



HAL
open science

Plongements d'espaces homogènes sphériques sur un corps quelconque

Mathieu Huruguen

► **To cite this version:**

Mathieu Huruguen. Plongements d'espaces homogènes sphériques sur un corps quelconque. 2009. hal-00438195v1

HAL Id: hal-00438195

<https://hal.science/hal-00438195v1>

Preprint submitted on 2 Dec 2009 (v1), last revised 13 Apr 2011 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Plongements d'espaces homogènes sphériques sur un corps quelconque

Mathieu Huruguen

Résumé

On étend la définition des espaces homogènes sphériques et de leurs plongements au cas d'un corps quelconque. On montre qu'à un plongement d'un espace homogène sphérique fixé X_0 on peut associer un éventail colorié stable par le groupe de Galois. On donne ensuite deux contre-exemples à la réciproque : un éventail colorié stable par Galois ne correspond pas forcément à un plongement de X_0 . On présente toutefois des situations où la correspondance est parfaite.

Abstract

We give a definition of spherical homogeneous spaces and their embeddings over an arbitrary field. Given such a homogeneous space X_0 , we show that one can associate with each of its embedding a coloured fan which is stable under the action of the Galois group. Then we produce two counter-examples to the converse statement: a Galois stable coloured fan does not necessarily correspond to an embedding of X_0 . However, we show that this correspondence works under some additional assumptions.

On fixe un corps k , un k -groupe réductif connexe G , et un **espace homogène sphérique** (X_0, x_0) sous l'action de G (cf. définition 2.1). On s'intéresse aux **plongements** de (X_0, x_0) , c'est-à-dire aux k -variétés normales pointées munies d'une action de G possédant une orbite ouverte isomorphe à X_0 . Il y a deux situations où la classification de ces plongements est bien connue. Dans le cas où $G = \mathbb{G}_{m,k}^n$ est un tore déployé, et $(X_0, x_0) = (\mathbb{G}_{m,k}^n, e)$, on retrouve les variétés toriques introduites (dans le cas lisse) par Demazure (cf. [7]). Elles sont classifiées par des objets combinatoires appelés éventails, qui vivent dans le \mathbb{Q} -espace vectoriel $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, où N est le groupe des cocaractères de $\mathbb{G}_{m,k}^n$. Pour un exposé de cette classification, on renvoie à [9] dans le cas où k est algébriquement clos, et à [6] dans le cas général. Luna et Vust ont montré dans [11] que la situation est assez similaire lorsque le corps k est algébriquement clos de caractéristique nulle (G et X_0 étant cette fois-ci quelconque). Ils prouvent que les plongements de X_0 sont encore classifiés par des objets combinatoires, appelés **éventails coloriés**, vivant dans des données attachées à l'espace homogène X_0 dont on est parti. Knop a généralisé leurs résultats au cas où le corps k est algébriquement clos de caractéristique positive, cf. [10]. Dans cet article, on essaie de répondre à la question suivante :

Que devient cette classification lorsqu'on ne suppose plus le tore déployé (dans le cas torique), ou le corps algébriquement clos (dans le cas sphérique) ?

Pour la suite, on supposera le corps k parfait. On fixe une clôture algébrique \bar{k} de k , et on note $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}|k)$ le groupe de Galois absolu. Pour aborder cette question, on va bien sûr utiliser la théorie de Luna et Vust qui décrit les plongements de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$ (espace homogène obtenu par extension des scalaires à partir de (X_0, x_0)). Si un plongement de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$ provient par extension des scalaires d'un plongement de (X_0, x_0) , on dira simplement qu'il descend. Une des questions que l'on se pose est donc de reconnaître parmi les plongements de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$ ceux qui

descendent. On verra dans la partie 3 que le groupe Γ agit sur l'ensemble des éventails coloriés, on peut donc parler d'éventail colorié stable par Γ . On a alors le résultat suivant (cf.théorème 3.12) :

Si un plongement de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$ descend, alors l'éventail colorié associé est stable par Γ .

La réciproque n'est pas toujours vraie. On donne deux contre-exemples. Le premier est de nature torique. On suppose que Γ possède un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Alors (cf.proposition 4.20 et remarque 4.23) :

Il existe un tore T de dimension 3, correspondant à une action de Γ sur \mathbb{Z}^3 , et un éventail complet lisse stable par Γ tel que le plongement de $(\mathbb{G}_{m,\bar{k}}^3, e)$ associé ne descende pas.

Ce contre-exemple est en un certain sens optimal (cf.remarque 4.22). La preuve que le plongement construit ne descend pas utilise de manière essentielle le fait suivant : on peut trouver trois points sur la variété sous-jacente au plongement (qui est donc complète et lisse) qui ne sont pas dans un même ouvert affine. On sait par ailleurs que sur une variété torique, deux points quelconques se trouvent toujours dans un même ouvert affine (cf.[14]). Le second contre-exemple est de nature sphérique (cf.proposition 4.38 et remarque 4.40) et fournit de la même manière un exemple de variété sphérique complète et lisse dans laquelle se trouvent deux points qui ne sont pas dans un même ouvert affine :

Il existe une \mathbb{R} -forme G de $SL_{3,\mathbb{C}}$ ainsi qu'un espace homogène sphérique (X_0, x_0) sous G et un plongement complet lisse de $(X_{0,\mathbb{C}}, x_{0,\mathbb{C}})$ dont l'éventail colorié est stable par $\text{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ et qui ne descend pas.

Dans une autre direction, on donne quelques situations où, un plongement X de l'espace homogène sphérique $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$ d'éventail colorié stable par Γ étant donné, on parvient à montrer qu'il descend. Tout d'abord lorsque la variété X est quasi-projective. Ensuite, lorsque l'espace homogène sphérique est **déployé** (cf.définition 4.1 et théorème 4.3) :

Si le corps k est infini et parfait et si (X_0, x_0) est déployé, alors les plongements de (X_0, x_0) correspondent aux éventails coloriés stables par Γ .

Lorsque le groupe G est un tore déployé T , l'action de Γ sur N est triviale, et on retrouve le fait que les plongements de l'espace homogène (T, e) , qui est déployé, sont classifiés par les éventails dans $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (avec ici l'hypothèse que le corps k est infini et parfait). Dans le cas torique, on a aussi le résultat partiel suivant (cf.proposition 4.7) :

On suppose k parfait. Soit T un k -tore. Si T est de dimension 2, ou si T est déployé par une extension quadratique de k , les plongements de (T, e) correspondent aux éventails Γ -invariants.

A cause du premier contre-exemple donné ci-dessus, ce résultat ne vaut pas pour les extensions cubiques ou pour les tores de dimension 3. Une motivation pour l'étude des plongements d'un espace homogène sphérique donné est la construction de compactifications équivariantes lisses de celui-ci. Dans le cas torique, cette construction est due à Colliot-Thélène, Harari et Skorobogatov dans [5].

Le texte se décompose comme suit. Dans la première partie on fait les rappels nécessaires de descente galoisienne. Dans la seconde partie, on donne les définitions d'espace homogène sphérique, de plongements de tels espaces homogènes et on caractérise les plongements de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$ qui descendent comme étant ceux qui satisfont simultanément deux conditions désignée par (i) et (ii) par la suite (cf.théorème 2.8). Dans la troisième partie, on fait le lien avec la théorie de Luna et Vust. Après un bref rappel des objets combinatoires qui interviennent dans la classification des plongements de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$, on construit une action du groupe de Galois Γ sur ces objets combinatoires, et on montre, étant donné un plongement de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$, que la condition (i) revient

à demander que l'éventail colorié associé à ce plongement est stable par Γ (cf.théorème 3.12). Enfin dans la partie 4, on s'intéresse à la condition (ii), montrant qu'elle peut être vérifiée ou ne pas l'être, aboutissant aux contre-exemples (propositions 4.20 et 4.38) et aux résultats positifs (cf.théorème 4.3 et proposition 4.7) expliqués au début de cette introduction.

Je tiens ici à remercier M.Brion pour son écoute attentive et ses précieux conseils concernant ce travail, tant sur le fond que sur la forme.

1 Rappels sur la descente galoisienne de schémas.

Pour les résultats non démontrés de cette partie, on renvoie à [12] (Chap.V, §4.) ou à [13] (Chap.11). Soit k un corps quelconque et K une extension algébrique galoisienne de k , de groupe de Galois Γ . L'inclusion $k \subseteq K$ est fixée une fois pour toute. De cette façon, un K -schéma X définit de manière canonique un k -schéma que l'on note de la même manière. Pour tout $\sigma \in \Gamma$, on a un morphisme de k -schémas :

$$\sigma = (\sigma^{-1})^* : \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(K).$$

On obtient ainsi une action de Γ sur $\text{Spec}(K)$. Cette action est semi-linéaire, comme définie dans la proposition suivante :

Définition 1.1. Soit X un K -schéma. Une action **semi-linéaire** de Γ sur X est un morphisme de groupes $\Gamma \rightarrow \text{Aut}_{k\text{-sch}}(X)$ vérifiant que pour tout $\sigma \in \Gamma$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(K) & \xrightarrow{\sigma} & \text{Spec}(K). \end{array}$$

(Par abus de notation, on note σ l'automorphisme de X obtenu par le morphisme définissant l'action.)

Soit Y un k -schéma. On note Y_K le K -schéma obtenu par extension des scalaires, $Y \times_k K$. Pour tout $\sigma \in \Gamma$, on dispose du morphisme de k -schémas suivant :

$$\sigma = (id_Y, (\sigma^{-1})^*) : Y \times_k K \longrightarrow Y \times_k K.$$

On vérifie facilement que l'on définit ainsi une action semi-linéaire du groupe Γ sur le K -schéma Y_K . Lorsqu'on utilise une action semi-linéaire de Γ sur un K -schéma du type Y_K ce sera toujours, sauf mention explicite du contraire, l'action que l'on vient de définir. Soit \mathcal{C} la catégorie des k -schémas et morphismes de k -schémas.

Définition 1.2. A tout objet X de \mathcal{C} on associe le foncteur h_X de \mathcal{C} vers la catégorie des ensembles défini par $h_X(Z) = \text{Mor}(X, Z)$ sur les objets et par la composition sur les morphismes.

Ce foncteur est covariant. Si X est muni d'une action semi-linéaire de Γ , alors pour tout objet Z de \mathcal{C} , le groupe Γ agit sur $h_X(Z)$ et on note h_X^Γ le sous-foncteur défini par $h_X^\Gamma(Z) = h_X(Z)^\Gamma$ (éléments invariants sous Γ).

Définition 1.3. Soit X un K -schéma muni d'une action semi-linéaire de Γ . Un **quotient catégorique** de X par Γ est la donnée d'un k -schéma Y et d'un morphisme $X \xrightarrow{p} Y$ vérifiant :

- Pour tout objet Z de \mathcal{C} , l'application $h_Y(Z) \rightarrow h_X(Z)$ est injective.
- L'image de cette application est $h_X^\Gamma(Z)$.

On voit facilement qu'entre deux quotients catégoriques il existe un et un seul isomorphisme.

Définition 1.4. Soit $U = \text{Spec}(A)$ un K -schéma affine muni d'une action semi-linéaire de K . Le morphisme de groupes $\Gamma \rightarrow \text{Aut}_{k\text{-alg}}(A), \sigma \mapsto (\sigma^{-1})^*$ définit une action de Γ sur A qui est semi-linéaire au sens suivant :

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \forall x \in A, \quad \forall \lambda \in K, \quad \sigma(\lambda x) = \sigma(\lambda)\sigma(x).$$

On dit que Γ agit continûment sur U (ou A), ou que l'action de Γ sur U est continue si les orbites de Γ dans A sont finies.

On a le théorème suivant :

Théorème 1.5. *Soit X un K -schéma séparé de type fini muni d'une action semi-linéaire de Γ . Pour qu'il existe un k -schéma séparé de type fini Y et un isomorphisme Γ -équivariant $X \rightarrow Y_K$, il faut et il suffit que X puisse être recouvert par des ouverts affines stables par Γ et sur lesquels Γ agit continûment. Un tel k -schéma Y est un quotient catégorique de X par Γ .*

Dans certaines conditions, il n'est pas nécessaire de vérifier que l'action de Γ est continue sur tous les ouverts du recouvrement, mais sur un seul d'entre eux.

Proposition 1.6. *Soit X un K -schéma séparé de type fini intègre muni d'une action semi-linéaire de Γ . On suppose qu'il existe un ouvert affine de X stable par Γ et sur lequel Γ agit continûment. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le schéma X est recouvert par des ouverts affines stables par Γ et sur lesquels le groupe Γ agit continûment.*
- (ii) *Pour tout point fermé $x \in X$, il existe un ouvert affine contenant l'orbite de x sous le groupe Γ .*

Par ailleurs, pour tout point $x \in X$, l'orbite de x sous Γ est finie.

