



HAL
open science

Catégories dérivables

Denis-Charles Cisinski

► **To cite this version:**

Denis-Charles Cisinski. Catégories dérivables. Bulletin de la société mathématique de France, 2010, 138 (3), pp.317-393. hal-00440930v2

HAL Id: hal-00440930

<https://hal.science/hal-00440930v2>

Submitted on 26 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CATÉGORIES DÉRIVABLES

PAR DENIS-CHARLES CISINSKI

RÉSUMÉ. — Ces notes sont consacrées à la construction de dérivateurs à partir d'une nouvelle notion de catégorie de modèles assez générale pour recouvrir les théories de Quillen, Thomason et Brown. On développe en particulier la théorie des catégories exactes dérivables (par exemple les catégories de Frobenius et les catégories biWaldhausen compliciales vérifiant de bonnes propriétés de stabilité homotopique), lesquelles donnent lieu à des dérivateurs triangulés. On donne une caractérisation combinatoire simple pour qu'un foncteur dérivé induise une équivalence de catégories (ou de dérivateur). Dans un dernier temps, on démontre que la notion de catégorie de modèles introduite ici est stable par passage aux catégories de préfaisceaux sur une petite catégorie arbitraire, propriété qui fait défaut à la structure de Quillen.

ABSTRACT (*Derivable categories*). — These notes are devoted to the construction of derivators from a new notion of model category which is general enough to recover the theories of Quillen, Thomason, and Brown. We develop, in particular, the theory of derivable exact categories (for instance, Frobenius categories or complicial biWaldhausen categories with nice homotopy stability properties), which give rise to triangulated derivators. We give a simple combinatorial characterization for a derived functor to induce an equivalence of categories (or of derivators). At last, we prove that the notion of model category we introduce here is stable by taking presheaf categories over an arbitrary small category, while this property is known to fail for the Quillen structure.

DENIS-CHARLES CISINSKI, LAGA, CNRS (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France
E-mail : cisinski@math.univ-paris13.fr
Url : <http://www.math.univ-paris13.fr/~cisinski/>

Classification mathématique par sujets (2000). — 55U35;55U40,18G55,18G10.

Mots clefs. — catégories de modèles, limites homotopiques, dérivateurs, catégories stables, équivalences dérivées.

Table des matières

Introduction.....	2
1. Catégories dérivables à gauche.....	5
2. Le dérivateur associé à une catégorie dérivable.....	20
3. Fonctorialités.....	32
4. Catégories exactes dérivables.....	41
5. Catégories de modèles.....	50
6. Catégories de modèles homotopiquement complètes.....	60
Appendice A. Dérivateurs.....	69
Bibliographie.....	73

Introduction

La notion de catégorie de modèles a été introduite par Quillen dans son fameux livre *Homotopical algebra* [Qui67], afin de définir un cadre permettant de “faire de la théorie de l’homotopie” dans des catégories autres que celle des espaces topologiques, généralisant au contexte non-additif l’algèbre homologique (ce par quoi on entend la théorie des catégories dérivées, telle qu’initée par Grothendieck et Verdier). Le formalisme de Quillen s’est révélé un outil puissant, en topologie algébrique d’abord (sa raison d’être étant de formaliser la théorie de Quillen, de classification des types d’homotopie rationnels), puis dans bien d’autres domaines (par exemple, la K -théorie algébrique, la théorie des opérades), jusqu’à des développements récents spectaculaires, comme la théorie de l’homotopie des schémas de Morel et Voevodsky, ou encore, la théorie des catégories supérieures et la géométrie algébrique dérivée, telles que développées par Toën, Vezzosi et Lurie.

La notion de catégorie de modèles de Quillen est extrêmement robuste : toute théorie de l’homotopie peut être décrite par une catégorie de modèles de Quillen (dans le sens où, dans la plupart des cas, toute catégorie dans laquelle on veut faire de l’algèbre homotopique peut être munie d’une telle structure, et, lorsque ce n’est pas le cas, elle peut être plongée dans une catégorie admettant une structure de Quillen). Cependant, un certain nombre de constructions naturelles ne sont disponibles que moyennant des hypothèses restrictives : l’exemple poursuivi dans ces notes étant celui des catégories de diagrammes. En effet, étant donnée une catégorie de modèles de Quillen \mathcal{A} et une petite catégorie I , on ne sait pas, sans hypothèses supplémentaires, définir une structure de catégorie de modèles sur la catégorie des préfaisceaux sur I à valeurs dans \mathcal{A} . Cela complique par exemple la construction des limites homotopiques : alors que la théorie de Quillen est un outil puissant pour construire des foncteurs dérivés, on ne peut pas l’utiliser directement pour construire le foncteur limite projective homotopique, lequel est pourtant bien le foncteur dérivé à droite du foncteur

limite projective (ceci dit, les limites homotopiques existent bel et bien en toute généralité, mais au prix d'un certain effort ; voir [CS02, Cis03, DHKS04]).

L'une des visées de ces notes est d'introduire une notion de catégorie de modèles stable par passage aux catégories de préfaisceaux, de sorte de que le foncteur limite projective soit compatible à ces structures. Pour cela, on définit des structures plus faibles, que l'on enrichira au cours du texte. L'intérêt de cette progression lente est double : d'une part, les énoncés démontrés ici sont des outils fondamentaux en dehors de l'algèbre homotopique abstraite (en K -théorie par exemple), et, d'autre part, cela permet de comprendre quel est le rôle de chacun des axiomes que l'on introduira pour définir une bonne notion de catégorie de modèles.

On développe donc tout d'abord la notion de *catégorie dérivable* (à gauche et/ou à droite), c'est-à-dire d'une notion de catégorie de modèles recouvrant à la fois la théorie des catégories de modèles (fermées ou non) au sens de Quillen [Qui67, DS95, Hir03], celle des catégories de modèles au sens de Thomason [Wei01], et celle des catégories d'objets fibrants au sens de Brown [Bro73]. Notons au passage que la notion de catégorie dérivable est un cas particulier de celle de *structure de dérivabilité*, définie et étudiée par Kahn et Maltsev dans [KM08], et donne donc lieu à une bonne théorie des foncteurs dérivés.

Il est établi dans ce travail que toute catégorie dérivable à gauche définit canoniquement un dérivateur à gauche (de domaine les catégories directes finies) vérifiant de bonnes propriétés de relèvement (2.21, 2.15) ; autrement dit, les catégories dérivables à gauche admettent des limites homotopiques finies. On développe en outre les propriétés de functorialité attendues (3.4), ainsi qu'une caractérisation combinatoire simple des foncteurs exacts à gauche entre catégories dérivables à gauche induisant une équivalence entre les dérivateurs faibles à gauche correspondants (3.12, 3.19 et 3.20). Signalons que cette caractérisation permet une preuve simple de l'invariance de la K -théorie par équivalence dérivée (voir [Cis]). Enfin, à titre d'exemple, la notion de catégorie exacte dérivable est dégagée (4.5) : ce sont les catégories exactes munies d'une classe d'équivalences faibles ayant un bon comportement relativement aux monomorphismes admissibles et aux épimorphismes admissibles (*i.e.* donnant lieu à une structure de catégorie dérivable). Par exemple toute catégorie de Frobenius est une catégorie exacte dérivable avec pour équivalences faibles les équivalences stables (4.19), et toute catégorie biWaldhausen compliciale (vérifiant des propriétés de stabilité homotopique adéquates) est une catégorie exacte dérivable. En particulier, pour toute catégorie exacte \mathcal{E} , la catégorie des complexes bornés sur \mathcal{E} est une catégorie exacte dérivable en prenant pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes. On montre que le dérivateur associé à toute catégorie exacte dérivable est triangulé (4.9) ce qui redonne, en particulier, la construction de Keller [Kel07] du dérivateur associé à une catégorie exacte. Dans le paragraphe suivant, on définit les catégories dérivables

relevantes en faisant intervenir les propriétés de relèvement standard entre cofibrations et fibrations. On montre que pour une telle catégorie dérivable \mathcal{A} , les morphismes d'un objet cofibrant vers un objet fibrant dans la catégorie homotopique de \mathcal{A} peuvent être décrits comme des classes d'homotopie de morphisme de \mathcal{A} (5.11), ce qui fait disparaître les problèmes ensemblistes éventuels quant à la construction de la catégorie homotopique de \mathcal{A} . On montre ensuite que la notion de catégorie dérivable relevante est stable par passage aux catégories de préfaisceaux sur une catégorie directe finie (5.13). On définit alors, à partir de la notion de catégorie dérivable, une nouvelle notion de *catégorie de modèles*, ainsi que sa version “propre”, celle de catégorie de Thomason (plus exactement, la notion de catégorie de modèles dégagee par Thomason correspond exactement à celle de catégorie de modèles au sens introduit ici, mais avec de plus les propriétés suivantes : les factorisations sont fonctorielles et sont bien définies pour tout morphisme, et les équivalences faibles sont stables par image inverse (resp. directe) le long d'une fibration (resp. d'une cofibration) ; voir 5.18).

Grâce aux travaux de Rădulescu-Banu [RB09], on étudie des variantes homotopiquement complètes de ces structures de catégorie de modèles, en leur associant des dérivateurs définis sur toutes les petites catégories. On montre en outre que les notions de catégorie de modèles introduites dans ces notes sont stables par passage aux catégories de préfaisceaux sur une petite catégorie arbitraire (6.22). On retrouve de la sorte le fait que les catégories de modèles de Thomason sont stables par passage aux catégories de préfaisceaux sur une petite catégorie arbitraire (6.24), résultat qui a déjà été démontré par Weibel [Wei01] (d'après les notes manuscrites de Thomason) dans le cadre des catégories de Thomason simpliciales.

Remerciements. — Je tiens à exprimer ma reconnaissance au rapporteur anonyme, pour sa lecture attentive et pertinente.

Conventions ensemblistes. — Dans ces notes, on localisera des catégories sans état d'âme. Afin de rendre ces constructions rigoureuses, plusieurs choix s'offrent à nous quant aux types d'ensemble avec lesquels on travaille. Car on a un problème de taille. On parlera ici de classes et d'ensembles (en disant “petit ensemble” lorsqu'on veut vraiment insister sur le fait que l'on ne veut pas de classe), ce qui fait sens pour ZFC (variante Bernays-Gödel) ; le lecteur qui préfère les univers fixera une fois pour toutes deux univers infinis $U \in V$, et, dans ce cas, le mot “classe” signifiera pour nous “ V -ensemble”, alors que l'expression “ensemble” sera employée pour “ U -ensemble”. Mais ce n'est pas tout. Lorsqu'on localise des catégories sans crier gare⁽¹⁾, il y a deux possibilités pour que cela ait un sens : ou bien on travaille uniquement avec des petites catégories (i.e. des catégories dont les flèches forment un petit ensemble), et

⁽¹⁾Voir [GZ67, Chap. I, 1.1] pour la construction.

alors, il vaut mieux fixer des univers, ou bien au contraire on accepte de travailler avec des catégories énormes (c'est-à-dire des catégories telles que pour tout couple d'objet (X, Y) , $\text{Hom}(X, Y)$ soit éventuellement une classe), et alors on a totalement le choix pour ce qui est de nos axiomatiques préférées. L'auteur de ces lignes précise néanmoins que, même lorsqu'on autorise les catégories à être énormes, la question de savoir si, après localisation, $\text{Hom}(X, Y)$ est un *petit* ensemble est fondamentale, et sera abordée, lorsque cela s'avèrera adéquat et opportun.

1. Catégories dérivables à gauche

1.1. — Soit \mathcal{A} une catégorie munie de deux classes de flèches $w\mathcal{A}$ et $f\mathcal{A}$, appelées respectivement *équivalences faibles* et *fibrations*. Les éléments de $f\mathcal{A} \cap w\mathcal{A}$ seront appelés des *fibrations triviales*. La catégorie \mathcal{A} est *dérivable à gauche*⁽²⁾ si les axiomes suivants sont vérifiés.

D0 La catégorie \mathcal{A} a un objet final, noté \star . On appelle objets *fibrants* les objets X de \mathcal{A} tels que la flèche canonique $X \rightarrow \star$ soit une fibration. Tout objet isomorphe à un objet fibrant est fibrant. L'objet final de \mathcal{A} est fibrant.

D1 Tout isomorphisme est une équivalence faible. Si dans un triangle commutatif de \mathcal{A} , deux flèches parmi les trois sont des équivalences faibles, il en est de même de la dernière.

D2 Tout isomorphisme entre objets fibrants est une fibration. Les fibrations sont stables par composition. Pour toute fibration de but fibrant $X \rightarrow Y$ et toute flèche $Y' \rightarrow Y$ de source fibrante, le produit fibré $X' = Y' \times_Y X$ est représentable dans \mathcal{A} , et la projection de X' sur Y' est une fibration (ce qui implique que X' est fibrant).

D3 Le changement de base d'une fibration triviale de but fibrant par un morphisme de source fibrante est une fibration triviale.

D4 Il existe une factorisation de toute flèche u de but fibrant dans \mathcal{A} de la forme $u = pi$, où p est une fibration, et i une équivalence faible.

Si \mathcal{A} est une catégorie dérivable à gauche, on note \mathcal{A}_f la sous-catégorie pleine de \mathcal{A} formée des objets fibrants. Il est immédiat que \mathcal{A}_f est une catégorie dérivable à gauche en posant $w\mathcal{A}_f = w\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_f$ et $f\mathcal{A}_f = f\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_f$. La catégorie \mathcal{A}_f est en outre une catégorie d'objets fibrants au sens de K. S. Brown [Bro73]. Elle admet donc en particulier des produits finis. Réciproquement, toute catégorie d'objets fibrants est une catégorie dérivable à gauche (dont tous les objets sont

⁽²⁾Cette terminologie, très arbitraire, n'est justifiée que par le fait qu'une catégorie dérivable à gauche donne lieu à un dérivateur à gauche au sens de Grothendieck (voir 2.21), c'est-à-dire donne lieu à une bonne théorie des limites homotopiques (finies). Cette "latéralité" correspond au type d'exactitude qui intervient : les morphismes de dérivateurs à gauches sont ceux qui respectent les limites homotopiques (finies), et donc sont exacts à gauche.

fibrants). On note $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$ la *localisation de \mathcal{A}* (c'est-à-dire la catégorie obtenue à partir de \mathcal{A} en inversant formellement les équivalences faibles), laquelle existe toujours, quitte à changer d'univers. On désigne enfin par $\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ho} \mathcal{A}$ le foncteur canonique.

EXEMPLE 1.2. — Soient \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche, et I une petite catégorie. On note $\mathcal{A}(I)$ la catégorie des préfaisceaux sur I à valeurs dans \mathcal{A} , et $\mathbf{w}\mathcal{A}(I)$ (resp. $\mathbf{f}\mathcal{A}(I)$) la classe des *équivalences faibles naturelles* (resp. des *fibrations naturelles*), *i.e.* des flèches $X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{A}(I)$ telles que pour tout objet i de I , $X(i) \longrightarrow Y(i)$ soit une équivalence faible (resp. une fibration) de \mathcal{A} . Avec ces définitions, dans le cas où I est une catégorie directe finie, on verra que $\mathcal{A}(I)$ est ainsi munie d'une structure de catégorie dérivable à gauche (1.31).

EXEMPLE 1.3. — Soit \mathcal{E} une catégorie exacte. On considère $\mathcal{A} = \mathbf{C}^b \mathcal{E}$, la catégorie des complexes bornés sur \mathcal{E} . On note $\mathbf{w}\mathcal{A}$ la classe des quasi-isomorphismes, et $\mathbf{f}\mathcal{A}$ celle des flèches de \mathcal{A} qui sont des épimorphismes admissibles en chaque degré (on renvoie à [Qui73, Kel90] pour les définitions et pour la terminologie). Alors \mathcal{A} est une catégorie dérivable à gauche (telle que $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}$, *i.e.* dont tous les objets sont fibrants).

1.4. — Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche. Un *clivage* de \mathcal{A} consiste en la donnée suivante.

- (a) Pour chaque objet X de \mathcal{A} , une équivalence faible $j_X : X \longrightarrow RX$ de but fibrant.
- (b) Pour chaque flèche $u : X \longrightarrow Y$ de \mathcal{A} , un diagramme commutatif de la forme ci-dessous,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & RX \\ & \searrow \sigma(u) & \uparrow q(u) \\ & & S(u) \\ & & \downarrow p(u) \\ Y & \xrightarrow{j_Y} & RY \end{array} ,$$

la flèche $q(u)$ étant une fibration triviale, et $p(u)$ une fibration.

Un clivage est *normalisé* si pour chaque objet X de \mathcal{A} , on a $S(1_X) = RX$ et $q(1_X) = p(1_X) = 1_{RX}$ (ce qui implique que $\sigma(1_X) = j_X$).

LEMME 1.5. — *Il existe des clivages (éventuellement normalisés).*

Démonstration. — Soit X un objet de \mathcal{A} . En vertu de l'axiome D4, l'objet final étant fibrant (par D2), il existe une équivalence faible de but fibrant $j_X : X \longrightarrow RX$. Considérons à présent une flèche $u : X \longrightarrow Y$ de \mathcal{A} . Comme RX et RY sont fibrants, le produit $RX \times RY$ est représentable dans \mathcal{A} (D2). En outre, chacune des projections vers RX et RY sont des fibrations (D2)

encore). On peut choisir grâce à D4 une factorisation de $(j_Y u, j_X) : X \rightarrow RY \times RX$ en une équivalence faible $\sigma(u) : X \rightarrow S(u)$ suivie d'une fibration $k : S(u) \rightarrow RY \times RX$. On définit $p(u)$ (resp. $q(u)$) comme le composé de k et de la première (resp. de la seconde) projection. Il résulte facilement des axiomes D1 et D2 qu'on a bien défini de la sorte un clivage. \square

1.6. — Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche.

Si Y est un objet fibrant de \mathcal{A} , un *cocylindre de Y* est une factorisation

$$Y \xrightarrow{s} Y^I \xrightarrow{(d^0, d^1)} Y \times Y$$

de la diagonale $Y \rightarrow Y \times Y$ en une équivalence faible s suivie d'une fibration (d^0, d^1) . Lorsque cela ne prêterait pas trop à confusion, on se référera parfois à un tel objet en parlant d'un cocylindre Y^I de Y en sous-entendant la donnée des morphismes s, d^0 et d^1 .

Deux morphismes $u, v : X \rightarrow Y$ de \mathcal{A}_f sont *strictement homotopes* s'il existe un cocylindre de Y comme ci-dessus, et un morphisme $h : X \rightarrow Y^I$ tels que $d^0 h = u$ et $d^1 h = v$. Les morphismes u et v sont *homotopes* s'il existe une équivalence faible $w : X' \rightarrow X$ de \mathcal{A}_f telle que uw et vw soient strictement homotopes. On peut montrer que la relation d'homotopie est une relation d'équivalence compatible à la composition sur $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ (voir [Bro73, I.2]). On note $\pi_{\mathcal{A}_f}$ la catégorie quotient. On peut en outre vérifier que $\text{Ho } \mathcal{A}_f$ s'obtient à partir de $\pi_{\mathcal{A}_f}$ par un calcul de fractions à droite [Bro73, I.2, proposition 2]. On se référera par la suite à ce fait en disant que $\text{Ho } \mathcal{A}_f$ s'obtient à partir de \mathcal{A}_f par un calcul de fractions à droite à homotopie près. Il est remarquable qu'avec ces définitions, le foncteur canonique $\pi_{\mathcal{A}_f} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{A}_f$ est fidèle [Bro73, I.2, théorème 1].

LEMME 1.7. — *Pour tout diagramme commutatif de \mathcal{A} de la forme*

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & p \nearrow & & \nwarrow q & \\ Y & \xleftarrow{f} & X & \xrightarrow{f'} & Y' \\ & p' \searrow & & \swarrow q' & \\ & & Z' & & \end{array},$$

les objets Z et Z' étant fibrants, les flèches p' et q' des fibrations, les flèches p et q des fibrations triviales, et la flèche f' une équivalence faible, il existe deux fibrations triviales $g : X' \rightarrow Y$ et $g' : X' \rightarrow Y'$, telles que le diagramme suivant commute dans \mathcal{A}_f à homotopie (stricte) près.

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & p \nearrow & & \nwarrow q & \\ Y & \xleftarrow{g} & X' & \xrightarrow{g'} & Y' \\ & p' \searrow & & \swarrow q' & \\ & & Z' & & \end{array}$$

En particulier, les flèches $p'p^{-1}$ et $q'q^{-1}$ sont égales dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}_f$.

Démonstration. — On note $X_0 = Y \times_Z Y'$, et $h_0 = (f, f') : X \rightarrow X_0$ la flèche canonique. Comme p et q sont des fibrations triviales, les deux projections pr_1 et pr_2 de X_0 vers Y et Y' respectivement en sont de même. On en déduit aussitôt que h_0 est une équivalence faible. Soient $k : X_0 \rightarrow Z'$ et $k' : X_0 \rightarrow Z'$ les flèches obtenues en composant respectivement la première projection avec p' et la seconde projection avec q' . On choisit un cocylindre de Z' , *i.e.* une factorisation de la diagonale $Z' \rightarrow Z' \times Z'$ en une équivalence faible $s : Z' \rightarrow Z'^I$ suivie d'une fibration $(d^0, d^1) : Z'^I \rightarrow Z' \times Z'$. Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p'f=q'f'} Z' & \xrightarrow{s} Z'^I \\ h_0 \downarrow & & \downarrow (d^0, d^1) \\ X_0 & \xrightarrow{(k, k')} & Z' \times Z' \end{array}$$

induit une flèche canonique $X \rightarrow X_1 = X_0 \times_{Z' \times Z'} Z'^I$. On factorise celle-ci en une équivalence faible $h : X \rightarrow X'$ suivie d'une fibration $r : X' \rightarrow X_1$. On note enfin π la projection de X_1 sur X_0 , et ϖ celle de X_1 sur Z'^I . On définit $g : X' \rightarrow Y$ (resp. $g' : X' \rightarrow Y'$) comme la composée $pr_1\pi r$ (resp. $pr_2\pi r$). On vérifie immédiatement que $pg = qg'$ dans \mathcal{A} . Comme π est une fibration, g et g' sont des fibrations. D'autre part, $\pi r h = h_0$, et donc πr est une fibration triviale. Par conséquent, g et g' sont des fibrations triviales. On vérifie enfin les égalités

$$d^0 \varpi r = k \pi r = p' pr_1 \pi r = p' g \quad \text{et} \quad d^1 \varpi r = k' \pi r = q' pr_2 \pi r = q' g'.$$

Autrement dit, $p'g$ et $q'g'$ sont strictement homotopes. \square

PROPOSITION 1.8. — *Pour chaque clivage sur \mathcal{A} , on définit un foncteur*

$$R : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ho} \mathcal{A}_f$$

par $R(X) = RX$ sur les objets, et par $R(u) = p(u)q(u)^{-1}$ sur les flèches. Ce foncteur envoie les équivalences faibles de \mathcal{A} sur des isomorphismes, et on note

$$\underline{R} : \mathbf{Ho} \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ho} \mathcal{A}_f$$

le foncteur induit. En outre, si

$$i : \mathbf{Ho} \mathcal{A}_f \rightarrow \mathbf{Ho} \mathcal{A}$$

désigne le foncteur induit par l'inclusion de \mathcal{A}_f dans \mathcal{A} , la donnée des morphismes j_X définit deux isomorphismes de foncteurs

$$1_{\mathbf{Ho} \mathcal{A}} \simeq i \underline{R} \quad \text{et} \quad 1_{\mathbf{Ho} \mathcal{A}_f} \simeq \underline{R} i.$$

En particulier, les foncteurs \underline{R} et i sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — Montrons que R est bien un foncteur. Pour faciliter (très légèrement) la démonstration, on suppose que le clivage est normalisé. Cela implique tautologiquement que R respecte les identités. Il reste à montrer que R respecte la composition. Soient $u : X \rightarrow Y$ et $v : Y \rightarrow Z$ deux morphismes composables de \mathcal{A} . Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\sigma(v)} & S(v) \\ \sigma(u) \downarrow & & & & \downarrow q(v) \\ S(u) & \xrightarrow{p(u)} & RY & & \end{array}$$

définit une flèche canonique $f : X \rightarrow T(v, u) = S(v) \times_{RY} S(u)$. On obtient dès lors le diagramme commutatif suivant dans \mathcal{A} .

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & RX & & \\ & & & & \swarrow & & \nwarrow \\ & & & & q(u) & & q(vu) \\ & & & & \nearrow & & \nwarrow \\ & & & & S(u) & & S(vu) \\ & & & & \swarrow & \xleftarrow{f} & \swarrow \\ p(u) \nearrow & & & & pr_2 & & \sigma(vu) \\ RY & & & & T(v, u) & & X \\ & & & & \swarrow & & \swarrow \\ & & & & pr_1 & & \\ & & & & S(v) & & \\ & & & & \swarrow & & \swarrow \\ & & & & q(v) & & p(vu) \\ & & & & \nearrow & & \nearrow \\ & & & & RZ & & \end{array}$$

On remarque que dans ce diagramme, tous les objets sauf X sont fibrants. D'autre part, le morphisme pr_2 est une fibration triviale (puisque image réciproque de $q(v)$). Il est donc de même de $q(u)pr_2$. Il résulte à présent du lemme 1.7 que

$$p(vu)q(vu)^{-1} = p(v)pr_1(q(u)pr_2)^{-1}$$

dans $\text{Ho } \mathcal{A}_f$. Or il est immédiat que

$$p(v)pr_1(q(u)pr_2)^{-1} = p(v)q(v)^{-1}p(u)q(u)^{-1}.$$

On a bien prouvé que $R(v)R(u) = R(vu)$.

Il est d'autre part évident que la donnée des équivalences faibles j_X définit un isomorphisme du foncteur de localisation $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{A}$ vers iR . Il résulte de la propriété universelle de la localisation que cela définit un isomorphisme de $1_{\text{Ho } \mathcal{A}}$ vers iR . En appliquant ce qui précède à \mathcal{A}_f , cela prouve aussi que cela définit un isomorphisme de \underline{Ri} vers $1_{\text{Ho } \mathcal{A}_f}$. \square

1.9. — Si \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont deux catégories dérivables à gauche, un foncteur $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ est *exact à gauche* s'il vérifie les conditions ci-dessous.

EG0 Le foncteur Φ respecte les objets finaux.

EG1 Le foncteur Φ respecte les fibrations et les fibrations triviales.

EG2 Pour tout carré cartésien de \mathcal{A}_f de la forme

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array} ,$$

la flèche p (et donc aussi p') étant une fibration, le carré

$$\begin{array}{ccc} \Phi X' & \longrightarrow & \Phi X \\ \Phi p' \downarrow & & \downarrow \Phi p \\ \Phi Y' & \longrightarrow & \Phi Y \end{array}$$

est cartésien dans \mathcal{A}' .

