 1–35.
- [13] N. Aoki, The set of Axiom A diffeomorphisms with no cycles. *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **23** (1992), 21–65.
- [14] M.-C. Arnaud, Le “closing lemma” en topologie  $C^1$ . *Mém. Soc. Math. Fr.* **74** (1998).
- [15] M.-C. Arnaud, Création de connexions en topologie  $C^1$ . *Ergodic Theory & Dynam. Systems* **31** (2001), 339–381.
- [16] M.-C. Arnaud, Approximation des ensembles  $\omega$ -limites des difféomorphismes par des orbites périodiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **36** (2003), 173–190.
- [17] M.-C. Arnaud, C. Bonatti, S. Crovisier, Dynamiques symplectiques génériques. *Ergodic Theory & Dynamical Systems* **25** (2005), 1401–1436.

- [18] M. Asaoka, Hyperbolic sets exhibiting  $C^1$ -persistent homoclinic tangency for higher dimensions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), 677–686.
- [19] J. Auslander, Generalized recurrence in dynamical systems. *Contributions to Differential Equations* **3** (1964), 65–74.
- [20] F. Béguin, S. Crovisier, F. Le Roux, Construction of curious minimal uniquely ergodic homeomorphisms on manifolds : the Denjoy-Rees technique. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **40** (2007), 251–308.
- [21] G. D. Birkhoff, Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques. *Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei* **1** (1935), 85–216 and *Collected Math. Papers*, vol. II, 530–659.
- [22] C. Bonatti, *On robust tangencies*. International workshop on Global Dynamics beyond Uniform Hyperbolicity, Beijing 2009, <http://www.math.pku.edu.cn/teachers/gansb/conference09/BeijingAout2009.pdf>.
- [23] C. Bonatti, S. Crovisier, Récurrence et généricité. *Invent. Math.* **158** (2004), 33–104.
- [24] C. Bonatti, S. Crovisier, *Central manifolds for partially hyperbolic set without strong unstable connections*. En préparation.
- [25] C. Bonatti, S. Crovisier, G. Vago, A. Wilkinson, *Local density of diffeomorphisms with large centralizers*. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **41** (2008), 925–954.
- [26] C. Bonatti, S. Crovisier, A. Wilkinson,  *$C^1$ -generic conservative diffeomorphisms have trivial centralizer*. *J. Mod. Dyn.* **2** (2008), 359–373.
- [27] C. Bonatti, S. Crovisier, A. Wilkinson, *The  $C^1$  generic diffeomorphism has trivial centralizer*. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **109** (2009), 185–244.
- [28] C. Bonatti, L. Díaz, Persistence of transitive diffeomorphisms. *Ann. Math.* **143** (1995), 367–396.
- [29] C. Bonatti, L. Díaz, Connexions hétéroclines et généricité d’une infinité de puits ou de sources. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **32** (1999), 135–150.
- [30] C. Bonatti, L. Díaz, On maximal transitive sets of generic diffeomorphisms. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **96** (2003), 171–197.
- [31] C. Bonatti, L. Díaz, Robust heterodimensional cycles and  $C^1$ -generic dynamics. *J. Inst. Math. Jussieu* **7** (2008), 469–525.
- [32] C. Bonatti, L. Díaz, *Abundance of  $C^1$ -robust tangencies*. Prépublication. ArXiv :0909.4062.
- [33] C. Bonatti, L. Díaz, E. Pujals, A  $C^1$ -generic dichotomy for diffeomorphisms : weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources. *Ann. of Math.* **158** (2003), 355–418.
- [34] C. Bonatti, L. Díaz, E. Pujals, J. Rocha, Robustly transitive sets and heterodimensional cycles. in Geometric methods in dynamics. I. *Astérisque* **286** (2003), 187–222.
- [35] C. Bonatti, L. Díaz, M. Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*. Springer, Berlin, 2004.
- [36] C. Bonatti, S. Gan, L. Wen, On the existence of non-trivial homoclinic classes. *Ergodic Theory & Dynam. Systems* **27** (2007), 1473–1508.
- [37] C. Bonatti, S. Gan, D. Yang, *On the Hyperbolicity of Homoclinic Classes*. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **25** (2009), 1143–1162.  
Prépublication IMB Dijon, 2008.