Démonstration. On aura besoin dans la suite des faits suivants : pour tout ouvert affine V de X , les $\sigma.V$ sont en nombre fini, et pour tout point $x \in X$ l'orbite de x sous Γ est finie. Pour prouver cela, on commence par montrer que, si D est un diviseur premier sur X , alors les $\sigma.D$, pour $\sigma \in \Gamma$ sont en nombre fini. Notons U un ouvert affine stable par Γ et sur lequel le groupe Γ agit continûment. Le complémentaire de l'ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ dans X est pur de codimension 1. Si D est une des composantes irréductibles de ce complémentaire, alors $\sigma.D$ aussi, pour tout $\sigma \in \Gamma$. Comme le nombre de ces composantes irréductibles est fini, on a le résultat dans ce cas. Si D intersecte U , alors il correspond à un idéal premier \wp de A . Comme \wp est de type fini, et Γ agit continûment sur A , on a aussi le résultat dans ce cas. Soit $V = \text{Spec}(B)$ un ouvert affine de X . Alors le complémentaire de V est une réunion de diviseurs premiers, et donc les $\sigma.V$, pour $\sigma \in \Gamma$ sont en nombre fini. Soit ensuite x un point de X . Soit un ouvert affine V contenant x . D'après ce qui précède, les $\sigma.V$, pour $\sigma \in \Gamma$ sont en nombre fini, donc, il existe un sous-groupe Γ_V d'indice fini dans Γ tel que :

$$\forall \sigma \in \Gamma_V, \quad \sigma.V = V.$$

Comme Γ_V agit de manière continue sur U et que X est intègre, on montre comme ci-dessus que Γ_V agit de manière continue sur V . Le point x correspond à un certain idéal maximal \mathfrak{m} de B . Comme \mathfrak{m} est de type fini et que Γ_V agit de façon continue sur B , on en déduit que les $\sigma.x$, où $\sigma \in \Gamma_V$ sont en nombre fini. Mais Γ_V est d'indice fini dans Γ , donc $\Gamma.x$ est fini, ce que l'on voulait. Montrons à présent l'équivalence des propriétés (i) et (ii). Comme il est clair que (i) implique (ii), il suffit d'établir que (ii) implique (i). Pour cela, soit x un point fermé de X , et soit V un ouvert affine contenant $\Gamma.x$. On sait alors que les $\sigma.V$, pour $\sigma \in \Gamma$ sont en nombre fini, donc comme X est séparé :

$$U_x = \bigcap_{\sigma \in \Gamma} \sigma.V$$

est un ouvert affine (car X est séparé) qui contient x et qui est stable par Γ . Le fermé :

$$X \setminus \bigcup_{x \text{ point fermé de } X} U_x$$

ne possède pas de points fermés, il est donc vide, et X est recouvert par des ouverts affines stables sous l'action de Γ . Remarquons alors que pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ stable par Γ , on obtient une action de Γ sur $K(X) = \text{Frac}(A)$, et que toutes ces actions sont les mêmes. Comme

par hypothèse il existe au moins un ouvert affine stable par Γ et sur lequel Γ agit continûment, les orbites de Γ dans $K(X)$ sont finies. Ceci montre que le groupe Γ agit continûment sur tous les ouverts affines qu'il stabilise, et achève de prouver la proposition. \square

Théorème 1.7. *Soit X un K -schéma intègre quasi-projectif muni d'une action semi-linéaire de Γ . On suppose qu'il existe un ouvert affine U de X stable par Γ et sur lequel Γ agit continûment. Alors il existe un k -schéma Y et un isomorphisme Γ -équivariant $X \rightarrow Y_K$.*

Démonstration. D'après le théorème 1.5 et la proposition 1.6, il suffit de montrer que pour tout point fermé $x \in X$, il existe un ouvert affine contenant l'orbite $\Gamma.x$. Comme X est quasi-projectif, tout ensemble fini de points fermés est inclus dans un ouvert affine. Il reste à remarquer que l'orbite de tout point fermé de X sous Γ est finie, toujours d'après la proposition 1.6. \square

2 Plongement de k -espaces homogènes sphériques : définitions et premières propriétés.

Dans cette partie, k désigne un corps parfait. K est une extension algébrique galoisienne de k de groupe de Galois Γ . On fixe une clôture algébrique \bar{k} de k et des inclusions $k \subseteq K \subseteq \bar{k}$. Dans toute la suite on appellera k -variété un k -schéma séparé de type fini géométriquement intègre.

2.1 Définitions.

On considère un k -groupe algébrique linéaire G (c'est-à-dire un k -schéma en groupes de type fini affine et géométriquement intègre) connexe et réductif.

Définition 2.1. *Un espace homogène sphérique sur k est un couple (X_0, x_0) , où :*

- X_0 est une k -variété sur laquelle le groupe G agit.
- Le groupe $G(\bar{k})$ agit transitivement sur $X_0(\bar{k})$.
- $x_0 \in X_0(k)$ est un point rationnel dont l'orbite sous un certain sous-groupe de Borel de $G_{\bar{k}}$ est ouverte dans $X_0(\bar{k})$.

Le point rationnel x_0 est appelé point base de l'espace homogène.

Définition 2.2. *Un plongement de l'espace homogène sphérique (X_0, x_0) est un triplet (X, x, i) où :*

- X est une k -variété normale munie d'une action de G .
- $i : X_0 \rightarrow X$ est une immersion ouverte G -équivariante.
- $x \in X(k)$ est un point rationnel vérifiant $i(x_0) = x$.

Définition 2.3. *Soient (X, x, i) et (Y, y, j) deux plongements de l'espace homogène X_0 . Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de k -schémas. On dit que c'est un **morphisme de plongements** si :*

- f est G -équivariant.
- $f(x) = y$.

Remarquons qu'on a alors automatiquement $f \circ i = j$. La suite de ce travail consiste à essayer de classifier, un espace homogène sphérique (X_0, x_0) étant fixé, ses plongements à isomorphisme près.

2.2 Relations entre les plongements de (X_0, x_0) et ceux de $(X_{0,K}, x_{0,K})$.

Soit (X_0, x_0) un espace homogène sphérique sur k . On vérifie facilement que $(X_{0,K}, x_{0,K})$ est un espace homogène sphérique sur K . Dans cette partie, on relie les classes d'isomorphisme de plongements des espaces homogènes sphériques (X_0, x_0) et $(X_{0,K}, x_{0,K})$.

Proposition 2.4. *Soit (X, x, i) un plongement de (X_0, x_0) . Alors (X_K, x_K, i_K) est un plongement de $(X_{0,K}, x_{0,K})$. Par ailleurs, si f est un morphisme entre les plongements (X, x, i) et (Y, y, j) , alors f_K est un morphisme entre les plongements (X_K, x_K, i_K) et (Y_K, y_K, j_K) .*

Démonstration. La seule difficulté est de voir que X_K est normal. Mais on sait déjà que ce schéma est intègre, donc le lemme suivant permet de conclure :

Lemme 2.5. *Soit A une k -algèbre. On suppose $K \otimes_k A$ intègre. Alors :*

$$A \text{ normal} \iff K \otimes_k A \text{ normal.}$$

Démonstration. Comme $A = \text{Frac}(A) \cap (K \otimes_k A)$, on voit facilement que si $K \otimes_k A$ est normal, alors A l'est aussi. Par ailleurs le critère de normalité de Serre entraîne que pour toute extension galoisienne finie L de k ,

$$A \text{ normal} \iff L \otimes_k A \text{ normal.}$$

Si K est finie sur k , c'est exactement le résultat que l'on veut montrer. Sinon, on écrit K comme réunion de sous extensions galoisiennes finies sur k pour conclure que si A est normal, $K \otimes_k A$ l'est aussi. \square

\square

Ainsi, si les deux plongements (X, x, i) et (Y, y, j) sont isomorphes sur k , il en est de même des plongements (X_K, x_K, i_K) et (Y_K, y_K, j_K) sur K . La proposition suivante montre que la réciproque est vraie.

Proposition 2.6. *Soient (X, x, i) et (Y, y, j) deux plongements de (X_0, x_0) . Soit $f : X_K \rightarrow Y_K$ un morphisme de plongements. Alors il existe un unique morphisme de plongements $g : X \rightarrow Y$ tel que $g_K = f$.*

Démonstration. On utilise ici les notations introduites dans la partie 1. Soit $\sigma \in \Gamma$. Dans les diagrammes suivants,

$$\begin{array}{ccccc} X_{0,K} & \xrightarrow{i_K} & X_K & \xrightarrow{f} & Y_K \\ \sigma \downarrow & & \sigma \downarrow & & \sigma \downarrow \\ X_{0,K} & \xrightarrow{i_K} & X_K & \xrightarrow{f} & Y_K \end{array}$$

le grand et celui de gauche commutent. Ceci prouve que les morphismes $\sigma \circ f$ et $f \circ \sigma$ coïncident sur un ouvert de X_K , donc coïncident partout car Y_K est séparé. Ainsi f fournit un morphisme de foncteur $h_{Y_K} \rightarrow h_{X_K}$ qui respecte l'action de Γ des deux côtés. On en déduit un morphisme $h_{Y_K}^\Gamma \rightarrow h_{X_K}^\Gamma$, puis $g : X \rightarrow Y$ tel que $g_K = f$. Pour voir que g est G -équivariant on procède de la même façon. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G_K \times_K X_K & \longrightarrow & G_K \times_K Y_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_K & \longrightarrow & Y_K \end{array}$$

On en déduit un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} h_{G_K \times_K X_K} & \longleftarrow & h_{G_K \times_K Y_K} \\ \uparrow & & \uparrow \\ h_{X_K} & \longleftarrow & h_{Y_K} \end{array}$$

dont on vérifie facilement qu'il respecte les actions de Γ . Comme les quotients catégoriques de $G_K \times_K X_K$ et $G_K \times_K Y_K$ par Γ existent et valent respectivement $G \times_k X$ et $G \times_k Y$ on obtient que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G \times_k X & \longrightarrow & G \times_k Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

ce qui signifie que g est G -équivariant. Par ailleurs, comme les applications $X(k) \rightarrow X(K)$ et $Y(k) \rightarrow Y(K)$ sont injectives, $g(x) = y$. On en déduit que g est un morphisme de plongements. \square

On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.7. *Soient (X, x, i) et (Y, y, j) deux plongements de (X_0, x_0) . Alors (X, x, i) et (Y, y, j) sont isomorphes si et seulement si (X_K, x_K, i_K) et (Y_K, y_K, j_K) le sont.*

D'après ce qui précède, classifier les plongements de (X_0, x_0) à isomorphisme près revient à reconnaître parmi les plongements de $(X_{0,K}, x_{0,K})$ ceux qui proviennent d'un plongement de (X_0, x_0) .

Théorème 2.8. *Soit (X, x, i) un plongement de $(X_{0,K}, x_{0,K})$. Alors il existe un plongement (Y, y, j) de (X_0, x_0) et un isomorphisme de plongements $(X, x, i) \rightarrow (Y_K, y_K, j_K)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) *L'action semi-linéaire de Γ sur $X_{0,K}$ s'étend à X .*
- (ii) *L'orbite sous Γ de tout point fermé de X est contenue dans un ouvert affine.*

Démonstration. Si (Y, y, j) est un plongement de (X_0, x_0) , l'action semi-linéaire de Γ sur Y_K prolonge celle sur $X_{0,K}$, et on peut recouvrir Y_K par des ouverts affines stables par Γ , donc l'orbite sous Γ de tout point fermé de Y_K est contenue dans un ouvert affine. Les deux conditions sont donc nécessaires. Inversement, supposons que (i) et (ii) sont vérifiées. Il existe au moins un ouvert affine de X stable par Γ et sur lequel Γ agit continûment : n'importe quel ouvert affine du type U_K , où U est un ouvert affine de X_0 fait l'affaire. Par ailleurs, X est intègre. On sait donc, d'après le théorème 1.5 et la proposition 1.6 qu'il existe un k -schéma séparé de type fini Y et un isomorphisme Γ -équivariant $X \rightarrow Y_K$. Le schéma Y est géométriquement intègre et normal (d'après le lemme 2.5). Soit $\sigma \in \Gamma$. On sait que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G_K \times_K X_{0,K} & \longrightarrow & X_{0,K} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ G_K \times_K X_{0,K} & \longrightarrow & X_{0,K}. \end{array}$$

Le σ de gauche fait référence à l'action semi-linéaire de Γ sur $G_K \times_K X_{0,K} = (G \times_k X_0) \times_k K$. Puisque l'action de Γ sur $X_{0,K}$ se prolonge à X , on en déduit que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G_K \times_K X & \longrightarrow & X \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ G_K \times_K X & \longrightarrow & X. \end{array}$$

est commutatif. Comme ci-dessus, on remarque que cela signifie que le morphisme de foncteurs :

$$h_X \rightarrow h_{G_K \times_K X}$$

respecte l'action de Γ , d'où un morphisme entre les sous-foncteurs :

$$h_X^\Gamma \rightarrow h_{G_K \times_K X}^\Gamma.$$

Comme le quotient catégorique de $G_K \times_K X$ existe et vaut $G \times_k Y$, on en déduit un morphisme : $G \times_k Y \rightarrow Y$. On vérifie par le même type d'argument que cela fournit une action de G sur Y et que l'isomorphisme $X \rightarrow Y_K$ est G_K -équivariant. Ainsi, on a une immersion ouverte $X_{0,K} \rightarrow Y_K$ qui est Γ -équivariante. Par le même argument catégorique que ci-dessus, il existe un morphisme $j : X_0 \rightarrow Y$, qui donne cette immersion ouverte quand on étend les scalaires. Par descente fidèlement plate, ce morphisme est une immersion ouverte. Par ailleurs il est G -équivariant par le même argument catégorique que ci-dessus. Finalement, en posant $y = j(x_0) \in Y(k)$, on voit bien que (Y, y, j) est un plongement de (X_0, x_0) , et que les plongements (X, x, i) et (Y_K, y_K, j_K) de $(X_{0,K}, x_{0,K})$ sont isomorphes.