Un tel foncteur induit un unique foncteur $\Phi_f : \mathcal{A}_f \longrightarrow \mathcal{A}'_f$ tel que le carré suivant commute (les flèches verticales étant les inclusions).

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{A}' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}_f & \xrightarrow{\Phi_f} & \mathcal{A}'_f \end{array}$$

On vérifie aussitôt que Φ_f est encore exact à gauche. En outre, il résulte de [Bro73, I.1, Factorization lemma] que Φ_f respecte les équivalences faibles. Il est immédiat que les foncteurs exacts à gauche sont stables par composition.

EXEMPLE 1.10. — Soient \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche, et $u : I \longrightarrow J$ un foncteur entre petite catégories. Le foncteur image inverse

$$u^* : \mathcal{A}(J) \longrightarrow \mathcal{A}(I) \quad , \quad X \longmapsto u^* X = (x \longmapsto X(u(x))) \quad ,$$

respecte les équivalences faibles. On montrera plus loin que lorsque I est une catégorie directe finie, $\mathcal{A}(I)$ est une catégorie dérivable à gauche avec les définitions de 1.2. Dans le cas où I et J sont des catégories directes finies, cela fera de u^* un foncteur exact à gauche.

1.11. — On rappelle qu'une *catégorie directe finie* est une catégorie finie sans cycles (*i.e.* une catégorie finie E telle que si Γ désigne le graphe orienté dont les sommets sont les objets de E , et dont les arêtes sont les flèches non identiques de E , alors la catégorie libre engendré par Γ est finie). On peut aussi caractériser les catégories directes finies comme les petites catégories dont le nerf est un ensemble simplicial de présentation finie, c'est à dire dont le nerf n'a qu'un nombre fini de simplexes non dégénérés). Par exemple tout ensemble ordonné fini est une catégorie directe finie. Si E est une catégorie directe finie, alors pour tout objet x de E , la catégorie E/x des objets de E au-dessus de x est une catégorie directe finie. Toute sous-catégorie d'une catégorie directe finie

est une catégorie directe finie. Si E est une catégorie directe finie, alors E^{op} en est une aussi. Enfin, les catégories directes finies sont stables par produits finis et par sommes finies.

Soit E une catégorie directe finie. Une *chaîne* de E est un foncteur injectif (sur les flèches et sur les objets) $c : \Delta_n \rightarrow E$ (où Δ_n désigne la catégorie associée à l'ensemble $\{0, \dots, n\}$ muni de l'ordre naturel). L'entier n est la *longueur* de c , et $c(n)$ son *but*. Si x est un objet de E , la *longueur de x* , notée $\ell(x)$, est le plus grand entier n tel qu'il existe une chaîne de E de longueur n et de but x . Pour tout entier n , on note $E^{(n)}$ la sous-catégorie pleine de E formée des objets de E de longueur inférieure ou égale à n . On obtient ainsi une filtration (finie) de E de la forme

$$\emptyset = E^{(-1)} \subset E^{(0)} \subset \dots \subset E^{(n)} \subset \dots \subset E.$$

On définit enfin la longueur de E , notée $\ell(E)$, comme le plus petit entier m tel que la suite $n \mapsto E^{(m+n)}$ soit constante. Une catégorie directe finie E est de longueur nulle si et seulement si c'est une catégorie discrète non vide, et elle est vide si et seulement si elle est de longueur $\ell(E) = -\infty$.

Le *bord* de E est la sous-catégorie $\partial E = E^{(\ell(E)-1)}$. On remarque aussitôt que si E n'est pas vide, $\ell(\partial E) < \ell(E)$. Pour tout objet x de E , on a $\ell(E/x) \leq \ell(E)$, et par conséquent, vu que E/x n'est pas vide, $\ell(\partial E/x) < \ell(E)$.

Un objet x de E est *minimal* (resp. *maximal*) s'il est de longueur 0 (resp. $\ell(E)$).

1.12. — Un foncteur $u : E' \rightarrow E$ est un *isomorphisme local* si pour tout objet x de E' , le foncteur canonique $E'/x \rightarrow E/u(x)$ est un isomorphisme (ce qui induit un isomorphisme $\partial E'/x \simeq \partial E/u(x)$ dès que cela a un sens).

Un foncteur $u : E' \rightarrow E$ est une *fibration discrète finie* s'il fait de E' une catégorie fibrée sur E (cf. [Gro03]) et si toutes ses fibres sont des catégories discrètes finies (cette notion est à prendre ici au sens strict : par catégorie discrète, nous entendons une catégorie *isomorphe* à la catégorie associée à un ensemble). Toute fibration discrète finie est un isomorphisme local. Les fibrations discrètes finies sont stables par composition et par changement de base. Il est remarquable que pour toute fibration discrète finie $p : E' \rightarrow E$, si en outre E est une catégorie directe finie, alors il en est de même de E' ; de plus, pour tout objet x de E' , $\ell(p(x)) = \ell(x)$, et par suite, $\ell(E') \leq \ell(E)$. On rappelle qu'une *immersion ouverte* (on dit aussi un *crible*) est une inclusion pleine $j : E' \rightarrow E$ telle que pour tout $x \in \text{Ob } E$, s'il existe $x' \in \text{Ob } E'$ et une flèche $x \rightarrow x'$, alors $x \in \text{Ob } E'$. Par exemple, si E est une catégorie directe finie, pour tous $m \leq n$, l'inclusion $E^{(m)} \rightarrow E^{(n)}$ est un crible. On remarque que toute immersion ouverte est une fibration discrète finie (et donc en particulier un isomorphisme local). Si E est une catégorie directe finie, pour tout objet x

de E , les foncteurs d'oubli canoniques $E/x \rightarrow E$ et $\partial E/x \rightarrow E$ sont des fibrations discrètes finies. Si $E_i \rightarrow E$ est une famille finie de fibrations discrètes finies, alors le foncteur induit $\coprod_i E_i \rightarrow E$ est une fibration discrète finie.

1.13. — Soient E une catégorie directe finie, et \mathcal{C} une catégorie. On dit qu'un préfaisceau F sur E à valeurs dans \mathcal{C} est *représentable au bord de E* si pour tout objet x de E , $\varinjlim F|_{\partial E/x}$ est représentable (où $\partial E/x$ désigne le bord de E/x). Lorsque c'est le cas, on définit le *bord de F* comme le préfaisceau

$$\partial F : E^{op} \rightarrow \mathcal{C} \quad , \quad x \mapsto \varinjlim F|_{\partial E/x} .$$

Les flèches canoniques $F(x) = \varinjlim F|_{E/x} \rightarrow \varinjlim F|_{\partial E/x}$ définissent un morphisme canonique

$$(1.13.1) \quad F \rightarrow \partial F .$$

L'énoncé ci-dessous est immédiat.

LEMME 1.14. — *Soient \mathcal{C} une catégorie, et $u : E' \rightarrow E$ un isomorphisme local entre catégories directes finies. Si F est un préfaisceau sur E à valeurs dans \mathcal{C} représentable au bord de E , alors le préfaisceau u^*F est représentable au bord de E' . En outre, on a un isomorphisme canonique $u^*\partial F \simeq \partial u^*F$.*

1.15. — Jusqu'à la fin de cette section, on fixe une catégorie dérivable à gauche \mathcal{A} .

Soit E une catégorie directe finie. On dit qu'un préfaisceau F sur E à valeurs dans \mathcal{A} est *fibrant sur les bords* s'il est représentable au bord de E (1.13), et si la flèche canonique $F \rightarrow \partial F$ est une fibration naturelle (au sens défini en 1.2); comme on le verra plus loin (proposition 1.18), cela implique en particulier que pour tout objet x de E , $F(x)$ et $\partial F(x)$ sont des objets fibrants de \mathcal{A} .

LEMME 1.16. — *L'image inverse par un isomorphisme local entre catégories directes finies d'un préfaisceau fibrant sur les bords est encore un préfaisceau fibrant sur les bords.*

Démonstration. — Cela résulte du lemme 1.14. □

1.17. — Considérons un carré cocartésien de catégories

$$(1.17.1) \quad \begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{i} & E' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ D & \xrightarrow{j} & E \end{array}$$

dans lequel p et q sont des fibrations discrètes et i et j des immersions ouvertes. Alors pour tout préfaisceau d'ensembles F sur E , il induit un carré cartésien

canonique d'ensembles de la forme suivante.

$$(1.17.2) \quad \begin{array}{ccc} \varprojlim F & \longrightarrow & \varprojlim j^* F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim p^* F & \longrightarrow & \varprojlim q^* j^* F \end{array}$$

Soit E une catégorie directe finie. On note $\max E$ l'ensemble des objets maximaux de E , et on choisit un sous-ensemble I de $\max E$. On note alors $E \setminus I$ la sous-catégorie pleine de E formée des objets de E qui ne sont pas dans I . L'inclusion $E \setminus I \rightarrow E$ est alors un crible de E (dans le cas où $I = \max E$, $E \setminus I = \partial E$). On a alors un carré commutatif bicartésien (*i.e.* à la fois cartésien et cocartésien) :

$$(1.17.3) \quad \begin{array}{ccc} \coprod_{x \in I} \partial E/x & \longrightarrow & \coprod_{x \in I} E/x \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \setminus I & \longrightarrow & E \end{array} .$$

Pour le vérifier, les flèches de ce carré étant toutes des fibrations discrètes, il suffit de le prouver pour les fibres du carré au-dessus de E : or si y est dans I , la fibre de 1.17.3 au-dessus de y est

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \{(y, 1_y)\} \\ \parallel & & \downarrow \\ \emptyset & \longrightarrow & \{y\} \end{array} ,$$

et si y n'est pas dans I , la fibre de 1.17.3 au-dessus de y est

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in I} \coprod_{u \in \text{Hom}_E(y, x)} \{(y, u)\} & \xlongequal{\quad} & \coprod_{x \in I} \coprod_{u \in \text{Hom}_E(y, x)} \{(y, u)\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{y\} & \xlongequal{\quad} & \{y\} \end{array} .$$

Pour tout préfaisceau d'ensemble F sur E , on obtient donc par une spécialisation de 1.17.2 le carré cartésien canonique ci-dessous (avec les identifications $\varprojlim F|_{E/x} = F(x)$ et $\varprojlim F|_{\partial E/x} = \partial F(x)$).

$$(1.17.4) \quad \begin{array}{ccc} \varprojlim F & \longrightarrow & \varprojlim F|_{E \setminus I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{x \in I} F(x) & \longrightarrow & \prod_{x \in I} \partial F(x) \end{array}$$

Dans le cas où $I = \max E$, on obtient ainsi un carré cartésien canonique de la forme suivante.

$$(1.17.5) \quad \begin{array}{ccc} \varprojlim F & \longrightarrow & \varprojlim F|_{\partial E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{x \in \max E} F(x) & \longrightarrow & \prod_{x \in \max E} \partial F(x) \end{array}$$

PROPOSITION 1.18. — *Soit E une catégorie directe finie. Pour tout objet fibrant sur les bords F de $\mathcal{A}(E)$, $\varprojlim F$ est représentable dans \mathcal{A} et est un objet fibrant. En outre, pour toute immersion ouverte $j : E' \rightarrow E$, la flèche canonique $\varprojlim F \rightarrow \varprojlim j^* F$ est une fibration.*

Démonstration. — Pour montrer la première assertion, on procède par récurrence sur la longueur de E . Si $\ell(E) < 0$, alors E est la catégorie vide, et donc l'assertion résulte dans ce cas du fait que la catégorie \mathcal{A} admet un objet final et que ce dernier est fibrant. Si $\ell(E) \geq 0$, vu que $\partial E \rightarrow E$ est une immersion ouverte et que $\ell(\partial E) < \ell(E)$, il résulte du lemme 1.16 que $\varprojlim F|_{\partial E}$ est représentable et est un objet fibrant de \mathcal{A} . De plus, pour tout objet x de E , comme $\ell(\partial E/x) < \ell(E/x) \leq \ell(E)$, $\partial F(x)$ est un objet fibrant. Les flèches $F(x) \rightarrow \partial F(x)$ étant des fibrations, la flèche $\prod_{x \in \max E} F(x) \rightarrow \prod_{x \in \max E} \partial F(x)$ en est une aussi. Par conséquent, le produit fibré défini par le diagramme

$$\prod_{x \in \max E} F(x) \longrightarrow \prod_{x \in \max E} \partial F(x) \longleftarrow \varprojlim F|_{\partial E}$$

est représentable dans \mathcal{A} , et ainsi, le carré cartésien 1.17.5 permet de conclure.

Considérons à présent une immersion ouverte $j : E' \rightarrow E$. Pour montrer la seconde assertion, on commence par considérer le cas où il existe un sous-ensemble I de $\max E$ tel que E' s'identifie à la sous-catégorie pleine de E formée des objets qui ne sont pas dans I , et j à l'inclusion (laquelle est nécessairement une immersion ouverte par maximalité des éléments de I). Le carré cartésien 1.17.4 montre alors que le morphisme $\varprojlim F \rightarrow \varprojlim j^* F$ est une fibration. On note $\#E$ le nombre d'objets de E . Pour montrer le cas général, on va procéder par récurrence sur $\#E$. Si $\#E = 0$, alors E est vide, et l'assertion résulte du fait que l'identité de l'objet final de \mathcal{A} est une fibration. On peut donc passer au cas où $\#E > 0$. Si j est l'identité de E , il n'y a rien à vérifier. Sinon, étant donné que le crible de E engendré par $\max E$ est E tout entier, il existe un objet maximal x de E tel que j se factorise par l'immersion ouverte $E'' = E \setminus \{x\} \rightarrow E$. Mais alors $\#E'' = \#E - 1$, ce qui implique que le morphisme $\varprojlim F|_{E''} \rightarrow \varprojlim F|_{E'}$ est une fibration, et comme on sait que $\varprojlim F \rightarrow \varprojlim F|_{E''}$ est une fibration, la stabilité des fibrations par composition implique la propriété voulue. \square

COROLLAIRE 1.19. — Soit F un préfaisceau fibrant sur les bords sur une catégorie directe finie E . Pour tout monomorphisme $x \rightarrow x'$ de E , le morphisme induit $F(x') \rightarrow F(x)$ est une fibration.

Démonstration. — La flèche $x \rightarrow x'$ étant un monomorphisme de E , le foncteur $E/x \rightarrow E/x'$ est une immersion ouverte. Comme $F|_{E/x'}$ est fibrant sur les bords, on en déduit par la proposition ci-dessus que la flèche

$$F(x') \simeq \varprojlim F|_{E/x'} \longrightarrow \varprojlim F|_{E/x} \simeq F(x)$$

est une fibration. □

COROLLAIRE 1.20. — Soient E un ensemble ordonné fini, et x un élément de E . Pour tout préfaisceau fibrant sur les bords F sur E , le morphisme canonique $\varprojlim F \rightarrow F(x)$ est une fibration.

Démonstration. — Vu que E est un ensemble ordonné, l'application croissante canonique $E/x \rightarrow E$ est une immersion ouverte. On en déduit que le morphisme

$$\varprojlim F \longrightarrow \varprojlim F|_{E/x} \simeq F(x)$$

est une fibration. □

1.21. — Soient \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche et E une catégorie directe finie. On note $\mathcal{A}(E)^\partial$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}(E)$ formée des préfaisceaux fibrants sur les bords. On dit qu'une flèche $F \rightarrow F'$ de $\mathcal{A}(E)^\partial$ est une *fibration bordée* (resp. une *fibration triviale bordée*) si le morphisme $F \rightarrow F' \times_{\partial F'} \partial F$ induit par le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \partial F \\ \downarrow & & \downarrow \\ F' & \longrightarrow & \partial F' \end{array}$$

est une fibration naturelle (resp. une fibration triviale naturelle). On dit qu'une flèche de $\mathcal{A}(E)^\partial$ est une *fibration bordée naturellement triviale* si c'est à la fois une fibration bordée et une équivalence faible naturelle (on verra plus loin qu'un morphisme de $\mathcal{A}(E)^\partial$ est fibration triviale bordée si et seulement si c'est une fibration bordée naturellement triviale, mais en attendant la preuve, on prendra bien soin de distinguer ces deux notions).

L'énoncé ci-dessous résulte aussitôt du lemme 1.16.

LEMME 1.22. — Pour tout isomorphisme local entre catégories directes finies $u : E' \rightarrow E$, si $F \rightarrow F'$ est une fibration bordée (resp. une fibration triviale bordée, resp. une fibration bordée naturellement triviale) dans $\mathcal{A}(E)$, alors il en est de même de $u^*F \rightarrow u^*F'$ dans $\mathcal{A}(E')$.

PROPOSITION 1.23. — *La limite projective d'une fibration bordée (resp. d'une fibration triviale bordée, resp. d'une fibration bordée naturellement triviale) est une fibration (resp. une fibration triviale, resp. une fibration triviale).*

Démonstration. — Soit E une catégorie directe finie. On considère une fibration

bordée (resp. etc) $F \longrightarrow F'$ dans $\mathcal{A}(E)^\partial$, et on veut montrer que $\varprojlim F \longrightarrow \varprojlim F'$ est une fibration (resp. etc). On va de nouveau procéder par récurrence sur la longueur de E . Si $\ell(E) \leq 0$, l'assertion résulte du fait que les fibrations et les équivalences faibles entre objets fibrants sont stables par produits finis. Supposons $\ell(E) > 0$. Etant donné que $\ell(\partial E) < \ell(E)$, le morphisme canonique $\varprojlim F|_{\partial E} \longrightarrow \varprojlim F'|_{\partial E}$ est une fibration (resp. etc). Comme $\varprojlim F'$ est un objet fibrant, on peut former le carré cartésien suivant dans \mathcal{A} .

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim F' \times \varprojlim_{F'|_{\partial E}} \varprojlim F|_{\partial E} & \longrightarrow & \varprojlim F|_{\partial E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim F' & \longrightarrow & \varprojlim F'|_{\partial E} \end{array}$$

D'autre part, en utilisant les carrés cartésiens de la forme 1.17.5, on remarque qu'on a un carré cartésien canonique de la forme suivante dans \mathcal{A} .

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim F & \longrightarrow & \varprojlim F' \times \varprojlim_{F'|_{\partial E}} \varprojlim F|_{\partial E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{x \in \max E} F(x) & \longrightarrow & \prod_{x \in \max E} F'(x) \times_{\partial F'(x)} \partial F(x) \end{array}$$

La stabilité des fibrations (resp. des fibrations triviales) par composition et par changement de base le long d'un morphisme de source fibrante permet ainsi de conclure dans le cas d'une fibration bordée (resp. d'une fibration triviale bordée). Dans le cas d'une fibration bordée naturellement triviale, le même argument sera valide une fois vérifié que pour tout objet x de E , la flèche $F(x) \longrightarrow F'(x) \times_{\partial F'(x)} \partial F(x)$ est une fibration triviale. Or $\ell(\partial E/x) < \ell(E)$, et donc la flèche $\partial F(x) \longrightarrow \partial F'(x)$ est une fibration triviale. Il résulte donc de l'axiome D3 que la flèche $F'(x) \times_{\partial F'(x)} \partial F(x) \longrightarrow F'(x)$ est une fibration triviale. On en déduit grâce à l'axiome D1 que $F(x) \longrightarrow F'(x) \times_{\partial F'(x)} \partial F(x)$ est une équivalence faible, ce qui achève la démonstration. \square

COROLLAIRE 1.24. — *Toute fibration bordée (resp. fibration triviale bordée) est une fibration (resp. une fibration triviale) naturelle.*

Démonstration. — Soit $p : F \longrightarrow F'$ une fibration bordée (resp. une fibration triviale bordée) indexée par une catégorie directe finie E . Si x est un objet de E , on considère la fibration discrète finie $j : E/x \longrightarrow E$. Alors en vertu

de 1.22, j^*p est une fibration bordée (resp. une fibration triviale bordée) et la proposition 1.23 implique que $\varinjlim j^*p$ est une fibration (resp. une fibration triviale). Or on vérifie aussitôt que $\varinjlim j^*p$ est l'évaluation de p en x . \square

COROLLAIRE 1.25. — *L'image réciproque d'une fibration bordée par un morphisme dont la source est fibrante argument par argument est représentable.*

PROPOSITION 1.26. — *Un morphisme entre préfaisceaux fibrants sur les bords est une fibration bordée naturellement triviale si et seulement si c'est une fibration triviale bordée.*

Démonstration. — Si $F \rightarrow F'$ est une fibration bordée naturellement triviale, il résulte du lemme 1.22 et de la proposition 1.23 que $\partial F \rightarrow \partial F'$ est une fibration triviale naturelle. Il en est donc de même de $F' \times_{\partial F'} \partial F \rightarrow F'$. Comme $F \rightarrow F'$ est aussi une équivalence faible naturelle, l'axiome D1 implique que $F \rightarrow F' \times_{\partial F'} \partial F$ est une équivalence faible naturelle. Comme cette dernière est aussi une fibration naturelle, c'est donc une fibration triviale naturelle. La réciproque résulte du corollaire 1.24. \square

LEMME 1.27. — *Les fibrations bordées sont stables par composition et par changement de base le long d'un morphisme dont la source est fibrante sur les bords.*

Démonstration. — Soient $F \rightarrow F' \rightarrow F''$ deux fibrations bordées composables. On remarque qu'on a un carré cartésien canonique de la forme suivante.

$$\begin{array}{ccc} \partial F \times_{\partial F'} F' & \longrightarrow & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial F \times_{\partial F''} F'' & \longrightarrow & \partial F' \times_{\partial F''} F'' \end{array}$$

On en déduit que $\partial F \times_{\partial F'} F' \rightarrow \partial F \times_{\partial F''} F''$ est une fibration, et en la composant avec $F \rightarrow \partial F \times_{\partial F'} F'$, cela implique que $F \rightarrow \partial F \times_{\partial F''} F''$ est aussi une fibration.

Considérons à présent une fibration bordée $p : F \rightarrow F'$, un morphisme $u' : G' \rightarrow F'$ de source un préfaisceau fibrant sur les bords, et formons le carré cartésien suivant (ce qui est possible en vertu de 1.25).

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & F \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ G' & \xrightarrow{u'} & F' \end{array}$$

On veut montrer que q est une fibration bordée. Il faut d'abord vérifier que G est bien représentable au bord de E . Or pour tout objet x de E , le morphisme $\partial F(x) \rightarrow \partial F'(x)$ est une fibration (grâce à la proposition 1.23), et

$\partial G'(x)$ est fibrant (1.18). Par conséquent, $\varinjlim G|_{\partial E/x} \simeq \partial G'(x) \times_{\partial F'(x)} \partial F(x)$ est représentable dans \mathcal{A} . On vérifie enfin qu'on a un carré cartésien canonique

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial G \times_{\partial G'} G' & \longrightarrow & \partial F \times_{\partial F'} F' \end{array} ,$$

ce qui achève la démonstration. \square

1.28. — Soient E une catégorie directe finie et \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche. On considère un préfaisceau fibrant sur les bords F sur ∂E à valeurs dans \mathcal{A} . Si x désigne un objet de E , on a une fibration discrète finie canonique $j : \partial E/x \rightarrow \partial E$ (même lorsque x n'est pas dans ∂E). Par conséquent, $\varinjlim j^* F$ est représentable dans \mathcal{A} (1.18). On note $\partial F(x)$ un représentant, ce qui définit comme au numéro 1.13 un préfaisceau ∂F sur E (et non seulement sur ∂E). Une *donnée de prolongement* de F est un couple (G, h) , G (resp. h) étant un choix pour chaque objet maximal x de E d'un objet $G(x)$ de \mathcal{A} (resp. d'un morphisme $h(x) : G(x) \rightarrow \partial F(x)$ de \mathcal{A}). Une telle donnée détermine un unique préfaisceau H sur E tel que $H|_{\partial E} = F$, pour tout objet maximal x de E , $H(x) = G(x)$, et pour toute flèche $y \rightarrow x$ de E de but un objet maximal, le morphisme $H(x) \rightarrow H(y)$ soit le composé

$$H(x) = G(x) \xrightarrow{h(x)} \partial F(x) \rightarrow \varinjlim F|_{E/y} = F(y) = H(y) .$$

Si F' est un préfaisceau sur E , et si $u : F'|_{\partial E} \rightarrow F$ est un morphisme de préfaisceaux sur ∂E , u induit un morphisme canonique $\tilde{u} : F' \rightarrow \partial F$ dont la restriction à ∂E est le composé de u et du morphisme canonique $F \rightarrow \partial F$. Un prolongement de u en un morphisme $F' \rightarrow H$ est totalement défini par la donnée pour chaque objet maximal x de E d'un morphisme $v(x) : F'(x) \rightarrow G(x)$ tel que le diagramme suivant commute dans \mathcal{A} .

$$\begin{array}{ccccc} F'(x) & \xrightarrow{v(x)} & G(x) & \xrightarrow{h(x)} & \partial F(x) \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & \tilde{u}(x) & \end{array}$$

PROPOSITION 1.29. — *Soit E une catégorie directe finie. Il existe une factorisation de toute flèche u de $\mathcal{A}(E)$ dont le but est un préfaisceau fibrant sur les bords de la forme $u = pi$, où i est une équivalence faible naturelle, et p une fibration bordée (de source un préfaisceau fibrant sur les bords).*

Démonstration. — Soit $u : F \rightarrow F'$ une flèche de but un préfaisceau fibrant sur les bords. On va construire la factorisation de u en procédant par récurrence sur la longueur de E . Si $\ell(E) < 0$, alors E est l'ensemble vide, et il n'y a rien

à montrer. Si $\ell(E) \geq 0$, on peut supposer qu'il existe une factorisation de $u|_{\partial E}$ de la forme :

$$F|_{\partial E} \xrightarrow{i} F'' \xrightarrow{p} F'|_{\partial E},$$

i étant une équivalence faible naturelle, et p une fibration bordée. Soit x un objet maximal de E . Comme $\partial E/x \rightarrow \partial E$ est une fibration discrète finie, il résulte de 1.23 que la flèche canonique $\partial F''(x) \rightarrow \partial F'(x)$ est une fibration. On a en outre le carré commutatif canonique ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{u(x)} & F'(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial F''(x) & \longrightarrow & \partial F'(x) \end{array}$$

On peut alors factoriser la flèche $F(x) \rightarrow \partial F''(x) \times_{\partial F'(x)} F'(x)$ en une équivalence faible $F(x) \rightarrow F''(x)$ suivie d'une fibration $F''(x) \rightarrow \partial F''(x) \times_{\partial F'(x)} F'(x)$. On vérifie aussitôt que cela définit une factorisation de u satisfaisant les propriétés escomptées. \square

THÉORÈME 1.30. — *Si \mathcal{A} est une catégorie dérivable gauche et E une catégorie directe finie, alors $\mathcal{A}(E)$ admet une structure de catégorie dérivable à gauche, avec pour équivalences faibles les équivalences faibles naturelles, et pour fibrations, les fibrations bordées. On l'appelle la structure bordée sur $\mathcal{A}(E)$. En outre, pour tout isomorphisme local entre catégories directes finies $u : E \rightarrow E'$, le foncteur image inverse par u induit un foncteur exact à gauche pour les structures bordées*

$$u^* : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}(E').$$

Démonstration. — Montrons que $\mathcal{A}(E)^\partial$ est une catégorie dérivable à gauche. L'axiome D0 résulte du fait que le préfaisceau final \star est fibrant sur les bords, et l'axiome D1 est évident. Les axiomes D2 et D3 sont quant à eux conséquence du corollaire 1.24, du lemme 1.27 et de leurs analogues dans \mathcal{A} . Enfin, l'axiome D4 est une spécialisation de la proposition 1.29. La seconde assertion résulte aussitôt du lemme 1.22. \square

COROLLAIRE 1.31. — *Si \mathcal{A} est une catégorie dérivable à gauche, pour toute catégorie directe finie E , $\mathcal{A}(E)$ admet une structure de catégorie dérivable à gauche avec pour équivalences faibles les équivalences faibles naturelles, et pour fibrations, les fibrations naturelles. On l'appelle la structure naturelle sur $\mathcal{A}(E)$. En outre, pour tout foncteur entre catégories directes finies $u : E' \rightarrow E$, le foncteur $u^* : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}(E')$ est exact à gauche.*

Démonstration. — Le seul axiome non trivial à vérifier est D4. Soit $p : F \rightarrow F'$ une flèche de $\mathcal{A}(E)$ de but fibrant. On choisit une équivalence faible de but un préfaisceau fibrant sur les bords $i' : F' \rightarrow G'$, et on factorise la flèche

composée $i'p : F \rightarrow G'$ en une équivalence faible $i : F \rightarrow G$ suivie d'une fibration bordée $q : G \rightarrow G'$. En particulier, G et G' sont des objets fibrants argument par argument, et q est une fibration naturelle. En vertu de [Bro73, I.4, lemme 2], la projection de $F' \times_{G'} G$ vers G est une équivalence faible, et il est immédiat que la projection de $F' \times_{G'} G$ vers F' est une fibration. Les morphismes $F \rightarrow F' \times_{G'} G$ et $F' \times_{G'} G \rightarrow F'$ forment donc une factorisation de p en une équivalence faible suivie d'une fibration. \square

COROLLAIRE 1.32. — *Si \mathcal{A} est une catégorie dérivable à gauche, alors pour toute catégorie directe finie E , l'identité de $\mathcal{A}(E)$ définit un foncteur exact à gauche de la structure de catégorie dérivable à gauche bordée vers la structure de catégorie dérivable à gauche naturelle. En outre, on a des équivalences de catégories canoniques*

$$\mathrm{Ho} \mathcal{A}(E)^\partial \simeq \mathrm{Ho} \mathcal{A}_f(E) \simeq \mathrm{Ho} \mathcal{A}(E) .$$

2. Le dérivateur associé à une catégorie dérivable

2.1. — On désigne par *Dirf* la 2-catégorie de diagrammes formée des catégories directes finies. On note e la catégorie finale. Si E est une catégorie directe finie, on note p_E l'unique foncteur de E vers e . Si x est un objet de E , $x : e \rightarrow E$ désigne l'unique foncteur qui pointe x .

