HAL open science

# Evaluation imprécise de l'indisponibilité des systèmes par chaînes de Markov floues.

Walid Mechri, Christophe Simon, Kamel Ben Othman, Jean-François Aubry, Mohamed Benrejeb

## To cite this version:

Walid Mechri, Christophe Simon, Kamel Ben Othman, Jean-François Aubry, Mohamed Benrejeb. Evaluation imprécise de l'indisponibilité des systèmes par chaînes de Markov floues.. 4e Congrès Performances et Nouvelles Technologies en Maintenance, PENTOM'09, Dec 2009, Autrans, France. pp.CDROM. hal-00440426

**HAL Id: hal-00440426**

**https://hal.science/hal-00440426v1**

Submitted on 10 Dec 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Evaluation imprécise de l'indisponibilité des systèmes par chaînes de Markov floues.

**Mechri Walid[1] Simon Christophe[2] Ben Othman Kamel[1]**
**Aubry Jean-François[2] Benrejeb Mohamed[1]**

[1]*LARA Tunis, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, BP37 le Belvédère, 1002 Tunis, Tunisie.*

[2]*CRAN - Nancy Université-CNRS, UMR 7039, 2 Rue Jean Lamour, Vandoeuvre les Nancy, France.*

RÉSUMÉ. *Dans cet article, nous traitons du problème d'imprécision dans l'évaluation de l'indisponibilité des systèmes à l'aide des chaînes de Markov floues. Nous montrons comment l'imprécision sur les valeurs de paramètres caractéristiques induit des variations particulièrement significatives sur les performances du système étudié.*

ABSTRACT. *This article deals with the problem of imprecision in the unavailability evaluation of systems by the use of fuzzy Markov chains. We show how the imprecision on some characteristic parameters values causes significant variations on the performance of the studied system.*

MOTS-CLÉS : *Chaînes de Markov, Nombres flous, arithmétique à intervalles, indisponibilité.*

KEYWORDS: *Markov chain, Fuzzy numbers, interval arithmetic, unavailability.*

## 1. Introduction

La méthode des chaînes de Markov permet l'étude de la disponibilité et de la sûreté de fonctionnement des systèmes complexes. Elle est basée sur l'utilisation d'un diagramme logique qui est établi sous la forme d'un graphe représentant les différents états du système.

Si dans les études usuelles d'indisponibilité des systèmes, les probabilités manipulées sont souvent précises et considérées parfaitement déterminables. Les problèmes réels sont difficilement appréhendés par une connaissance précise des probabilités mises en jeu (Utkin *et al*, 2007). Ce problème de précision dans la connaissance des valeurs de probabilités est connu et appréhendé de diverses manières. La modélisation des probabilités par des nombres flous est une forme de représentation de l'imprécision (Huang *et al*, 2007 ; Kurse *et al*, 1998). Buckley l'a proposé pour l'étude de l'imprécision dans les chaînes de Markov (Buckley *et al*, 2002).

Dans ce travail, nous proposons d'utiliser ces travaux dans le cadre de l'évaluation des performances des systèmes en modélisant l'imprécision sur la connaissance des taux de défaillance des composants et autres paramètres caractéristiques d'un système par des nombres flous. La deuxième section présente et définit les propriétés utiles des chaînes de Markov. La troisième section de cet article est consacrée à la modélisation des paramètres imprécis des systèmes par les nombres flous. La quatrième section concerne la modélisation de l'indisponibilité par les chaînes de Markov floues. La dernière section est dédiée à un exemple applicatif défini dans la littérature qui illustre l'approche présentée.

## 2 .Chaines de Markov à états finis

Une chaîne de Markov à états finis a un nombre fini d'états possibles (résultats) $S_1$, $S_2$...., $S_r$ à chaque étape $n$=1, 2, 3 …, dans le processus. On définit la probabilité de transition de l'état $S_i$ vers l'état $S_j$ comme suit :

$$p_{ij} = \Pr\,(S_j \quad à \quad l'instant \quad n+1 | S_i \quad à \quad l'instant \quad n) \qquad [1]$$

avec $1 \le i, j \le r, \quad n = 1,2...$

$P = (p_{ij})$ de $r \times r$ est la matrice de transition élaborée à partir des probabilités de transition $p_{ij}$. Cette matrice est caractérisée par le fait que la somme de chacune de ses lignes est égale à un et chaque coefficients $p_{ij} \ge 0$.