Remarque 2.9. D'après le théorème 1.7, la condition (ii) est toujours vérifiée si la variété X est quasi-projective. □

3 Lien avec les données combinatoires dans le cas où $K = \bar{k}$.

On suppose que $K = \bar{k}$. Ainsi, Γ désigne le groupe de Galois absolu de k . On dispose d'une classification des plongements de l'espace homogène sphérique $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$ sur \bar{k} comme exposé dans [10]. On se propose dans cette partie de montrer que la condition (i) du théorème 2.8 se traduit de manière très simple en terme des objets intervenant dans cette classification. Après quelques rappels sur la théorie de Luna et Vust dans la section 1, on construit dans la section 2 une action du groupe Γ sur les objets combinatoires intervenant dans cette théorie, pour arriver dans la section 3 au théorème principal de cette partie.

3.1 Quelques rappels et notations sur la classification des plongements de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$.

On rappelle ici comment les plongements de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$ sont classifiés par des objets combinatoires. On renvoie à [10] ou à [4] pour tout ce qui suit. Notons :

$$\mathcal{K} = \bar{k}(X_{0,\bar{k}})$$

le corps de fonctions de $X_{0,\bar{k}}$. La lettre \mathcal{V} désignera l'ensemble des valuations à valeurs dans \mathbb{Q} du corps \mathcal{K} . On choisit pour ce qui suit un sous-groupe de Borel B de $G_{\bar{k}}$ tel que $B(\bar{k}).x_0$ est ouverte dans $X_0(\bar{k})$. Notons \mathcal{O} cette orbite. On sait que \mathcal{O} est affine. On notera :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(X_{0,\bar{k}})$$

l'ensemble formé des composantes irréductibles du complémentaire de \mathcal{O} dans $X_{0,\bar{k}}$. Ce sont des diviseurs premiers stables par $B(\bar{k})$. Soit $\mathcal{X}(B)$ le groupe des caractères de B . On notera par la suite :

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}(X_{0,\bar{k}}),$$

le sous-groupe de $\mathcal{X}(B)$ formé des poids des vecteurs propres de $B(\bar{k})$ dans \mathcal{K} . La lettre V désignera le \mathbb{Q} -espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$.

Soit (X, x, i) un plongement de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$. Soit Y une $G(\bar{k})$ -orbite dans X . On peut associer à Y l'ouvert $G(\bar{k})$ -stable de X défini par :

$$X_{Y,G}(\bar{k}) = \{z \in X(\bar{k}), \text{l'adhérence de } G(\bar{k}).z \text{ contient } Y\}.$$

On peut aussi lui associer l'ouvert affine stable par $B(\bar{k})$ suivant :

$$X_{Y,B}(\bar{k}) = \{z \in X(\bar{k}), \text{l'adhérence de } B(\bar{k}).z \text{ contient } Y\}.$$

On veut construire un éventail colorié à partir du plongement (X, x, i) . On commence par construire un ensemble de sous-ensembles finis de \mathcal{V} de la manière suivante. L'orbite \mathcal{O} est incluse dans $X_{Y,G}$ et, comme elle est affine, le complémentaire de \mathcal{O} dans $X_{Y,G}$ est un fermé pur de codimension 1. Soit F_Y l'ensemble des composantes irréductibles de ce fermé qui contiennent Y . On a alors, pour $D \in \mathcal{D}$:

$$D \in F_Y \iff Y \subseteq D.$$

On note E_Y aussi le sous-ensemble de \mathcal{V} formé des valuations normalisées centrées en les éléments de F_Y . Remarquons que les éléments de F_Y sont tous des diviseurs premiers stables par $B(\bar{k})$. On associe au plongement (X, x, i) l'ensemble :

$$\mathcal{V}_X = \{E_Y, Y \text{ orbite de } G(\bar{k}) \text{ sur } X\}.$$

Remarquons que :

$$\bar{k}[X_{Y,B}] = \{f \in \mathcal{K}, f \in \bar{k}[\mathcal{O}] \text{ et } \forall \nu \in F_Y, \nu(f) \geq 0\}.$$

Pour obtenir un éventail colorié à partir de \mathcal{V}_X , on procède comme suit. On considère l'application :

$$\rho : \mathcal{V} \rightarrow V$$

$$\nu \mapsto \rho(\nu),$$

où :

$$\rho(\nu) : \chi \mapsto \nu(f)$$

où $f \in \mathcal{K}$ est vecteur propre de $B(\bar{k})$ de poids χ (un tel f est uniquement déterminé par χ à une constante multiplicative près). Soit Y une orbite de $G(\bar{k})$ dans X . Soit C_Y le cône polyédral engendré dans V par les éléments $\rho(\nu)$, pour $\nu \in \mathcal{V}_X$. Soit D_Y le sous-ensemble de \mathcal{D} suivant :

$$\{D \cap X_{0,\bar{k}}, D \in F_Y \text{ diviseur } B(\bar{k})\text{-stable mais non } G(\bar{k})\text{-stable} \}.$$

L'ensemble \mathcal{E}_X des cônes coloriés (C_Y, D_Y) pour Y parcourant l'ensemble des $G(\bar{k})$ -orbites sur X est l'éventail colorié que l'on associe au plongement (X, x, i) .

3.2 Préliminaires.

Soit (X_0, x_0) un espace homogène homogène sphérique sous l'action de G . Dans ce paragraphe, on construit des actions de Γ sur $\mathcal{K}, \mathcal{V}, \mathcal{X}, V$ et \mathcal{D} .

3.2.1 Une action de Γ sur \mathcal{K} .

Si X est un \bar{k} -schéma intègre birationnel à $X_{0,\bar{k}}$, et si φ est un automorphisme de X , on notera aussi φ l'automorphisme de \mathcal{K} déduit du morphisme φ^{-1} en prenant la fibre au point générique. Comme $X_{0,\bar{k}}$ est muni d'une action de Γ , on voit que \mathcal{K} aussi. De même, pour tout $g \in G(\bar{k})$, on dispose de l'automorphisme g de \mathcal{K} . La proposition suivante permet de comparer les actions de Γ et de $G(\bar{k})$ sur \mathcal{K} . Dans cette proposition, on note encore G le foncteur des points du k -groupe G , que l'on restreint à la catégorie des k -algèbres.

Proposition 3.1. *Soit $g \in G(\bar{k})$ et $\sigma \in \Gamma$. Alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} X_{0,\bar{k}} & \xrightarrow{g} & X_{0,\bar{k}} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ X_{0,\bar{k}} & \xrightarrow{\sigma(g)} & X_{0,\bar{k}} \end{array}$$

où $\sigma(g) = G(\sigma)(g) \in G(\bar{k})$.

Démonstration. Soit R une k -algèbre. Alors :

$$X_{0,\bar{k}}(R) = X_0(R) \times \text{Hom}_{k\text{-alg}}(\bar{k}, R).$$

Si R ne peut être muni d'une structure de \bar{k} -algèbre, cet ensemble est vide, et on montre sans peine que :

$$\begin{array}{ccc} X_{0,\bar{k}}(R) & \xrightarrow{g(R)} & X_{0,\bar{k}}(R) \\ \sigma(R) \downarrow & & \downarrow \sigma(R) \\ X_{0,\bar{k}}(R) & \xrightarrow{\sigma(g)(R)} & X_{0,\bar{k}}(R) \end{array}$$

est commutatif. Sinon, soit $(a, f) \in X_{0,\bar{k}}(R)$. Alors :

$$g(R).(a, f) = (G(f)(g).a, f),$$

puis :

$$\sigma(R)(g(R).(a, f)) = (G(f)(g).a, f \circ \sigma^{-1}).$$

Par ailleurs :

$$\sigma(R)(a, f) = (a, f \circ \sigma^{-1}),$$

donc :

$$\sigma(g).(\sigma(R)(a, f)) = (G(f \circ \sigma^{-1})(\sigma(g)).a, f \circ \sigma^{-1}).$$

Il reste à remarquer que :

$$G(f \circ \sigma^{-1})(\sigma(g)) = (G(f \circ \sigma^{-1}) \circ G(\sigma))(g) = G(f)(g)$$

pour conclure la preuve que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X_{0, \bar{k}}(R) & \xrightarrow{g(R)} & X_{0, \bar{k}}(R) \\ \sigma(R) \downarrow & & \sigma(R) \downarrow \\ X_{0, \bar{k}}(R) & \xrightarrow{\sigma(g)(R)} & X_{0, \bar{k}}(R) \end{array}$$

est commutatif aussi dans ce cas et achever la preuve de la proposition. □

En prenant la fibre au point générique des morphismes suivants :

$$\begin{array}{ccc} X_{0, \bar{k}} & \xrightarrow{\sigma(g^{-1})} & X_{0, \bar{k}} \\ \sigma^{-1} \downarrow & & \downarrow \sigma^{-1} \\ X_{0, \bar{k}} & \xrightarrow{g^{-1}} & X_{0, \bar{k}} \end{array} ,$$

et en remarquant que $(\sigma(g^{-1}))^{-1} = \sigma(g)$, on obtient la proposition suivante, qui compare les actions de Γ et $G(\bar{k})$ sur \mathcal{K} .

Proposition 3.2. *On a :*

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \forall g \in G(\bar{k}), \quad \forall f \in \mathcal{K}, \quad \sigma.(g.f) = \sigma(g).(\sigma.f).$$

3.2.2 Une action de Γ sur \mathcal{V} .

Si φ est un automorphisme de \mathcal{K} , on notera aussi $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ l'application qui à $\nu \in \mathcal{V}$ associe la valuation $\varphi.\nu$ définie de la manière suivante :

$$\forall f \in \mathcal{K}, \quad (\varphi.\nu)(f) = \nu(\varphi^{-1}(f)).$$

C'est une bijection. On définit de cette manière des actions de Γ et de $G(\bar{k})$ sur \mathcal{V} , et l'analogue de la proposition 3.2 est la suivante :

Proposition 3.3. *On a :*

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \forall g \in G(\bar{k}), \quad \forall \nu \in \mathcal{V}, \quad \sigma.(g.\nu) = \sigma(g).(\sigma.\nu).$$

Définition 3.4. *On dit qu'une valuation $\nu \in \mathcal{V}$ est $G(\bar{k})$ -invariante si :*

$$\forall g \in G(\bar{k}), \quad g.\nu = \nu.$$

On note \mathcal{V}^G l'ensemble de ces valuations. De la même façon, on dit qu'une valuation $\nu \in \mathcal{V}$ est $B(\bar{k})$ -invariante si :

$$\forall b \in B(\bar{k}), \quad b.\nu = \nu$$

et on note \mathcal{V}^B l'ensemble de ces valuations.

En utilisant la proposition 3.3, on obtient facilement :

Proposition 3.5. *Soit $\nu \in \mathcal{V}$ et $\sigma \in \Gamma$. Si $\nu \in \mathcal{V}^G$, alors $\sigma.\nu \in \mathcal{V}^G$.*

On va maintenant définir une autre action de Γ sur \mathcal{V}^B , qui coïncide parfois avec la précédente, par exemple dans le cas où le sous-groupe de Borel B est défini sur k . D'après [1] (Chap.IV, théorème 11.1), on sait qu'il existe un élément $g_\sigma \in G(\bar{k})$ vérifiant :

$$\sigma.B = g_\sigma B g_\sigma^{-1}.$$

Par ailleurs, toujours d'après [1] (Chap.IV, théorème 11.16), on sait qu'un tel élément g_σ est unique à multiplication à droite par un élément de $B(\bar{k})$ près.

Proposition 3.6. *Pour tout $\sigma \in \Gamma$, on a : $g_\sigma^{-1}.\sigma.\mathcal{O} = \mathcal{O}$.*

Démonstration. Il n'y a qu'à remarquer que $g_\sigma^{-1}.\sigma.\mathcal{O}$ est une orbite de $B(\bar{k})$ qui est ouverte. \square

Lemme 3.7. *Pour tout $(\sigma, \tau) \in \Gamma^2$, il existe $b_{\sigma, \tau}$ tel que :*

$$\sigma(g_\tau)g_\sigma = g_{\sigma\tau}b_{\sigma, \tau}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que :

$$\sigma.\tau.B = \sigma\tau.B,$$

donc :

$$\sigma(g_\tau)g_\sigma B g_\sigma^{-1} \sigma(g_\tau)^{-1} = g_{\sigma\tau} B g_{\sigma\tau}^{-1}.$$

On en déduit le résultat, d'après [loc.cit.]. \square

Définition 3.8. *Pour $\sigma \in \Gamma$ et $\nu \in \mathcal{V}$, on pose :*

$$\sigma * \nu = g_\sigma^{-1}.\sigma.\nu.$$

Proposition 3.9. *L'application :*

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathcal{V}^B &\rightarrow \mathcal{V}^B \\ (\sigma, \nu) &\mapsto \sigma * \nu \end{aligned}$$

définit une action de Γ sur \mathcal{V}^B .