Nous renvoyons le lecteur à l'appendice (page 69) pour les définitions élémentaires concernant la notion de dérivateur (en particulier, on se référera sans vergogne aux axiomes de la théorie des dérivateurs par leurs petits noms : *Der 1*, *Der 2*, et *cetera desunt*).

2.2. — Soit \mathcal{C} une catégorie. Pour chaque petite catégorie E , on note $\mathcal{C}(E)$ la catégorie des préfaisceaux sur E à valeurs dans \mathcal{C} . Considérons un foncteur entre petites catégories $u : E' \rightarrow E$. On désigne comme de coutume par $u^* : \mathcal{C}(E) \rightarrow \mathcal{C}(E')$ le foncteur $F \mapsto (x \mapsto F(u(x)))$. Si G est un préfaisceau sur E' à valeurs dans \mathcal{C} , on note u_*G l'*image directe (cohomologique) de G par u_** , i.e. le préfaisceau d'ensembles sur $\mathcal{C}(E)$ défini par

$$F \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(E')}(u^*F, G) .$$

Si u_*G est représentable, on notera par abus encore u_*G tout choix d'un représentant.

2.3. — Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche. On note $\mathbb{D}\mathcal{A}$ le prédérivateur de domaine *Dirf* associé à \mathcal{A} . Autrement dit, pour toute catégorie directe finie E , $\mathbb{D}\mathcal{A}(E)$ est la localisation de $\mathcal{A}(E)$ par les équivalences faibles naturelles. En particulier, $\mathbb{D}\mathcal{A}(e) = \mathrm{Ho} \mathcal{A}$. Pour chaque foncteur entre catégories directes finies $u : E' \rightarrow E$, le foncteur $u^* : \mathbb{D}\mathcal{A}(E) \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}(E')$ est celui induit par le foncteur image inverse par u (voir l'exemple 1.2). Le but de ce paragraphe est

de montrer que $\mathbb{D}\mathcal{A}$ est un dérivateur faible à gauche satisfaisant (une version forte de) l'axiome de relèvement Der 5.

LEMME 2.4. — *Pour tout foncteur entre catégories directes finies $u : E' \rightarrow E$, et tout préfaisceau fibrant sur les bords G sur E' , u_*G est représentable. En outre, le foncteur induit $u_* : \mathcal{A}(E')^\partial \rightarrow \mathcal{A}(E)$ est exact à gauche (avec la structure bordée sur $\mathcal{A}(E')^\partial$, et la structure naturelle sur $\mathcal{A}(E)$).*

Démonstration. — Soit x un objet de E . On forme le carré cartésien ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} E'/x & \xrightarrow{j} & E' \\ u/x \downarrow & & \downarrow u \\ E/x & \xrightarrow{i} & E \end{array}$$

Comme le foncteur i est une fibration discrète finie, il en est de même de j . Par conséquent, en vertu du lemme 1.16 et de la proposition 1.18, $\varinjlim j^*G$ est représentable. Or $\varinjlim j^*G$ représente $u_*G(x)$ (cf. [Mac98, X.3, théorème 1]). On en déduit aussitôt que u_*G est représentable. D'autre part, il résulte de la proposition 1.23 et du théorème 1.30 que le foncteur $\varinjlim j^*$ est exact à gauche. On en déduit que le foncteur $u_* : \mathcal{A}(E')^\partial \rightarrow \mathcal{A}(E)$ est exact à gauche. \square

LEMME 2.5. — *Soit \mathcal{A} une catégorie munie d'une classe d'équivalences faibles $w\mathcal{A}$ vérifiant l'axiome D1 de la définition 1.1. On note $\mathrm{Ho}\mathcal{A}$ la localisation de \mathcal{A} par ces équivalences faibles. On considère une catégorie dérivable à gauche \mathcal{A}' , et un foncteur respectant les équivalences faibles $u^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$. On suppose aussi que pour tout objet fibrant G de \mathcal{A}' , le préfaisceau*

$$\mathcal{A}'^{op} \rightarrow \mathcal{E}ns \quad , \quad F \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(u^*F, G)$$

*est représentable par un objet u_*Y dans \mathcal{A} . On note enfin*

$$u_* : \mathcal{A}'_f \rightarrow \mathcal{A}$$

*le foncteur $Y \mapsto u_*Y$, et on suppose que u_* envoie les fibrations triviales de \mathcal{A}'_f sur des équivalences faibles de \mathcal{A} . Alors le foncteur u_* respecte les équivalences faibles, et le foncteur induit*

$$\mathrm{R}u_* : \mathrm{Ho}\mathcal{A}' \simeq \mathrm{Ho}\mathcal{A}'_f \rightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{A}$$

*est un adjoint à droite du foncteur induit par u^**

$$u^* : \mathrm{Ho}\mathcal{A} \rightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{A}' .$$

Démonstration. — En vertu de [Bro73, I.1, Factorization lemma], le foncteur u_* respecte les équivalences faibles. Il induit donc un foncteur $\underline{u}_* : \mathrm{Ho}\mathcal{A}'_f \rightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{A}$. On choisit un clivage normalisé de \mathcal{A}' , ce qui définit un quasi-inverse \underline{R}

de l'équivalence de catégories canonique $\mathrm{Ho} \mathcal{A}'_f \simeq \mathrm{Ho} \mathcal{A}'$ (1.8). On définit un foncteur

$$u_{\#} : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathrm{Ho} \mathcal{A}$$

comme le composé

$$\mathcal{A}' \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ho} \mathcal{A}' \xrightarrow{\underline{R}} \mathrm{Ho} \mathcal{A}'_f \xrightarrow{u_*} \mathrm{Ho} \mathcal{A} .$$

Autrement dit, si G est un objet de \mathcal{A}' , $u_{\#}(G) = u_*RG$, et si φ est une flèche de \mathcal{A}' , $u_{\#}(\varphi) = u_*(p(\varphi))u_*(q(\varphi))^{-1}$. Le foncteur $u_{\#}$ envoie les équivalences faibles de \mathcal{A}' sur des isomorphismes (puisqu'il se factorise par γ par construction). Il induit ainsi un foncteur $Ru_* : \mathrm{Ho} \mathcal{A}' \longrightarrow \mathrm{Ho} \mathcal{A}$. On va montrer que ce dernier est un adjoint à droite du foncteur $u^* : \mathrm{Ho} \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ho} \mathcal{A}'$. Soit G un objet fibrant de \mathcal{A}' . L'identité de u_*G définit un morphisme canonique $\varepsilon_G : u^*u_*G \longrightarrow G$. Si G est un objet de \mathcal{A}' , en composant ε_{RG} avec l'inverse de j_G , cela définit un morphisme dans $\mathrm{Ho} \mathcal{A}'$:

$$\underline{\varepsilon}_G : u^*Ru_*G \longrightarrow G .$$

On a ainsi défini un morphisme de foncteurs. En effet, si $\varphi : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de \mathcal{A}' , on obtient un diagramme commutatif de \mathcal{A}'

$$\begin{array}{ccc} u^*u_*RG & \xrightarrow{\varepsilon_{RG}} & RG \\ u^*u_*q(\varphi) \uparrow & & \uparrow q(\varphi) \\ u^*u_*S(\varphi) & \xrightarrow{\varepsilon_{S(\varphi)}} & S(\varphi) \\ u^*u_*p(\varphi) \downarrow & & \downarrow p(\varphi) \\ u^*u_*RG' & \xrightarrow{\varepsilon_{RG'}} & RG' \end{array}$$

dans lequel les flèches $q(\varphi)$ et $u^*u_*q(\varphi)$ sont des équivalences faibles. On en déduit qu'on a ainsi construit un morphisme de foncteurs de u^*Ru_* vers $i_{\underline{R}}$, et donc en composant avec l'isomorphisme de foncteurs de $i_{\underline{R}}$ vers l'identité de $\mathrm{Ho} \mathcal{A}'$ induit par j , on obtient bien un morphisme de foncteurs de u^*Ru_* vers $1_{\mathrm{Ho} \mathcal{A}'}$.

Soit F un objet de \mathcal{A} . La flèche $j_{u^*F} : u^*F \longrightarrow Ru^*F$ définit une unique flèche $\eta_F : F \longrightarrow u_*Ru^*F = u_{\#}u^*F$. On obtient ainsi un morphisme de $\mathrm{Ho} \mathcal{A}$:

$$\underline{\eta}_F : F \longrightarrow Ru_*u^*F .$$

Ce morphisme définit un morphisme de foncteurs : soit $\psi : F \longrightarrow F'$ un morphisme de \mathcal{A} . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} u^*F & \xrightarrow{j_{u^*}} & Ru^*F \\ & \searrow \sigma(u^*\psi) & \uparrow q(u^*\psi) \\ & & S(u^*\psi) \\ u^*\psi \downarrow & & \downarrow p(u^*\psi) \\ u^*F' & \xrightarrow{j_{u^*F'}} & Ru^*F' \end{array}$$

induit canoniquement un diagramme commutatif de \mathcal{A}'

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{\eta_F} & u_* Ru^* F \\
 \psi \downarrow & \searrow^{\tau(\psi)} & \uparrow^{u_* q(u^* \psi)} \\
 & & u_* S(u^* \psi) \\
 & & \downarrow^{u_* p(u^* \psi)} \\
 F' & \xrightarrow{\eta_{F'}} & u_* Ru^* F'
 \end{array}$$

dans lequel la flèche $u_* q(u^* \psi)$ est une équivalence faible.

Il suffit à présent de montrer que $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\eta}$ définissent respectivement la co-unité et l'unité d'une adjonction entre u^* et Ru_* . Or on vérifie aussitôt que les diagrammes ci-dessous commutent dans \mathcal{A}' et \mathcal{A} respectivement,

$$\begin{array}{ccc}
 & u^* u_{\#} u^* F & \\
 u^* \eta_F \nearrow & & \searrow^{\varepsilon_{Ru^* F}} \\
 u^* F & & Ru^* F \\
 \Downarrow & & \nearrow_{j_{u^* F}} \\
 & u^* F &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & u_{\#} u^* u_{\#} G & \\
 \eta_{u_{\#} G} \nearrow & & \searrow^{u_* q(\varepsilon_{RG})} \\
 u_{\#} G & \xrightarrow{\rho(\varepsilon_{RG})} & u_* S(\varepsilon_{RG}) \\
 u_* j_{RG} \searrow & & \nearrow_{u_* p(\varepsilon_{RG})} \\
 & u_{\#} RG &
 \end{array}$$

(où dans le second, $\rho(\varepsilon_{RG})$ est le morphisme défini par $\sigma(\varepsilon_{RG})$, et les flèches $u_* q(\varepsilon_{RG})$ et $u_* j_{RG}$ sont des équivalences faibles de \mathcal{A}). \square

PROPOSITION 2.6. — *Tout foncteur entre catégories directes finies admet une image directe cohomologique dans $\mathbb{D}\mathcal{A}$.*

Démonstration. — Soit $u : E' \rightarrow E$ un foncteur entre catégories directes finies. En vertu du lemme 2.4, les hypothèses du lemme 2.5 sont vérifiées pour $\mathcal{A}' = \mathcal{A}(E')$ (munie de la structure bordée) et $\mathcal{A} = \mathcal{A}(E)$. Ce dernier permet ainsi de conclure. \square

PROPOSITION 2.7. — *Pour tout foncteur entre catégories directes finies $u : E' \rightarrow E$ et tout objet x de E' , le morphisme de foncteurs canonique $x^* Ru_* \rightarrow Rp_* j^*$ associé au 2-diagramme standard*

$$\begin{array}{ccc}
 E'/x & \xrightarrow{i} & E' \\
 p \downarrow & \Downarrow \alpha & \downarrow u \\
 e & \xrightarrow{x} & E
 \end{array}$$

est un isomorphisme dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(e)$.

Démonstration. — On choisit deux clivages de $\mathcal{A}(E)$ et de $\mathcal{A}(E')$ respectivement pour les structures bordées. Si G est un objet de $\mathcal{A}(E')$, on obtient des

morphismes naturels en G ci-dessous (on reprend les notations de la preuve de 2.5).

$$x^*u_{\#}G \simeq p_*i^*(RG) \xrightarrow{p_*j_{i^*RG}} p_{\#}i^*RG \xleftarrow{p_{\#}i^*j_G} p_{\#}i^*G$$

Ces deux morphismes étant des images d'équivalences faibles entre objets fibrants par des foncteurs exacts à gauche, ce sont des équivalences faibles. Cela définit donc un isomorphisme de foncteurs $x^*Ru_* \simeq Rp_*i^*$, et on vérifie que c'est le morphisme canonique grâce à l'explicitation des unités et co-unités données dans la preuve de 2.5. \square

PROPOSITION 2.8. — *Pour toute famille finie de catégories directes finies E_i , $i \in I$, le foncteur canonique*

$$\mathbb{D}\mathcal{A}\left(\prod_{i \in I} E_i\right) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{D}\mathcal{A}(E_i)$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. — Nous laissons au lecteur le soin de montrer l'énoncé tout à fait formel suivant : si \mathcal{M} et \mathcal{M}' sont deux catégories et si \mathcal{W} (resp. \mathcal{W}') est une classe de flèches de \mathcal{M} (resp. de \mathcal{M}') contenant les identités, alors le foncteur canonique

$$(\mathcal{W} \times \mathcal{W}')^{-1}(\mathcal{M} \times \mathcal{M}') \longrightarrow \mathcal{W}^{-1}\mathcal{M} \times \mathcal{W}'^{-1}\mathcal{M}'$$

est une équivalence de catégories (en fait, un isomorphisme). Le cas d'une famille vide étant trivial, il est clair que cela implique l'assertion. \square

COROLLAIRE 2.9. — *Pour toute catégorie directe finie E , la catégorie $\mathbb{D}\mathcal{A}(E)$ admet des produits finis, et le foncteur canonique $\mathcal{A}_f(E) \longrightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}(E)$ y commute.*

Démonstration. — L'existence des produits finis résulte facilement des propositions 2.6 et 2.8. La seconde assertion est elle conséquence du fait que les équivalences faibles de $\mathcal{A}_f(E)$ sont stables par produits finis. \square

2.10. — Une *catégorie finie libre* est une catégorie directe finie E telle que pour tout objet x de E , $\partial E/x$ soit une somme disjointe de catégories directes finies admettant un objet final. On remarque facilement que pour qu'une catégorie directe finie E soit une catégorie finie libre, il faut et il suffit qu'il n'y ait pas de carrés commutatifs non triviaux dans E , *i.e.* que tout carré commutatif de E

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & y \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \longrightarrow & t \end{array}$$

se complète toujours en un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & y \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ z & \longrightarrow & t \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & y \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ z & \longrightarrow & t \end{array} .$$

En particulier, si E est une catégorie finie libre, alors E^{op} en est une aussi. Par exemple, pour tout $n \geq 0$, l'ensemble ordonné $\Delta_n = \{0, \dots, n\}$ est une catégorie finie libre, ainsi que l'ensemble ordonné $I = \{0 > 2 < 1\}$. Les catégories finies libres sont stables par sommes finies. Cependant, les ensembles ordonnés $\Delta_m \times \Delta_n$, $m, n \geq 1$, sont des exemples montrant que la notion de catégorie finie libre n'est pas stable par produits finis. La notion de liberté étant locale par définition, si E est une catégorie finie libre, alors la source de toute fibration discrète finie de but E est une catégorie finie libre. D'autre part, pour toute catégorie \mathcal{C} admettant des produits finis, tout préfaisceau F sur une catégorie finie libre E à valeurs dans \mathcal{C} est représentable au bord de E : en effet, on a alors un isomorphisme canonique

$$(2.10.1) \quad \partial F(x) = \prod_{y \in \max \partial E/x} F(y) .$$

2.11. — On rappelle que pour tout prédérivateur \mathbb{D} de domaine $\mathcal{D}ia$, et pour tout objet E de $\mathcal{D}ia$, il existe, par un simple jeu de 2-fonctorialité, un foncteur canonique

$$\text{dia}_E : \mathbb{D}(E) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(E^{op}, \mathbb{D}(e)) .$$

Dans le cas où \mathbb{D} est de la forme $\mathbb{D}\mathcal{A}$, où \mathcal{A} est une catégorie dérivable à gauche (plus généralement un localisateur), ce foncteur est obtenu par la propriété universelle de la localisation par le foncteur

$$\underline{\text{Hom}}(E^{op}, \gamma) : \underline{\text{Hom}}(E^{op}, \mathcal{A}) = \mathcal{A}(E) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(E^{op}, \mathbb{D}\mathcal{A}(e)) .$$

LEMME 2.12. — *On considère un diagramme de \mathcal{A}_f dont l'image dans $\text{Ho } \mathcal{A}_f$ est un carré commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{i_0} & X'' & \xrightarrow{i'_0} & X' \\ \downarrow p & & & & \downarrow p' \\ Y & \xleftarrow{j} & Y'' & \xrightarrow{j'} & Y' \end{array}$$

(les flèches i_0 et j étant des équivalences faibles). Alors il existe un objet X'' de \mathcal{A}_f , une fibration triviale $i : X'' \longrightarrow X$ et deux fibrations $i' : X'' \longrightarrow X'$ et $p'' : X'' \longrightarrow Y''$ de \mathcal{A}_f , telles que le diagramme suivant commute dans \mathcal{A}_f à

homotopie près,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{i} & X'' & \xrightarrow{i'} & X' \\ p \downarrow & & p'' \downarrow & & \downarrow p' \\ Y & \xleftarrow{j} & Y'' & \xrightarrow{j'} & Y' \end{array} ,$$

et définisse le même carré commutatif que le précédent dans $\text{Ho } \mathcal{A}_f$.

La preuve de ce lemme est un exercice de manipulation du calcul de fraction à droite que nous laissons au lecteur.

LEMME 2.13. — Soient $u : X \rightarrow Y$ et $v : X \rightarrow Y$ deux morphismes homotopes dans \mathcal{A}_f . On choisit un cocylindre de Y .

$$Y \xrightarrow{s} Y^I \xrightarrow{(d^0, d^1)} Y \times Y$$

Alors il existe une fibration triviale $q : Z \rightarrow X$ telle que uq et vq soient homotopes relativement au cocylindre choisi (autrement dit, il existe une flèche $h : Z \rightarrow Y^I$ telle que $d^0 h = uq$ et $d^1 h = vq$).

Démonstration. — En vertu de [Bro73, 1.2, proposition 1 (ii)], il existe une équivalence faible de source fibrante $q' : Z' \rightarrow X$, et un morphisme $h' : Z' \rightarrow Y^I$ tels que $h'd^0 = uq'$ et $h'd^1 = vq'$. Or la flèche (d^0, d^1) étant une fibration, et X étant fibrant, on peut former le produit fibré ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\sigma} & Y^I \\ \pi \downarrow & & \downarrow (d^0, d^1) \\ X & \xrightarrow{(u, v)} & Y \times Y \end{array}$$

La donnée de q' et h' équivaut à celle d'un morphisme $w' : Z' \rightarrow T$ tel que $q' = \pi w'$ et $h' = \sigma w'$. On factorise w' en une équivalence faible i suivie d'une fibration $p : Z \rightarrow T$. On pose alors $h = \sigma p$ et $q = \pi p$. Comme π est une fibration, il en est de même de q , et l'égalité $qi = q'$ implique que q est une fibration triviale. Il est enfin immédiat par construction de h que $d^0 h = uq$ et $d^1 h = vq$. \square

LEMME 2.14. — On considère un diagramme commutatif à homotopie près dans \mathcal{A}_f

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{i} & X'' & \xrightarrow{i'} & X' \\ p \downarrow & & p'' \downarrow & & \downarrow p' \\ Y & \xleftarrow{j} & Y'' & \xrightarrow{j'} & Y' \end{array} ,$$

et on choisit deux cocylindres

$$Y \xrightarrow{s} Y^I \xrightarrow{(d^0, d^1)} Y \times Y \quad \text{et} \quad Y' \xrightarrow{s'} Y'^I \xrightarrow{(d'^0, d'^1)} Y' \times Y'$$

de Y et de Y' respectivement. Alors il existe une fibration triviale $q : Z \rightarrow X''$ et deux morphismes $h : Z \rightarrow Y^I$, $h' : Z \rightarrow Y'^I$, tels que le diagramme suivant commute dans \mathcal{A}_f .

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xleftarrow{iq} & Z & \xrightarrow{i'q} & X' & & \\ p \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow h' & & \downarrow p' \\ Y & \xleftarrow{d^0} Y^I & \xrightarrow{d^1} Y & \xleftarrow{j} Y'' & \xrightarrow{j'} Y' & \xleftarrow{d'^1} Y'^I & \xrightarrow{d'^0} Y' \end{array}$$

Démonstration. — En vertu du lemme 2.13 il existe une fibration triviale $q' : Z' \rightarrow X''$ (resp. $q'' : Z'' \rightarrow X''$), et un morphisme $k : Z' \rightarrow Y^I$ (resp. $k' : Z'' \rightarrow Y'^I$) tels que $d^0k = piq'$ et $d^1k = jp''q'$ (resp. $d'^1k' = j'p''q''$ et $d'^0k' = p'i'q''$). Après avoir formé le produit fibré $Z = Z' \times_{X''} Z''$, on parvient à compléter le diagramme attendu. \square

PROPOSITION 2.15. — *Pour toute catégorie finie libre E , le foncteur canonique $\text{dia}_E : \mathbb{D}\mathcal{A}(E) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(E^{op}, \mathbb{D}\mathcal{A}(e))$ est plein et essentiellement surjectif.*

Démonstration. — En vertu du corollaire 1.32, l'inclusion de \mathcal{A}_f dans \mathcal{A} induit une équivalence de prédérivateurs $\mathbb{D}\mathcal{A}_f \simeq \mathbb{D}\mathcal{A}$. On peut donc supposer que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f$, i.e. que \mathcal{A} est une catégorie d'objets fibrants. On procède par récurrence sur la longueur de E . Le cas $\ell(E) \leq 0$ est trivial : E est alors discrète, et il résulte de la proposition 2.8 que le foncteur dia_E est une équivalence de catégories. On peut donc supposer que $\ell(E) > 0$. Commençons par l'essentielle surjectivité. Considérons un foncteur $F : E^{op} \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}(e)$. Le bord de E , ∂E , est un crible de E , et donc c'est une catégorie finie libre. Vu que $\ell(\partial E) < \ell(E)$, il existe un objet F' de $\mathbb{D}\mathcal{A}(\partial E)$ tel que $\text{dia}_{\partial E}(F')$ et $F|_{\partial E}$ soient isomorphes. Considérons un objet maximal x de E . En vertu du corollaire 2.9, on peut calculer les produits finis indifféremment dans \mathcal{A} ou dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(e) = \text{Ho } \mathcal{A}$. Alors l'isomorphisme $\partial F'(x) \simeq \partial F(x)$ dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(e)$ et la flèche $F(x) \rightarrow \partial F(x)$ définissent ainsi une flèche $F(x) \rightarrow \partial F'(x)$. Comme $\mathbb{D}\mathcal{A}(e)$ est obtenue par un calcul de fractions à droite à homotopie près, celle-ci est représentable par une flèche de \mathcal{A} de la forme

$$F(x) \xleftarrow{q} F'(x) \xrightarrow{p} \partial F'(x),$$

la flèche q étant une équivalence faible. Les notations que nous avons choisies laissent deviner comment construire un objet F' de $\mathbb{D}\mathcal{A}(E)$ tel que $\text{dia}_E(F')$ soit isomorphe à F .