Soit $p_{ij}^{(n)}$ est la probabilité d'atteindre $S_j$ partant de $S_i$ à l'instant $n$. Ainsi, on définit $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$ la matrice de transition à l'instant $n$.

La loi de transition de la chaîne de Markov est définie par :

$$p^{(n+1)}(S_j) = \sum_i p^{(n)}(S_i).P_{ij} \qquad [2]$$

$$p^{(n+1)} = p^{(n)}.P \qquad [3]$$

Finalement, à un instant $n$ donné, nous obtenons la formule de Chapman-Kolmogorov :

$$p^{(n)} = p^{(0)}.P^n \qquad [4]$$

Ou $p^{(0)}$ est le vecteur de probabilité à l'instant initial,

Nous nous intéressons dans ce qui suit aux chaînes de Markov à états finis où les probabilités de transition sont imprécises. L'imprécision peut être représentée de plusieurs manières. Les fiabilistes peuvent dans certains cas fournir des informations imprécises sous la forme d'intervalles ou une forme légèrement plus riche une série d'intervalle emboîtés liées au niveau de confiance α sur la connaissance qu'ils formalisent. Il s'agit en fait d'un nombre flou au sens de Zadeh (Zadeh *et al*, 1965).

## 3. Nombres flous

Un sous-ensemble flou $A$ sur un référentiel $\Omega$ est caractérisé par une fonction d'appartenance $\mu_A$ qui associe à chaque élément $x$ de $\Omega$ un nombre réel dans l'intervalle $[0,1]$ :

$$\mu_A : \Omega \rightarrow [0,1] \qquad [5]$$

Un nombre flou est un sous-ensemble satisfaisant les conditions suivantes (Sallak *et al*, 2006):

- $\mu(x)$ est continue par morceaux
- $\mu(x)$ est convexe
- $\mu(x)$ est normale (il existe au moins une valeur $x_0$ telle que $\mu(x_0 = 1)$ ).

Bien qu'un nombre flou puisse avoir des formes très variées, dans ce travail, nous ne considérerons que des nombres flous triangulaires, caractérisés par trois paramètres ($m_i$, $a_i$, $b_i$), tel que $m_i$ est la valeur modale avec $\mu(m_i) = 1$, $a_i$ est la limite à gauche de $m_i$ et $b_i$ est la limite à droite de $m_i$.

Comme les opérations arithmétiques utilisées pour manipuler les nombres flous requièrent beaucoup de ressources, Kaufman *et al.* (Kaufman *et al*, 1991) ont montré que ces efforts de calculs sont largement simplifiés par la décomposition des fonctions d'appartenance des nombres flous en α-coupes $(0 \leq \alpha \leq 1)$ .

Nous pouvons lier un nombre flou triangulaire à un intervalle de confiance à un certain niveau α. En effet, si nous considérons un nombre flou $\widetilde{A}$ de fonction d'appartenance $\mu_{\widetilde{A}}(x)$, on obtient plusieurs intervalles emboîtés en utilisant la méthode des α−coupes (cf. figure 1).

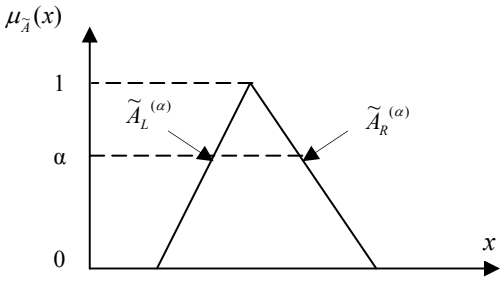


**Figure. 1.** *α-coupes d'un nombre flou*

$\widetilde{A}_L^{(\alpha)}$ et $\widetilde{A}_R^{(\alpha)}$ représenteront respectivement les limites gauche et droite de la fonction d'appartenance $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ à chaque α−coupe.