Démonstration. La première chose à vérifier est que si $\nu \in \mathcal{V}^B$ et $\sigma \in \Gamma$, alors $\sigma * \nu \in \mathcal{V}^B$. Mais soit $b \in B(\bar{k})$. Alors, on sait qu'il existe $b' \in B(\bar{k})$ tel que :

$$g_\sigma.b.g_\sigma^{-1} = \sigma(b').$$

Il s'ensuit que :

$$b.(\sigma * \nu) = b.g_\sigma^{-1}.\sigma.\nu = g_\sigma^{-1}.\sigma(b').\sigma.\nu,$$

donc d'après la proposition 3.3,

$$b.(\sigma * \nu) = g_\sigma^{-1}.\sigma.b'.\nu.$$

Comme $\nu \in \mathcal{V}^B$, on obtient bien :

$$b.(\sigma * \nu) = \sigma * \nu.$$

La seconde chose à vérifier est que :

$$\forall (\sigma, \tau) \in \Gamma^2, \forall \nu \in \mathcal{V}^B, \quad \sigma * (\tau * \nu) = \sigma\tau * \nu.$$

Mais, d'après le lemme 3.7 :

$$\sigma\tau * \nu = g_{\sigma\tau}^{-1}.\sigma.\tau.\nu = b_{\sigma, \tau}.g_\sigma^{-1}.\sigma(g_\tau)^{-1}.\sigma.\tau.\nu$$

D'après la proposition 3.1 on sait que :

$$\sigma \circ g_\tau = \sigma(g_\tau) \circ \sigma.$$

Ceci montre que :

$$\sigma\tau * \nu = b_{\sigma,\tau}.g_{\sigma}^{-1}.\sigma.g_{\tau}^{-1}.\tau.\nu = b_{\sigma,\tau}(\sigma * (\tau * \nu)),$$

puis finalement, comme $\sigma * (\tau * \nu)$ est invariante par $B(\bar{k})$:

$$\sigma\tau * \nu = \sigma * (\tau * \nu).$$

Par ailleurs, l'action que l'on définit ainsi ne dépend pas du choix des g_{σ} . En effet, si l'on fait un autre choix, disons les g'_{σ} , alors on peut écrire, pour tout $\sigma \in \Gamma$, $g'_{\sigma} = g_{\sigma}b_{\sigma}$, pour certains $b_{\sigma} \in B(\bar{k})$. On en déduit que pour tout $\nu \in \mathcal{V}^B$:

$$g'^{-1}_{\sigma}.\sigma.\nu = b_{\sigma}^{-1}\sigma * \nu = \sigma * \nu$$

car $\sigma * \nu \in \mathcal{V}^B$. Ceci achève la preuve de la proposition. \square

3.2.3 Une action de Γ sur \mathcal{X} et V .

On commence par définir une action de Γ sur $\mathcal{X}(B)$, le groupe des caractères de B . Pour $\sigma \in \Gamma$ et $\chi \in \mathcal{X}(B)$, on pose :

$$\begin{aligned} \sigma * \chi : B &\rightarrow \mathbb{G}_{m,\bar{k}} \\ b &\mapsto \sigma(\chi(g_{\sigma}^{-1}\sigma^{-1}(b)g_{\sigma})). \end{aligned}$$

Cette définition de $\sigma.\chi$ est indépendante du choix de g_{σ} . On vérifie comme dans la proposition 3.9 que l'on obtient une action de Γ sur le groupe $\mathcal{X}(B)$. Montrons que Γ agit par restriction sur \mathcal{X} .

Lemme 3.10. *Soit $f \in \mathcal{K}$ vecteur propre pour l'action de $B(\bar{k})$, de poids χ , et $\sigma \in \Gamma$. Alors $\sigma.g_{\sigma}^{-1}.f$ est aussi vecteur propre pour $B(\bar{k})$, de poids $\sigma * \chi$.*

Démonstration. Soit $b \in B(\bar{k})$. D'après la proposition 3.3, on a $b \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1}(b)$. Il vient donc :

$$b.\sigma.g_{\sigma}^{-1}.f = \sigma.\sigma^{-1}(b).g_{\sigma}^{-1}.f.$$

Mais on sait que $g_{\sigma}^{-1}.\sigma^{-1}(b).g_{\sigma} \in B(\bar{k})$, donc comme f est vecteur propre pour l'action de $B(\bar{k})$ de poids χ , on obtient :

$$b.\sigma.g_{\sigma}^{-1}.f = \sigma.g_{\sigma}^{-1}(\chi(g_{\sigma}^{-1}.\sigma^{-1}(b).g_{\sigma}^{-1})f).$$

Puis, comme g_{σ}^{-1} est \bar{k} -linéaire et que σ agit par son action naturelle sur \bar{k} :

$$b.\sigma.g_{\sigma}^{-1}.f = \sigma(\chi(g_{\sigma}^{-1}.\sigma^{-1}(b).g_{\sigma}^{-1}))(\sigma.g_{\sigma}^{-1}.f) = (\sigma * \chi)(b)(\sigma.g_{\sigma}^{-1}.f).$$

Comme ceci a lieu pour tout $b \in B(\bar{k})$, on peut conclure. \square

L'espace vectoriel $V = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$ hérite d'une action de Γ définie par :

$$\forall \varphi \in V, \quad \forall \sigma \in \Gamma, \quad \forall \chi \in \mathcal{X}, \quad (\sigma * \varphi)(\chi) = \varphi(\sigma^{-1} * \chi).$$

Remarquons que cette action se fait par automorphismes linéaires de V .

3.2.4 Une action de Γ sur \mathcal{D} .

On aura besoin pour la suite du lemme suivant :

Lemme 3.11. *Soit X un \bar{k} -schéma muni d'une immersion ouverte $X_{0,\bar{k}} \rightarrow X$, et $\nu \in \mathcal{V}$. Soit φ un automorphisme de X . On suppose que ν possède un centre Y sur X . Alors $\varphi.\nu$ possède un centre sur X , et c'est $\varphi.Y$.*

Démonstration. Dire que Y est le centre de ν , c'est exactement dire que :

$$\forall f \in \mathcal{O}_{X,Y}, \nu(f) \geq 0$$

et :

$$\forall f \in \mathcal{M}_{X,Y}, \nu(f) > 0.$$

Par ailleurs, l'automorphisme φ^{-1} de \mathcal{K} induit un morphisme d'anneaux locaux $\sigma^{-1} : \mathcal{O}_{X,\varphi.Y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,Y}$. On en déduit alors :

$$\forall f \in \mathcal{O}_{X,\varphi.Y}, \nu(\varphi^{-1}.f) = (\varphi.\nu)(f) \geq 0$$

et :

$$\forall f \in \mathcal{M}_{X,\varphi.Y}, \nu(\varphi^{-1}.f) = (\varphi.\nu)(f) > 0.$$

Ceci achève de montrer le résultat. □

On déduit de l'égalité $g_\sigma^{-1}.\sigma.\mathcal{O} = \mathcal{O}$ le fait que l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ D &\mapsto \sigma * D = g_\sigma^{-1}.\sigma.D \end{aligned}$$

est une permutation de l'ensemble \mathcal{D} . Par ailleurs, comme les éléments de \mathcal{D} sont des diviseurs premiers $B(\bar{k})$ -invariants, on a une application :

$$\begin{aligned} i : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{V}^B \\ D &\mapsto \nu_D, \end{aligned}$$

qui vérifie :

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \forall D \in \mathcal{D}, \quad i(\sigma * D) = \sigma * i(D)$$

d'après le lemme 3.11. Comme i est injective, on voit que :

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ (\sigma, D) &\mapsto \sigma * D \end{aligned}$$

définit une action de Γ sur \mathcal{D} , qui est indépendante du choix des g_σ .

3.3 Enoncé et démonstration du théorème.

Si \mathcal{E} est un éventail colorié et σ un élément de Γ , on notera :

$$\sigma * \mathcal{E} = \{(\sigma * C, \sigma * F), \text{ pour } (C, F) \in \mathcal{E}\}.$$

Ceci définit un nouvel éventail colorié. Un éventail colorié \mathcal{E} sera dit stable par Γ si pour tout $\sigma \in \Gamma$, on a $\sigma * \mathcal{E} = \mathcal{E}$. Le but ici est de prouver le théorème suivant :

Théorème 3.12. *Soit (X_0, x_0) un espace homogène sphérique. Soit (X, x, i) un plongement de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$ et \mathcal{E}_X l'éventail colorié associé. Alors l'action semi-linéaire de Γ sur $X_{0,\bar{k}}$ se prolonge à X si et seulement si :*

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \sigma * \mathcal{E}_X = \mathcal{E}_X.$$

Dans ces conditions, pour toute $G(\bar{k})$ -orbite Y sur X , on a :

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \sigma.X_{Y,B} = g_\sigma.X_{\sigma.Y,B}.$$

On va d'abord prouver l'équivalent de ce théorème en terme de valuations. Soit \mathcal{V}_0 un ensemble formé de sous-ensembles de \mathcal{V} . Pour tout $\sigma \in \Gamma$, on note :

$$\sigma * \mathcal{V}_0 = \{\sigma * S, \text{ pour } S \in \mathcal{V}_0\}.$$

On obtient de cette façon un autre ensemble formé de sous-ensembles de \mathcal{V} .

Théorème 3.13. Soit (X, x, i) un plongement de $(X_{0, \bar{k}}, x_{0, \bar{k}})$ et \mathcal{V}_X associé comme en 3.1. Alors l'action semi-linéaire de Γ sur $X_{0, \bar{k}}$ se prolonge à X si et seulement si :

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \sigma * \mathcal{V}_X = \mathcal{V}_X.$$

Dans ces conditions, on a pour toute $G(\bar{k})$ -orbite Y sur X :

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \sigma.X_{Y,B} = g_\sigma.X_{\sigma.Y,B}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que l'action de Γ sur $X_{0, \bar{k}}$ s'étende à X . Soit $\sigma \in \Gamma$. En utilisant la proposition 3.1, on voit facilement que pour toute orbite Y de $G(\bar{k})$:

$$\sigma.X_{Y,G} = X_{\sigma.Y,G}.$$

Par ailleurs, d'après la proposition 3.6, $g_\sigma^{-1}.\sigma.\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Soit D une composante irréductible du complémentaire de \mathcal{O} dans $X_{Y,G}$. Alors $g_\sigma^{-1}.\sigma.D$ est donc une composante irréductible du complémentaire de \mathcal{O} dans $X_{\sigma.Y,G}$. Par ailleurs :

$$\sigma.Y \subseteq g_\sigma^{-1}.\sigma.D \iff Y \subseteq D.$$

En utilisant la proposition 3.11 on montre que $g_\sigma^{-1}.\sigma.F_Y = F_{\sigma.Y}$ et donc que $g_\sigma^{-1}.\sigma.\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_X$.

Supposons à l'inverse que :

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \sigma * \mathcal{V}_X = \mathcal{V}_X.$$

Soit Y une orbite de $G(\bar{k})$ dans X . Soit $\sigma \in \Gamma$. Soit Z l'orbite de $G(\bar{k})$ dans X vérifiant $g_\sigma^{-1}.\sigma.F_Y = F_Z$. Soit $f \in \bar{k}[X_{Z,B}]$. Alors $\sigma^{-1}.g_\sigma.f \in \bar{k}[\mathcal{O}]$, car $g_\sigma^{-1} \circ \sigma$ est un automorphisme de \mathcal{O} . Par ailleurs :

$$\forall \nu \in F_Z, \quad \nu(f) \geq 0.$$

Comme $F_Z = g_\sigma^{-1}.\sigma.F_Y$,

$$\forall \nu \in F_Y, \quad (g_\sigma^{-1}.\sigma.\nu)(f) = \nu(\sigma^{-1}.g_\sigma.f) \geq 0.$$

Ceci prouve que $\sigma^{-1}.g_\sigma.f \in \bar{k}[X_{Y,B}]$. On en déduit que $g_\sigma^{-1} \circ \sigma : X_{0, \bar{k}} \rightarrow X_{0, \bar{k}} \rightarrow X$, se prolonge à $X_{Y,B}$, puis que $\sigma : X_{0, \bar{k}} \rightarrow X_{0, \bar{k}} \rightarrow X$ aussi. Par ailleurs, en utilisant la proposition 3.2, on montre aisément que le plus grand ouvert sur lequel σ se prolonge est stable par $G(\bar{k})$. Or les translatés d'ouverts du type $X_{Y,B}$, pour Y orbite de $G(\bar{k})$ sur X , par des éléments de $G(\bar{k})$ recouvrent X . On en déduit le résultat. □

Le lien entre les théorèmes 3.12 et 3.13 est donné par le lemme suivant :

Lemme 3.14. L'application :

$$\rho : \mathcal{V}^B \rightarrow V$$

est Γ -équivariante (pour les actions $*$ sur \mathcal{V}^B et V définies ci-dessus).