Il reste donc à montrer que dia_E est plein. Soient F et G deux préfaisceaux

sur E à valeurs dans \mathcal{A} . On se donne une flèche $p : \text{dia}_E(F) \longrightarrow \text{dia}_E(G)$. Par hypothèse de récurrence, il existe une flèche

$$q : F|_{\partial E} \longrightarrow G|_{\partial E}$$

dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(E)$ telle que $\text{dia}_E(q) = p|_{\partial E}$. La flèche q peut être représentée par un diagramme de $\mathcal{A}(E)$ de la forme

$$F|_{\partial E} \xleftarrow{j} H \xrightarrow{r} G|_{\partial E},$$

j étant une fibration bordée triviale, et r une fibration bordée de $\mathcal{A}(\partial E)$. On choisit une fois pour toutes deux cocylindres

$$F \xrightarrow{s} F^I \xrightarrow{(d^0, d^1)} F \times F \quad \text{et} \quad G \xrightarrow{\sigma} G^I \xrightarrow{(\delta^0, \delta^1)} G \times G$$

de F et G respectivement. Soit x un objet maximal de E . Etant donné que E est une catégorie finie libre, les bords de préfaisceaux se calculent en termes de produits (2.10.1), et donc en vertu du corollaire 2.9, le diagramme suivant commute dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(e)$.

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{p(x)} & G(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial F(x) & \xleftarrow{\partial j(x)} \partial H(x) \xrightarrow{\partial r(x)} & \partial G(x) \end{array}$$

Les cocylindres F^I et G^I définissent des cocylindres $\partial F^I(x)$ et $\partial G^I(x)$ de $\partial F(x)$ et $\partial G(x)$ respectivement. Il résulte par conséquent des lemmes 2.12 et 2.14 que ce dernier peut être représenté dans \mathcal{A} par un diagramme commutatif de la forme suivante (la flèche $f(x)$ étant une équivalence faible).

$$\begin{array}{ccccccc} F(x) & \xleftarrow{f(x)} & Z(x) & \xrightarrow{g(x)} & G(x) & & \\ \downarrow & & \downarrow h(x) & & \downarrow k(x) & & \\ \partial F(x) & \xleftarrow{\partial d^0(x)} \partial F^I(x) \xrightarrow{\partial d^1(x)} & \partial F(x) & \xleftarrow{\partial j(x)} \partial H(x) \xrightarrow{\partial r(x)} & \partial G(x) & \xleftarrow{\partial \delta^1(x)} \partial G^I(x) \xrightarrow{\partial \delta^0(x)} & \partial G(x) \end{array}$$

Les données de prolongement (Z, h) , $(Z, \partial d^1 h)$, (Z, l) , $(Z, \partial \delta^1 k)$ et (Z, k) définissent des prolongements sur E de $F^I|_{\partial E}$, $F|_{\partial E}$, H , $G|_{\partial E}$ et $G^I|_{\partial E}$, notés respectivement F_0 , F_1 , H' , G_1 et G_0 . On obtient un diagramme dans $\mathcal{A}(E)$ de la forme

$$F \longleftarrow F_0 \longrightarrow F_1 \longleftarrow H' \longrightarrow G_1 \longleftarrow G_0 \longrightarrow G$$

dont toutes les flèches allant vers la gauche sont des équivalences faibles. Cela définit donc un morphisme $q' : F \longrightarrow G$, et on vérifie aussitôt que $\text{dia}_E(q') = p$. \square

LEMME 2.16. — On note I l'ensemble ordonné $\{0 < 2 > 1\}$. On considère un diagramme de la forme

$$Y' \xrightarrow{v} Y \xleftarrow{p} X$$

dont tous les objets sont fibrants et dans lequel p est une fibration, vu comme un préfaisceau sur I , noté F . Alors $\mathbf{R}p_{I*}F$ est canoniquement isomorphe à l'image du produit fibré $X' = Y' \times_Y X$ par le foncteur canonique de \mathcal{A} vers $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$.

Démonstration. — Supposons dans un premier temps que v soit en outre une fibration. L'assertion résulte alors de la construction même de $\mathbf{R}p_{I*}$. On peut à présent montrer le cas général. On choisit une factorisation de v en une équivalence faible $s : Y' \rightarrow Y''$ suivie d'une fibration $q : Y'' \rightarrow Y$, et on pose $X'' = Y'' \times_Y X$. On peut alors former les carrés cartésiens ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{t} & X'' & \xrightarrow{r} & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p'' & & \downarrow p \\ Y' & \xrightarrow{s} & Y'' & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

Vu que p'' est aussi une fibration, l'image réciproque de s par p'' (à savoir t) est une équivalence faible, ce qui achève la démonstration. \square

LEMME 2.17. — Soit $p : X' \rightarrow X$ une flèche de \mathcal{A}_f . Pour que p admette une section dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$, il faut et il suffit qu'il existe une flèche $p' : Y'' \rightarrow Y'$ de \mathcal{A} telle que la composée pp' soit une équivalence faible.

Démonstration. — En vertu de 1.32, on peut supposer que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f$. Il est immédiat que c'est une condition suffisante. Pour montrer que c'est une condition nécessaire, supposons que p admette une section s dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$. Comme les équivalences faibles de \mathcal{A} admettent un calcul de fractions à droite à homotopie près, elle peut être représentée par un diagramme de \mathcal{A} de la forme suivante (σ étant une équivalence faible)

$$X \xleftarrow{\sigma} X'' \xrightarrow{p'} X' .$$

Il suffit de montrer que pp' est une équivalence faible. Or l'égalité $ps = 1_X$ dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$ s'exprime par le calcul de fractions en un diagramme commutatif à homotopie près dans \mathcal{A} de la forme

$$\begin{array}{ccccc} & & X''' & & \\ & \swarrow \tau & \downarrow u & \searrow \varphi & \\ X & \xleftarrow{\sigma} & X'' & \xrightarrow{p'} & X' \xrightarrow{p} X \end{array}$$

dans lequel τ , u et φ sont des équivalences faibles. Comme tout morphisme homotope à une équivalence faible est une équivalence faible, cela achève la démonstration. \square

PROPOSITION 2.18. — *Pour qu'une flèche $p : X' \rightarrow X$ de \mathcal{A}_f soit un isomorphisme dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$, il faut et il suffit qu'il existe deux flèches $p' : X'' \rightarrow X'$ et $p'' : X''' \rightarrow X''$ de \mathcal{A} telles que pp' et $p'p''$ soient des équivalences faibles.*

Démonstration. — On peut évidemment supposer que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f$. Si p est un isomorphisme de $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$, il admet en particulier une section, et donc en vertu du lemme précédent, il existe une flèche $p' : X'' \rightarrow X'$ de \mathcal{A} telle que pp' soit une équivalence faible. Mais alors p' est aussi un isomorphisme dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$, ce qui implique l'existence d'un morphisme p'' vérifiant les conditions voulues. La réciproque est évidente. \square

LEMME 2.19. — *Soit E une catégorie directe finie. On considère un morphisme de préfaisceaux fibrants sur les bords à valeurs dans \mathcal{A} $q : F' \rightarrow F$ tel que pour tout objet x de E , la flèche $q(x) : F'(x) \rightarrow F(x)$ soit un isomorphisme de $\mathbb{D}\mathcal{A}(e)$. Alors q est un isomorphisme de $\mathbb{D}\mathcal{A}(E)$.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur la longueur de E . Si $\ell(E) \leq 0$, E est alors discrète, et donc l'assertion est évidente en vertu de la proposition 2.8. Supposons que $\ell(E) > 0$. On a $\ell(\partial E) < \ell(E)$, et donc, les préfaisceaux $F'|_{\partial E}$ et $F|_{\partial E}$ étant fibrants sur les bords (∂E est un crible de E), l'hypothèse de récurrence implique que $q|_{\partial E}$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(\partial E)$. En vertu de la proposition précédente, il existe deux morphismes

$$q'' : F''' \rightarrow F'' \quad \text{et} \quad q' : F'' \rightarrow F'|_{\partial E}$$

dans $\mathcal{A}(\partial E)^\partial$ tels que $q|_{\partial E}q'$ et $q'q''$ soient des équivalences faibles naturelles. Considérons un objet maximal x de E . Le morphisme canonique $F(x) \rightarrow \partial F(x)$ étant une fibration, on peut former le diagramme commutatif suivant dans \mathcal{A}_f .

$$\begin{array}{ccccc} \partial F'''(x) \times_{\partial F'(x)} F'(x) & \xrightarrow{\sigma(x)} & F'(x) & \xrightarrow{q(x)} & F(x) \\ \tau(x) \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \partial F'''(x) & \xrightarrow{\partial q''(x)} & \partial F''(x) & \xrightarrow{\partial q'(x)} & \partial F'(x) & \xrightarrow{\partial q(x)} & \partial F(x) \end{array}$$

Comme $F'(x) \rightarrow \partial F'(x)$ est une fibration et $\partial q'q''(x)$ une équivalence faible (grâce à 2.4), il résulte de [Bro73, I.4, lemme 2] que la flèche $\sigma(x)$ est une équivalence faible. La flèche $q(x)$ étant un isomorphisme dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(e)$, il en est de même de $q(x)\sigma(x)$. En vertu de la proposition 2.18, il existe en particulier une flèche

$$u(x) : F_0(x) \rightarrow \partial F'''(x) \times_{\partial F'(x)} F'(x)$$

telle que $q(x)s(x)u(x)$ soit une équivalence faible. On pose alors $\varphi(x) = \partial q''(x)\tau(x)u(x)$. Cela définit une donnée de prolongement (F_0, φ) de F'' , et partant, un préfaisceau F_0 sur E , ainsi qu'une flèche $q_0 : F_0 \rightarrow F'$ dans $\mathcal{A}(E)$, telle que qq_0 soit une équivalence faible. On factorise q_0 en une équivalence

faible $F_0 \rightarrow F_1$ de but un préfaisceau fibrant sur les bords, et une fibration bordée $q_1 : F_1 \rightarrow F'$ (1.29). Il est clair que qq_1 est encore une équivalence faible naturelle. Cela implique que pour tout élément x de E , x^*q_1 est un isomorphisme dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(e)$, et ce qui précède appliqué à q_1 montre qu'il existe un morphisme $q_2 : F_2 \rightarrow F_1$ de $\mathcal{A}(E)$ tel que q_1q_2 soit une équivalence faible. Par conséquent, q est un isomorphisme dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(E)$. \square

PROPOSITION 2.20. — *Soit E une catégorie directe finie. La famille de foncteurs*

$$x^* : \mathbb{D}\mathcal{A}(E) \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}(e) \quad , \quad x \in \text{Ob } E$$

est conservative. Autrement dit, pour qu'une flèche de $\mathbb{D}\mathcal{A}(E)$ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que son image par chacun des foncteurs image inverse x^ , $x \in \text{Ob } E$, soit un isomorphisme dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(e)$.*

Démonstration. — En vertu du corollaire 1.32, comme $\mathcal{A}(E)^\partial$ est une catégorie d'objets fibrants, $\mathbb{D}\mathcal{A}(E)$ est obtenue à partir de $\mathcal{A}(E)^\partial$ par un calcul de fractions à droite à homotopie près. En particulier, toute flèche f de $\mathbb{D}\mathcal{A}(E)$ peut s'écrire $f = qs^{-1}$ où s est une équivalence faible naturelle, et q un morphisme de $\mathcal{A}(E)$ entre préfaisceaux fibrants sur les bords. Si pour tout élément x de E , x^*f est un isomorphisme, alors il en va de même pour q . En vertu du lemme précédent, q est donc un isomorphisme, et par suite, f est un isomorphisme. \square

THÉORÈME 2.21. — *Pour toute catégorie dérivable à gauche \mathcal{A} , le prédérivateur associé $\mathbb{D}\mathcal{A}$ est un dérivateur faible à gauche de domaine *Dirf* vérifiant l'axiome Der 5.*

Démonstration. — L'axiome Der 1 résulte de 2.8, Der 2 de 2.20, Der 3g de 2.6, Der 4g de 2.7. L'axiome Der 5 est lui conséquence de la proposition 2.15 appliquée aux catégories dérivables à gauche de la forme $\mathcal{A}(E)$ pour chaque catégorie directe finie E , munies par exemple la structure naturelle (1.31). \square

2.22. — Une *catégorie dérivable à droite* est une catégorie \mathcal{A} , munie d'une classe d'*équivalences faibles* $w\mathcal{A}$ et d'une classe de *cofibrations* $c\mathcal{A}$ telles que \mathcal{A}^{op} soit une catégorie dérivable à gauche dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les éléments de $w\mathcal{A}$ (resp. de $c\mathcal{A}$). On appelle *cofibrations triviales* les éléments de $c\mathcal{A} \cap w\mathcal{A}$. La catégorie \mathcal{A} admet en particulier un objet initial, noté \emptyset , et on appelle *objets cofibrants* les objets X de \mathcal{A} tels que $\emptyset \rightarrow X$ soit une cofibration. On note \mathcal{A}_c la sous-catégorie pleine de \mathcal{A} formée des objets cofibrants. C'est encore une catégorie dérivable à droite avec les définitions évidentes. On désigne enfin par $\mathbb{D}\mathcal{A}$ le prédérivateur associé à \mathcal{A} .

EXEMPLE 2.23. — Si \mathcal{A} est une catégorie de Waldhausen (*i.e.* une catégorie avec cofibrations et et équivalences faibles au sens de [Wal85]) satisfaisant l'axiome de saturation et l'axiome du cylindre, alors \mathcal{A} est une catégorie dérivable à droite. Réciproquement, toute catégorie dérivable à droite dont

tous les objets sont cofibrants et admettant un objet nul est une catégorie de Waldhausen.

COROLLAIRE 2.24. — *Pour toute catégorie dérivable à droite \mathcal{A} , le prédérivateur associé $\mathbb{D}\mathcal{A}$ est un dérivateur faible à droite de domaine *Dirf* vérifiant l'axiome Der 5.*

Démonstration. — En vertu du théorème 2.21, le prédérivateur $\mathbb{D}(\mathcal{A}^{op})$ est un dérivateur faible à gauche vérifiant l'axiome Der 5. Par conséquent, $\mathbb{D}\mathcal{A} = (\mathbb{D}(\mathcal{A}^{op}))^{op}$ est un dérivateur faible à droite vérifiant l'axiome Der 5. \square

2.25. — Une *catégorie dérivable* est une catégorie \mathcal{A} , munie d'une classe d'équivalences faibles $w\mathcal{A}$, d'une classe de fibrations $f\mathcal{A}$, et d'une classe de cofibrations $c\mathcal{A}$, telles que $(\mathcal{A}, w\mathcal{A}, f\mathcal{A})$ et $(\mathcal{A}, w\mathcal{A}, c\mathcal{A})$ forment respectivement une catégorie dérivable à gauche, et une catégorie dérivable à droite.

EXEMPLE 2.26. — Toute catégorie biWaldhausen compliciale satisfaisant les conditions de stabilité par somme amalgamée homotopique et changement de base homotopique de [TT90, 1.3.5] est une catégorie dérivable. En particulier, si \mathcal{E} est une catégorie exacte, la catégorie des complexes sur \mathcal{E} munie de la classe des quasi-isomorphismes admet une structure de catégorie dérivable (voir 1.3).

EXEMPLE 2.27. — Toute catégorie de modèles (non nécessairement fermée) au sens de [Qui67] est une catégorie dérivable. Toute catégorie de modèles au sens de Thomason [Wei01] est une catégorie dérivable (voir 5.18).

COROLLAIRE 2.28. — *Pour toute catégorie dérivable \mathcal{A} , le prédérivateur associé $\mathbb{D}\mathcal{A}$ est un dérivateur de domaine *Dirf*.*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt de 2.21 et de 2.24. \square

3. Functorialités

LEMME 3.1. — *Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche. On considère une catégorie \mathcal{A}' , munie d'une classe de flèches \mathcal{F} vérifiant les conditions suivantes.*

- (i) *La catégorie \mathcal{A}' admet un objet final. Pour tout objet X de \mathcal{A}' , la flèche de X vers l'objet final est dans \mathcal{F} .*
- (ii) *La classe \mathcal{F} est stable par composition.*
- (iii) *Tout élément de \mathcal{F} est carrable, et \mathcal{F} est stable par changement de base.*

On se donne un foncteur $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ qui envoie les fibrations de \mathcal{A} sur des éléments de \mathcal{F} et vérifie les axiomes EG0 et EG2 du numéro 1.9. Alors pour toute catégorie directe finie E , et tout préfaisceau fibrant sur les bords F sur E à valeurs dans \mathcal{A} , le préfaisceau ΦF est représentable au bord de E . En outre $\varinjlim \Phi F$ est représentable dans \mathcal{A}' , et le morphisme canonique $\Phi \varinjlim F \rightarrow \varinjlim \Phi F$ est un isomorphisme.

Démonstration. — On va procéder comme de coutume par récurrence sur la longueur de E . Si E est vide, l'assertion est triviale. On peut donc supposer que $\ell(E) \geq 0$. Soit F un objet de $\mathcal{A}(E)^\partial$. Comme pour tout objet x de E , $\ell(\partial E/x) < \ell(E)$, la flèche canonique

$$\Phi \varprojlim_{\partial E/x} F = \Phi \partial F(x) \longrightarrow \partial \Phi F(x) = \varprojlim_{\partial E/x} \Phi F$$

est un isomorphisme. On en déduit que le morphisme $\Phi F(x) \longrightarrow \partial \Phi F(x)$ est dans \mathcal{F} (en particulier, F est donc représentable au bord de E). On remarque d'autre part que les conditions (i) et (iii) impliquent que \mathcal{A}' admet des produits finis, et on s'aperçoit aussitôt grâce aux axiomes EG0 et EG2 que Φ y commute. L'axiome EG2 et les diagrammes de type (1.17.5) montrent donc que $\Phi \varprojlim F \simeq \varprojlim \Phi F$. \square

LEMME 3.2. — Soit $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à gauche entre catégories dérivables à gauche. Pour toute catégorie directe finie E , le foncteur induit

$$\Phi : \mathcal{A}(E) \longrightarrow \mathcal{A}'(E)$$

est exact à gauche pour les structures bordées. En outre, pour tout foncteur entre catégories directes finies $u : E' \longrightarrow E$, et tout objet F de $\mathcal{A}(E')^\partial$, le morphisme canonique

$$\Phi u_* F \longrightarrow u_* \Phi F$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Il suffit de vérifier que $\Phi : \mathcal{A}_f(E) \longrightarrow \mathcal{A}'_f(E)$ respecte les préfaisceaux fibrants sur les bords et que pour tout objet F de $\mathcal{A}(E)^\partial$, le morphisme canonique

$$\Phi \varprojlim F \longrightarrow \varprojlim \Phi F$$

est un isomorphisme. Or cela résulte immédiatement du lemme précédent. \square

3.3. — Soit $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à gauche entre catégories dérivables à gauche. Alors il induit un foncteur exact à gauche Φ_f de \mathcal{A}_f vers \mathcal{A}'_f qui respecte les équivalences faibles (1.9), ce qui induit un morphisme de prédérivateur (*i.e.* un *Dirf*-morphisme)

$$\Phi_f : \mathbb{D}\mathcal{A}_f \longrightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}'_f$$

Les équivalences de prédérivateurs canoniques $\mathbb{D}\mathcal{A}_f \simeq \mathbb{D}\mathcal{A}$ permettent ainsi de définir un *Dirf*-morphisme

$$\mathbb{R}\Phi : \mathbb{D}\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}' .$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que pour toute catégorie directe finie E , le foncteur

$$\mathbb{R}\Phi : \mathbb{D}\mathcal{A}(E) \longrightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}'(E)$$

est le foncteur dérivé (total) à droite ⁽³⁾ du foncteur

$$\Phi : \mathcal{A}(E) \longrightarrow \mathcal{A}'(E) .$$

On vérifie en outre que si $\Phi' : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}''$ est un second foncteur exact à gauche de but une catégorie dérivable à gauche, alors le 2-*Dirf*-morphisme canonique

$$R(\Phi'\Phi) \longrightarrow R\Phi'R\Phi$$

est un isomorphisme.

PROPOSITION 3.4. — Soit $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à gauche entre catégories dérivables à gauche. Alors le *Dirf*-morphisme $R\Phi : \mathbb{D}\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}'$ est exact à gauche.

Démonstration. — Cela résulte aussitôt du corollaire 1.32 assorti des lemmes 2.4 et 3.2. \square

SCHOLIE 3.5. — On a ainsi défini un 2-foncteur de la catégorie des catégories dérivables à gauche (avec pour 1-flèches les foncteurs exacts à gauche, et pour 2-flèches les morphismes de tels foncteurs) vers celle des dérivateurs faibles à gauche de domaine *Dirf*. Il est évident que par dualité, tout foncteur exact à droite entre catégories dérivables à droite $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ induit un *Dirf*-morphisme exact à droite $L\Phi : \mathbb{D}\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}'$ etc.

3.6. — Soit $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à gauche entre catégories dérivables à gauche. On dit que Φ a la *propriété d'approximation* si les axiomes suivants sont vérifiés.

AP1 Une flèche de \mathcal{A}_f est une équivalence faible si et seulement si son image dans \mathcal{A}' par Φ en est une.

AP2 Si $Y \longrightarrow \Phi X$ est une flèche de \mathcal{A}' , X et Y étant des objets fibrants de \mathcal{A} et de \mathcal{A}' respectivement, il existe une équivalence faible de source fibrante $v : Y' \longrightarrow Y$, un morphisme de source fibrante $u : X' \longrightarrow X$ et une équivalence faible $Y' \longrightarrow \Phi X'$ tels que le carré suivant commute dans \mathcal{A}' .

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \Phi X \\ v \uparrow & & \uparrow \Phi u \\ Y' & \longrightarrow & \Phi X' \end{array}$$

On considère dans la suite un tel foncteur $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$.

SCHOLIE 3.7. — On peut affiner l'axiome AP2 : soit $p : Y \longrightarrow \Phi X$ un morphisme de \mathcal{A}'_f (X étant fibrant). Alors il existe une fibration triviale $v : Y' \longrightarrow$

⁽³⁾Pour un traitement systématique et conceptuel de la notion de foncteur dérivé dans le cadre des catégories dérivables, nous renvoyons le lecteur à [KM08].

Y , une fibration $u : X' \rightarrow X$ et une équivalence faible $q : Y' \rightarrow \Phi X'$ telle que le carré suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{p} & \Phi X \\ v \uparrow & & \uparrow \Phi u \\ Y' & \xrightarrow{q} & \Phi X' \end{array}$$

Si en outre p est une fibration, on peut imposer que q en soit une aussi. Pour le voir, considérons une équivalence faible de source fibrante $v' : Y'' \rightarrow Y$, un morphisme de source fibrante $u : X' \rightarrow X$ et une équivalence faible $Y'' \rightarrow \Phi X'$ tels que le carré suivant commute dans \mathcal{A}' .

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{p} & \Phi X \\ v' \uparrow & & \uparrow \Phi u \\ Y'' & \longrightarrow & \Phi X' \end{array}$$

Vu que Φ respecte les équivalences faibles entre objets fibrants, quitte à factoriser u en une équivalence faible suivie d'une fibration, on se ramène facilement au cas où u est une fibration. L'exactitude de Φ implique alors en particulier que Φu est une fibration, et donc que c'est un morphisme quarrable dans \mathcal{A}_f . On peut donc factoriser la flèche $Y'' \rightarrow \Phi X' \times_{\Phi X} Y$ en une équivalence faible $f : Y'' \rightarrow Y'$ suivie d'une fibration $g : Y' \rightarrow \Phi X' \times_{\Phi X} Y$. On définit v (resp. q) comme la composée de g et de la projection de $\Phi X' \times_{\Phi X} Y$ sur Y (resp. sur $\Phi X'$). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si p est une fibration, la construction ci-dessus fait de q une fibration.

LEMME 3.8. — *Pour toute catégorie directe finie E le foncteur exact à gauche*

$$\Phi : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}'(E)$$

a la propriété d'approximation pour les structures bordées.

Démonstration. — La vérification de l'axiome AP1 est évidente. Pour montrer AP2, on procède par récurrence sur la longueur de E . Le cas où $\ell(E) \leq 0$ étant trivial, on peut supposer que $\ell(E) > 0$. Soit $G \rightarrow \Phi F$ une flèche de $\mathcal{A}'(E)^\partial$ (F étant fibrant sur les bords). Comme $\ell(\partial E) < \ell(E)$, il existe une équivalence faible de source fibrante sur les bords $v : G' \rightarrow G|_{\partial E}$, un morphisme de source fibrante sur les bords $u : F' \rightarrow F|_{\partial E}$ et une équivalence faible $G' \rightarrow \Phi F'$ tels que le carré suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} G|_{\partial E} & \longrightarrow & \Phi F|_{\partial E} \\ v \uparrow & & \uparrow \Phi u \\ G' & \longrightarrow & \Phi F' \end{array}$$

Soit x un objet maximal de E . En appliquant l'axiome AP2 à la flèche

$$\partial G'(x) \times_{\partial G(x)} G(x) \longrightarrow \partial \Phi F'(x) \times_{\partial \Phi F(x)} \Phi F(x) \simeq \Phi(\partial F'(x) \times_{\partial F(x)} F(x)) ,$$

on obtient une équivalence faible de source fibrante $G'(x) \longrightarrow \partial G'(x) \times_{\partial G(x)} G(x)$, une flèche de source fibrante $F'(x) \longrightarrow \partial F'(x) \times_{\partial F(x)} F(x)$ et une flèche $G'(x) \longrightarrow F'(x)$ telle que le carré ci-dessous commute dans \mathcal{A}' .

$$\begin{array}{ccc} \partial G'(x) \times_{\partial G(x)} G(x) & \longrightarrow & \Phi(\partial F'(x) \times_{\partial F(x)} F(x)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ G'(x) & \longrightarrow & \Phi F'(x) \end{array}$$

Une fois remarqué que la projection de $\partial G'(x) \times_{\partial G(x)} G(x)$ sur $G(x)$ est une équivalence faible (en tant qu'image réciproque de l'équivalence faible $\partial G'(x) \longrightarrow \partial G(x)$ par la fibration $G(x) \longrightarrow \partial G(x)$), cela fournit le diagramme voulu. \square

LEMME 3.9. — *Le foncteur $\Phi_f : \mathbf{Ho} \mathcal{A}_f \longrightarrow \mathbf{Ho} \mathcal{A}'_f$ est plein et essentiellement surjectif.*

Démonstration. — Soit Y un objet de $\mathbf{Ho} \mathcal{A}'_f$ (i.e. un objet fibrant de \mathcal{A}'_f). Comme Φ respecte les objets finaux, on peut appliquer l'axiome AP2 à la flèche $Y \longrightarrow \star = \Phi \star$, ce qui montre l'essentielle surjectivité. Considérons à présent deux objets fibrants X et Y de \mathcal{A} , et une flèche

$$\Phi X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} \Phi Y$$

de $\mathbf{Ho} \mathcal{A}'_f$ (s est une équivalence faible de \mathcal{A}' , Z est fibrant, et f est une flèche de \mathcal{A}'_f). Les morphismes s et f définissent un morphisme de Z vers $\Phi X \times \Phi Y$, et en appliquant l'axiome AP2, on obtient une équivalence faible $Z' \longrightarrow Z$ de \mathcal{A}'_f , une flèche $T \longrightarrow X \times Y$ de \mathcal{A}_f , et une équivalence faible $Z' \longrightarrow \Phi T$, telles que le carré suivant commute dans \mathcal{A}' .