Les opérations arithmétiques appliquées à deux nombres floues $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ donnent les expressions suivantes :

$$\widetilde{Z} = \widetilde{X} + \widetilde{Y} \rightarrow [Z^{(\alpha)}{}_L, Z^{(\alpha)}{}_R] = [X^{(\alpha)}{}_L + Y^{(\alpha)}{}_L, X^{(\alpha)}{}_R + Y^{(\alpha)}{}_R] \quad [6]$$

$$\widetilde{Z} = \widetilde{X} - \widetilde{Y} \rightarrow [Z^{(\alpha)}{}_L, Z^{(\alpha)}{}_R] = [X^{(\alpha)}{}_L - Y^{(\alpha)}{}_R, X^{(\alpha)}{}_R - Y^{(\alpha)}{}_L] \quad [7]$$

$$\widetilde{Z} = \widetilde{X}.\widetilde{Y} \rightarrow [Z^{(\alpha)}{}_L, Z^{(\alpha)}{}_R] \quad [8]$$

$$\text{Avec} \begin{cases} \widetilde{Z}_L^{(\alpha)} = \min(X^{(\alpha)}{}_L.Y^{(\alpha)}{}_L, X^{(\alpha)}{}_R.Y^{(\alpha)}{}_L, X^{(\alpha)}{}_L.Y^{(\alpha)}{}_R, X^{(\alpha)}{}_R.Y^{(\alpha)}{}_R) \\ \widetilde{Z}_R^{(\alpha)} = \max(X^{(\alpha)}{}_L.Y^{(\alpha)}{}_L, X^{(\alpha)}{}_R.Y^{(\alpha)}{}_L, X^{(\alpha)}{}_L.Y^{(\alpha)}{}_R, X^{(\alpha)}{}_R.Y^{(\alpha)}{}_R) \end{cases} \quad [9]$$

## 4. Chaine de Markov floue

Dans la matrice de transition $P = (p_{ij})$ tous les $p_{ij}$ doivent être connues exactement. Ces valeurs sont généralement estimées ou fournies par des experts or comme le rappelle Utkin (Utkin et al., 2007), la précision n'est pas toujours de mise. Aussi, nous supposons maintenant qu'une partie des $p_{ij}$ est imprécises et on modélise cette incertitude en utilisant des nombres flous. Ainsi, à chaque $p_{ij}$ on associe une valeur floue $\widetilde{p}_{ij}$ et on définit la matrice de transition floue $\widetilde{P} = (\widetilde{p}_{ij})$ conformément à l'équation 4.

Toutefois, Buckley (Buckley, 2002) rappelle la contrainte sur la matrice de transition décrite par l'équation suivante :

$$S = \left\{ p = (p_1, p_2, ....., p_m) \middle| p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r} p_i = 1 \right\} \qquad [10]$$

avec $p_i$ la $i^{ème}$ entité du vecteur $p$ .

Ainsi, on définit le domaine des α-coupes $Dom[\alpha]$

$$Dom_i[\alpha] = (\prod_{j=1}^{r} \overline{p}_{ij}[\alpha]) \cap S, \qquad [11]$$

avec $\widetilde{p}_{ij}[\alpha]$ une α-coupe de la probabilité de transition floue $\widetilde{p}_{ij}$ .

Pour $0 \leq \alpha \leq 1; \quad 1 \leq i \leq r$

$$Dom[\alpha] = \prod_{i=1}^{r} Dom_i[\alpha], \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \qquad [12]$$

On considère maintenant $f_{ij}^{(n)}$ une fonction de $p = (p_{11}, ....., p_{rr}) \in Dom[\alpha]$.