- [38] C. Bonatti, N. Gourmelon, T. Vivier, Perturbations of the derivative along periodic orbits. *Ergodic Theory & Dynam. Systems* **26** (2006), 1307–1337.
- [39] C. Bonatti, M. Li, D. Yang, *On the existence of attractors*. Prépublication. ArXiv :0904.4393.
- [40] C. Bonatti, S. Gan, M. Li, D. Yang, *Lyapunov stable classes and essential attractors*. En préparation.
- [41] C. Bonatti, M. Viana, SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. *Israel J. Math.* **115** (2000) 157–193.
- [42] R. Bowen, Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **154** (1971), 377–397.
- [43] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Axiom A diffeomorphisms*. Lect. Notes in Mathematics **470**, Springer-Verlag (1975).
- [44] L. Burslem, Centralizers of partially hyperbolic diffeomorphisms. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **24** (2004), 55–87.
- [45] C. Carballo, C. Morales, M.-J. Pacifico, Maximal transitive sets with singularities for generic  $C^1$  vector fields. *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **31** (2000), 287–303.
- [46] M. Carvalho, Sinai-Ruelle-Bowen measures for  $N$ -dimensional derived from Anosov diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **13** (1993), 21–44.
- [47] C. Conley. *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics* **38**, American Mathematical Society, Providence. RI (1978).
- [48] S. Crovisier, Perturbations of  $C^1$ -diffeomorphisms and dynamics of generic conservative diffeomorphisms of surface. In *Dynamiques des difféomorphismes conservatifs de surfaces : un point de vue topologique.*, 1–33, *Panorama et Synthèses*, **21**, Soc. Math. France, Paris (2006).
- [49] S. Crovisier, Periodic orbits and chain-transitive sets of  $C^1$ -diffeomorphisms. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **104** (2006), 87–141.
- [50] S. Crovisier, *Birth of homoclinic intersections : a model for the central dynamics of partially hyperbolic systems*. Prépublication. ArXiv math.DS/0605387 (2006).
- [51] S. Crovisier, *Partial hyperbolicity far from homoclinic bifurcations*. Prépublication. ArXiv :0809.4965 (2008).
- [52] S. Crovisier, E. Pujals, *Essential hyperbolicity versus homoclinic bifurcations*. En préparation.
- [53] L. Díaz, A. Gorodetski, *Non-hyperbolic ergodic measures for non-hyperbolic homoclinic classes*. *Ergodic Theory & Dynam. Systems* **29** (2009), 1479–1513.
- [54] L. Díaz, E. Pujals, R. Ures, Partial hyperbolicity and robust transitivity. *Acta Math.* **183** (1999), 1–43.
- [55] T. Fisher, Trivial centralizers for axiom A diffeomorphisms. *Nonlinearity* **21** (2008), 2505–2517.
- [56] M. Foreman, M. D. Rudolph, L. Weiss, On the conjugacy relation in ergodic theory. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **343** (2006), 653–656.
- [57] J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **158** (1971), 301–308.