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & \Phi X \times \Phi Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ Z' & \longrightarrow & \Phi T \end{array}$$

L'axiome AP1 assure quant à lui que la flèche induite de T vers X est une équivalence faible, et on vérifie immédiatement que la flèche de $\mathbf{Ho} \mathcal{A}_f$

$$X \longleftarrow T \longrightarrow Y$$

est envoyée sur fs^{-1} par Φ . \square

LEMME 3.10. — *Soient $u, v : X \longrightarrow Y$ deux morphismes de \mathcal{A}_f . Si Φu et Φv sont homotopes dans \mathcal{A}'_f , alors u et v sont homotopes dans \mathcal{A}_f .*

Démonstration. — On choisit un cocylindre $Y \xrightarrow{s} Y^I \xrightarrow{(d^0, d^1)} Y \times Y$ de Y , et on forme le produit fibré suivant dans \mathcal{A}_f .

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\sigma} & Y^I \\ \pi \downarrow & & \downarrow (d^0, d^1) \\ X & \xrightarrow{(u, v)} & Y \times Y \end{array}$$

En vertu du lemme 2.13, dire que Φu et Φv sont homotopes dans \mathcal{A}'_f revient à dire qu'il existe un morphisme $q : Z \rightarrow \Phi T$ de \mathcal{A}'_f tel que $\Phi \pi q$ soit une équivalence faible. Mais alors l'axiome AP2 assure l'existence d'une flèche $p : T' \rightarrow T$ de \mathcal{A} , d'une équivalence faible $q' : Z' \rightarrow \Phi T'$ de \mathcal{A}'_f , et d'une équivalence faible $r : Z' \rightarrow Z$ telles que $\Phi p q' = q r$. Comme $\Phi \pi q r$ et q' sont des équivalences faibles, $\Phi(\pi p)$ en est une aussi, et donc en vertu de AP1, πp est une équivalence faible. Or le morphisme σp est une homotopie stricte entre $u \pi p$ et $v \pi p$, ce qui achève la démonstration. \square

LEMME 3.11. — *Le foncteur $\Phi_f : \text{Ho } \mathcal{A}_f \rightarrow \text{Ho } \mathcal{A}'_f$ est fidèle.*

Démonstration. — Considérons un diagramme de \mathcal{A}_f de la forme

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & s & \swarrow & p & \\ X & & & & Y \\ & s' & \searrow & p' & \\ & & Z' & & \end{array}$$

(s et s' étant des équivalences faibles), *i.e.* deux flèches ps^{-1} et $p's'^{-1}$ de $\text{Ho } \mathcal{A}_f$. Supposons que $\Phi(p)\Phi(s)^{-1} = \Phi(p')\Phi(s')^{-1}$ dans $\text{Ho } \mathcal{A}'_f$. Cela signifie qu'il existe un diagramme commutatif à homotopie près dans \mathcal{A}'_f de la forme

$$\begin{array}{ccccc} & & \Phi Z & & \\ & \Phi s & \swarrow & \Phi p & \\ \Phi X & & T & & \Phi Y \\ & \sigma & \leftarrow & q & \\ & \Phi s' & \searrow & \Phi p' & \\ & & \Phi Z' & & \end{array}$$

dans lequel σ , τ et τ' sont des équivalences faibles. On peut appliquer l'axiome AP2 à la flèche

$$T \xrightarrow{(\sigma, \tau, \tau', q)} \Phi X \times \Phi Z \times \Phi Z' \times \Phi Y \simeq \Phi(X \times Z \times Z' \times Y).$$

Il existe donc une équivalence faible $T' \rightarrow T$, une flèche $Z'' \rightarrow X \times Z \times Z' \times Y$, et une équivalence faible $T' \rightarrow \Phi Z''$ dans \mathcal{A}'_f telles le carré suivant commute

dans \mathcal{A}'_f .

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \Phi(X \times Z \times Z' \times Y) \\ \uparrow & & \uparrow \\ T' & \longrightarrow & \Phi Z'' \end{array}$$

En utilisant cette fois AP1, on obtient de la sorte un diagramme de \mathcal{A}_f de la forme

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & s & \nearrow & p & \\ X & & Z'' & & Y \\ & s'' & \searrow & p'' & \\ & & Z' & & \\ & s' & \searrow & p' & \\ & & & & \end{array}$$

(s'' , t et t' étant des équivalences faibles) dont l'image par Φ est un diagramme commutatif à homotopie près. Il résulte donc du lemme 3.10 que ce diagramme est commutatif à homotopie près dans \mathcal{A}_f , ce qui implique que $ps^{-1} = p's'^{-1}$ dans $\text{Ho } \mathcal{A}_f$. \square

THÉORÈME 3.12. — *Soit $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à gauche entre catégories dérivables à gauche ayant la propriété d'approximation. Alors le Dirf-morphisme exact à gauche $R\Phi : \mathbb{D}\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}'$ est une équivalence.*

Démonstration. — En vertu des lemmes 3.2, 3.8, 3.9 et 3.11, pour toute catégorie directe finie E , Φ induit des équivalences de catégories $\text{Ho } \mathcal{A}(E)^\partial \simeq \text{Ho } \mathcal{A}'(E)^\partial$. Vu que tout préfaisceau fibrant sur les bords est fibrant argument par argument et que Φ respecte les équivalences faibles entre objets fibrants, l'assertion résulte ainsi aussitôt du corollaire 1.32. \square

COROLLAIRE 3.13. — *Soit $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à gauche et pleinement fidèle entre catégories dérivables à gauche. On suppose que tout objet fibrant de \mathcal{A}' admet une résolution par un objet fibrant de \mathcal{A} (i.e. que pour tout objet X' de \mathcal{A}'_f , il existe un objet X de \mathcal{A}_f et une équivalence faible $iX \rightarrow X'$) et que toute flèche de \mathcal{A} entre objets fibrants dont l'image par i est une équivalence faible de \mathcal{A}' est une équivalence faible de \mathcal{A} . Alors i induit une Dirf-équivalence de dérivateurs faibles à gauche $Ri : \mathbb{D}\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}\mathcal{A}'$.*

Démonstration. — On vérifie immédiatement que i a la propriété d'approximation, ce qui permet d'appliquer le théorème précédent. \square

3.14. — Une catégorie dérivable à gauche (resp. dérivable à droite, resp. dérivable) \mathcal{A} est *fortement saturée* si toute flèche de \mathcal{A} induisant un isomorphisme dans $\text{Ho } \mathcal{A}$ est une équivalence faible. Par exemple toute catégorie de modèles fermée au sens de Quillen [Qui67] est une catégorie dérivable fortement saturée.

LEMME 3.15. — Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche. On considère un carré cartésien de \mathcal{A}_f

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

dans lequel p est à la fois une fibration et un isomorphisme dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$. Alors p' est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$.

Démonstration. — Considérons l'ensemble ordonné $I = \{0 > 2 < 1\}$. Alors on obtient un morphisme de préfaisceaux sur I :

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \xrightarrow{v} & Y & \xleftarrow{p} & X \\ 1_{Y'} \downarrow & & \downarrow 1_Y & & \downarrow p \\ Y' & \xrightarrow{v} & Y & \xleftarrow{1_Y} & Y \end{array}$$

qui est un isomorphisme dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(I)$ (grâce à 2.19). Par conséquent, son image par le foncteur $\mathbf{R}p_{I*}$ est un isomorphisme de $\mathbb{D}\mathcal{A}(e) = \mathbf{Ho} \mathcal{A}$. Or ladite image n'est autre que le morphisme canonique $p' : X' \rightarrow Y'$ (cf. 2.16). \square

PROPOSITION 3.16. — Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche. La catégorie \mathcal{A} admet une structure de catégorie dérivable à gauche fortement saturée dont les équivalences faibles sont les flèches induisant un isomorphisme dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$, et dont les fibrations sont les éléments de $f\mathcal{A}$. En outre, le dérivateur faible à gauche associé à cette nouvelle structure est canoniquement isomorphe à $\mathbb{D}\mathcal{A}$.

Démonstration. — Le fait que l'on obtienne ainsi une structure de catégorie dérivable à gauche résulte aussitôt du lemme ci-dessus. Il est d'autre part immédiat que la localisation de \mathcal{A} par les flèches induisant un isomorphisme dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$. Pour conclure, il suffit donc de vérifier que pour tout ensemble ordonné fini E , une flèche $F \rightarrow G$ de $\mathcal{A}(E)$ induit un isomorphisme dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(E)$ si et seulement si pour tout élément x de E , $F(x) \rightarrow G(x)$ induit un isomorphisme dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A} = \mathbb{D}\mathcal{A}(e)$, ce qui résulte aussitôt de la proposition 2.20. \square

PROPOSITION 3.17. — Soit $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à gauche entre catégories dérivables à gauche. Alors le foncteur Φ est aussi exact pour les structures de catégories dérivable à gauche fortement saturée sur \mathcal{A} et \mathcal{A}' .

Démonstration. — La seule difficulté est de montrer que Φ respecte les fibrations triviales au sens des structures fortement saturées. Pour cela il suffit de montrer que si u est une flèche de \mathcal{A}_f induisant un isomorphisme dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$, alors Φu est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}'$. Or cela résulte immédiatement de la proposition 2.18. \square

LEMME 3.18. — Soit $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à gauche entre catégories dérivables à gauche. On suppose que Φ vérifie la condition suivante. Si $p : Y \rightarrow \Phi X$ est une flèche de \mathcal{A}' , X et Y étant des objets fibrants de \mathcal{A} et de \mathcal{A}' respectivement, il existe une équivalence faible de source fibrante $v : Y' \rightarrow Y$, un morphisme de source fibrante $u : X' \rightarrow X$ et une équivalence faible $p' : Y' \rightarrow \Phi X'$ tels que le carré suivant commute dans la catégorie homotopique $\text{Ho } \mathcal{A}'$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{p} & \Phi X \\ v \uparrow & & \uparrow \Phi u \\ Y' & \xrightarrow{p'} & \Phi X' \end{array}$$

Alors Φ vérifie l'axiome AP2.

Démonstration. — Considérons une flèche $p : Y \rightarrow \Phi X$ de \mathcal{A}'_f et un carré commutatif dans $\text{Ho } \mathcal{A}'$ de la forme décrite dans l'énoncé. Cela signifie que ce carré commute à homotopie près dans \mathcal{A}' (1.6). On choisit un cocylindre

$$X \xrightarrow{s} X^I \xrightarrow{(d^0, d^1)} X \times X$$

de X (dont l'image par Φ est nécessairement un cocylindre de ΦX). En vertu du lemme 2.13 il existe alors une fibration triviale $\pi : Y'' \rightarrow Y'$, et une flèche $h : Y'' \rightarrow \Phi X^I$ de \mathcal{A} telles que $\Phi d^0 h = p v \pi$ et $\Phi d^1 h = \Phi u p' \pi$. On forme ensuite le carré cartésien suivant dans \mathcal{A} (dont l'image par Φ est un carré cartésien de \mathcal{A}').

$$\begin{array}{ccc} X'' & \longrightarrow & X^I \\ \downarrow & & \downarrow d^1 \\ X' & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

On note q le composé de la projection de X'' sur X^I avec d^0 , et $r : Y'' \rightarrow \Phi X'$ la flèche induite par $p' \pi$ et h . On vérifie alors que r est une équivalence faible (car c'est le cas $p' \pi$ et de l'image réciproque de Φd^1 par Φu) et que $\Phi q r = p v \pi$, ce qui achève la démonstration. \square

THÉORÈME 3.19. — Soit $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à gauche entre catégories dérivables à gauche fortement saturées. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Le foncteur Φ a la propriété d'approximation.
- (ii) Le Dirf-morphisme $R\Phi : \mathbb{D}\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}'$ est une équivalence.
- (iii) Le foncteur dérivé à droite $R\Phi : \text{Ho } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{A}'$ est une équivalence de catégories.

Démonstration. — L'implication de (i) vers (ii) est une spécialisation du théorème 3.12, et celle de (ii) vers (iii) est tautologique. Il suffit donc de

montrer que (iii) implique (i). On peut supposer que tous les objets de \mathcal{A} et de \mathcal{A}' sont fibrants (et ce, sans perte de généralité, en vertu de 1.8). Le foncteur Φ respecte alors les équivalences faibles, et il est même immédiat que Φ vérifie l'axiome AP1. Il suffit donc de vérifier la condition décrite dans l'énoncé du lemme précédent (*i.e.* de vérifier l'axiome AP2 à homotopie près). Considérons une flèche $p : Y \rightarrow \Phi X$ dans \mathcal{A} . Il existe un objet X_0 de \mathcal{A} et un isomorphisme $u : Y \rightarrow \Phi X_0$ dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}'$, ce qui définit une flèche $pu^{-1} : \Phi X_0 \rightarrow \Phi X$ dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}'$. Cette dernière est l'image par Φ d'une flèche de la forme

$$X_0 \xleftarrow{s_1} X_1 \xrightarrow{q_1} X$$

(s_1 étant une fibration triviale, et q_1 une fibration). L'isomorphisme $Y \simeq \Phi X_0$ peut quant à lui s'écrire

$$Y \xleftarrow{t_0} Y_0 \xrightarrow{r_0} \Phi X_0$$

(t_0 étant une fibration triviale, et r_0 une fibration). Comme \mathcal{A}' est fortement saturée, r_0 est en fait une fibration triviale. En formant le produit fibré $Y_1 = Y_0 \times_{\Phi X_0} \Phi X_1$, on obtient un diagramme dans \mathcal{A}' de la forme

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{p} & \Phi X \\ t_1 \uparrow & & \uparrow \Phi q_1 \\ Y_1 & \xrightarrow{r_1} & \Phi X_1 \end{array}$$

dans lequel t_1 et r_1 sont des fibrations triviales, et dont l'image dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}'$ est un carré commutatif, ce qui achève la démonstration. \square

COROLLAIRE 3.20. — *Soit $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un foncteur exact à gauche entre catégories dérivables à gauche. Pour que le Dirf-morphisme $R\Phi : \mathbb{D}\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}'$ soit une équivalence, il faut et il suffit que le foncteur dérivé à droite $R\Phi : \mathbf{Ho} \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ho} \mathcal{A}'$ soit une équivalence de catégories.*

Démonstration. — En vertu des propositions 3.16 et 3.17, on peut supposer que \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont fortement saturées. L'assertion résulte alors du théorème précédent. \square

4. Catégories exactes dérivables

4.1. — Une catégorie dérivable est *ponctuée* si elle admet un objet nul. Par exemple si \mathcal{A} est une catégorie dérivable dont l'objet final est cofibrant, on note $\mathcal{A}_\bullet = \star \backslash \mathcal{A}$ la catégorie des objets de \mathcal{A} pointés par l'objet final \star . On dit alors qu'une flèche de \mathcal{A} est une équivalence faible (resp. une fibration, resp. une cofibration) si son image dans \mathcal{A} par le foncteur d'oubli en est une. Alors \mathcal{A}_\bullet est une catégorie dérivable ponctuée.

On rappelle qu'un foncteur $F \rightarrow E$ est une immersion fermée si elle fait de

F un cocrible de E , ou de manière équivalente si le foncteur $F^{op} \rightarrow E^{op}$ est une immersion ouverte.

LEMME 4.2. — Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche admettant un objet nul, noté 0. Pour toute immersion fermée entre catégories directes finies $i : E' \rightarrow E$, le foncteur image directe cohomologique $Ri_* : \mathbb{D}\mathcal{A}(E') \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}(E)$ admet un adjoint à droite $Ri^! : \mathbb{D}\mathcal{A}(E) \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}(E')$.

Démonstration. — Le foncteur i^* admet un adjoint à droite $i_* : \mathcal{A}(E') \rightarrow \mathcal{A}(E)$ défini comme suit : si F est préfaisceau sur E' , i_*F est le prolongement par 0 de F , i.e. l'unique préfaisceau G sur E tel que $i^*G = F$ et tel que pour tout objet x de E' qui n'est pas dans E' , $G(x) = 0$. Il est évident que i_* est exact à gauche pour les structures naturelles et qu'il respecte les équivalences faibles. On en déduit que le foncteur induit $i_* : \mathbb{D}\mathcal{A}(E') \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}(E)$ est l'adjoint à droite du foncteur image inverse i^* , et donc qu'il est canoniquement isomorphe à Ri_* . On va montrer que pour tout préfaisceau fibrant sur les bords F sur E , le préfaisceau d'ensembles

$$i^!F : G \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(E)}(i_*G, F)$$

est représentable dans $\mathcal{A}(E')$. On note $j : U \rightarrow E$ l'immersion ouverte complémentaire de i (i.e. U est la sous-catégorie pleine de E formée des objets qui ne sont pas dans E'). En vertu de 1.30 et de 2.5, les foncteurs j^* et j_* sont exacts à gauche pour les structures bordées, et par conséquent, il en est de même de j_*j^* . En particulier, j_*j^*F est fibrant sur les bords. Vérifions que le morphisme canonique $F \rightarrow j_*j^*F$ est une fibration naturelle. Soit x un objet de E . Le foncteur $U/x \rightarrow E/x$ est une immersion ouverte, et comme $F|_{E/x}$ est encore fibrant sur les bords (1.16), la proposition 1.18 implique que le morphisme

$$F(x) \simeq \varprojlim F|_{E/x} \rightarrow \varprojlim F|_{U/x} \simeq j_*j^*F(x)$$

est une fibration. On forme alors le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} i^!F & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & j_*j^*F \end{array} ,$$

et on vérifie que $i^*i^!F$ représente bien $i^!F$. On a donc défini un foncteur

$$i^! : \mathcal{A}(E)^\partial \rightarrow \mathcal{A}(E') .$$

Ce dernier envoie les fibrations bordées triviales sur des équivalences faibles naturelles. En effet, si $p : F \rightarrow F'$ est une fibration bordée triviale, alors il en est de même de j_*j^*p , et vu que les morphismes canoniques du type $F \rightarrow j_*j^*F$ sont des fibrations naturelles, il résulte de [Bro73, I.4, lemme 3] que $i^!p$ est une équivalence faible naturelle. Par conséquent, $i^!p$ est une

équivalence faible. Le lemme résulte à présent du lemme 2.5 (appliqué à $u^* = i_*$ pour la structure bordé sur $\mathcal{A}(E)$). \square

LEMME 4.3. — Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche admettant un objet nul 0. Alors pour toute immersion ouverte de but une catégorie directe finie $j : E' \rightarrow E$, le foncteur image inverse $j^* : \mathbb{D}\mathcal{A}(E) \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}(E')$ admet un adjoint à gauche $j_! : \mathbb{D}\mathcal{A}(E') \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}(E)$. En outre, pour tout objet x de E' , et tout objet F de $\mathbb{D}\mathcal{A}(E')$, $p_{x \setminus E'} F|_{x \setminus E'}$ est représentable dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(e)$, et le morphisme de changement de base $p_{x \setminus E'} i^* \rightarrow x^* j_!$, induit par le 2-diagramme,

$$\begin{array}{ccc} x \setminus E' & \xrightarrow{i} & E' \\ p_{x \setminus E'} \downarrow & \alpha \nearrow & \downarrow j \\ e & \xrightarrow{x} & E \end{array},$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Le foncteur $j^* : \mathcal{A}(E) \rightarrow \mathcal{A}(E')$ admet un adjoint à gauche $j_! : \mathcal{A}(E') \rightarrow \mathcal{A}(E)$ défini comme suit : si F est un préfaisceau sur E' , $j_! F$ est l'unique préfaisceau G sur E tel que $j^* G = F$ et tel que pour tout objet x de E qui n'est pas dans E' , $G(x) = 0$. Il est immédiat que $j_!$ est un foncteur exact à gauche pour les structures naturelles et qu'il respecte les équivalences faibles. Comme j^* respecte aussi les équivalences faibles, cela implique aussitôt que les foncteurs obtenus à partir de $j_!$ et j^* après localisation forment encore un couple de foncteurs adjoints. Il reste à montrer la seconde assertion. Soit x un objet de E' . S'il n'est pas dans E' , alors $x \setminus E'$ est la catégorie vide, et comme \mathcal{A} admet un objet initial (à savoir 0), pour tout préfaisceau F sur E' , $p_{\emptyset} F|_{\emptyset}$ est représentable par le dit objet initial. Si x est un objet de E' , alors $x \setminus E'$ admet un objet initial (à savoir $(x, 1_x)$), et donc par 2-fonctorialité, le foncteur d'évaluation en x est un adjoint à gauche de $p_{x \setminus E'}^*$. Vu ce qui précède, la dernière assertion concernant l'isomorphisme de changement de base est une manière compliquée de dire que pour tout objet F de $\mathcal{A}(E')$, $j^* j_! F = F$ et $j_! F(x) = 0$ pour tous les objets x de E qui ne sont pas dans E' , ce qui est vérifié par construction. \square

PROPOSITION 4.4. — Si \mathcal{A} est une catégorie dérivable ponctuée, alors $\mathbb{D}\mathcal{A}$ est un dérivateur ponctué de domaine *Dirf*.

Démonstration. — On sait déjà que $\mathbb{D}\mathcal{A}$ est un dérivateur (2.28). L'axiome Der 6 résulte quant à lui du lemme 4.2 et de sa version duale. \square

4.5. — Une *catégorie exacte dérivable* est une catégorie exacte \mathcal{A} munie d'une classe de flèches $w\mathcal{A}$ telle que \mathcal{A} admette une structure de catégorie dérivable avec pour équivalences faibles (resp. pour fibrations, resp. pour cofibrations)

les éléments de $w\mathcal{A}$ (resp. les épimorphismes admissibles, resp. les monomorphismes admissibles). Il est remarquable que dans ce cas, tous les objets de \mathcal{A} sont à la fois fibrants et cofibrants. D'autre part, pour qu'un foncteur entre catégories exactes dérivables soit exact à gauche (au sens de 1.9), il faut et il suffit qu'il soit exact (dans le sens habituel pour les catégories exactes) et qu'il respecte les équivalences faibles. En particulier, un tel foncteur est aussi exact à droite. On dira alors simplement qu'il est *exact*. En vertu du lemme précédent, pour toute catégorie exacte dérivable \mathcal{A} , le prédérivateur $\mathbb{D}\mathcal{A}$ est un dérivateur ponctué. On vérifie aussi grâce à 1.31 que pour toute catégorie directe finie E , $\mathcal{A}(E)$ est une catégorie exacte dérivable (avec la structure "naturelle").

On rappelle qu'on note \square l'ensemble ordonné $(\Delta_1 \times \Delta_1)^{op}$ (un préfaisceau sur \square est simplement un carré commutatif).

REMARQUE 4.6. — Si \mathcal{A} est une catégorie exacte dérivable, alors elle admet une structure de catégorie exacte dérivable en prenant pour équivalences faibles les flèches induisant un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}\mathcal{A}$ (cela résulte aussitôt de 3.16).

EXEMPLE 4.7. — Si \mathcal{A} est une catégorie biWaldhausen compliciale vérifiant les conditions de stabilité adéquates (voir 2.26), alors c'est une catégorie exacte dérivable. En particulier, si \mathcal{E} est une catégorie exacte, et si \mathcal{A} désigne la catégorie (exacte) des complexes bornés sur \mathcal{E} , alors \mathcal{A} est une catégorie exacte dérivable en prenant pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes. On note dans ce cas $\mathbb{D}^b\mathcal{E}$ le prédérivateur de domaine *Dirf* défini par \mathcal{A} .

4.8. — Soit \mathbb{D} un dérivateur triangulé. On vérifie facilement grâce au fait que les notions d'objets cartésiens et d'objets cocartésien de $\mathbb{D}(\square)$ coïncident que $\mathbb{D}(e)$ est une catégorie additive. On note $s : e \rightarrow \Delta_1$ (resp. $t : e \rightarrow \Delta_1$) l'application qui pointe 1 (resp. 0). Comme s (resp. t) est une immersion fermée (resp. ouverte), le foncteur s_* (resp. $t_!$) admet un adjoint à droite (resp. à gauche)

$$s^! : \mathbb{D}(\Delta_1) \longrightarrow \mathbb{D}(e) \quad (\text{resp.} \quad t^? : \mathbb{D}(\Delta_1) \longrightarrow \mathbb{D}(e)).$$

Si X est un objet de $\mathbb{D}(\Delta_1)$, $s^!X$ est appelé la *fib*re de X , et $t^?X$ son *cône*. On remarque que par de simples jeux de 2-fonctorialité, le foncteur image inverse $p_{\Delta_1}^* : \mathbb{D}(e) \rightarrow \mathbb{D}(\Delta_1)$ s'identifie aux foncteurs t_* et $s_!$. On obtient de la sorte une suite de foncteurs adjoints $t^?, t_!, t^*, t_* = s_!, s^*, s_*$, et $s^!$. On définit deux endofoncteurs de $\mathbb{D}(e)$

$$\Sigma = t^?s_* : \mathbb{D}(e) \longrightarrow \mathbb{D}(e) \quad \text{et} \quad \Omega = s^!t_! : \mathbb{D}(e) \longrightarrow \mathbb{D}(e) .$$

Il est immédiat par construction que Σ est un adjoint à gauche de Ω . Si X est un objet de $\mathbb{D}(e)$, $\mathbf{dia}_{\Delta_1}(s_*X)$ est la flèche $X \rightarrow 0$, et ΣX est le cône de s_*X . On peut montrer qu'il existe un foncteur canonique

$$\Phi : \mathbb{D}(e) \longrightarrow \mathbb{D}(\square)$$

tel que pour tout objet X de $\mathbb{D}(e)$, $\Phi(X)$ soit un objet cocartésien (et donc aussi cartésien, puisque \mathbb{D} est triangulé) de $\mathbb{D}(\square)$, et qu'il existe un isomorphisme canonique, dans $\underline{\text{Hom}}(\square, \mathbb{D}(e))$, entre $\text{dia}_{\square}\Phi X$ et un carré commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma X \end{array} .$$

On en déduit que Σ est une équivalence de catégories ayant pour quasi-inverse Ω . Considérons à présent l'ensemble ordonné $\square\square = (\Delta_1 \times \Delta_2)^{op}$. On note i (resp. j) l'application $\square \rightarrow \square\square$ définie par $i(\varepsilon, \eta) = (\varepsilon, \eta)$ (resp. $j(\varepsilon, \eta) = (\varepsilon, \eta + 1)$). Un objet X de $\mathbb{D}(\square\square)$ est *distingué* si $X_{1,0}$ et $X_{0,2}$ sont nuls et si i^*X et j^*X sont des objets bicartésiens de $\mathbb{D}(\square)$. On note $\varphi : \Delta_3 \rightarrow \square\square$ l'application strictement croissante qui ne prend pas les valeurs $(1, 0)$ et $(0, 2)$. Si X est un objet distingué de $\mathbb{D}(\square\square)$, alors $\text{dia}_{\Delta_3}\varphi^*X$ est une suite de flèches de $\mathbb{D}(e)$ de la forme

$$X_{0,0} \xrightarrow{u} X_{0,1} \xrightarrow{v} X_{1,1} \xrightarrow{w} X_{1,2}$$

telle que $vu = 0$, $wv = 0$, et on a un isomorphisme canonique $i : \Sigma X_{0,0} \xrightarrow{\sim} X_{1,2}$. Autrement dit, on obtient le triangle de $\mathbb{D}(e)$ ci-dessous.

$$X_{0,0} \xrightarrow{u} X_{0,1} \xrightarrow{v} X_{1,1} \xrightarrow{i^{-1}w} \Sigma X_{0,0}$$

On appelle *triangle distingué* tout triangle de $\mathbb{D}(e)$ isomorphe à un triangle de cette forme. On peut alors montrer qu'avec l'auto-équivalence Σ , on a ainsi défini une structure de catégorie triangulée sur $\mathbb{D}(e)$ (voir une rédaction prochaine de [Mal01a]). Comme pour toute catégorie E dans le domaine de \mathbb{D} , $E' \mapsto \mathbb{D}(E \times E')$ est encore un dérivateur triangulé, on en déduit de même des structures de catégorie triangulée sur les catégories de coefficients $\mathbb{D}(E)$.