On regarde les lignes de $f_{ij}^{(n)}$ sur $Dom[\alpha]$ .

$$\widetilde{p}_{ij}^{(n)}[\alpha] = f_{ij}^{(n)}(Dom[\alpha]), \qquad [13]$$

Pour calculer tout les $\widetilde{p}_{ij}^{(n)}[\alpha]$, on doit trouver les bornes des intervalles. Ainsi, nous devons résoudre (Buckley *et al*, 2002):

$$p_{ijL}^{(n)}(\alpha) = \min\left\{ f_{ij}^{(n)}(p) \middle| p \in Dom[\alpha] \right\}, \qquad [14]$$

et

$$p_{ijR}^{(n)}(\alpha) = \max\left\{ f_{ij}^{(n)}(p) \middle| p \in Dom[\alpha] \right\}, \qquad [15]$$

avec $\widetilde{p}_{ij}^{(n)}[\alpha] = [p_{ijL}^{(n)}(\alpha), p_{ijR}^{(n)}(\alpha)]$, pour tous α.

## 5. Exemple : Etude d'un SIS

Le système présenté à la figure 2 a été proposé dans (Signoret, 2005) et sera utilisé comme exemple.

Le système étudié est composé de :

- La partie capteur en architecture 2oo3, constitué de trois capteurs de pression $PT_i$.

- la partie unité logique (Logic Solver) en architecture 1oo1.
- la partie actionneur en architecture 2oo1, composés par les vannes SV et SDV.

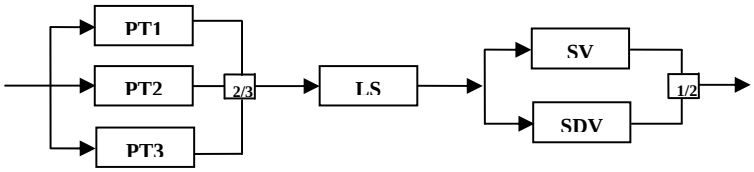


**Figure 2.** *Diagramme de fiabilité du système étudié*

Le taux de défaillance $\tilde{\lambda}$ et taux de réparation $\tilde{\mu}$ sont des nombres flous de type triangulaire.

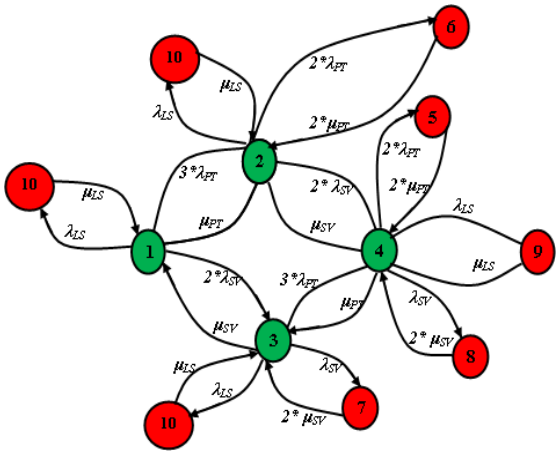


**Figure 3.** *Modèle markovien du SIS étudié*

Dans le tableau 1, nous donnons les valeurs de ces 3 paramètres pour chaque composant du système.

| | $\lambda_i$ | | | $\mu_i$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_i$ | $m_i$ | $b_i$ | $c_i$ | $n_i$ | $d_i$ |
| **PT** | $4{,}3.10^{-6}$ | $5{,}1.10^{-6}$ | $6{,}0.10^{-6}$ | $3{,}57.10^{-2}$ | $4{,}17.10^{-2}$ | $5{,}00.10^{-2}$ |
| **SV, SDV** | $7{,}26.10^{-5}$ | $8{,}0.10^{-5}$ | $9{,}05.10^{-5}$ | $8{,}33.10^{-2}$ | $1\ ,0.10^{-1}$ | $1{,}25.10^{-1}$ |
| **Logic solver** | $1{,}2.10^{-5}$ | $2{,}0.10^{-5}$ | $3{,}1.10^{-5}$ | $1{,}0.10^{-1}$ | $1{,}25.10^{-1}$ | $1{,}67.10^{-1}$ |

**Tableau 1.** *Paramètres des nombres flous des $\lambda_i$ et $\mu_i$.*

La probabilité de défaillance du système de la figure 2, appelée aussi indisponibilité est calculée par la combinaison de la probabilité de défaillance de tous les sous systèmes. Le modèle markovien de ce système est donné à la figure 3.