- [58] S. Gan, Horseshoe and entropy for  $C^1$  surface diffeomorphisms, *Nonlinearity* **15** (2002), 841–848.
- [59] S. Gan, A generalized shadowing lemma. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **8** (2002), 627–632.
- [60] S. Gan, L. Wen, Heteroclinic cycles and homoclinic closures for generic diffeomorphisms. In *Special issue dedicated to Victor A. Pliss on the occasion of his 70th birthday. J. Dynam. Differential Equations* **15** (2003), 451–471.
- [61] S. Gan, L. Wen, D. Yang, *Minimal non-hyperbolicity and index completeness. Discrete Contin. Dyn. Syst.* **25** (2009), 1349–1366.
- [62] Ghys, É., Groups acting on the circle. *L'Enseign. Math.* **47** (2001), 329–407.
- [63] N. Gourmelon, Adapted metrics for dominated splittings. *Ergodic Theory & Dynam. Systems* **27** (2007), 1839–1849.
- [64] N. Gourmelon, *Generation of homoclinic tangencies by  $C^1$ -perturbations*. Prépublication Université de Bourgogne (2007), *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **26** (2010), 1–42.
- [65] N. Gourmelon, *A Franks' lemma that preserves invariant manifolds*. Prépublication IMPA (2008).
- [66] C. Gutierrez, A counter-example to a  $C^2$  closing lemma. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **7** (1987), 509–530.
- [67] C. Gutierrez, On  $C^r$ -closing for flows on 2-manifolds. *Nonlinearity* **13** (2000), 1883–1888.
- [68] C. Gutierrez, On the  $C^r$ -closing lemma. The geometry of differential equations and dynamical systems. *Comput. Appl. Math.* **20** (2001), 179–186.
- [69] B. Hasselblatt, A. Katok, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press (1995).
- [70] S. Hayashi, Diffeomorphisms in  $\mathcal{F}^1(M)$  satisfy Axiom A. *Ergodic Theory & Dynam. Systems* **12** (1992), 233–253.
- [71] S. Hayashi, Connecting invariant manifolds and the solution of the  $C^1$ -stability and  $\Omega$ -stability conjectures for flows. *Ann. of Math.* **145** (1997), 81–137 et *Ann. of Math.* **150** (1999), 353–356.
- [72] S. Hayashi, A  $C^1$  make or break lemma. *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **31** (2000), 337–350.
- [73] S. Hayashi, Stability of dynamical systems. *Sugaku Expositions* **14** (2001), 15–29. Traduction de *Sugaku* **50** (1998), 149–162.
- [74] M. Herman, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau. Astérisque* **103–104**, (1983).
- [75] M. Herman, Exemples de flots hamiltoniens dont aucune perturbation en topologie  $C^\infty$  n'a d'orbites périodiques sur un ouvert de surfaces d'énergies. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **312** (1991), 989–994.
- [76] M. Herman, Différentiabilité optimale et contre-exemples à la fermeture en topologie  $C^\infty$  des orbites récurrentes de flots hamiltoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **313** (1991), 49–51.
- [77] M. Herman, Some open problems in dynamical systems. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. II (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, 797–808.

- [78] M. Hirsch, *Differential topology. Graduate Texts in Mathematics* **33**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1976).
- [79] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, *Invariant Manifolds. Lecture Notes in Mathematics* **583**, Springer Verlag, Berlin (1977).
- [80] M. Hurley, Attractors : persistence, and density of their basins. *Transactions AMS* **269** (1982), 247–271.
- [81] A. Katok, Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **51** (1980), 137–173.
- [82] N. Kopell, Commuting diffeomorphisms. In *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. XIV, AMS (1970), 165–184.
- [83] I. Kupka. Contributions à la théorie des champs génériques. *Contrib. Differential Equations* **2** (1963), 457–484.
- [84] K. Kuratowski, *Topology II*, Academic Press - PWN - Polish Sci. Publishers Warszawa (1968).
- [85] F. Ledrappier, Quelques propriétés des exposants caractéristiques. In *École d'été de probabilités de Saint-Flour, 1982. Lecture Notes in Math.* **1097** (1984), 305–396.
- [86] S. Liao, An extension of the  $C^1$  closing lemma. *Beijing Daxue Xuebao* **2** (1979), 1–41.
- [87] S. Liao, Obstruction sets. I. *Acta Math. Sinica* **23** (1980), 411–453.
- [88] S. Liao, Obstruction sets. II. *Beijing Daxue Xuebao* **2** (1981), 1–36.
- [89] S. Liao, On the stability conjecture. *Chinese Ann. Math.* **1** (1980), 9–30.
- [90] S. Liao, An existence theorem for periodic orbits. *Acta Sci. Natur. Univ. Pekinensis* **1** (1979), 1–20.
- [91] S. Liao, *Qualitative Theory of Differentiable Dynamical Systems*. China Science Press (1996). (Traduction en Anglais des articles précédents.)
- [92] J. Mai, A simpler proof of  $C^1$  closing lemma. *Sci. Sinica Ser. A* **29** (1986), 1020–1031.
- [93] R. Mañé, Contributions to the stability conjecture. *Topology* **17**, 397–405.
- [94] R. Mañé, An ergodic closing lemma. *Ann. of Math.* **116** (1982), 503–540.
- [95] R. Mañé, Oseledec's theorem from the generic viewpoint. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Warsaw, 1983) vols. **1-2**, 1269-1276, (1984).
- [96] R. Mañé, Hyperbolicity, sinks and measure in one dimensional dynamics. *Commun. Math. Phys.* **100** (1985), 495–524 et *Comm. Math. Phys.* **112** (1987), 721–724.
- [97] R. Mañé, *Ergodic Theory and Differential Dynamics*. Springer-Verlag, New York (1987).
- [98] R. Mañé, On the creation of homoclinic points. *Inst. Hautes études Sci. Publ. Math.* **66** (1988), 139–159.
- [99] R. Mañé, A proof of the  $C^1$  stability conjecture. *Inst. Hautes études Sci. Publ. Math.* **66** (1988), 161–210.
- [100] C. Morales, M.-J. Pacifico, Lyapunov stability of  $\omega$ -limit sets. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **8** (2002), 671–674.
- [101] C. Moreira, *There are no  $C^1$ -stable intersections of regular Cantor sets*. Prépublication. ArXiv :0901.3131.