Démonstration. Soit $\nu \in \mathcal{V}^B$, $\sigma \in \Gamma$ et $\chi \in \mathcal{X}$. Soit aussi $f \in \mathcal{K}$ vecteur propre de $B(\bar{k})$ de poids χ . Alors d'après le lemme 3.10, $\sigma^{-1}.g_\sigma.f$ est vecteur propre de $B(\bar{k})$ de poids $\sigma^{-1} * \chi$. On en déduit :

$$\rho(\sigma * \nu)(\chi) = (\sigma * \nu)(f) = \nu(\sigma^{-1}.g_\sigma.f) = \rho(\nu)(\sigma^{-1} * \chi).$$

Ainsi, vu la définition de l'action $*$ sur V ,

$$\rho(\sigma * \nu) = \sigma * \rho(\nu).$$

□

Démonstration du théorème 3.12. On sait d'après le théorème 3.13 que l'action de Γ sur $X_{0,\bar{k}}$ se prolonge à X si et seulement si :

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \sigma * \mathcal{V}_X = \mathcal{V}_X.$$

Ceci signifie exactement que pour toute orbite Y de $G(\bar{k})$ sur X , et pour tout $\sigma \in \Gamma$ l'ensemble :

$$\{g_\sigma^{-1}.\sigma.D, \text{ pour } D \in E_Y\}$$

est du type E_Z pour une certaine orbite Z de $G(\bar{k})$ sur X (dépendant de σ). Supposons que ce soit le cas. Alors d'après le lemme 3.14, il est clair que $\sigma * C_Y = C_Z$. Par ailleurs, si D est un diviseur dans $X_{Y,G}$:

$$D \text{ stable sous } G(\bar{k}) \iff g_\sigma^{-1}.\sigma.D \text{ stable sous } G(\bar{k}),$$

d'où l'on déduit que $D_Z = \sigma * D_Y$. On a donc bien :

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \sigma * \mathcal{E}_X = \mathcal{E}_X.$$

A l'inverse, soit Y orbite de $G(\bar{k})$ sur X . Soit $\sigma \in \Gamma$. On sait que :

$$(\sigma * C_Y, \sigma * D_Y) = (C_Z, D_Z)$$

pour une certaine orbite Z de $G(\bar{k})$. Comme il est expliqué dans l'article [10], les demi-droites $\mathbb{Q}_+\rho(\nu)$, pour $\nu \in E_Y \cap \mathcal{V}^G$ sont exactement les arêtes du cône C_Y qui ne rencontrent pas l'ensemble :

$$\{\rho(\nu_D), \text{ pour } D \in D_Y\}.$$

Ceci permet de montrer facilement, en utilisant à nouveau le lemme 3.14 que :

$$E_Z = \{g_\sigma^{-1}.\sigma.D, \text{ pour } D \in E_Y\}.$$

On a ainsi fini la preuve du théorème. □

4 Exemples et contre-exemples.

Dans cette partie k est toujours un corps parfait. On s'intéresse à l'étude de quelques situations où la condition (ii) du théorème 2.8 est toujours vérifiée, et on donne des exemples où elle ne l'est pas.

4.1 Quelques situations où la condition (ii) est vérifiée.

4.1.1 Le cas déployé.

Ici Γ désigne le groupe de Galois absolu de k .

Définition 4.1. Soit (X_0, x_0) un espace homogène sphérique. On dit que (X_0, x_0) est déployé si il existe un sous-groupe de Borel déployé B de $G_{\bar{k}}$ tel que l'orbite de x_0 sous B est un ouvert de $X_0(\bar{k})$. En particulier, le groupe G est déployé.

Soit (X_0, x_0) un espace homogène sphérique déployé. On fixe pour la suite un sous-groupe de Borel déployé B de $G_{\bar{k}}$ tel que l'orbite de x_0 sous B est ouverte dans $X_0(\bar{k})$. On peut alors choisir, avec les notations de 3.2.2, pour tout $\sigma \in \Gamma$, $g_\sigma = 1$. Ceci montre que l'action $*$ de Γ dans $\mathcal{X}(B)$ est triviale. Elle est donc aussi triviale dans \mathcal{X} et dans V . Ceci a pour conséquence :

Proposition 4.2. Soit $\nu \in \mathcal{V}^G$. On a :

$$\forall \sigma \in \Gamma, \quad \sigma.\nu = \nu.$$

Démonstration. La restriction de l'application $\rho : \mathcal{V} \rightarrow V$ introduite dans la partie 3 à \mathcal{V}^G est injective et équivariante pour les actions $*$ de Γ . On en déduit, pour tout $\nu \in \mathcal{V}^G$ et $\sigma \in \Gamma$: $\rho(\sigma * \nu) = \rho(\nu)$. Mais $\sigma * \nu = \sigma.\nu$ est un élément de \mathcal{V}^G d'après la proposition 3.5. On a donc bien le résultat. \square

On montre maintenant que si le corps k est infini, la condition (ii) du théorème 2.8 est toujours vérifiée.

Théorème 4.3. *On suppose que k est infini. Soit (X_0, x_0) un espace homogène sphérique déployé. Alors les classes d'isomorphisme de plongement de (X_0, x_0) correspondent exactement aux éventails coloriés qui sont stables par Γ .*

Démonstration. Soit (X, x, i) un plongement de (X_0, x_0) . D'après le théorème 3.12 si il provient d'un plongement de (X_0, x_0) , son éventail est stable par Γ . Réciproquement, toujours d'après le théorème 3.12, la condition (i) du théorème 2.8 est satisfaite, donc pour s'assurer que le plongement (X, x, i) provient bien d'un plongement de (X_0, x_0) , il suffit de s'assurer que la condition (ii) de ce même théorème est vérifiée.

Lemme 4.4. *Si Y est un espace homogène sous $G_{\bar{k}}$ et $U \subseteq Y$ est un ouvert non vide, alors :*

$$Y = \bigcup_{g \in G(k)} g.U.$$

Démonstration. Ceci provient immédiatement du fait que, comme k est infini, $G(k)$ est dense dans G . \square

On peut ainsi recouvrir X par des ouverts du type $g.X_{Y,B}$, où $g \in G(k)$. En utilisant la proposition 3.1 et le théorème 3.12, on voit aisément que pour tout $\sigma \in \Gamma$, $\sigma.(g.X_{Y,B}) = g.X_{Y,B}$ (si $g \in G(k)$). Ceci montre que la condition (ii) est vérifiée et donc achève de montrer le théorème. \square

Remarque 4.5. Comme l'action de Γ sur V est triviale, un éventail colorié stable par Γ est exactement un éventail colorié \mathcal{E} tel que :

$$\forall (C, F) \in \mathcal{E}, \quad \forall \sigma \in \Gamma, \quad \sigma.F = F.$$

Autrement dit, la seule condition pour qu'un plongement descende est que dans tous les plongements simples associés, l'ensemble des couleurs soit stable par Γ .

4.1.2 Le cas torique.

On suppose que $G = T$ est un tore. Soit $M \simeq \mathbb{Z}^n$ le groupe des caractères de $T_{\bar{k}} \simeq \mathbb{G}_{m, \bar{k}}^n$ et N le groupe dual des cocaractères ou sous-groupes à un paramètre. Soit Γ le groupe de Galois absolu de k . Alors T correspond à une structure de Γ -module continu sur M (ou sur N). On s'intéresse à l'espace homogène $(X_0, x_0) = (T, e)$, où e est l'élément unité de $T(k)$. Dans le cas où T est déployé, on connaît la classification des plongements de (X_0, x_0) , voir à ce propos [6], [7] ou [9]. Le résultat est que ces plongements sont classifiés par les éventails dans $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On aura besoin dans la suite du critère de quasi-projectivité suivant, pour lequel on renvoie à [9] p.48 théorème 13. :

Proposition 4.6. *Soit \mathcal{E} un éventail dans $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et soit (X, x, i) le plongement de $(\mathbb{G}_{m, \bar{k}}^n, e)$ correspondant. Alors la variété X est quasi-projective si et seulement si il existe une famille $(l_C)_{C \in \mathcal{E}}$ de formes linéaires sur $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ vérifiant :*

$$\forall C \in \mathcal{E}, \quad \forall C' \in \mathcal{E}, \quad \forall x \in C \cap C', \quad l_C(x) = l_{C'}(x),$$

et :

$$\forall C \in \mathcal{E}, \quad \forall x \in \text{Int}(C), \quad \forall C' \in \mathcal{E} \text{ avec } C \neq C', \quad l_C(x) > l_{C'}(x).$$

Une telle famille de fonctions est appelée une fonction linéaire par morceaux strictement convexe sur l'éventail \mathcal{E} .

Théorème 4.7. *Supposons que T est de dimension 2 ou que T est déployé par une extension quadratique. Alors les classes d'isomorphisme de plongements de (T, e) correspondent exactement aux éventails stables par Γ dans $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

Démonstration. D'après les théorèmes 2.8 et 3.12, il suffit de montrer que si (X, x, i) est un plongement de $(\mathbb{G}_{m, \bar{k}}^n, e)$ dont l'éventail Σ est stable par Γ , alors la condition (ii) du théorème 2.8 est vérifiée. Si T est de dimension 2, X l'est aussi, et on sait alors que X est quasi-projective (le critère donné dans la proposition 4.6 est vérifié). D'après le théorème 1.7, X descend comme schéma, ce qui assure que la condition (ii) du théorème 2.8 est vérifiée. Supposons donc que T est déployé par une extension quadratique. Comme l'action de Γ sur N factorise à travers le groupe de Galois Γ' de cette extension (qui est un quotient de Γ), tout élément de Γ agissant sur N est une involution. Soit $C \in \Sigma$ et $\sigma \in \Gamma$ un élément non nul dans Γ' . Comme Σ est Γ -invariant, on sait que l'action semi-linéaire de Γ sur $\mathbb{G}_{m, \bar{k}}^n$ donnée par T se prolonge à X . Soit $\tau \in \Gamma$ quelconque. Le théorème 3.13 montre que si on note $U_D = \text{Spec}(\bar{k}[D^\vee \cap M])$ l'ouvert affine associé à un cône $D \in \Sigma$, alors τ échange U_C et $U_{\sigma.C}$ si τ est non nul dans Γ' , et il stabilise U_C et $U_{\sigma.C}$ sinon. Ceci montre que la réunion $V_C = U_C \cup U_{\sigma.C}$ est stable par l'action de Γ . Par ailleurs, d'après la proposition 4.6, V_C est quasi-projectif car il existe toujours une fonction linéaire par morceaux et strictement convexe sur un éventail formé de deux cônes maximaux et de leurs faces. En utilisant à nouveau le théorème 1.7, on voit que l'on peut recouvrir X par des ouverts affines stables par Γ . □

4.2 Exemples où la condition (ii) n'est pas vérifiée.

4.2.1 Un critère général.

On commence par une définition.

Définition 4.8. *Soit (X_0, x_0) un espace homogène sphérique. On dit que (X_0, x_0) est **quasi-déployé** si il existe un sous-groupe de Borel B de $G_{\bar{k}}$ qui est stable par Γ et tel que l'orbite de x_0 sous B est un ouvert de $X_0(\bar{k})$. En particulier, le groupe G est quasi-déployé.*

Soit un espace homogène sphérique quasi-déployé (X_0, x_0) , et B un sous-groupe de Borel de $G_{\bar{k}}$ stable par Γ tel que $B(\bar{k}).x_0$ est ouverte dans $X_0(\bar{k})$. On peut donc, avec les notations de la partie 3, supposer que $g_\sigma = 1$ pour tout $\sigma \in \Gamma$.

Proposition 4.9. *Soit (X, x, i) un plongement de $(X_0, \bar{k}, x_0, \bar{k})$ dont l'éventail colorié \mathcal{E} associé est formé d'un cône colorié (C, F) , avec C d'intérieur non vide dans V , de ses images sous l'action $*$ de Γ sur V , et de leurs faces. Alors le plongement (X, x, i) provient d'un plongement de (X_0, x_0) si et seulement si la variété X est quasi-projective.*

Démonstration. Si X est quasi-projective, d'après la remarque 2.9 on a le résultat. Supposons donc que X provienne d'un plongement de (X_0, x_0) . Soit Y une orbite de $G(\bar{k})$ sur X telle que $(C_Y, D_Y) \in \mathcal{E}$ soit maximal. Comme le rang de Y est égale à la codimension de C_Y dans V , Y est une variété complète (cf.[10]). Elle possède donc un point fixe de $B(\bar{k})$, que l'on notera x_Y . C'est le seul point fixe de $B(\bar{k})$ dans $X_{Y, G}(\bar{k})$. Par ailleurs, d'après le théorème 3.13, on voit aisément que pour tout $\sigma \in \Gamma$:

$$\sigma.X_{Y, G} = X_{\sigma.Y, G}.$$

Comme B est stable par Γ , $\sigma(x_Y)$ est un point fixe de $B(\bar{k})$, et il appartient à $X_{\sigma.Y, G}$. On peut en conclure que les points fixes de $B(\bar{k})$ dans $X(\bar{k})$ forment une seule orbite sous Γ . Comme on a supposé que X provient d'un plongement de (X_0, x_0) , cela montre que les points fixes de $B(\bar{k})$ dans $X(\bar{k})$ sont tous dans un même ouvert affine U . A ce stade on tensorise tout par une clôture algébrique de k . Comme X est quasi-projective si et seulement si $X_{\bar{k}}$ l'est, cela revient à supposer que le corps k est algébriquement clos. Le complémentaire D de U est pur de codimension 1. On a alors le lemme classique suivant, dont on reproduit ici une démonstration pour la commodité du lecteur.