THÉORÈME 4.9. — *Pour toute catégorie exacte dérivable \mathcal{A} , le prédérivateur $\mathbb{D}\mathcal{A}$ est un dérivateur triangulé de domaine Dirf . En particulier, pour toute catégorie directe finie E , la catégorie $\mathbb{D}\mathcal{A}(E)$ admet une structure de catégorie triangulée canonique.*

Démonstration. — En vertu de la proposition 4.4, il suffit de vérifier l'axiome Der 7. Autrement dit, il faut vérifier qu'un objet X de $\mathbb{D}\mathcal{A}(\square)$ est homotopiquement cartésien si et seulement s'il est homotopiquement cocartésien. En vertu de 1.32, et de la construction explicite des foncteurs image directe Ru_* (voir 2.5 et la preuve de 2.6), tout objet homotopiquement cartésien de $\mathbb{D}\mathcal{A}(\square)$

est isomorphe à un carré cartésien de \mathcal{A} de la forme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u} & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ Y' & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

dans lequel toutes les flèches sont des épimorphismes admissibles. On factorise v en un monomorphisme admissible $s' : Y' \rightarrow Y''$ suivi d'une équivalence faible $s : Y'' \rightarrow Y$, et on forme les carrés cartésiens ci-dessous (qui factorisent le premier).

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{t'} & X' & \xrightarrow{t} & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p'' & & \downarrow p \\ Y' & \xrightarrow{s'} & Y'' & \xrightarrow{s} & Y \end{array}$$

Comme p est une fibration, la flèche t est une équivalence faible. Par conséquent, le carré de départ est isomorphe dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(\square)$ au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{t'} & X' \\ p' \downarrow & & \downarrow p'' \\ Y' & \xrightarrow{s'} & Y'' \end{array} .$$

Comme s' est un monomorphisme admissible, il en est de même de t' , et ce carré est aussi cocartésien. L'énoncé dual du lemme 2.16 implique donc qu'il est homotopiquement cocartésien. \square

SCHOLIE 4.10. — On peut expliciter un peu plus la structure de catégorie triangulée sur $\mathbb{D}\mathcal{A}(e)$ induite par la structure de dérivateur triangulé. Soit X un objet de \mathcal{A} . Pour construire ΣX , on choisit un monomorphisme admissible $i : X \rightarrow I$ dont le but est asphérique dans le sens où $I \rightarrow 0$ est une équivalence faible. On pose alors $\Sigma X = \text{coker } i$ (c'est la construction même de $Lt^? s_* X$ suivant la procédure duale de celle décrite dans la preuve de 4.2). Considérons une cofibration $u : X \rightarrow Y$ de \mathcal{A} . On peut choisir un monomorphisme admissible de but asphérique $Y \rightarrow I$. On forme alors les carrés cocartésiens ci-dessous dans \mathcal{A} .

$$(4.10.1) \quad \begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & I \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{coker } u & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

Les deux carrés ci-dessus sont homotopiquement bicartésiens. Par conséquent, ce diagramme est un objet distingué de $\mathbb{D}\mathcal{A}(\square\square)$, et il nous donne le triangle

distingué de $\mathbb{D}\mathcal{A}(e)$ suivant.

$$(4.10.2) \quad X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow \text{coker } u \longrightarrow \Sigma X$$

On vérifie facilement grâce à un calcul similaire à celui effectué dans la preuve de 4.9 que tous les objets distingués de $\mathbb{D}\mathcal{A}(\square)$ sont de la forme 4.10.1 (du moins à isomorphisme près dans $\mathbb{D}\mathcal{A}(\square)$). Autrement dit, tout triangle distingué de $\mathbb{D}\mathcal{A}(e)$ est de la forme 4.10.2 (à isomorphisme près).

COROLLAIRE 4.11 (B. Keller [Kel07]). — *Pour toute catégorie exacte \mathcal{E} , le prédérivateur $\mathbb{D}^b\mathcal{E}$ est un dérivateur triangulé de domaine $\mathcal{D}\text{irf}$. En outre, pour toute catégorie directe finie E , $\mathbb{D}^b\mathcal{E}(E)$ est la catégorie dérivée bornée associée à la catégorie exacte des préfaisceaux sur E à valeurs dans \mathcal{E} , et la structure de catégorie triangulée sur $\mathbb{D}^b\mathcal{E}(E)$ obtenue à partir de la structure de dérivateur triangulé est la structure usuelle.*

PROPOSITION 4.12. — *Tout foncteur exact entre catégories exactes dérivables $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ induit canoniquement un $\mathcal{D}\text{irf}$ -morphisme exact entre les dérivateurs triangulés correspondants $\Phi : \mathbb{D}\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{A}'$.*

Démonstration. — Comme tous les objets d'une catégorie exacte dérivable sont à la fois fibrants et cofibrants, le foncteur Φ respecte les équivalences faibles et définit donc un $\mathcal{D}\text{irf}$ -morphisme. Les propriétés d'exactitude résultent immédiatement de la proposition 3.4 et de sa version duale. \square

LEMME 4.13. — *Soit \mathcal{A} une catégorie exacte munie d'une classe d'équivalence faibles $w\mathcal{A}$. On suppose qu'en considérant pour classe de fibrations celle des épimorphismes admissibles, les axiomes D1 et D3 du paragraphe 1.1 sont vérifiés. On fait en outre l'hypothèse que pour tout objet X de \mathcal{A} , il existe un épimorphisme admissible $P \rightarrow X$ dont la source est asphérique (i.e. tel que $P \rightarrow 0$ soit une équivalence faible). Alors toute flèche u de \mathcal{A} admet une factorisation de la forme $u = pi$, où p est un épimorphisme admissible, et où i est à la fois un monomorphisme admissible et une équivalence faible. En particulier, \mathcal{A} est alors une catégorie dérivable à gauche.*

Démonstration. — Soit $u : X \rightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{A} . On considère un épimorphisme admissible $q : P \rightarrow Y$ dont la source est asphérique. On obtient dès lors une factorisation de u

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & X \oplus P & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ (1) \\ (0) \\ \\ (u, q) \end{array} .$$

Comme P est asphérique, les axiomes D1 et D3 impliquent que le monomorphisme admissible $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une équivalence faible, et comme q est un

épimorphisme admissible, il en est de même de (u, q) , ce qui achève la démonstration. \square

4.14. — Soit \mathcal{E} une catégorie exacte. Un objet P de \mathcal{E} est *projectif* si toute suite exacte de \mathcal{E} de la forme $0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow P \rightarrow 0$ est scindée. La catégorie \mathcal{E} *admet assez de projectifs* si pour tout objet X de \mathcal{E} , il existe un épimorphisme admissible $P \rightarrow X$ dont la source est un objet projectif. Dualement, un objet de \mathcal{E} est *injectif* s'il est projectif en tant qu'objet de \mathcal{E}^{op} . La catégorie \mathcal{E} *admet assez d'injectifs* si \mathcal{E}^{op} admet assez de projectifs.

4.15. — Soit \mathcal{A} une *catégorie de Frobenius*, c'est-à-dire une catégorie exacte admettant à la fois assez de projectifs et d'injectifs et dans laquelle un objet est injectif si et seulement s'il est projectif. Pour chaque couple (X, Y) d'objets de \mathcal{A} , on note $T(X, Y)$ le sous-ensemble de $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ formé des flèches qui se factorisent par un projectif. On remarque que $T(X, Y)$ est un sous-groupe (si f se factorise par P et g se factorise par Q , alors $f + g$ se factorise par $P \oplus Q$). On vérifie immédiatement que la relation d'équivalence \sim définie sur $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ par $f \sim g$ si et seulement si $f - g$ est dans $T(X, Y)$ est compatible à la composition. On peut ainsi définir une catégorie quotient $\underline{\mathcal{A}}$ ayant les mêmes objets que \mathcal{A} et avec pour morphismes de X vers Y le groupe quotient $\text{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)/T(X, Y)$ (la composition étant induite par celle de \mathcal{A}). On appelle *équivalences stables* les flèches de \mathcal{A} qui sont des isomorphismes dans $\underline{\mathcal{A}}$.

EXEMPLE 4.16. — Si G est un groupe fini, et si k est un corps, la catégorie des $k[G]$ -modules à gauche de type fini est une catégorie de Frobenius.

EXEMPLE 4.17. — Si \mathcal{E} est une catégorie additive, alors la catégorie exacte \mathcal{A} des complexes bornés sur \mathcal{E} est une catégorie de Frobenius. En outre, les équivalences stables de \mathcal{A} sont exactement les équivalences d'homotopie de cochaînes.

LEMME 4.18. — *Soit \mathcal{A} une catégorie de Frobenius. Un épimorphisme admissible de \mathcal{A} est une équivalence stable si et seulement si son noyau est un objet projectif.*

Démonstration. — Soit $p : X \rightarrow Y$ un épimorphisme admissible dont le noyau est projectif. Alors comme $\ker p$ est aussi injectif l'inclusion $\ker p \rightarrow X$ admet une rétraction. Autrement dit, p est en fait une projection de la forme $Y \oplus P \rightarrow Y$ avec P projectif, ce qui implique aussitôt que c'est une équivalence stable.

Réciproquement, considérons un épimorphisme admissible $p : X \rightarrow Y$ qui soit aussi une équivalence stable. Soit $q : Y \rightarrow X$ un inverse de p dans $\underline{\mathcal{A}}$.

Alors il existe une factorisation de $1_Y - pq$ de la forme

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{1_Y - pq} & Y \\ & \searrow j & \nearrow r \\ & & P \end{array}$$

l'objet P étant projectif. On définit un morphisme $\varphi = (p, r) : X \oplus P \rightarrow Y$ dont on remarque que c'est un épimorphisme admissible (puisque c'est le cas de p). On note $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : X \rightarrow X \oplus P$. Comme P est un objet projectif, i est une équivalence stable, et vu que p est une équivalence stable par hypothèse, on déduit de l'égalité $\varphi i = p$ que φ est une équivalence stable. En outre, φ admet une section, à savoir la flèche $\begin{pmatrix} q \\ j \end{pmatrix} : Y \rightarrow X \oplus P$. Par conséquent, la flèche $\ker \varphi \rightarrow 0$ est un rétracte de φ , ce qui implique que c'est une équivalence stable. Cela implique que l'identité de $\ker \varphi$ se factorise par un objet projectif, et donc qu'il est lui-même projectif. Or on a une suite exacte canonique

$$0 \rightarrow \ker p \rightarrow \ker \varphi \rightarrow P \rightarrow 0$$

et comme P est projectif, celle-ci est scindée. Par conséquent, le noyau de p est un facteur direct du noyau de φ , et comme ce dernier est projectif, il en est de même de $\ker p$. \square

PROPOSITION 4.19. — *Soit \mathcal{A} une catégorie de Frobenius. Alors \mathcal{A} est une catégorie exacte dérivable (et fortement saturée) en prenant pour équivalences faibles les équivalences stables. Le prédérivateur $\mathbb{D}\mathcal{A}$ est donc un dérivateur triangulé de domaine *Dirf*, et on a un isomorphisme canonique de catégories $\mathbb{D}\mathcal{A}(e) \simeq \underline{\mathcal{A}}$. En particulier, la catégorie $\underline{\mathcal{A}}$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie triangulée.*

Démonstration. — La seule chose non triviale à montrer dans cet énoncé est qu'on a bien défini de la sorte une catégorie dérivable. La notion de catégorie de Frobenius étant stable par passage à la catégorie opposée, il suffit de montrer que l'on a bien défini une structure de catégorie dérivable à gauche en prenant pour équivalences faibles (resp. pour fibrations) les équivalences stables (resp. les épimorphismes admissibles). Les axiomes D0, D1 et D2 sont évidents, et l'axiome D3 résulte aisément du lemme ci-dessus. Le lemme 4.13 achève donc la démonstration. \square

REMARQUE 4.20. — La structure triangulée sur $\underline{\mathcal{A}}$ est un résultat classique, prouvé par Heller [Hel60] et Happel [Hap87]. Un précurseur de la structure de dérivateur triangulé sur $\mathbb{D}\mathcal{A}$ est la structure de *tour de catégorie triangulée* au sens de Keller ; voir [Kel91, exemple 2.2].

5. Catégories de modèles

5.1. — Une catégorie dérivable \mathcal{A} est *relevante* si la condition suivante est vérifiée : pour tout carré commutatif de \mathcal{A}

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ D & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

dans lequel i est une cofibration de source cofibrante, et p une fibration de but fibrant, si i ou p est une équivalence faible, alors il existe un *relèvement* de ce carré, *i.e.* un morphisme $l : D \rightarrow X$ tel que $u = li$ et $pl = v$.

EXEMPLE 5.2. — Toute catégorie de modèles (non nécessairement fermée) au sens de Quillen définit canoniquement une catégorie dérivable relevante.

EXEMPLE 5.3. — Pour toute catégorie de Frobenius \mathcal{A} , la structure de catégorie exacte dérivable de la proposition 4.19 est relevante. Pour le vérifier, il suffit de considérer le cas où p est une équivalence stable (le cas où i est une équivalence stable s'en déduira par dualité). En effet, si on se donne un carré commutatif de \mathcal{A} de la forme donnée au numéro 5.1, et si p est une équivalence stable, alors $\ker p$ est projectif (et donc injectif) par le lemme 4.18. On en déduit que p est en fait une projection de la forme $Y \oplus P \rightarrow Y$ où P est un objet injectif. Comme p est l'image inverse de $P \rightarrow 0$, il suffit de vérifier la propriété de relèvement pour $P \rightarrow 0$, *i.e.* on peut supposer que X est un objet injectif et que Y est nul. L'assertion est alors claire.

5.4. — Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable relevante. On considère un objet cofibrant C de \mathcal{A} . Un *cylindre* de C est une factorisation

$$C \amalg C \xrightarrow{(\delta_0, \delta_1)} CI \xrightarrow{\sigma} C$$

de la codiagonale $C \amalg C \rightarrow C$, où σ est une équivalence faible, et (δ_0, δ_1) une cofibration.

Soient C et X deux objets de \mathcal{A} respectivement cofibrants et fibrants, $u, v : C \rightarrow X$ deux flèches de \mathcal{A} . On choisit un cylindre CI comme ci-dessus, et un cocylindre X^I de X (1.6). Une *homotopie stricte à gauche* (resp. à droite) *relativement à* CI (resp. X^I) de u vers v est un morphisme $h : CI \rightarrow X$ (resp. $k : C \rightarrow X^I$) tel que $h\delta_0 = u$ et $h\delta_1 = v$ (resp. $d^0k = u$ et $d^1k = v$). Les deux morphismes u et v sont dits *strictement homotopes à gauche* (resp. à droite) s'il existe un cylindre CI de C (resp. un cocylindre X^I de X), et une homotopie stricte à gauche (resp. à droite) de u vers v relativement à CI (resp. à X^I).

LEMME 5.5. — Soient $u, v : C \rightarrow X$ deux morphismes de \mathcal{A} , C étant cofibrant, et X fibrant. On considère un cylindre CI de C et un cocylindre X^I de

X . Il existe une homotopie stricte à gauche relativement à CI de u vers v si et seulement s'il existe une homotopie stricte à droite relativement à X^I de u vers v .

Démonstration. — Soit $h : CI \rightarrow X$ une homotopie stricte à gauche de u vers v . On peut alors former le carré commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{v} & X & \xrightarrow{s} & X^I \\ \delta_1 \downarrow & & & & \downarrow (d^0, d^1) \\ CI & \xrightarrow{(h, u\sigma)} & X \times X & & \end{array}$$

Comme δ_1 est une cofibration triviale, et (d^0, d^1) une fibration, ce carré admet un relèvement $K : CI \rightarrow X^I$ (ce que Quillen appelle une correspondance). On pose $k = K\delta_0$. Alors $d^0k = d^0K\delta_0 = h\delta^0 = u$ et $d^1k = v\sigma\delta^1 = v$. La réciproque se déduit de ce qui précède appliqué à \mathcal{A}^{op} . \square

5.6. — Le lemme précédent montre que deux morphismes $u, v : C \rightarrow X$ de source cofibrante et de but fibrant sont strictement homotopes à gauche si et seulement s'ils sont strictement homotopes à droite. On dira dorénavant que u et v sont *strictement homotopes* s'ils sont strictement homotopes à droite (ou à gauche, ce qui revient au même). Une autre conséquence remarquable de ce lemme : si CI (resp. X^I) est un cylindre de C (resp. un cocylindre de X), et si u et v sont strictement homotopes, alors il existe une homotopie stricte à gauche (resp. à droite) de u vers v relativement à CI (resp. à X^I).

LEMME 5.7. — Soient C et X deux objets de \mathcal{A} respectivement cofibrant et fibrant. La relation d'homotopie stricte est une relation d'équivalence sur $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, X)$.

Démonstration. — La réflexivité et la symétrie sont immédiates. Il reste donc à vérifier la transitivité. Pour cela, on remarque que si

$$X \xrightarrow{s} X^I \xrightarrow{(d^0, d^1)} X \times X \quad \text{et} \quad X \xrightarrow{s'} X^{I'} \xrightarrow{(d'^0, d'^1)} X \times X$$

sont deux cocylindres de X , on peut former le diagramme de \mathcal{A} suivant.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X \\ \downarrow s & & \parallel & & \downarrow s' \\ X^I & \xrightarrow{d^1} & X & \xleftarrow{d'^0} & X^{I'} \end{array}$$

En passant au produit fibré $X' = X^I \times_X X^{I'}$, on obtient une équivalence faible $t : X \rightarrow X'$ (cela résulte de 2.4 pour $E' = \{0 > 2 < 1\}$ et $E = e$ ou encore d'un calcul élémentaire facilité par le fait que toutes les flèches horizontales du diagramme ci-dessus sont des fibrations triviales). En composant la projection

de X' sur X^I (resp. sur $X^{I'}$) et d^0 (resp. d'^1), on obtient un morphisme e^0 (resp. e^1) de X' vers X . Il est immédiat que

$$X \xrightarrow{t} X' \xrightarrow{(e^0, e^1)} X \times X$$

est une factorisation de la diagonale $X \rightarrow X \times X$. En factorisant (e^0, e^1) en une équivalence faible suivie d'une fibration, on obtient de la sorte un cocylindre

$$X \xrightarrow{s''} X^{I''} \xrightarrow{(d''^0, d''^1)} X \times X$$

de X . C'est alors un exercice facile de prouver qu'une homotopie stricte à droite de u vers v relativement à X^I et une homotopie stricte à droite de v vers w relativement à $X^{I'}$ induisent une homotopie stricte à droite de u vers w relativement à $X^{I''}$. \square

5.8. — Si C est un objet cofibrant, et X un objet fibrant, on note $[C, X]$ le quotient de $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, X)$ par la relation d'homotopie stricte.

LEMME 5.9. — *Soient C et X deux objets de \mathcal{A} respectivement cofibrant et fibrant. Pour toute flèche de source cofibrante $\gamma : C' \rightarrow C$ dans \mathcal{A} , l'application*

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C', X) \quad , \quad u \mapsto u\gamma \quad ,$$

passse au quotient en une application

$$\gamma^* : [C, X] \rightarrow [C', X] \quad .$$

Si en outre γ est une équivalence faible, alors γ^ est une bijection.*

Démonstration. — Il est évident que la relation d'homotopie stricte à droite est compatible à la composition par γ . Pour prouver la seconde assertion, il résulte de l'énoncé dual de [Bro73, I.1, Factorization lemma] appliqué à la sous-catégorie des objets cofibrants de \mathcal{A} qu'il suffit de vérifier cette propriété lorsque γ est une cofibration triviale. Pour la surjectivité, on remarque que pour toute flèche $u' : C' \rightarrow X$, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{u'} & X \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & \star \end{array}$$

admettant un relèvement $u : C \rightarrow X$ (puisque γ est une cofibration triviale, et X est fibrant). Il reste donc à s'assurer de l'injectivité. Soient u et v deux morphismes de C vers X tels que $u\gamma$ et $v\gamma$ soient strictement homotopes. Alors

il existe un cocylindre X^I de X et un morphisme $k' : C' \rightarrow X^I$ tels que $d^0 k' = u\gamma$ et $d^1 k' = v\gamma$. Or le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{k'} & X^I \\ \gamma \downarrow & & \downarrow (d^0, d^1) \\ C & \xrightarrow{(u, v)} & X \times X \end{array}$$

admet un relèvement $k : C \rightarrow X^I$ faisant de u et v des morphismes strictement homotopes à droite. \square

5.10. — Il résulte du lemme précédent et de son dual qu'on a défini un foncteur

$$[?, ?] : (\mathbf{Ho} \mathcal{A}_c)^{op} \times \mathbf{Ho} \mathcal{A}_f \rightarrow \mathbf{Ens} \quad , \quad (C, X) \mapsto [C, X] .$$

En outre, il est immédiat que pour C cofibrant et X fibrant, l'application canonique $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(C, X) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho} \mathcal{A}}(C, X)$ passe au quotient par la relation d'homotopie stricte, ce qui fournit une application naturelle en C et en X :

$$[C, X] \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho} \mathcal{A}}(C, X) .$$

PROPOSITION 5.11. — *Pour tout objet C de $\mathbf{Ho} \mathcal{A}_c$ et tout objet X de $\mathbf{Ho} \mathcal{A}_f$, l'application naturelle $[C, X] \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ho} \mathcal{A}}(C, X)$ est bijective.*

Démonstration. — Montrons l'injectivité. Soient $u, v : C \rightarrow X$ deux flèches de \mathcal{A} telles que $u = v$ dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$. On choisit une factorisation de $(u, v) : C \rightarrow X \times X$ en une équivalence faible $s : C \rightarrow X'$ suivie d'une fibration $(p, q) : X' \rightarrow X \times X$. Il est clair que $p = q$ dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$, ce qui signifie qu'il existe une fibration triviale $\pi : Y \rightarrow X'$ telle que $p\pi$ et $q\pi$ soient égales dans $\pi \mathcal{A}_f$. Or comme C est cofibrant, il existe une flèche $f : C \rightarrow Y$ telle que $\pi f = s$. On en déduit aussitôt que $p\pi f = u$ et $q\pi f = v$ sont strictement homotopes à droite.

Il reste à vérifier la surjectivité. Soit $f : C \rightarrow X'$ une équivalence faible de but fibrant. Toute flèche φ de C vers X dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$ peut être représentée par un diagramme de \mathcal{A} de la forme

$$C \xrightarrow{f} X' \xleftarrow{s} X'' \xrightarrow{p} X$$

dans lequel s est une fibration triviale. L'objet C étant cofibrant, il existe une flèche $f' : C \rightarrow X''$ telle que $sf' = f$ dans \mathcal{A} . Il est alors immédiat que $\varphi = pf'$. \square

REMARQUE 5.12. — La proposition ci-dessus montre que pour toute catégorie dérivable relevante et localement petite \mathcal{A} (*i.e.* telle que, pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$, $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ est un petit ensemble), $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$ est une catégorie localement petite.

PROPOSITION 5.13. — *Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable relevante. Pour toute catégorie directe finie E , la catégorie $\mathcal{A}(E)$ admet une structure de catégorie dérivable relevante dont les équivalences faibles (resp. les fibrations, resp. les cofibrations) sont les équivalences faibles naturelles (resp. les fibrations bordées, resp. les cofibrations naturelles).*

Démonstration. — En vertu de 1.30 et de l'énoncé dual de 1.31, on sait que l'on obtient de la sorte une structure de catégorie dérivable. Il reste donc à vérifier l'axiome de relèvement. Considérons un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ D & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

dans $\mathcal{A}(E)$, i étant une cofibration naturelle de source cofibrante argument par argument, et p une fibration bordée. Supposons que i (resp. p) soit une équivalence faible. Pour montrer l'existence d'un relèvement, on va procéder comme il se doit par récurrence sur la longueur de E . Si $\ell(E) \leq 0$, cette existence est triviale (puisque E est alors une catégorie discrète finie). Supposons $\ell(E) \geq 0$. En vertu de 1.22, l'inclusion $\partial E \rightarrow E$ étant une immersion ouverte, $p|_{\partial E}$ est encore une fibration bordée (resp. une fibration bordée triviale). Vu que $\ell(\partial E) < \ell(E)$, il existe un morphisme $k : D|_{\partial E} \rightarrow X|_{\partial E}$ tel que $u|_{\partial E} = ki|_{\partial E}$ et $p|_{\partial E}k = v|_{\partial E}$. Soit x un objet maximal de E . Le morphisme k induit un morphisme $D(x) \rightarrow \partial X(x)$ tel que le carré suivant commute.

$$\begin{array}{ccccc} C(x) & \xrightarrow{u(x)} & X(x) & \longrightarrow & \partial X(x) \\ i(x) \downarrow & & \nearrow k(x) & & \downarrow \partial p(x) \\ D(x) & \xrightarrow{v(x)} & Y(x) & \longrightarrow & \partial Y(x) \end{array}$$

Cela détermine un carré commutatif de la forme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} C(x) & \xrightarrow{u(x)} & X(x) \\ i(x) \downarrow & & \downarrow \\ D(x) & \longrightarrow & Y(x) \times_{\partial Y(x)} \partial X(x) \end{array}$$

Or la flèche $i(x)$ est une cofibration triviale (resp. une cofibration), et la flèche $X(x) \rightarrow Y(x) \times_{\partial Y(x)} \partial X(x)$ est une fibration (resp. une fibration triviale) car p est une fibration bordée (resp. une fibration triviale bordée (1.26)). En conséquence, ce dernier carré commutatif admet un relèvement $l(x) : D(x) \rightarrow X(x)$. On vérifie aussitôt que la donnée des $l(x)$, $x \in \max E$, définit un morphisme $l : D \rightarrow X$ qui prolonge k et vérifie les équations $u = li$ et $pl = v$. \square

COROLLAIRE 5.14. — Soient \mathcal{A} une catégorie dérivable relevante et E une catégorie directe finie. La catégorie des préfaisceaux sur E à valeurs dans \mathcal{A} admet une structure de catégorie dérivable relevante dont les équivalences faibles (resp. les cofibrations, resp. les fibrations) sont les équivalences faibles naturelles (resp. les cofibrations naturelles, resp. les fibrations naturelles vérifiant la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations triviales naturelles).