- [102] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems. Annals of mathematics studies* **77**, Princeton university Press (1973).
- [103] J. Munkres, Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms. *Ann. of Math.* **72** (1960), 521–554.
- [104] S. Newhouse, Nondensity of axiom A(a) on  $S^2$ . In *Global analysis I, Proc. Symp. Pure Math. AMS* **14** (1970), 191–202.
- [105] S. Newhouse, Hyperbolic limit sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **167** (1972), 125–150.
- [106] S. Newhouse, Diffeomorphisms with infinitely many sinks, *Topology* **13** (1974), 9–18.
- [107] S. Newhouse, Quasi-elliptic periodic points in conservative dynamical systems. *Amer. J. Math.* **99** (1977), 1061–1087.
- [108] S. Newhouse, Lectures on dynamical systems. In *Dynamical systems*, CIME. Lect., Bresanone 1978, *Progress in Mathematics* **8**, Birkäuser (1980), 1–114.
- [109] S. Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms, *Publ. Math. I.H.E.S.* **50** (1979), 101–151.
- [110] S. Newhouse, J. Palis, Cycles and bifurcation theory. Trois études en dynamique qualitative. *Astérisque* **31** (1976), 43–140.
- [111] F. Oliveira, On the generic existence of homoclinic points. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **7** (1987), 567–595.
- [112] F. Oliveira, On the  $C^\infty$  genericity of homoclinic orbits. *Nonlinearity* **13** (2000), 653–662.
- [113] J. Palis, A note on  $\Omega$ -stability. in *Global Analysis I, Proc. Sympos. Pure Math.* **14**, A.M.S. Providence R. I. (1970).
- [114] J. Palis, On the  $C^1$   $\Omega$ -stability conjecture, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **66**, (1988), 211–215.
- [115] J. Palis, On the contribution of Smale to dynamical systems. In *From Topology to Computation : Proceedings of the Smalefest, Berkeley 1990*, Springer (1993), 165–178.
- [116] J. Palis, A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors. In *Géométrie complexe et systèmes dynamiques, Astérisque* **261** (2000), 335–347.
- [117] J. Palis, A global perspective for non-conservative dynamics. *Ann. I. H. Poincaré* **22** (2005), 485–507.
- [118] J. Palis, Open questions leading to a global perspective in dynamics. *Nonlinearity* **21** (2008), T37–T43.
- [119] J. Palis, W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*. Springer-Verlag, Berlin (1982).
- [120] J. Palis, C. Pugh, Fifty problems in dynamical systems. In *Dynamical systems*, Warwick 1974. *Lecture Notes in Math.* **468** (1975), 345–353.
- [121] J. Palis, C. Pugh, M. Shub, M. D. Sullivan, D, Genericity theorems in topological dynamics. In *Dynamical systems* (Warwick 1974). *Lecture Notes in Math.* **468** (1975), 241–250.
- [122] J. Palis, S. Smale, Structural stability theorem. *Global analysis I, Proc. Symp. Pure Math. AMS* **14** (1970), 223–232.
- [123] J. Palis, F. Takens, *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*. Cambridge studies in advanced mathematics **35**, Cambridge University Press (1993).