En utilisant la méthode des chaînes de Markov floues proposée dans cet article, celle des $\alpha$-coupes et les opérations arithmétiques définies précédemment, on détermine la distribution de l'indisponibilité du système (probabilité de défaillance du système) à partir des distributions des paramètres caractéristiques de ces composants représentés par des nombres flous triangulaires.

On détermine, pour chaque $\alpha$-coupe, les bornes supérieure et inférieure de la probabilité de défaillance du système. Cette probabilité de défaillance est égale à l'indisponibilité asymptotique du système calculée par la méthode des chaines de Markov floue à partir des paramètres caractéristiques imprécis, modélisés par des nombres flous.

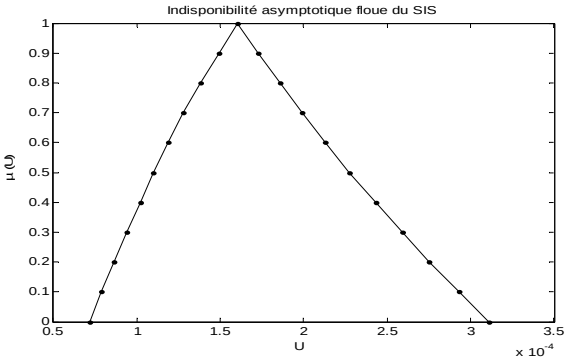


**Figure 4.** *Variation de l'indisponibilité floue du SIS étudié*

La figure 4 donne l'indisponibilité floue asymptotique du système, qui a la forme d'un nombre flou triangulaire. Cette probabilité de défaillance floue varie de $0{,}72.10^{-4}$ à $3{,}11.10^{-4}$.

En utilisant les chaînes de Markov floue et la méthode des $\alpha$-coupes, on obtient une probabilité de défaillance floue sous forme triangulaire à partir des paramètres caractéristiques modélisés par des nombres flous triangulaires.

## 6. Conclusion

L'imprécision dans les études de l'indisponibilité des systèmes est un problème significatif souvent minoré. Nous avons proposé dans cet article l'étude des effets de l'imprécision sur les paramètres caractéristiques d'un système industriel en utilisant la théorie des ensembles flous et nous avons montré que cela entraîne une

imprécision sur l'indisponibilité de ce système. Compte tenu de ce constat, il semble crucial d'étudier les effets des imprécisions affectant l'ensemble des paramètres et, les chaînes de Markov flous sont des modèles pertinents dans ce contexte.

## 7. Bibliographie

Buckley JJ. , *Fuzzy Probabilities: New Approach and Applications*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.

Buckley JJ. , Eslami E., *Fuzzy Markov Chains: Uncertain Probabilities*, MathWare and Soft Computing, Vol. 9, 33–41, 2002.

Huang J-J., Tzeng G-H., *A Constrained Fuzzy Arithmetic Method for the Fuzzy Analytic Network Process*, Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD 2007) 0-7695-2874.

Kaufman. A., Gupta MM. *Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Application*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1991.

Klir G.J, Cooper J.A., *On Constrained Fuzzy Arithmetic*, Proc. 5th Int. IEEE Conf. on Fuzzy Systems, New Orleans, 1996, 1285-1290

Kurse R., Buck-Emden R., Cordes R.,, *Processor Power Considerations- AN Application of Fuzzy Markov Chains*, J. Intelligent and Fuzzy Systems, 6,223-235, 1998.

Signoret J.-P., *Methodology SIL evaluations related to HIPS* – Total Draft Memo, April 27-2005.

Sallak M, Aubry J-F, Simon Ch ., *Aide à la décision dans la réduction de l'incertitude des SIL : une approche floue/possibiliste*. , Revue électronique, Sciences et Technologies de l'Automatique, 2006.

Utkin L., Coolen F., *New metaheuristics, neural & fuzzy techniques in reliability*, vol. 2 of Computational intelligence in reliability engineering, G. Levitin, Chapter 10 Imprecise reliability: An introductory overview., pp. 261-306, 2007.

Zadeh.L: *Fuzzy sets*. Information and Control, 8:338–353, 1965.