Lemme 4.10. *Le diviseur de Weil D est un diviseur de Cartier.*

Démonstration. Soit $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ le faisceau suivant : pour tout V ouvert de X , on pose $\mathcal{L}(V) = \{f \in \mathcal{K}, (\operatorname{div}(f) + D)|_V \geq 0\}$. On s'intéresse à l'ensemble S des points de X au voisinage desquels \mathcal{L} est inversible. Cet ensemble est clairement ouvert dans X . Il est clair que $X \setminus D = U$ est inclus dans S . En particulier, tous les points fixes de $B(\bar{k})$ dans X sont dans S . Par ailleurs, soit X^0 l'ensemble des points réguliers de X . On sait que $X \setminus X^0$ est de codimension au moins 2, donc pour tout V ouvert de X , l'homomorphisme de restriction $\mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V \cap X^0)$ est un isomorphisme. Autrement dit, notant i l'inclusion de X^0 dans X , on a $\mathcal{L} \simeq i_*(\mathcal{L}|_{X^0})$. Le faisceau $\mathcal{L}|_{X^0}$ étant inversible, il existe un revêtement fini G' de G tel que $\mathcal{L}|_{X^0}$ est G' -linéarisable. On en déduit une action de G' dans le faisceau \mathcal{L} . Cette action montre que l'ensemble S est stable par $G'(\bar{k})$ et donc par $G(\bar{k})$. Ainsi le complémentaire de S dans X est un fermé $G(\bar{k})$ -stable ne contenant aucun point fixe de $B(\bar{k})$, et donc aucune orbite fermée de $G(\bar{k})$. Ceci prouve qu'il est vide, autrement dit $S = X$, \mathcal{L} est inversible, et D est un diviseur de Cartier. \square

Soit $s \in H^0(X, \mathcal{L})$ la section canonique de \mathcal{L} . La linéarisation de \mathcal{L} construite ci-dessus montre que $G'(\bar{k})$ agit dans $H^0(X, \mathcal{L})$. On sait par ailleurs que c'est un module rationnel pour cette action. En particulier l'espace vectoriel engendré par s et ses translatées est de dimension finie. Fixons-en une base $s_0 = s, \dots, s_i = g_i \cdot s, \dots, s_n = g_n \cdot s$ où les g_i sont dans $G'(\bar{k})$. Soit E le lieu des zéros communs aux sections s_0, \dots, s_n . Il s'agit du lieu des zéros communs à s et toutes ses translatées par $G'(\bar{k})$. L'ensemble E est donc un fermé inclus dans D et $G(\bar{k})$ -stable : comme ci-dessus il est vide. Finalement l'ensemble des sections s_0, \dots, s_n fournit un morphisme $X \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{k}}^n$, dont les images réciproques des ouverts de coordonnées sont affines. Autrement dit, ce morphisme est affine ce qui prouve que X est quasi-projective. \square

On dispose d'un critère généralisant la proposition 4.6 permettant de décider si la variété sous jacente à un plongement de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$ est quasi-projective. Pour cela on a besoin de la définition suivante :

Définition 4.11. *Soit \mathcal{E} un éventail colorié dans V . Une fonction linéaire par morceaux sur le support de \mathcal{E} est la donnée pour tout élément (C, F) de \mathcal{E} d'une forme linéaire $l_{(C,F)} \in V^*$ vérifiant :*

$$\forall (C, F) \in \mathcal{E}, \quad \forall (C', F') \in \mathcal{E}, \quad \forall x \in C \cap C', \quad l_{(C,F)}(x) = l_{(C',F')}(x).$$

Une fonction linéaire par morceaux sur le support de \mathcal{E} est dite strictement convexe si :

$$\forall (C, F) \in \mathcal{E}, \quad \forall x \in \operatorname{Int}(C) \cap \rho(\mathcal{V}^G), \quad \forall (C', F') \in \mathcal{E} \text{ avec } (C, F) \neq (C', F'), \\ l_{(C,F)}(x) > l_{(C',F')}(x).$$

Pour une preuve de la proposition suivante, qui généralise [9] p.48, théorème 13., on renvoie à [2].

Proposition 4.12. *Soit un plongement (X, x, i) de l'espace homogène $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$, et soit \mathcal{E} l'éventail colorié associé. Alors la variété X est quasi-projective si et seulement si il existe une fonction linéaire par morceaux et strictement convexe sur le support de \mathcal{E} .*

On déduit des théorèmes 2.8, 3.12 et de la proposition 4.12 une condition nécessaire et suffisante, un espace homogène sphérique quasi-déployé (X_0, x_0) étant fixé, pour qu'un plongement complet de $(X_{0,\bar{k}}, x_{0,\bar{k}})$ descende, uniquement en fonction de l'éventail colorié associé :

Proposition 4.13. *Soit \mathcal{E} un éventail colorié dont tous les cônes maximaux sont d'intérieur non vide dans V (par exemple complet). Alors \mathcal{E} correspond à un plongement de (X_0, x_0) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) $\forall \sigma \in \Gamma, \quad \sigma * \mathcal{E} = \mathcal{E}$.
- (ii) *Pour tout cône colorié $(C, F) \in \mathcal{E}$ maximal, il existe une fonction linéaire par morceaux strictement convexe sur l'éventail colorié formé de (C, F) de ses images par les éléments de Γ et de leurs faces.*

4.2.2 Un contre-exemple torique.

Supposons que le corps k possède une extension cyclique de degré 3 que l'on fixe pour la suite. On la note K . Soit Γ le groupe de Galois absolu de k et $\Gamma' = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \text{Gal}(K|k)$, quotient de Γ . On note ε un générateur de Γ' . Soit $N = \mathbb{Z}^3 \subseteq V = \mathbb{Q}^3$. Soit $\varepsilon \in \text{GL}_3(\mathbb{Z})$ donné par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note u, v, w la base canonique de N . L'automorphisme ε de N est d'ordre 3, donc il définit une action de Γ' sur N (l'élément ε de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ agissant par ε). En utilisant la projection $\Gamma \rightarrow \Gamma'$, on définit aussi une action de Γ sur N , et donc sur $M \subseteq V^*$ le réseau dual de N . Soit T le tore défini sur k , déployé par K , et correspondant à M muni de l'action de Γ ainsi définie.

Définition 4.14. Soit $C = \text{Cone}(5u + v - 5w, -5u - 5v + 14w, 4u - v)$. On définit Σ comme l'éventail formé de $C, \varepsilon(C), \varepsilon^2(C)$ et de leurs faces.

Cette définition est sujette à la proposition suivante :

Proposition 4.15. On a $C \cap \varepsilon(C) = \{0\}$.

Par conséquent, en appliquant ε et ε^2 , on voit que les trois cônes $C, \varepsilon(C), \varepsilon^2(C)$ ne se rencontrent deux à deux qu'en 0, et Σ est bien un éventail.

Démonstration. On a $\varepsilon(C) = \text{Cone}(-u + 4v - 5w, 5u + 14w, u + 5v)$. Soit $x \in C \cap \varepsilon(C)$. Il existe alors $a, b, c, d, e, f \geq 0$ tels que :

$$\begin{aligned} x &= (5a - 5b + 4c)u + (a - 5b - c)v + (-5a + 14b)w \\ &= (-d + 5e + f)u + (4d + 5f)v + (-5d + 14e)w. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 5a - 5b + 4c &= -d + 5e + f \\ a - 5b - c &= 4d + 5f \\ -5a + 14b &= -5d + 14e. \end{aligned}$$

Puis $14(\text{deuxième ligne}) + 5(\text{troisième ligne})$:

$$-11a - 14c = 31d + 70e + 70f.$$

ce qui, pour des raisons de signe, impose $d = e = f = 0$, puis $x = 0$. On a ainsi montré la proposition. \square

Comme Γ agit sur N par son quotient fini Γ' on voit facilement que Σ est un éventail stable par Γ .

Lemme 4.16. Les cônes $C, \varepsilon(C)$ et $\varepsilon^2(C)$ sont lisses.

Démonstration. Il suffit de vérifier que C est lisse, ce qui est vrai car :

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \\ -5 & 14 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

donc C est engendré par les éléments d'une \mathbb{Z} -base de N . \square

Montrons à présent la proposition suivante :

Proposition 4.17. Il n'existe pas de fonction linéaire par morceaux et strictement convexe sur le support de Σ .

Démonstration. Une fonction linéaire par morceaux et strictement convexe sur le support de Σ est la donnée de trois formes linéaires l_0, l_1 et l_2 sur V vérifiant :

- Les formes $l_0 - l_1$ et $l_0 - l_2$ sont strictement positives sur $C \setminus \{0\}$
 - Les formes $l_1 - l_0$ et $l_1 - l_2$ sont strictement positives sur $\varepsilon(C) \setminus \{0\}$
 - Les formes $l_2 - l_0$ et $l_2 - l_1$ sont strictement positives sur $\varepsilon^2(C) \setminus \{0\}$
- Notons $D = C^\vee \cap -\varepsilon(C)^\vee \subseteq V^*$, où C^\vee désigne le cône dual de C .

Lemme 4.18. *Le cône D est d'intérieur non vide.*

Démonstration. Pour montrer cela, il suffit de voir que le cône dual de D , c'est-à-dire $C - \varepsilon(C)$ est saillant. Mais soit $x \in (C - \varepsilon(C)) \cap (\varepsilon(C) - C)$. Alors on peut écrire $x = s - t = r - p$, avec $s, p \in C$ et $r, t \in \varepsilon(C)$. On a alors $s + p = r + t \in C \cap \varepsilon(C) = \{0\}$, puis, comme C et $\varepsilon(C)$ sont saillants, $s = p = r = t = 0$ et $x = 0$. \square

En posant $\phi = l_0 - l_1$, $\psi = l_1 - l_2$ et $\rho = l_2 - l_0$, on obtient :

$$\phi \in \text{Int}(D), \quad \psi \in \text{Int}(\varepsilon(D)), \quad \rho \in \text{Int}(\varepsilon^2(D)) \text{ et } \phi + \psi + \rho = 0,$$

où Int désigne l'intérieur.

Lemme 4.19. *On a $D^\vee \cap \varepsilon(D^\vee) \cap \varepsilon^2(D^\vee) \neq 0$.*

Démonstration. Il s'agit de trouver un élément $l \in D^\vee$ tel que $\varepsilon(l), \varepsilon^2(l) \in D^\vee$. On a $45u - 25w = 5((5u + v - 5w) + (4u - v)) \in C$ et $45u + 126w = 9(5u + 14w) \in \varepsilon(C)$. Ainsi, $l = -151w = (45u - 25w) - (45u + 126w) \in D^\vee = \sigma - \varepsilon(\sigma)$. Par ailleurs, l est fixé par ε , et donc il convient. \square

Ce lemme interdit l'existence de ϕ, ψ et ρ comme ci-dessus. En effet, soit $l \in D^\vee \cap \varepsilon(D^\vee) \cap \varepsilon^2(D^\vee) \setminus \{0\}$. Comme $\phi \in \text{Int}(D)$, on a $l(\phi) > 0$. De même $l(\psi) > 0$ et $l(\rho) > 0$. On voit donc que $l(\phi + \psi + \rho) > 0$ ce qui contredit le fait que $\phi + \psi + \rho = 0$. On a donc achevé la preuve de la proposition. \square

Proposition 4.20. *Le plongement de $(\mathbb{G}_{m, \bar{k}}^3, e)$ associé à l'éventail Σ ne provient pas d'un plongement de (T, e) , bien que Σ soit stable par Γ . Par ailleurs, la variété sous-jacente à ce plongement est lisse.*

Démonstration. Soit (X, x, i) le plongement en question. Le fait que X soit lisse est une conséquence de la proposition 4.16. D'après la proposition 4.9, pour montrer que le plongement (X, x, i) ne provient pas d'un plongement de (T, e) , il suffit de montrer que la variété X n'est pas quasi-projective. Mais d'après la proposition 4.17, il n'existe pas de fonction linéaire par morceaux strictement convexe sur le support de Σ , ce qui, en utilisant la proposition 4.6, achève de prouver la proposition. \square

Remarque 4.21. On vient de construire un exemple de variété torique lisse sur laquelle se trouvent trois points que l'on ne peut pas mettre dans un même ouvert affine. Ce résultat est à mettre en relation avec le suivant : sur une variété torique, tout couple de points peut être mis dans un ouvert affine (cf.[14]).

Remarque 4.22. Le contre-exemple que l'on vient d'exhiber est en un certain sens minimal, d'après le théorème 4.7.