- [124] J. Palis, M. Viana, High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors. *Ann. Math.* **140** (1994), 207–250.
- [125] J. Palis, J.-C. Yoccoz, Rigidity of centralizers of diffeomorphisms. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **22** (1989), 81–98.
- [126] J. Palis, J.-C. Yoccoz, Centralizers of Anosov diffeomorphisms on tori. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **22** (1989), 99–108.
- [127] M. Peixoto, Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology* **1** (1962), 101–120 et *Topology* **2** (1963) 179–180.
- [128] Y. Pesin, Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Mathematical Surveys* **32A**, 55–114, (1977).
- [129] D. Pixton, Planar homoclinic points. *J. Differential Equations* **44** (1982), 365–382.
- [130] V. Pliss, On a conjecture of Smale. *Differ. Uravn.* **8** (1972), 262–268.
- [131] R. Plykin, Sources and sinks of A-diffeomorphisms on surfaces. *Math. Sb. (N.S.)* **94**(136) (1974), 243–264, 336.
- [132] H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Math.* **13** (1890), 1–270.
- [133] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tome III. Gauthier-Villars (1899).
- [134] R. Potrie, *Generic bi-Lyapunov homoclinic classes*. Prépublication. ArXiv :0903.4090.
- [135] R. Potrie, M. Sambarino, *Codimension one generic homoclinic classes with interior*. ArXiv :0806.3036. À paraître au *Bull. Braz. Math. Soc.*
- [136] C. Pugh, The closing lemma. *Amer. J. Math.* **89** (1967), 956–1009.
- [137] C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem *Amer. J. Math.* **89** (1967), 1010–1021.
- [138] C. Pugh, On arbitrary sequences of isomorphisms in  $R^m \rightarrow R^m$ . *Trans. Amer. Math. Soc.* **184** (1973), 387–400.
- [139] C. Pugh, Against the  $C^2$  closing lemma. *J. Differential Equations* **17** (1975), 435–443.
- [140] C. Pugh, A special  $C^r$  closing lemma. In *Geometric dynamics* (Rio de Janeiro, 1981), *Lecture Notes in Math.* **1007** (1983), 636–650
- [141] C. Pugh, The  $C^{1+\alpha}$  hypothesis in Pesin theory. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **59** (1984), 143–161.
- [142] C. Pugh, The  $C^1$  connecting lemma. *J. Dynam. Differential Equations* **4** (1992), 545–553.
- [143] C. Pugh, C. Robinson, The  $C^1$  closing lemma, including Hamiltonians. *Ergod. Th. & Dynam. Syst.* **3** (1983), 261–313.
- [144] C. Pugh, M. Shub, A. Wilkinson, Hölder foliations. *Duke Math. J.* **86** (1997), 517–546.
- [145] E. Pujals, On the density of hyperbolicity and homoclinic bifurcations for 3D- diffeomorphisms in attracting regions. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **16** (2006), 179–226.
- [146] E. Pujals, Density of hyperbolicity and homoclinic bifurcations for attracting topologically hyperbolic sets. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **20** (2008), 335–405.
- [147] E. Pujals, Some simple questions related to the  $C^r$ -stability conjecture. *Nonlinearity* **21** (2008), T233–T237.