LEMME 5.15. — On considère une catégorie dérivable relevante \mathcal{A} . Soient $i : C \rightarrow D$ une cofibration de source cofibrante et X un objet fibrant. Si i est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$, alors pour toute flèche $u : C \rightarrow X$, il existe une flèche $l : D \rightarrow X$ telle que $li = u$.

Démonstration. — En vertu du lemme 5.9, l'assertion est vérifiée à homotopie stricte près. Autrement dit, il existe une flèche $k : D \rightarrow X$ un cocylindre X^I de X , et un morphisme $h : D \rightarrow X^I$ tels que $d^0 h = u$ et $d^1 h = ki$. Or le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{h} & X^I \\ i \downarrow & & \downarrow d^1 \\ D & \xrightarrow{k} & X \end{array}$$

admet un relèvement $h' : D \rightarrow X^I$. On pose $l = d^0 h'$. Alors $li = d^0 h' i = d^0 h = u$. \square

PROPOSITION 5.16. — Pour toute catégorie dérivable relevante \mathcal{A} , la structure de catégorie dérivable fortement saturée sur \mathcal{A} (3.16) est encore relevante.

Démonstration. — Considérons un carré commutatif de \mathcal{A}

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ D & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$

dans lequel i est une cofibration de source cofibrante, et p une fibration de but fibrant. Supposons que i soit un isomorphisme dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$, et montrons que ce carré admet un relèvement. En vertu de l'énoncé dual de la proposition 2.18, il existe une flèche $j : D \rightarrow E$ dans \mathcal{A} telle que ji soit une équivalence faible. Quitte à factoriser j en une cofibration suivie d'une équivalence faible, on peut facilement se ramener au cas où j est une cofibration. Or il est immédiat que j est aussi un isomorphisme dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$. En vertu du lemme précédent, il existe donc une flèche $w : E \rightarrow Y$ telle que $wj = v$. Le morphisme ji étant une

cofibration triviale, le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow ji & & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{w} & Y \end{array}$$

admet un relèvement $k : E \rightarrow X$. On pose alors $l = kj$. On obtient bien les égalités $li = kji = u$ et $pl = pkj = wj = v$. Si on suppose dualement que p est un isomorphisme dans $\mathbf{Ho}\mathcal{A}$, ce qui précède appliqué à la catégorie dérivable relevante \mathcal{A}^{op} montre l'existence d'un relèvement. \square

DÉFINITION 5.17. — Une *catégorie de modèles faible* est une catégorie dérivable relevante fortement saturée.

Par exemple, toute catégorie de modèles fermée au sens de Quillen est une catégorie de modèles faible.

Une *catégorie de modèles* est une catégorie de modèles faible telle que les factorisations des flèches de but fibrant (resp. de source cofibrante) en une équivalence faible suivie d'une fibration (resp. en une cofibration suivie d'une équivalence faible) puissent être obtenues fonctoriellement.

Par exemple, toute catégorie de modèles fermée au sens de Quillen à engendrement cofibrant (voir [Cis03]) est une catégorie de modèles.

DÉFINITION 5.18. — Une *catégorie de Thomason faible* est une catégorie \mathcal{A} admettant un objet initial \emptyset et un objet final \star , munie de trois classes de flèches $w\mathcal{A}$, $f\mathcal{A}$ et $c\mathcal{A}$, (dont les éléments sont appelés comme il se doit *équivalences faibles*, *fibrations* et *cofibrations* respectivement), satisfaisant les axiomes suivants.

- TM0 Tout isomorphisme de \mathcal{A} est à la fois une équivalence faible, une fibration, et une cofibration.
- TM1 (a) Pour toute fibration $p : X \rightarrow Y$, toute flèche $v : Y' \rightarrow Y$, le produit fibré $X' = Y' \times_Y X$ est représentable dans \mathcal{A} , et la projection $p' : X' \rightarrow Y'$ est une fibration. Si en outre p (resp. v) est une équivalence faible, alors il en est de même de p' (resp. de la projection $u : X' \rightarrow X$).
- (b) Pour toute cofibration $i : C \rightarrow D$ et toute flèche $u : C \rightarrow C'$, la somme amalgamée $D' = D \amalg_C C'$ est représentable dans \mathcal{A} , et la coprojection $i' : C' \rightarrow D'$ est une cofibration. Si en outre i (resp. u) est une équivalence faible, alors il en est de même de i' (resp. de la coprojection $v : D \rightarrow D'$).
- TM2 Si dans un triangle commutatif de \mathcal{A} deux flèches sont des équivalences faibles, il en est de même de la troisième.
- TM3 Les équivalences faibles sont stables par rétractes.

TM4 Tout carré commutatif de \mathcal{A} de la forme

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ D & \xrightarrow{v} & Y \end{array} ,$$

dans lequel i est une cofibration et p une fibration, i ou p étant une équivalence faible, admet un relèvement.

TM5 Il existe des factorisations de toute flèche f de \mathcal{A} de la forme $f = pi$ et $f = qj$ où p est une fibration, j une cofibration, i et q des équivalences faibles.

Il est immédiat que toute catégorie de Thomason faible est aussi une catégorie dérivable relevante avec les définitions évidentes. Une *catégorie (de modèles) de Thomason* est une catégorie de Thomason faible telle que les factorisations de l'axiome TM5 puissent être obtenues fonctoriellement.

EXEMPLE 5.19. — Toute catégorie de modèles fermée propre est une catégorie de Thomason faible. Toute catégorie de modèles fermée propre et à engendrement cofibrant est une catégorie de Thomason. Il existe cependant des catégories de modèles de Quillen qui ne sont pas propres, et donc qui ne sont pas des catégories de Thomason (les exemples classiques viennent de la théorie des type d'homotopie rationnels ; voir [Cis06, 9.4] pour quelques exemples de cette forme). C'est pourquoi, bien que les catégories de Thomason aient d'excellentes propriétés, elles ne sont pas suffisantes pour axiomatiser la théorie de l'homotopie avec un degré de généralité suffisant.

EXEMPLE 5.20. — Toute catégorie de modèles faible dont tous les objets sont à la fois fibrants et cofibrants est une catégorie de Thomason faible (l'axiome TM1 résulte de [Bro73, I.4, lemme 2] et de sa version duale). En particulier, toute catégorie de Frobenius est une catégorie de Thomason faible (cf. 5.3).

PROPOSITION 5.21. — *Soit \mathcal{A} une catégorie de Thomason faible. Une flèche de \mathcal{A} est une équivalence faible si et seulement si son image dans la catégorie homotopique $\mathrm{Ho} \mathcal{A}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que toute flèche de \mathcal{A} dont l'image dans $\mathrm{Ho} \mathcal{A}$ est un isomorphisme est une équivalence faible. En procédant à des factorisations adéquates, on constate qu'il suffit de prouver cette assertion pour les fibrations entre objets fibrants. Soit $p : X \rightarrow Y$ une fibration de but fibrant. L'existence, pour toute flèche de \mathcal{A} , d'une factorisation en une cofibration suivie d'une équivalence faible (TM5) montre qu'il existe un carré

commutatif de \mathcal{A} de la forme

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ D & \xrightarrow{v} & Y \end{array} ,$$

dans lequel i est une cofibration de source cofibrante, et u, v des équivalences faibles. En vertu de la proposition 5.16, ce carré admet un relèvement $l : D \rightarrow X$. Si on forme la somme amalgamée $Z = D \amalg_C X$, l'axiome TM1 (b) montre que la coprojection $j : X \rightarrow Z$ est une cofibration, et que la coprojection $u' : D \rightarrow Z$ est une équivalence faible. Il résulte donc de l'axiome TM2 que la flèche $w : Z \rightarrow Y$ (induite par v et p) est une équivalence faible. Cela définit une factorisation $p = wj$. D'autre part, les flèches l et u définissent un morphisme $r : Z \rightarrow X$ tel que $rj = 1_X$ et $pr = w$. En particulier, p est un rétracte de w . L'axiome TM3 montre donc que p est une équivalence faible. \square

COROLLAIRE 5.22. — *Toute catégorie de Thomason faible est une catégorie de modèles faible. Toute catégorie de Thomason est une catégorie de modèles.*

5.23. — Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche. Un objet X de \mathcal{A} est *dérivable à gauche* si la catégorie \mathcal{A}/X est une catégorie dérivable à gauche, avec pour équivalences faibles (resp. pour fibrations) les morphismes au-dessus de X qui sont des équivalences faibles (resp. des fibrations) dans \mathcal{A} . Par exemple, tout objet fibrant est dérivable à gauche

Une catégorie *localement dérivable à gauche* est une catégorie dérivable à gauche dont tous les objets sont dérivables à gauche. On vérifie facilement qu'une catégorie dérivable à gauche est localement une catégorie dérivable à gauche si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

L1 Pour toute fibration (resp. fibration triviale) $X \rightarrow Y$ dans \mathcal{A} , et pour toute flèche $Y' \rightarrow Y$, le produit fibré $X' = Y' \times_Y X$ est représentable dans \mathcal{A} , et la projection $X' \rightarrow Y'$ est une fibration (resp. une fibration triviale).

L2 Tout morphisme de \mathcal{A} admet une factorisation en une équivalence faible suivie d'une fibration.

5.24. — Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche. Pour tout objet X de \mathcal{A} , on note \mathcal{A}/X la sous-catégorie pleine de \mathcal{A} , formée des fibrations de but X . Lorsque X est dérivable à gauche, la catégorie \mathcal{A}/X n'est autre que la catégorie des objets fibrants de \mathcal{A}/X .

Considérons un morphisme entre objets dérivables à gauche $u : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{A} . Le foncteur induit par la composition avec u

$$(5.24.1) \quad u_! : \mathcal{A}/X \rightarrow \mathcal{A}/Y, \quad (Z, Z \rightarrow X) \mapsto (Z, Z \rightarrow X \xrightarrow{u} Y)$$

admet un adjoint à droite partiellement défini

$$(5.24.2) \quad u^* : \mathcal{A}/Y \longrightarrow \mathcal{A}/X, \quad (Z, Z \longrightarrow Y) \longmapsto (Z \times_Y X, Z \times_Y X \longrightarrow X).$$

Le foncteur $u_!$ respecte les équivalences faibles, et donc induit un foncteur

$$(5.24.3) \quad u_! : \mathrm{Ho} \mathcal{A}/X \longrightarrow \mathrm{Ho} \mathcal{A}/Y.$$

Le foncteur u_* est certainement exact à gauche, et induit donc, via l'équivalence $\mathrm{Ho} \mathcal{A}/Y \simeq \mathrm{Ho} \mathcal{A}/Y$, un foncteur

$$(5.24.4) \quad Ru^* : \mathrm{Ho} \mathcal{A}/Y \longrightarrow \mathrm{Ho} \mathcal{A}/X$$

PROPOSITION 5.25. — *Le foncteur (5.24.4) est un adjoint à droite du foncteur (5.24.3).*

Démonstration. — Cela résulte aussitôt du lemme 2.5. \square

5.26. — Un morphisme $X \longrightarrow Y$ de \mathcal{A} est une *équivalence faible propre à droite* si X et Y sont dérivables à gauche, et si le foncteur (5.24.3) est une équivalence de catégories.

PROPOSITION 5.27. — *Si \mathcal{A} est fortement saturée, alors, étant donné un morphisme $u : X \longrightarrow Y$ dans \mathcal{A} , les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *Le morphisme u est une équivalence faible propre à droite.*
- (b) *Pour toute fibration $Y' \longrightarrow Y$, la projection $X' = Y' \times_Y X \longrightarrow Y'$ est une équivalence faible.*

Démonstration. — La condition (b) équivaut à affirmer que le morphisme de co-unité $u_! Ru_* \longrightarrow 1_{\mathrm{Ho} \mathcal{A}/Y}$ est un isomorphisme. Il est donc clair que (a) implique (b). Il reste donc à prouver que si Ru_* est pleinement fidèle, alors c'est une équivalence de catégories. Or le morphisme de counité appliqué à l'objet $(Y, 1_Y)$ est le morphisme $u : (X, u) \longrightarrow (Y, 1_Y)$, et la catégorie dérivable à gauche \mathcal{A} étant fortement saturée, cela implique que u est une équivalence faible. On en déduit immédiatement que le morphisme d'unité $1_{\mathrm{Ho} \mathcal{A}/X} \longrightarrow Ru_* u_!$ est un isomorphisme. \square

5.28. — On dit qu'une catégorie dérivable (à gauche) est *propre à droite* si toute équivalence faible de \mathcal{A} est propre à droite.

On dit qu'une catégorie dérivable (à droite) est *propre à gauche* si \mathcal{A}^{op} est propre à droite.

Une catégorie dérivable est *propre* si elle est propre à gauche et à droite.

Avec ces définitions, il est clair, d'après la proposition précédente, que les catégories de Thomason (faibles) sont exactement les catégories de modèles (faibles) propres.

6. Catégories de modèles homotopiquement complètes

6.1. — Une catégorie dérivable à gauche \mathcal{A} est *homotopiquement complète* si les conditions suivantes sont vérifiées.

D5 Si $(X_i)_{i \in I}$ est une petite famille d'objets fibrants de \mathcal{A} , alors le produit $\prod_{i \in I} X_i$ est représentable dans \mathcal{A} . Si $X_i \rightarrow Y_i$, $i \in I$, est une petite famille de fibrations (resp. de fibrations triviales) dans \mathcal{A} , alors le morphisme induit

$$\prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$$

est une fibration (resp. une fibration triviale).

D6 Soit

$$\cdots \rightarrow X_{n+1} \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_0, \quad n \geq 0$$

une tour de fibrations (resp. de fibrations triviales), avec X_0 fibrant. Alors la limite $X = \varprojlim_n X_n$ est représentable dans \mathcal{A} , et la flèche canonique $X \rightarrow X_0$ est une fibration (resp. une fibration triviale).

Une catégorie dérivable à droite est *homotopiquement cocomplète* si \mathcal{A}^{op} est une catégorie dérivable à gauche homotopiquement complète.

PROPOSITION 6.2. — *Toute catégorie dérivable à gauche homotopiquement complète est fortement saturée.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que toute fibration entre objets fibrants de \mathcal{A} qui est inversible dans $\mathbf{Ho} \mathcal{A}$ est une équivalence faible. Soit $p : X \rightarrow Y$ un tel morphisme. On voit facilement, grâce à la proposition 2.18, que l'on peut construire par induction une tour de fibrations entre objets fibrants,

$$\cdots \rightarrow Z_{n+1} \rightarrow Z_n \rightarrow \cdots \rightarrow Z_0, \quad n \geq 0,$$

telle que $Z_0 = Y$, $Z_1 = X$, la flèche $X = Z_1 \rightarrow Z_0 = Y$ étant égale à p , et telle que pour tout entier $n \geq 0$, le morphisme composé

$$Z_{n+2} \rightarrow Z_{n+1} \rightarrow Z_n$$

soit une équivalence faible (et donc une fibration triviale). On a alors deux fibrations triviales

$$\varprojlim_n Z_{2n+1} \rightarrow X \quad \text{et} \quad \varprojlim_n Z_{2n} \rightarrow Y,$$

et les isomorphismes canoniques

$$\varprojlim_n Z_{2n+1} \simeq \varprojlim_n Z_n \simeq \varprojlim_n Z_{2n}$$

nous donnent finalement un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \varprojlim_n Z_n & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ X & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

dans lequel les deux flèches obliques sont des fibrations triviales. Il en résulte que p est une équivalence faible. \square

6.3. — Soit \mathcal{A} une catégorie dérivable à gauche homotopiquement complète, et soit I une petite catégorie arbitraire. Le but de la discussion qui suit est de construire une structure de catégorie dérivable à gauche sur la catégorie $\mathcal{A}(I)$ des préfaisceaux sur I à valeurs dans \mathcal{A} , dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles naturelles.

Une telle structure existe dans le cas où $I = E$ est une catégorie directe.

Une *catégorie directe* est une petite catégorie E , munie d'une fonction

$$\ell : \text{Ob } E \longrightarrow \mathbb{N}$$

telle que les axiomes suivants soient vérifiés.

Dir 1 Pour tout entier $n \geq 0$, s'il existe un objet x de E tel que $\ell(x) = n$, alors pour tout entier i , $0 \leq i < n$, il existe un objet y de E tel que $\ell(y) = i$.

Dir 2 Pour tout morphisme $x \longrightarrow y$ qui n'est pas une identité de E , on a $\ell(x) < \ell(y)$.

Seul l'axiome Dir 2 est réellement pertinent ; si seul l'axiome Dir 2 est vérifié, on peut toujours normaliser λ de telle manière que Dir 1 soit vérifié : $\lambda(x)$ est la *longueur* de x (dans le sens déjà évoqué au numéro 1.11. Étant donné une petite catégorie E , il existe donc au plus une fonction ℓ faisant de E une catégorie directe. Les objets d'une catégorie directe n'ont pas d'endomorphismes (et donc, d'isomorphismes) non triviaux.

On peut alors répéter les définitions vues aux numéros 1.11 et 1.13. Soit E une catégorie directe. Étant donné un objet x de E , on note $\partial E/x$ la sous-catégorie pleine de E/x dont les objets sont les morphismes $x' \longrightarrow x$ qui ne sont pas des identités.

Si \mathcal{C} est une catégorie, et F un préfaisceau sur E à valeurs dans \mathcal{C} , on dit que F est *représentable au bord de E* si pour tout objet x de E , $\varprojlim F|_{\partial E/x}$ est représentable (où $\partial E/x$ désigne le bord de E/x). Lorsque c'est le cas, on définit le *bord de F* comme le préfaisceau

$$\partial F : E^{op} \longrightarrow \mathcal{C} \quad , \quad x \longmapsto \varprojlim F|_{\partial E/x} .$$

Les flèches canoniques $F(x) = \varinjlim F|_{E/x} \longrightarrow \varinjlim F|_{\partial E/x}$ définissent un morphisme canonique

$$(6.3.1) \quad F \longrightarrow \partial F .$$

6.4. — Considérons une catégorie dérivable à gauche homotopiquement complète \mathcal{A} , et une catégorie directe E .

Un préfaisceau F sur E à valeurs dans \mathcal{A} est *fibrant sur les bords* si le bord de F est représentable sur E , et si le morphisme (6.3.1) est une fibration naturelle.

Un morphisme $F \longrightarrow F'$ de $\mathcal{A}(E)$, entre préfaisceaux fibrants sur les bords, est une *fibration bordée* si le morphisme $F \longrightarrow F' \times_{\partial F'} \partial F$ induit par le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \partial F \\ \downarrow & & \downarrow \\ F' & \longrightarrow & \partial F' \end{array}$$

est une fibration naturelle. Une variation sur le théorème 1.30 nous donne les résultats suivants.

THÉORÈME 6.5 (Rădulescu-Banu). — *La catégorie $\mathcal{A}(E)$ est une catégorie dérivable à gauche (homotopiquement complète), avec pour équivalences faibles, les équivalences faibles naturelles, et pour fibrations, les fibrations bordées entre préfaisceaux fibrants sur les bords. En outre, toute fibration bordée est une fibration naturelle.*

Démonstration. — Voir [RB09, théorème 9.2.4] pour la première assertion, et [RB09, corollaire 9.3.6] pour la seconde. \square

COROLLAIRE 6.6. — *La catégorie $\mathcal{A}(E)$ est une catégorie dérivable à gauche (homotopiquement complète), avec pour équivalences faibles, les équivalences faibles naturelles, et pour fibrations, les fibrations naturelles.*

Démonstration. — Voir [RB09, théorème 9.2.4]. \square

6.7. — Considérons une sous-catégorie S de E . On note $\mathcal{A}(E, S)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}(E)$ formée des préfaisceaux F sur E à valeurs dans \mathcal{A} tels que, pour toute flèche $x \longrightarrow y$ de S , le morphisme induit

$$F(y) \longrightarrow F(x)$$

soit une équivalence faible de \mathcal{A} .

PROPOSITION 6.8. — *La catégorie $\mathcal{A}(E, S)$ est une catégorie dérivable à gauche (homotopiquement complète), avec pour équivalences faibles, les équivalences faibles naturelles, et pour fibrations, les fibrations bordées entre préfaisceaux fibrants sur les bords.*

Démonstration. — Voir [RB09, théorème 9.3.8]. \square

COROLLAIRE 6.9. — *La catégorie $\mathcal{A}(E, S)$ est une catégorie dérivable à gauche (homotopiquement complète), avec pour équivalences faibles, les équivalences faibles naturelles, et pour fibrations, les fibrations naturelles.*

Démonstration. — Voir [RB09, théorème 9.3.8]. □

6.10. — Revenons au cas d'une petite catégorie arbitraire. On a tout d'abord le résultat suivant.

THÉORÈME 6.11 (Rădulescu-Banu). — *Soit I une petite catégorie. La catégorie $\mathcal{A}(I)$ des préfaisceaux sur I à valeurs dans \mathcal{A} admet une structure de catégorie dérivable à gauche, avec pour équivalences faibles, les équivalences faibles naturelles, et pour fibrations, les fibrations naturelles.*

Démonstration. — [RB09, théorème 9.5.5]. □

6.12. — Le théorème ci-dessus est une généralisation du corollaire 6.6. Nous allons à présent généraliser le théorème 6.5. Pour cela, nous aurons besoin de rappeler quelques uns des ingrédients essentiels de la preuve du théorème 6.11.

Soit Δ' la catégorie dont les objets sont les ensembles totalement ordonnés finis $[n] = \{0, \dots, n\}$, $n \geq 0$, et dont les flèches sont les applications strictement croissantes.

Étant donnée une petite catégorie I , on désigne par Δ'/I la catégorie dont les objets sont les couples (n, v) , où $n \geq 0$ est un entier, et $v : [n] \rightarrow I$ un foncteur. Les morphismes $f : (n, v) \rightarrow (p, w)$ dans Δ'/I sont les morphismes $f : [n] \rightarrow [p]$ de Δ' tels que le triangle ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{f} & [p] \\ & \searrow v & \swarrow w \\ & & I \end{array}$$

On vérifie sans peine que la catégorie Δ'/I est une catégorie directe (en posant $\ell(n, v) = n$). On dispose d'un foncteur canonique

$$(6.12.1) \quad \tau_I : \Delta'/I \rightarrow I$$

défini en envoyant le couple (n, v) sur $v(n)$.

Cette construction est fonctorielle : si $u : I \rightarrow J$ un foncteur entre petites catégories, il induit un foncteur

$$\Delta'/u : \Delta'/I \rightarrow \Delta'J, \quad (n, v) \mapsto (n, uv).$$

On vérifie en outre que le carré ci-dessous commute.

$$(6.12.2) \quad \begin{array}{ccc} \Delta'/I & \xrightarrow{\Delta'/u} & \Delta'/J \\ \tau_I \downarrow & & \downarrow \tau_J \\ I & \xrightarrow{u} & J \end{array}$$

De plus, lorsque u est une fibration de Grothendieck à fibres discrètes, le carré (6.12.2) est cartésien dans la catégorie des petites catégories (voir [Cis06, proposition 3.2.5]).

6.13. — Étant donnée une petite catégorie I , on note S_I la sous-catégorie de Δ'/I , ayant les mêmes objets que Δ'/I , et dont les flèches sont les morphismes dont l'image par le foncteur τ_I est une identité. On pose alors

$$\underline{\mathcal{A}}(I) = \mathcal{A}(\Delta'/I, S_I).$$

On considèrera la catégorie $\underline{\mathcal{A}}(I)$ munie de la structure de catégorie dérivable à gauche donnée par la proposition 6.8.

LEMME 6.14. — *Pour tout objet fibrant sur les bords F de $\mathcal{A}(\Delta'/I)$, le foncteur $(\tau_I)_*(F)$ est représentable (cf. 2.2). En outre, si $F \rightarrow F'$ est une fibration (resp. une fibration triviale) entre objets fibrants au sens de la proposition 6.8, alors le morphisme induit $(\tau_I)_*(F) \rightarrow (\tau_I)_*(F')$ est une fibration (resp. une fibration triviale) naturelle.*

Démonstration. — Cela résulte formellement de [RB09, théorème 9.4.2]. \square

LEMME 6.15. — *Soient G un objet de $\underline{\mathcal{A}}(I)$, et F un objet de $\mathcal{A}(I)$. On suppose que G est fibrant sur les bords. Un morphisme $\tau_I^*(F) \rightarrow G$ est une équivalence faible naturelle si et seulement si le morphisme correspondant par adjonction $F \rightarrow (\tau_I)_*(G)$ est une équivalence faible naturelle.*

Démonstration. — Voir [RB09, proposition 9.5.4]. \square

6.16. — On appelle τ -fibrations les morphismes de $\mathcal{A}(I)$ qui appartiennent à la plus petite classe de morphismes de $\mathcal{A}(I)$ vérifiant les conditions suivantes (on dira qu'un objet F de $\mathcal{A}(I)$ est τ -fibrant si le morphisme $F \rightarrow \star$ est une τ -fibration).

- $\tau 1$ Pour toute fibration entre objets fibrants $F \rightarrow F'$ dans $\mathcal{A}(\Delta'/I)$, le morphisme $(\tau_I)_*(F) \rightarrow (\tau_I)_*(F')$ est une τ -fibration.
- $\tau 2$ Pour toute τ -fibration entre objets τ -fibrants $F \rightarrow G$, et pour tout morphisme de source τ -fibrante $G' \rightarrow G$, si le produit fibré $F' = G' \times_G F$ est représentable dans $\mathcal{A}(I)$, alors la projection $F' \rightarrow G'$ est une τ -fibration.

$\tau 3$ Si $F_i \longrightarrow G_i, i \in I$, est une petite famille de τ -fibrations entre objets τ -fibrants, et si $\prod_{i \in I} F_i$ et $\prod_{i \in I} G_i$ sont représentables dans $\mathcal{A}(I)$, alors le morphisme induit

$$\prod_{i \in I} F_i \longrightarrow \prod_{i \in I} G_i$$

est une τ -fibration.

$\tau 4$ Soit

$$\cdots \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0, \quad n \geq 0$$

une tour de τ -fibrations, avec F_0 τ -fibrant. Si la limite $F = \varprojlim_n F_n$ est représentable dans $\mathcal{A}(I)$, alors la flèche canonique $F \longrightarrow F_0$ est une τ -fibration.

On note $\mathcal{A}_\tau(I)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}(I)$ formée des préfaisceaux τ -fibrants.