Remarque 4.23. A partir du contre-exemple précédent, on peut en construire un qui est complet et lisse. Pour cela on peut bien sûr utiliser des arguments généraux de type résolution des singularités d'Hironaka (comme exposé dans [8]). On peut aussi, à la manière de l'article [5], compactifier "à la main" le plongement X correspondant à l'éventail Σ ci-dessus. On commence par exhiber un éventail Σ_0 complet et simplicial, stable par Γ et contenant Σ . Pour alléger les notations, on pose :

$$r_1 = -5u - 5v + 14w, \quad s_1 = 4u - v, \quad t_1 = 5u + v - 5w,$$

$$r_2 = \varepsilon(r_1), \quad s_2 = \varepsilon(s_1), \quad t_2 = \varepsilon(t_1), \quad r_3 = \varepsilon^2(r_1), \quad s_3 = \varepsilon^2(s_1), \quad t_3 = \varepsilon^2(t_1).$$

On définit l'éventail Σ_0 à partir de ses cônes maximaux. On choisit les cônes :

- $\text{Cone}(r_1, t_3, s_1)$
- $\text{Cone}(t_3, s_1, t_1)$

- $C = \text{Cone}(r_1, s_1, t_1)$
 - $\text{Cone}(r_1, r_2, t_1)$,
- leurs images par le groupe Γ , et les deux cônes suivants qui sont fixés par le groupe Γ :
- $\text{Cone}(r_1, r_2, r_3)$
 - $\text{Cone}(t_1, t_2, t_3)$.

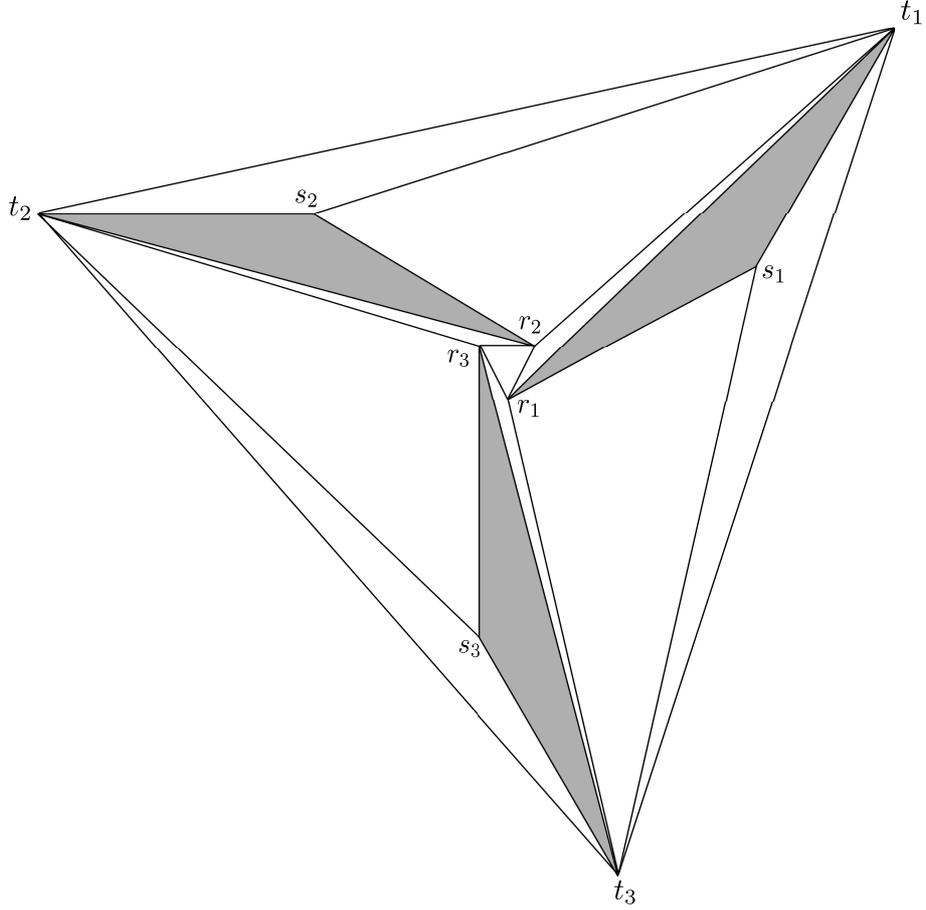


FIG. 1 – Les éventails Σ et Σ_0 .

La figure 1. représente les éventails Σ (en gris) et Σ_0 . Ce dernier éventail étant complet, il fournit une triangulation de la sphère unité de $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On obtient le dessin en projetant cette triangulation depuis le pôle sud de la sphère sur le plan tangent au pôle nord. Il manque alors le triangle défini par le cône $\text{Cone}(t_1, t_2, t_3)$, qui est envoyé à l'infini. Pour rendre l'éventail Σ_0 lisse tout en gardant la stabilité par l'action du groupe Γ , on va utiliser la méthode décrite dans l'article [5]. En subdivisant l'éventail Σ_0 selon les vecteurs $r = -5v + 28w$, w , $t = u - 4v - 10w$ et $-w$, on obtient un éventail Σ'_0 qui est simplicial, stable par Γ , qui contient Σ et qui vérifie la propriété (*) définie dans la proposition 2. de l'article [5]. Cet éventail Σ'_0 est donné par les cônes maximaux suivants :

- $\text{Cone}(r_1, r, t_1)$
- $\text{Cone}(r, r_2, t_1)$
- $\text{Cone}(r_1, r, w)$
- $\text{Cone}(r, r_2, w)$
- $C = \text{Cone}(r_1, s_1, t_1)$
- $\text{Cone}(r_1, s_1, t_3)$
- $\text{Cone}(t_3, s_1, t)$
- $\text{Cone}(t, t_1, s_1)$
- $\text{Cone}(t_3, t, -w)$

– Cone($t, t_1, -w$)

et leurs images par ε et ε^2 . En appliquant à Σ'_0 le procédé expliqué dans la preuve de la proposition 3. de [5] (ce qui est valide, car l'éventail Σ'_0 vérifie la propriété $(*)$) et en remarquant que lors de ce procédé on ne touche pas aux cônes appartenant à $\Sigma \subseteq \Sigma'_0$ (car ils sont lisses), on construit un éventail complet, lisse et invariant par le groupe Γ contenant l'éventail Σ . Cela suffit pour conclure.

4.2.3 Un contre-exemple sphérique.

Dans cette section, $k = \mathbb{R}$. Ainsi $\bar{k} = \mathbb{C}$ et $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit σ l'élément non trivial de Γ . On considère l'action semi-linéaire de Γ sur $SL_{3,\mathbb{C}}$ donnée par :

$$\forall g \in SL_3(\mathbb{C}), \quad \sigma(g) = J^t \bar{g}^{-1} J,$$

où J est la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Définition 4.24. On appelle G la \mathbb{R} -forme de $SL_{3,\mathbb{C}}$ correspondant à cette action semi-linéaire de Γ . C'est un \mathbb{R} -groupe algébrique connexe et réductif.

Comme le schéma $SL_{3,\mathbb{C}}$ est affine, cette forme existe comme \mathbb{R} -schéma et est unique à isomorphisme unique près. Le fait que Γ agisse sur $SL_3(\mathbb{C})$ par des automorphismes de groupes montre que G a une structure de \mathbb{R} -groupe algébrique. Par ailleurs il est connexe et réductif puisque $SL_{3,\mathbb{C}}$ l'est.

Remarque 4.25. On a :

$$G(\mathbb{R}) = \{g \in SL_3(\mathbb{C}), \quad J^t \bar{g}^{-1} J = g\}.$$

En particulier,

$$SO_{1,2}(\mathbb{R}) \subseteq G(\mathbb{R}).$$

Soit B le sous-groupe de Borel standard de $SL_{3,\mathbb{C}}$.

Proposition 4.26. Soit :

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B_0 = g_0 B g_0^{-1}$. Le sous-groupe de Borel B_0 de $SL_{3,\mathbb{C}}$ est stable par Γ , donc G est quasi-déployé.

Démonstration. Soit B^- le sous-groupe de Borel opposé à B . On a :

$$\sigma(g_0)^{-1} g_0 = J^t g_0 J g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} B.$$

Ainsi :

$$\sigma(B_0) = \sigma(g_0) B^- \sigma(g_0)^{-1} = g_0 B g_0^{-1} = B_0,$$

ce qui achève de prouver la proposition. □

Soit φ la forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{C}^3 définie par :

$$\forall x \in \mathbb{C}^3, \quad \forall y \in \mathbb{C}^3, \quad \varphi(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Définition 4.27. On appelle Y la \mathbb{C} -variété suivante :

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \times_{\mathbb{C}} \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3, \quad \varphi(x, y) = 1\}.$$

Elle est munie d'une action de $SL_{3,\mathbb{C}}$ comme suit :

$$\forall g \in SL_3(\mathbb{C}), \quad \forall (x, y) \in Y(\mathbb{C}), \quad g.(x, y) = (J^t g^{-1} J x, g.y).$$

Le fait que l'opération définie soit bien une action est facile. En fait, $J^t g J$ est l'adjoint de g pour la forme non dégénérée φ . Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{C}^3 .

Proposition 4.28. *La variété Y est un espace homogène sous $SL_{3,\mathbb{C}}$. Le stabilisateur de $(e_1, e_1) \in Y$ est le sous-groupe H de $SL_{3,\mathbb{C}}$ défini comme suit :*

$$H(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & u \\ 0 & v & w \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{C}) \right\}.$$

Le groupe H est donc isomorphe à $SL_{2,\mathbb{C}}$.

Démonstration. Montrons d'abord que $SL_3(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $Y(\mathbb{C})$. Pour tout $x \in \mathbb{C}^3$, on note l_x la forme linéaire définie par :

$$\forall u \in \mathbb{C}^3, \quad l_x(u) = \varphi(x, u).$$

Soient (s, t) et (u, v) des éléments de $Y(\mathbb{C})$. On a :

$$\forall g \in SL_3(\mathbb{C}), \quad g.(s, t) = (u, v) \iff g.t = v \text{ et } g.l_s = l_u,$$

où $g.l = l(g^{-1}.)$. On vérifie alors facilement que :

$$\forall g \in SL_3(\mathbb{C}), \quad g.(s, t) = (u, v) \iff g.t = v \text{ et } g.\text{Ker}(l_s) = \text{Ker}(l_u).$$

Comme la droite $\mathbb{C}.t$ et le plan $\text{Ker}(l_s)$ sont en somme directe, tout comme la droite $\mathbb{C}.v$ et le plan $\text{Ker}(l_u)$, on voit que $SL_3(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $Y(\mathbb{C})$. Soit par ailleurs $g \in SL_3(\mathbb{C})$. Alors d'après ce qui précède :

$$g \in H(\mathbb{C}) \iff g.e_1 = e_1 \text{ et } g.\text{Vect}(e_2, e_3) = \text{Vect}(e_2, e_3),$$

d'où la description de H . □

On définit une action semi-linéaire de Γ sur Y de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in Y(\mathbb{C}), \quad \sigma.(x, y) = (\bar{y}, \bar{x}).$$

Comme Y est affine le quotient catégorique X_0 de Y existe comme \mathbb{R} -schéma. Par ailleurs :

$$\forall g \in SL_3(\mathbb{C}), \quad \forall (x, y) \in Y(\mathbb{C}), \quad \sigma.(g.(x, y)) = \sigma(g).(\sigma.(x, y)),$$

ce qui permet de montrer que X_0 possède une action de G . Comme $\sigma.(e_1, e_1) = (e_1, e_1)$, on voit qu'il existe $x_0 \in X_0(\mathbb{R})$ tel que $x_{0,\mathbb{C}} = (e_1, e_1)$.

Proposition 4.29. *Le couple (X_0, x_0) est un espace homogène sphérique quasi-déployé. L'orbite de $x_{0,\mathbb{C}}$ sous B_0 est ouverte, on la note \mathcal{O} .*

Démonstration. On montre facilement que le groupe $B_0(\mathbb{C})$ possède une orbite ouverte \mathcal{O} dans $Y(\mathbb{C})$ à laquelle (e_1, e_1) appartient, à savoir :

$$\{(x, y) \in Y(\mathbb{C}), x_1 \neq x_2 \text{ et } y_1 \neq y_2\}.$$

Comme B_0 est stable par Γ , on a fini de prouver la proposition. □

On veut maintenant identifier, avec les notations de la partie 3, les objets $\mathcal{X}, V, \mathcal{D}$ munis des actions $*$ de Γ . Pour $i = 1, 2, 3$, notons $\varepsilon_i \in \mathcal{X}(B)$ le caractère qui correspond au i -ème coefficient diagonal. On note $\chi_i \in \mathcal{X}(B_0)$ défini par :

$$\forall b \in B_0(\mathbb{C}), \quad \chi_i(b) = \varepsilon_i(g_0^{-1} b g_0).$$

Proposition 4.30. *On a $\mathcal{X} = \mathcal{X}(B_0) = \mathbb{Z}\chi_1 \oplus \mathbb{Z}\chi_2 \oplus \mathbb{Z}\chi_3 / \mathbb{Z}(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3)$.*

Démonstration. On remarque que tous les points de \mathcal{O} ont un stabilisateur trivial dans $B_0(\mathbb{C})$. Ceci montre que \mathcal{O} , vu comme variété avec action de B_0 est isomorphe à B_0 muni de l'action de B_0 par multiplication à gauche. Comme \mathcal{X} est le groupe engendré par les poids des vecteurs propres de l'action de $B_0(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}[\mathcal{O}]$, on voit que $\mathcal{X} = \mathcal{X}(B_0)$. □

Notons (μ_1, μ_2, μ_3) la base duale de (χ_1, χ_2, χ_3) dans le réseau dual de $\mathbb{Z}\chi_1 \oplus \mathbb{Z}\chi_2 \oplus \mathbb{Z}\chi_3$.