- [148] E. Pujals, F. Rodriguez-Hertz, Critical points for surface diffeomorphisms. *J. Mod. Dyn.* **1** (2007), 615–648.
- [149] E. Pujals, M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms. *Ann. of Math.* **151** (2000), 961–1023.
- [150] E. Pujals, M. Sambarino, Integrability on codimension one dominated splitting. *Bull. Braz. Math. Soc.* **38** (2007), 1–19.
- [151] E. Pujals, M. Sambarino, Density of hyperbolicity and tangencies in sectional dissipative regions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **26** (2009), 1971–2000.
- [152] E. Pujals, M. Sambarino, On the dynamics of dominated splitting. *Ann. of Math.* **169** (2009), 675–740.
- [153] J. Robbin, A structural stability theorem, *Ann. of Math.*, **94**, (1971), 447–493.
- [154] C. Robinson,  $C^r$  structural stability implies Kupka-Smale. In *Dynamical systems*, Proc. Sympos. Univ. Bahia, Salvador 1971, Academic Press (1973), 443–449.
- [155] C. Robinson, Generic properties of conservative systems I & II. *Amer. J. Math.* **92**(1970), 562–603 et 897–906.
- [156] C. Robinson, Closing stable and unstable manifolds on the two sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.* **41** (1973), 299–303.
- [157] C. Robinson Structural stability of  $C^1$ -diffeomorphisms. *J. Diff. Equ.*, **22**, (1976), 28-73.
- [158] C. Robinson, *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. CRC Press (1994).
- [159] N. Romero, Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **15**, (1995), 735–757.
- [160] M. Shub, Topological transitive diffeomorphism on  $T^4$ . *Lect. Notes in Math.* **206** (1971), 39–40.
- [161] M. Shub, Stability and genericity for diffeomorphisms. *Dynamical systems*, Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, (1971), 493–514.
- [162] M. Shub, Structurally stable diffeomorphisms are dense. *Bull. Amer. Math. Soc.* **78** (1972), 817–818.
- [163] M. Shub, Stabilité globale des systèmes dynamiques. *Astérisque* **56**, Société Mathématique de France, Paris (1978).
- [164] K. Sigmund, Generic properties of invariant measures for Axiom A diffeomorphisms. *Invent. Math.* **11** (1970), 99-109.
- [165] C. Simon, A 3-dimensional Abraham-Smale example. *Proc. Amer. Math. Soc.* **34** (1972), 629–630.
- [166] S. Smale, Morse inequalities for a dynamical system. *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 43–49.
- [167] S. Smale, Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms. *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, 49–496.
- [168] S. Smale, Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **17** (1963), 97–116.



- [169] S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic points. *Differential and combinatorial topology*, Princeton Univ. Press (1965), 63–80.
- [170] S. Smale, Structurally stable systems are not dense. *Amer. J. Math.* **88** (1966), 491–496.
- [171] S. Smale, Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 747–817.
- [172] S. Smale, The  $\Omega$ -stability theorem. In *Global Analysis I, Proc. Sympos. Pure Math.* **14**, A.M.S. Providence R. I. (1970).
- [173] S. Smale, Stability and genericity in dynamical systems. Séminaire Bourbaki Vol. 1969/70, exposé 374. *Lecture Notes in Mathematics* **180** (1971).
- [174] S. Smale, Dynamics retrospective : great problems, attempts that failed. *Nonlinear science : the next decade* (Los Alamos, NM, 1990). *Phys. D* **51** (1991), 267–273.
- [175] S. Smale, Mathematical problems for the next century. *Math. Intelligencer* **20** (1998), 7–15.
- [176] F. Takens, On Zeeman’s tolerance stability conjecture. *Lecture Notes in Math.*, **197**, (1971), 209–219.
- [177] F. Takens, Tolerance stability. *Lecture Notes in Math.*, **468**, (1975), 293–304.
- [178] Y. Togawa, Generic Morse-Smale diffeomorphisms have only trivial symmetries. *Proc. Amer. Math. Soc.* **65** (1977), 145–149.
- [179] Y. Togawa, Centralizers of  $C^1$ -diffeomorphisms. *Proc. Amer. Math. Soc.* **71** (1978), 289–293.
- [180] L. Wen, The  $C^1$  closing lemma for endomorphisms with finitely many singularities. *Proc. Amer. Math. Soc.* **114** (1992), 217–223.
- [181] L. Wen, A uniform  $C^1$  connecting lemma. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **8** (2002), 257–265.
- [182] L. Wen, Homoclinic tangencies and dominated splittings. *Nonlinearity* **15** (2002), 1445–1469.
- [183] L. Wen, Generic Diffeomorphisms away from homoclinic tangencies and heterodimensional cycles. *Bull. Braz. Math. Soc.* **35** (2004), 419–452.
- [184] L. Wen, The selecting lemma of Liao. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **20** (2008), 159–175.
- [185] L. Wen, Z. Xia, A basic  $C^1$  perturbation theorem. *J. Diff. Eq.* **154** (1999), 267–283.
- [186] L. Wen, Z. Xia,  $C^1$  connecting lemmas. *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), 5213–5230.
- [187] J. Yang, *Newhouse phenomenon and homoclinic classes*. Prépublication. ArXiv :0712.0513.
- [188] J. Yang, *Lyapunov stable chain recurrent classes*. Prépublication. ArXiv :0712.0514.
- [189] J. Yang, *Ergodic measures far away from tangencies*. Prépublication IMPA A629 (2009).
- [190] J.-C. Yoccoz, Introduction to hyperbolic dynamics. In *Real and complex dynamical systems, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* **464** (1995), 265–291.
- [191] J.-C. Yoccoz, Travaux de Herman sur les tores invariants. Séminaire Bourbaki 754, *Astérisque* **206** (1992), 311–344.
- [192] E. Zehnder, Homoclinic points near elliptic fixed points. *Comm. Pure Appl. Math.* **26** (1973), 131–182.