THÉOREME 6.17. — *La catégorie $\mathcal{A}(I)$ admet une structure de catégorie dérivable à gauche (homotopiquement complète), avec pour équivalences faibles, les équivalences faibles naturelles, et pour fibrations, les τ -fibrations.*

En outre, le foncteur

$$\underline{\mathcal{A}}(I)_f \longrightarrow \mathcal{A}(I), \quad F \longmapsto (\tau_I)_*(F)$$

est exact à gauche, et induit une équivalence de catégories

$$\text{Ho } \underline{\mathcal{A}}(I)_f \simeq \text{Ho } \mathcal{A}(I).$$

Démonstration. — En vertu du lemme 6.14, la classe des τ -fibrations est contenue dans la classe des fibrations naturelles. Pour vérifier que l'on a obtenu une catégorie dérivable à gauche, il suffit donc de démontrer l'axiome de factorisation D4. Soit $F \longrightarrow G$ un morphisme de but τ -fibrant. On peut alors choisir une équivalence faible de but fibrant sur les bords $\tau_I^*(G) \longrightarrow G_0$, puis factoriser $\tau_I^*(F) \longrightarrow G_0$ en une équivalence faible naturelle $\tau_I^*(F) \longrightarrow F_0$ suivie d'une fibration bordée $F_0 \longrightarrow G_0$. Posons $F' = (\tau_I)_*(F_0)$ et $G' = (\tau_I)_*(G_0)$. On dispose alors d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ F' & \longrightarrow & G' \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des équivalences faibles naturelles (par le lemme 6.15), et dont la flèche horizontale inférieure est une τ -fibration de but τ -fibrant. Comme toute τ -fibration est une fibration naturelle, le produit fibré $H = F' \times_{G'} G$ est représentable et la projection $H \longrightarrow F'$ est une équivalence faible naturelle. On en déduit que

$$F \longrightarrow H \longrightarrow G$$

est une factorisation en une équivalence faible naturelle suivie d'une τ -fibration. Le fait que le foncteur $(\tau_J)_*$ soit exact à gauche résulte de la définition même des τ -fibrations et du lemme 6.15. La proposition 1.8 et [RB09, proposition 9.5.7] impliquent aussitôt que ce foncteur induit une équivalence de catégories homotopiques. \square

LEMME 6.18. — *Soit $u : I \longrightarrow J$ une fibration de Grothendieck à fibres discrètes. Alors le carré commutatif (6.12.2) induit un isomorphisme de foncteurs canonique*

$$u^*(\tau_J)_*(F) \simeq (\tau_I)_*(\Delta'/u)^*(F)$$

pour tout objet F de $\mathcal{A}(J)$.

Démonstration. — Il suffit de prouver l'assertion dans le cas où \mathcal{A} est la catégorie des ensembles. Comme le carré (6.12.2) est cartésien, cela résulte formellement du fait que u est une fibration de Grothendieck (voir, par exemple, [Cis08, proposition 2.4]). \square

PROPOSITION 6.19. — *Soit $u : I \longrightarrow J$ une fibration de Grothendieck à fibres discrètes. Le foncteur image inverse*

$$u^* : \mathcal{A}(J) \longrightarrow \mathcal{A}(I)$$

est exact à gauche pour les structures de catégorie dérivable à gauche du théorème 6.17.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que le foncteur u^* préserve les τ -fibrations. Comme ce foncteur commute aux petites limites projectives, il suffit de démontrer que, pour toute fibration bordée entre préfaisceaux fibrants sur les bords $F \longrightarrow G$ dans $\mathcal{A}(\Delta'/J)$, le morphisme

$$u^*(\tau_J)_*(F) \longrightarrow u^*(\tau_I)_*(G)$$

est une τ -fibration. En vertu du lemme 6.18, il suffit donc de démontrer que le foncteur $(\Delta'/u)^*$ préserve les fibrations bordées. Or cette dernière propriété résulte formellement du fait que Δ'/u est une fibration de Grothendieck à fibre discrète, et donc un isomorphisme local (on vérifie aussitôt que le lemme 1.14 reste vrai pour les catégories directes générales). \square

PROPOSITION 6.20. — *Soit $u : I \longrightarrow J$ un foncteur entre petites catégories. Pour tout préfaisceau τ -fibrant F , le foncteur $u_*(F)$ est représentable par un préfaisceau τ -fibrant. De plus, le foncteur induit*

$$u_* : \mathcal{A}_\tau(I) \longrightarrow \mathcal{A}_\tau(J)$$

est exact à gauche.

Démonstration. — Il résulte aussitôt de [RB09, théorème 9.4.3], et de l'isomorphisme $u_*(\tau_I)_* \simeq (\tau_J)_*(\Delta'/u)_*$, que si $F \rightarrow G$ est une fibration bordée entre objets fibrants sur les bords (éventuellement triviale) dans $\mathcal{A}(\Delta'/I)$, alors le morphisme $u_*(\tau_I)_*(F) \rightarrow u_*(\tau_I)_*(G)$ a la même propriété. La proposition en découle immédiatement. \square

COROLLAIRE 6.21. — *Le prédérivateur associé à une catégorie dérivable à gauche homotopiquement complète est un dérivateur à gauche de domaine $\mathcal{C}at$.*

Démonstration. — On utilise pour ce faire les structures de catégories dérivables données par le théorème 6.17. L'axiome Der 1 est immédiat ; on a même un peu mieux : pour toute petite famille $(I_j)_{j \in J}$ de petites catégories, le foncteur

$$\mathrm{Ho} \mathcal{A}(\prod_j I_j) \longrightarrow \prod_j \mathrm{Ho} \mathcal{A}_j$$

est une équivalence de catégories (cela résulte aussitôt de [RB09, théorème 7.1.1]). L'axiome Der 2 est une conséquence immédiate du calcul de fraction à homotopie près et de la proposition 6.2. Grâce à la proposition 6.20, l'axiome Der 3g résulte d'une application évidente du lemme 2.5 appliqué à l'adjonction partielle (u^*, u_*) associée à un foncteur $u : I \rightarrow J$. L'axiome Der 4g résulte quant à lui des propositions 6.19 et 6.20 et du fait que le composé de foncteurs dérivés de foncteurs exact à gauche est le foncteur dérivé des composés (cf. 3.3). L'axiome Der 5 résulte toujours de la proposition 2.15. \square

THÉORÈME 6.22. — *Soit \mathcal{A} une catégorie de modèles faible homotopiquement complète. On suppose que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée.*

(a) *La catégorie \mathcal{A} est une catégorie de modèles.*

(b) *La catégorie de modèles faible \mathcal{A} est homotopiquement cocomplète.*

Alors, pour toute petite catégorie I , la catégorie $\mathcal{A}(I)$ des préfaisceaux sur I à valeurs dans \mathcal{A} admet une structure de catégorie de modèles (faible) dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles naturelles, dont les cofibrations sont les cofibrations naturelles, et dont les fibrations sont les τ -fibrations.

Démonstration. — Toute flèche de source cofibrante dans $\mathcal{A}(I)$ admet une factorisation en une cofibration suivie d'une équivalence faible naturelle : c'est évident sous l'hypothèse (a), et sous l'hypothèse (b), cela résulte de la version duale du théorème 6.11. On voit alors, grâce au théorème 6.17, qu'il ne reste plus qu'à vérifier que la catégorie dérivable $\mathcal{A}(I)$ est relevante au sens de 5.1. Autrement dit, il faut vérifier que toute τ -fibration de but τ -fibrant vérifie la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations naturelles. On s'aperçoit aussitôt, par un argument d'adjonction, qu'il suffit de prouver que les fibrations bordées de but fibrant sur les bords vérifient la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations naturelles dans $\mathcal{A}(\Delta'/I)$.

Nous laissons la preuve de ce fait au lecteur (car elle ne consiste essentiellement qu'à répéter les arguments utilisés pour prouver la proposition 5.13). \square

REMARQUE 6.23. — Lorsque \mathcal{A} est une catégorie de modèles, on a en fait, une structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{A}(I)$; autrement dit les factorisations peuvent encore être obtenues fonctoriellement dans $\mathcal{A}(I)$. Pour le voir, on voit que la preuve de l'existence de factorisations dans $\mathcal{A}(I)$ donnée pour prouver le théorème 6.17 nous ramène à prouver que les factorisations de la structure de catégorie dérivable à gauche du théorème 6.5 peuvent être obtenues fonctoriellement, ce qui se vérifie en suivant pas à pas la preuve du théorème 6.5 donnée dans [RB09].

COROLLAIRE 6.24. — *Si \mathcal{A} est une catégorie de modèles de Thomason homotopiquement complète, alors pour toute petite catégorie I la catégorie $\mathcal{A}(I)$ des préfaisceaux sur I à valeurs dans \mathcal{A} admet une structure de catégorie de modèles (faible) dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles naturelles, dont les cofibrations sont les cofibrations naturelles, et dont les fibrations sont les composés d'images inverses de τ -fibrations.*

Démonstration. — D'après le théorème 6.22, il ne reste qu'à prouver l'axiome TM5. La factorisation en une cofibration naturelle suivie d'une équivalence faible naturelle est immédiate. Si $u : X \rightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{A}(I)$, on peut former grâce au théorème 6.22 un carré commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & X' \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ Y & \xrightarrow{b} & Y' \end{array}$$

dans lequel a et b sont des équivalences faibles naturelles de but τ -fibrant, et u' est une τ -fibration. Les τ -fibrations étant des fibrations naturelles, le produit fibé $Y \times_{Y'} X'$ est représentable dans $\mathcal{A}(I)$. Il résulte de l'axiome TM1 que le morphisme $X \rightarrow Y \times_{Y'} X'$ est une équivalence faible naturelle, et que la projection $Y \times_{Y'} X' \rightarrow Y$ est l'image inverse d'une τ -fibration. \square

REMARQUE 6.25. — Le corollaire précédent est démontré par Weibel [Wei01] dans le cas où \mathcal{A} est une catégorie de modèles de Thomason simpliciale et homotopiquement complète admettant des petites limites projectives. Ceci dit, la restriction au cas des catégories de modèles simpliciales n'en est pas vraiment une. En effet, il n'est pas difficile de voir que toute catégorie de modèles (resp. catégorie de modèles de Thomason) est équivalente à une catégorie de modèles (resp. une catégorie de modèles de Thomason) simpliciale. La construction utilise la structure de catégorie de modèles de Reedy sur la catégorie des objets simpliciaux (laquelle se construit comme dans le cas classique des catégories de modèles de Quillen; cf. [Hir03]). Si \mathcal{A} est une catégorie de modèles, on peut

ensuite considérer la catégorie \mathcal{A}' , définie comme la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{A}(\Delta)$ des objets simpliciaux de \mathcal{A} , dont les objets sont les foncteurs $F : \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{A}$ qui envoient toutes les flèches de Δ sur des équivalences faibles. Il est immédiat que \mathcal{A}' est une catégorie de modèles (de Thomason, si c'est aussi le cas de \mathcal{A}), avec pour équivalences faibles, les équivalences faibles naturelles, et pour cofibrations (resp. fibrations), les cofibrations (resp. fibrations) de Reedy. Le foncteur dévaluation en zéro $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ est clairement un foncteur exact à gauche et à droite qui induit une équivalence de dérivateurs, et la catégorie \mathcal{A}' est une catégorie de modèles (éventuellement) simpliciale. On vérifie facilement que si en outre \mathcal{A} est homotopiquement (co)complète, il en est de même de \mathcal{A}' . Cependant, la catégorie \mathcal{A}' n'admet pas de limites ou de colimites arbitraires en général, même si c'était le cas de \mathcal{A} . C'est ce type de construction qui justifie que l'on ne demande pas aux catégories de modèles d'avoir des (co)limites arbitraires, mais seulement celles qui sont pertinentes homotopiquement.

Appendice A

Dérivateurs

A.1. — Cette section ne contient que les définitions succinctes concernant la notion de dérivateur, afin de faciliter la lecture de ces notes. On renvoie le lecteur à [Groa, Hel88, Hel97b, Mal01b, Mal07, CN08, Cis03, Cis08, Cis09] pour des développements plus systématiques. Nous nous référerons ici essentiellement à la liste des axiomes donnée dans [Mal01b], pour les dérivateurs généraux, et dans [Mal07], pour les dérivateurs triangulés. La terminologie, pour les morphismes de dérivateurs, est celle de [Cis03].

A.2. — On se donne une catégorie de diagrammes \mathcal{Dia} (c'est-à-dire une sous-2-catégorie pleine de la 2-catégorie des petites catégories vérifiant des conditions de stabilité adéquates) : dans la pratique, \mathcal{Dia} est la 2-catégorie des ensembles ordonnés (éventuellement finis), ou bien la 2-catégorie des petites catégories.

DÉFINITION A.3. — Un *prédérivateur* \mathbb{D} (de domaine \mathcal{Dia}) est un 2-foncteur contravariant (sur les 1-flèches et les 2-flèches) de \mathcal{Dia} vers la 2-catégorie des catégories (non nécessairement petites).

A.4. — Les prédérivateurs forment une 2-catégorie : les 1-morphismes (appelés dans [Cis03] *Dia-morphismes*) sont les pseudo-transformations naturelles, et les 2-morphismes sont les modifications (appelées dans [Cis03] *2-Dia-morphismes*). Si \mathbb{D} et \mathbb{D}' sont deux prédérivateurs, on désignera par $\underline{\text{Hom}}(\mathbb{D}, \mathbb{D}')$ la catégorie des morphismes de \mathbb{D} vers \mathbb{D}' .

On note e la catégorie ponctuelle (*i.e.* avec un seul objet, et pour seul morphisme, l'identité). La philosophie des (pré)déivateurs consiste à voir \mathbb{D} comme une structure sur la catégorie $\mathbb{D}(e)$.

La notion de dérivateur à gauche est une généralisation de la notion de catégorie admettant des petites limites projectives. En effet, si \mathcal{C} est une telle catégorie, elle définit un dérivateur à gauche défini par

$$A \mapsto \underline{\mathbf{Hom}}(A^{op}, \mathcal{C}),$$

où $\underline{\mathbf{Hom}}(A^{op}, \mathcal{C})$ désigne la catégorie des préfaisceaux sur A à valeurs dans \mathcal{C} .

Pour un prédérivateur \mathbb{D} donné et un foncteur $u : A \rightarrow B$, on note $u^* = \mathbb{D}(u) : \mathbb{D}(B) \rightarrow \mathbb{D}(A)$ le foncteur correspondant.

DÉFINITION A.5. — Un *dérivateur faible à gauche* (sous-entendu de domaine $\mathcal{D}ia$) est un prédérivateur \mathbb{D} satisfaisant les axiomes suivants.

Der 1 (a) Si I et J sont deux objets de $\mathcal{D}ia$, alors le foncteur

$$\mathbb{D}(I \amalg J) \xrightarrow{(i^*, j^*)} \mathbb{D}(I) \times \mathbb{D}(J) \quad ,$$

induit par les inclusions canoniques $i : I \rightarrow I \amalg J$ et $j : J \rightarrow I \amalg J$, est une équivalence de catégories.

(b) $\mathbb{D}(\emptyset)$ est équivalente à la catégorie ponctuelle.

Der 2 Pour toute petite catégorie A dans $\mathcal{D}ia$, la famille de foncteurs $a^* : \mathbb{D}(A) \rightarrow \mathbb{D}(e)$, $a \in \mathbf{Ob} A$, est conservative (*i.e.* si φ est un morphisme de $\mathbb{D}(A)$ tel que pour tout objet a de A , $a^*\varphi = \varphi_a$ soit un isomorphisme, alors φ est un isomorphisme).

Der 3g Tout foncteur de $\mathcal{D}ia$ admet une image directe cohomologique dans \mathbb{D} . Autrement dit, pour tout foncteur $u : A \rightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur image inverse

$$u^* : \mathbb{D}(B) \rightarrow \mathbb{D}(A)$$

admet un adjoint à droite

$$u_* : \mathbb{D}(A) \rightarrow \mathbb{D}(B).$$

Der 4g Pour tout foncteur $u : A \rightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$ et tout objet b de B , le morphisme de changement de base $b^* u_* \rightarrow p_* j^*$, induit par le 2-diagramme associé à (u, b) ,

$$\begin{array}{ccc} A/b & \xrightarrow{j} & A \\ p \downarrow & \not\cong \alpha & \downarrow u \\ e & \xrightarrow{b} & B \end{array} \quad ,$$

est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$ (où $A/b = B/b \times_B A$, j est la projection canonique, et α est le 2-morphisme défini par les morphismes de la forme $\alpha : u(a) \rightarrow b$ pour chaque objet (a, α) de A/b).

Si \mathbb{D} est un prédérivateur, on lui associe son prédérivateur *opposé* \mathbb{D}^{op} par la formule

$$\mathbb{D}^{op}(A) = \mathbb{D}(A^{op})^{op}.$$

Cela permet de dualiser les notions concernant les (pré)dérivateurs.

DÉFINITION A.6. — Un prédérivateur \mathbb{D} (de domaine $\mathcal{D}ia$) est un *dérivateur faible à droite* si \mathbb{D}^{op} est un dérivateur faible à gauche (de domaine $\mathcal{D}ia' = \{A^{op} \mid A \in \mathcal{D}ia\}$), ou encore, de manière équivalente, s'il satisfait les axiomes Der 1 et Der 2, ainsi que les deux axiomes ci-dessous.

Der 3d Tout foncteur de $\mathcal{D}ia$ admet une image directe homologique dans \mathbb{D} . Autrement dit, pour tout foncteur $u : A \rightarrow B$ dans $\mathcal{D}ia$, le foncteur image inverse

$$u^* : \mathbb{D}(B) \rightarrow \mathbb{D}(A)$$

admet un adjoint à gauche

$$u_! : \mathbb{D}(A) \rightarrow \mathbb{D}(B).$$

Der 4d Pour tout foncteur $u : A \rightarrow B$ de $\mathcal{D}ia$ et tout objet b de B , le morphisme de changement de base $p_! j^* \rightarrow b^* u_!$, induit par le 2-diagramme,

$$\begin{array}{ccc} b \backslash A & \xrightarrow{j} & A \\ p \downarrow & \alpha \nearrow & \downarrow u \\ e & \xrightarrow{b} & B \end{array},$$

est un isomorphisme dans $\mathbb{D}(e)$.

DÉFINITION A.7. — Un *dérivateur* (de domaine $\mathcal{D}ia$) est un dérivateur faible à gauche et à droite vérifiant par ailleurs l'axiome suivant :

Der 5 Pour tout couple de catégories (A, B) dans $\mathcal{D}ia$, si A est une catégorie finie libre, alors le foncteur canonique

$$\mathbf{dia}_{A,B} : \mathbb{D}(A \times B) \rightarrow \underline{\mathbf{Hom}}(A^{op}, \mathbb{D}(B))$$

est plein et essentiellement surjectif.

REMARQUE A.8. — Si $\mathcal{D}ia = \mathcal{C}at$ désigne la 2-catégorie des petites catégories, la donnée d'un dérivateur de domaine $\mathcal{C}at$ vérifiant l'axiome Der 5 équivaut à celle d'une *théorie homotopique* au sens de Heller [Hel88]. Grothendieck [Groa, Grob] et Maltiniotis [Mal01b, Mal07] font souvent le choix d'une version plus faible de l'axiome Der 5 : on ne considère que le cas où A est l'ensemble ordonné $\Delta_1 = \{0 < 1\}$. Ceci dit, dans la pratique, tous les exemples connus vérifient cette version plus forte.

DÉFINITION A.9. — Soit $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ un *Dia*-morphisme entre deux dérivateurs faibles à gauches (resp. à droite). On dit que \mathcal{F} est *continu*, ou encore *exact à gauche* (resp. *cocontinu*, ou encore *exact à droite*), si pour tout foncteur $u : A \rightarrow B$ de *Dia*, le foncteur \mathcal{F} commute à u_* (resp. $u_!$). Un *Dia*-morphisme entre dérivateurs est dit *bicontinu*, ou encore *exact*, s'il est à la fois continu et cocontinu.

DÉFINITION A.10. — Un dérivateur \mathbb{D} est *ponctué* s'il vérifie l'axiome suivant.

Der 6 Pour toute immersion ouverte (resp. fermée) $u : A \rightarrow B$ dans *Dia*, le foncteur $u_!$ (resp. u_*) admet un adjoint à gauche (resp. à droite), noté $u^?$ (resp. $u^!$).

(On rappelle qu'un foncteur $u : A \rightarrow B$ est une immersion fermée si $u^{op} : A^{op} \rightarrow B^{op}$ est une immersion ouverte.)

A.11. — Soit $\square = (\Delta_1 \times \Delta_1)^{op}$. On note \lrcorner le sous-ensemble ordonné de \square correspondant au diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} & & (0, 1) \\ & & \uparrow \\ (1, 0) & \longleftarrow & (1, 1) \end{array}$$

On désigne par $i : \lrcorner \rightarrow \square$ l'inclusion évidente.

Si \mathbb{D} est un dérivateur (faible à gauche), on dit qu'un objet X de $\mathbb{D}(\square)$ est *homotopiquement cartésien* si le morphisme unité $X \rightarrow i_* i^*(X)$ est un isomorphisme.

Si \mathbb{D} est un dérivateur (faible à droite), on dit qu'un objet X de $\mathbb{D}(\square)$ est *homotopiquement cocartésien* s'il est cartésien dans \mathbb{D}^{op} (où l'on a identifié abusivement \square et \square^{op}).

REMARQUE A.12. — Pour un traitement plus détaillé et systématique sur les dérivateurs et les carrés homotopiquement (co)cartésiens, on pourra consulter [Groa, Hel88, Cis08, CN08].

DÉFINITION A.13. — Un *dérivateur triangulé* est un dérivateur ponctué vérifiant en outre :

Der 7 Un objet de $\mathbb{D}(\square)$ est homotopiquement cartésien si et seulement s'il est homotopiquement cocartésien.

REMARQUE A.14. — Les références pour la théorie des dérivateurs triangulés sont [Hel97a, Hel97b, Mal07, CN08].

BIBLIOGRAPHIE

- [Bro73] K. S. BROWN – « Abstract homotopy and generalized sheaf cohomology », *Transactions of the Amer. Math. Soc.* **186** (1973), p. 419–458.
- [Cis] D.-C. CISINSKI – « Invariance de la K -théorie par équivalences dérivées », à paraître dans *J. K-theory*.
- [Cis03] ———, « Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles », *Annales Mathématiques Blaise Pascal* **10** (2003), p. 195–244.
- [Cis06] ———, *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, Astérisque, vol. 308, Soc. Math. France, 2006.
- [Cis08] ———, « Propriétés universelles et extensions de Kan dérivées », *Theory and Applications of Categories* **20** (2008), no. 17, p. 605–649.
- [Cis09] ———, « Locally constant functors », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **147** (2009), p. 593–614.
- [CN08] D.-C. CISINSKI & A. NEEMAN – « Additivity for derivator K -theory », *Adv. Math.* **217** (2008), no. 4, p. 1381–1475.
- [CS02] W. CHACHÓLSKI & J. SCHERER – « Homotopy theory of diagrams », *Mem. Amer. Math. Soc.* **155** (2002), no. 736.
- [DHKS04] W. G. DWYER, P. S. HIRSCHHORN, D. M. KAN & J. H. SMITH – *Homotopy limit functors on model categories and homotopical categories*, Math. surveys and monographs, vol. 113, Amer. Math. Soc., 2004.
- [DS95] W. G. DWYER & J. SPALINSKI – « Homotopy theories and model categories », in *Handbook of Algebraic Topology*, North-Holland, 1995, p. 73–126.
- [Groa] A. GROTHENDIECK – « *Dérivateurs* », manuscrit. <http://people.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateurs.html>.
- [Grob] ———, « *Pursuing stacks* », manuscrit. À paraître dans la série *Documents mathématiques*, Soc. Math. France.
- [Gro03] ———, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques, vol. 3, Soc. Math. France, 2003, édition recomposée et annotée du volume 224 des Lecture Notes in Mathematics, publié en 1971 par Springer-Verlag.
- [GZ67] P. GABRIEL & M. ZISMAN – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik, vol. 35, Springer-Verlag, 1967.
- [Hap87] D. HAPPEL – « On the derived category of a finite-dimensional algebra », *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), no. 3, p. 339–389.
- [Hel60] A. HELLER – « The loop-space functor in homological algebra », *Trans. Amer. Math. Soc.* **96** (1960), p. 382–394.

- [Hel88] ———, « Homotopy theories », *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* **71** (1988), no. 383.
- [Hel97a] ———, « Homological algebra and (semi)stable homotopy », *J. Pure. Appl. Algebra* **115** (1997), p. 131–139.
- [Hel97b] ———, « Stable homotopy theories and stabilization », *J. Pure. Appl. Algebra* **115** (1997), p. 113–130.
- [Hir03] P. HIRSCHHORN – *Model categories and their localizations*, Math. surveys and monographs, Vol. 99, Amer. Math. Soc., 2003.
- [Kel90] B. KELLER – « Chain complexes and stable categories », *Manus. Math.* **67** (1990), p. 379–417.
- [Kel91] ———, « Derived categories and universal problems », *Comm. Alg.* **19** (1991), no. 3, p. 699–747.
- [Kel07] ———, « Le dérivateur triangulé associé à une catégorie exacte », *Contemp. Math.* **431** (2007), p. 369–374.
- [KM08] B. KAHN & G. MALTSINIOTIS – « Structures de dérivabilité », *Adv. Math.* **218** (2008), no. 4, p. 1286–1318.
- [Mac98] S. MAC LANE – *Categories for the working mathematician*, Graduate texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, 1998, second edition.
- [Mal01a] G. MALTSINIOTIS – « Structure triangulée sur les catégories de co-efficients de dérivateurs triangulés », Exposés au groupe de travail *Algèbre et topologie homotopiques*, 2001.
- [Mal01b] ———, « Introduction à la théorie des dérivateurs », disponible à l'adresse <http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/>, 2001.
- [Mal07] ———, « La K -théorie d'un dérivateur triangulé », *Contemp. Math.* **431** (2007), p. 341–368.
- [Qui67] D. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, 1967.
- [Qui73] ———, « Higher algebraic K -theory », in *Higher K -theories I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 341, Springer-Verlag, 1973, p. 85–147.
- [RB09] A. RĂDULESCU-BANU – « Cofibrations in homotopy theory », preprint arXiv :math/0610009v4, 2006, révisé in 2009.
- [TT90] R. THOMASON & T. TROBAUGH – « Higher algebraic K -theory of schemes and of derived categories », in *The Grothendieck Festschrift III*, Birkhäuser, 1990, p. 247–435.
- [Wal85] F. WALDHAUSEN – « Algebraic K -theory of spaces », in *Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N.J., 1983)*, vol. 1126, Springer-Verlag, 1985, p. 318–419.
- [Wei01] C. WEIBEL – « Homotopy ends and Thomason model categories », *Selecta Math.* **7** (2001), p. 533–564.