# Index

- Anosov, difféomorphisme, 24
- attracteur
  - essentiel, 46
  - faible, 23
- axiome A, 24
- centralisateur, 13
- classe
  - apériodique, 43
  - de récurrence par chaînes, 22
  - homocline, 24
  - pelliculaire, 70
- closing lemma, 30
  - ergodic, 47
- cocycle linéaire périodique, 71
- conjecture
  - d'hyperbolicité, 17, 92
  - de finitude, 17, 97
  - de Palis, 11, 96
  - de Smale, 11, 92
  - faible de Palis, 14, 108
- connecting lemma, 32
- connexion forte, 84
  - généralisée, 85
- critique, dynamique, 17
- cycle, 24
  - hétérodimensionnel, 44, 84
  - hétérodimensionnel robuste, 84
- décomposition dominée, 55
- dérivé d'Anosov, difféomorphisme, 63
- domaine de perturbation, 40
- ensemble
  - $\omega$ -limite, 42
  - basique, 24
  - minimal non hyperbolique, 98
  - non-errant, 21
  - stable, 23
  - stable par chaînes, 23
  - vrillé, 106
- exposant de Lyapunov, 58
- famille de plaques, 56
  - finement piégée, 62
  - localement invariante, 56
  - piégée, 62
- filtration, 22
- généricité, 27
- hétérodimensionnelle, dynamique, 17
- homocliniquement reliées, orbites, 24
- hyperbolicité
  - difféomorphisme, 24
  - en volume, 75
  - ensemble, 23
  - essentielle, 117
  - mesure, 59
  - partielle, 56
  - ponctuelle, 57
  - segment d'orbite, 59
- indice, 23
  - complétude, 91
- Kupka-Smale, difféomorphisme, 28
- lemme de connexion, 32
  - pour les pseudo-orbites, 39
- lemme de connexion globale, 50
- lemme de fermeture, 30
  - ergodique, 47
- lemme de Franks, 28
- lemme de perturbation, 29
- lemme de sélection, 60
- mécanismes et phénomènes, 16, 96
- mélangeur, 44, 90

- modéré, difféomorphisme, 17
- modèle central, 100
  - type, 101
- Morse-Smale, difféomorphisme, 25
  
- ouvert attractif, 22
  
- perturbation élémentaire, 28
- perturbation fantôme, 135
- phénomène de Newhouse, 44, 74
- phénomènes et mécanismes, 16, 96
- pistage
  - faible, 50
  - généralisé, 59
- pseudo-orbite, 22
- puits, 23
  
- quasi-attracteur, 23
  
- réurrence par chaînes, 22
  
- sauvage, difféomorphisme, 17
- segment récurrent par chaînes, 100
- selle, 23
- source, 23
- spécification, 83, 85
- stabilité
  - $\Omega$ -stabilité, 76
  - au sens de Lyapunov, 23
  - molle, 53
  - structurelle, 76
  - tolerance stability, 53
- support, d'une perturbation, 36
  
- tangence homocline, 73
  - robuste, 74
- théorème de densité, 31
- théorème fondamental de la dynamique, 22
- tour topologique, 41
- transition, 83
- transitivité, 21
  - par chaînes, 22
  - faible, 21
  - robuste, 43
- transversalité forte, 76
  
- universel, difféomorphisme, 17, 87
  
- variété stable forte, 58
- vecteur de Lyapunov, 58