Corollaire 4.31. *On a :*

$$V = \{r_1\mu_1 + r_2\mu_2 + r_3\mu_3, \text{ avec } r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q} \text{ et } r_1 + r_2 + r_3 = 0\}.$$

Proposition 4.32. *On a :*

$$\mathcal{D} = \{D_1, D_2\},$$

où :

$$D_1 = \{(x, y) \in Y(\mathbb{C}), \quad x_1 = x_2\}$$

et :

$$D_2 = \{(x, y) \in Y(\mathbb{C}), \quad y_1 = y_2\}.$$

Par ailleurs σ échange D_1 et D_2 .

Démonstration. Il n'y a qu'à remarquer que le complémentaire de \mathcal{O} dans Y est la réunion de ces deux diviseurs premiers. Pour ce qui est de l'action de Γ , comme B_0 est stable par Γ , on peut prendre $g_\sigma = 1$, et donc $\sigma * D = \sigma.D$ pour tout $D \in \mathcal{D}$. Il ne reste plus qu'à utiliser la description explicite des D_i et de l'action de σ sur $Y(\mathbb{C})$ pour conclure. □

Proposition 4.33. *On a :*

$$\rho(\nu_{D_1}) = \mu_1 - \mu_2$$

et

$$\rho(\nu_{D_2}) = \mu_2 - \mu_3.$$

Démonstration. Il faut exhiber des éléments f, g, h de \mathcal{K} de poids respectifs χ_1, χ_2, χ_3 . Si on note ψ l'isomorphisme orbite $B_0 \rightarrow \mathcal{O}$ du point $x_{0,\mathbb{C}}$, alors $f = \chi_1^{-1} \circ \psi^{-1}, g = \chi_2^{-1} \circ \psi^{-1}$ et $h = \chi_3^{-1} \circ \psi^{-1}$ conviennent. Il faut donc décrire explicitement le morphisme ψ^{-1} . Soit $b \in B_0(\mathbb{C})$. On peut écrire :

$$b = g_0 \begin{pmatrix} t_1 & u & v \\ 0 & t_2 & w \\ 0 & 0 & t_3 \end{pmatrix} g_0^{-1},$$

avec $t_i = \chi_i(b)$. Si on note :

$$b^{-1} = g_0 \begin{pmatrix} t_1^{-1} & U & V \\ 0 & t_2^{-1} & W \\ 0 & 0 & t_3^{-1} \end{pmatrix} g_0^{-1},$$

alors un petit calcul montre que :

$$\psi(b) = b.(e_1, e_1) = (s, t)$$

avec :

$$s = \begin{pmatrix} V + W + t_3^{-1} \\ V + W + t_3^{-1} - t_1^{-1} \\ t_1^{-1} - U - t_2^{-1} \end{pmatrix}$$

et

$$t = \begin{pmatrix} v + w + t_3 \\ v + w \\ w \end{pmatrix}.$$

On voit donc que :

$$f = x_1 - x_2, \quad g = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \text{ et } h = \frac{1}{y_1 - y_2}$$

conviennent. Comme $x_1 - x_2 = 0$ et $y_1 - y_2 = 0$ sont les équations respectives des diviseurs D_1 et D_2 sur Y , on peut conclure. \square

La proposition suivante décrit l'action de Γ sur V .

Proposition 4.34. *Soit $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{Q}^3$ avec $r_1 + r_2 + r_3 = 0$. Alors :*

$$\sigma * (r_1\mu_1 + r_2\mu_2 + r_3\mu_3) = -r_3\mu_1 - r_2\mu_2 - r_1\mu_3.$$

Démonstration. Comme ρ est Γ -équivariante (d'après le lemme 3.14), on voit que :

$$\sigma * (\mu_1 - \mu_2) = \mu_2 - \mu_3.$$

Comme on sait de plus que σ agit par une involution sur V , on peut facilement conclure. \square

Proposition 4.35. *On a :*

$$\rho(\mathcal{V}^G) = \{r_1\mu_1 + r_2\mu_2 + r_3\mu_3 \in V \text{ avec } r_3 \geq r_1\}.$$

Démonstration. On vérifie facilement que le normalisateur N de H dans $SL_{3,\mathbb{C}}$ est donné par :

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & u \\ 0 & v & w \end{pmatrix} \in SL_{3,\mathbb{C}} \right\}.$$

Comme N/H est de dimension 1, on sait (cf.[10]) que la partie linéaire du cône $\rho(\mathcal{V}^G)$ est de dimension 1. L'espace homogène $SL_{3,\mathbb{C}}/N$ s'identifie à l'orbite du point $x \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de coordonnées $((1 : 0 : 0), (1 : 0 : 0))$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \times_{\mathbb{C}} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$:

$$SL_{3,\mathbb{C}}/N = \{((x_1 : x_2 : x_3), (y_1, y_2, y_3)) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 \neq 0\}.$$

Le morphisme :

$$SL_{3,\mathbb{C}}/H \rightarrow SL_{3,\mathbb{C}}/N$$

n'est rien d'autre que la restriction de la projection :

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \times_{\mathbb{C}} \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \times_{\mathbb{C}} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

à Y . L'espace homogène $SL_{3,\mathbb{C}}/N$ est sphérique, l'orbite de x sous B_0 est ouverte, et le stabilisateur de x dans B_0 est le sous-groupe :

$$\left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^{-2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{C} \right\}$$

de B_0 . Notons \mathcal{X}' , V' , \mathcal{V}' , ρ' ... les données associées à cet espace homogène sphérique. Pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$\chi_1 \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^{-2} \end{pmatrix} = \chi_3 \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^{-2} \end{pmatrix} = t$$

et

$$\chi_2 \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^{-2} \end{pmatrix} = t^{-2}.$$

On déduit de ceci que :

$$\mathcal{X}' = \mathbb{Z}(\chi_1 - \chi_3).$$

Notons μ l'élément de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{X}', \mathbb{Z})$ vérifiant $\mu(\chi_1 - \chi_3) = 1$. Il vient :

$$V' = \mathbb{Q}\mu,$$

et la surjection naturelle $p : V \rightarrow V'$ est l'application linéaire :

$$r_1\mu_1 + r_2\mu_2 + r_3\mu_3 \rightarrow (r_1 - r_3)\mu.$$

Par ailleurs, toujours d'après [10], on sait que :

$$\rho(\mathcal{V}^G) = p^{-1}(\rho'((\mathcal{V}')^G)).$$

La partie linéaire de $\rho(\mathcal{V}^G)$ est de dimension 1, le cône $\rho'((\mathcal{V}')^G)$ ne peut donc être égal à V' . Comme V' est de dimension 1, ce cône est soit 0 soit une demi-droite. Mais l'inclusion $SL_{3,\mathbb{C}}/N \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \times_{\mathbb{C}} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ donne un plongement non trivial de $SL_{3,\mathbb{C}}/N$ possédant un et un seul diviseur $SL_{3,\mathbb{C}}$ -invariant, à savoir :

$$D = \{((x_1 : x_2 : x_3), (y_1, y_2, y_3)) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 = 0\}.$$

On en déduit que $\rho'((\mathcal{V}')^G)$ est la demi-droite engendrée par $\nu_D(f)\mu$, où $f \in \mathbb{C}(SL_{3,\mathbb{C}}/N)$ est un vecteur propre pour B_0 de poids $\chi_1 - \chi_3$. Comme :

$$f = \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3}$$

convient, on voit que :

$$\rho'((\mathcal{V}')^G) = \mathbb{Q}^+(-\mu).$$

Ceci achève de prouver la proposition. □

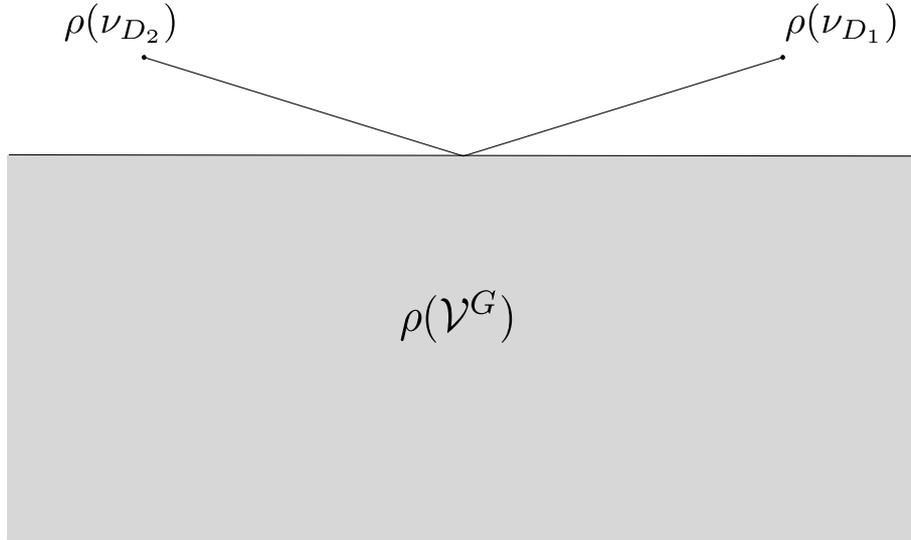


FIG. 2 – Les données combinatoires attachées à l'espace homogène Y .

Définition 4.36. Soit $C \subseteq V$ le cône engendré par $\mu_1 - \mu_2$ et $-2\mu_1 + 3\mu_2 - \mu_3$. On note \mathcal{E} l'éventail colorié déterminé par $(C, \{D_1\})$, $(\sigma.C, \{D_2\})$ et leurs faces. Cet éventail colorié est stable sous l'action de Γ .

Cette définition est sujette à la proposition suivante :

Proposition 4.37. $C \cap \sigma.C \cap \rho(\mathcal{V}^G) = \{0\}$.

Démonstration. Soit $x \in C \cap \sigma.C \cap \rho(\mathcal{V}^G)$. Comme $\sigma.C$ est le cône engendré par $\mu_2 - \mu_3$ et $\mu_1 - 3\mu_2 + 2\mu_3$, il existe des rationnels positifs s, t, u, v tels que :

$$x = (t - 2s)\mu_1 + (3s - t)\mu_2 - s\mu_3$$

et :

$$x = u\mu_1 + (v - 3u)\mu_2 + (2u - v)\mu_3.$$

On en déduit :

$$t - 2s = u \text{ et } s = v - 2u.$$

Par ailleurs, comme $x \in \rho(\mathcal{V}^G)$, on sait que :

$$-s \geq t - 2s = u,$$

ce qui, pour des raisons de signe, impose :

$$u = s = t = 0.$$

On peut donc conclure. □

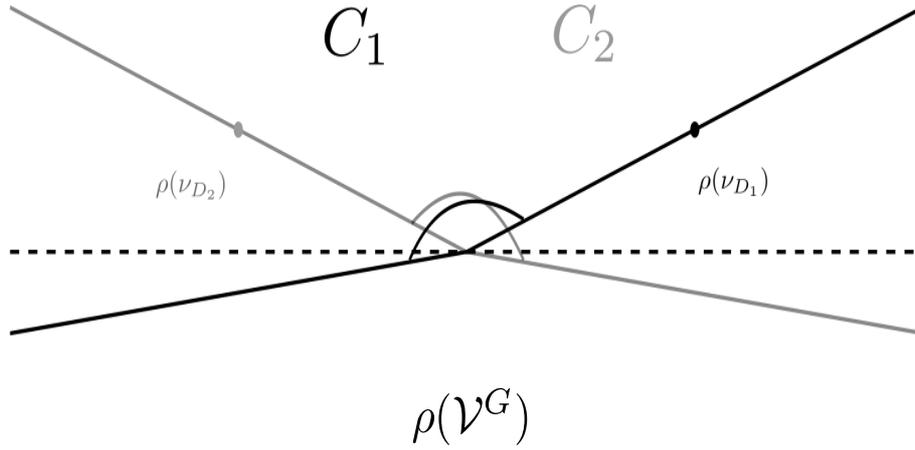


FIG. 3 – L'éventail colorié \mathcal{E} .

Proposition 4.38. *Le plongement de $(Y, x_{0,\mathbb{C}})$ associé à \mathcal{E} ne provient pas d'un plongement de (X_0, x_0) , bien que l'éventail colorié \mathcal{E} soit stable par Γ . Par ailleurs, la variété sous-jacente à ce plongement est lisse.*

Démonstration. Notons (X', x', i') le plongement en question. D'après la proposition 4.9, pour prouver le premier point, il suffit de montrer que X' n'est pas quasi-projective. Mais il ne peut clairement pas exister de fonction linéaire par morceaux strictement convexe sur le support de \mathcal{E} , puisque le cône $C \cap \sigma.C$ est d'intérieur non vide dans V . Ceci permet de conclure, d'après la proposition 4.12. Notons aussi X la variété sous-jacente au plongement de Y défini par l'éventail colorié \mathcal{F} formé du cône colorié (C, D_1) et de ses faces. Comme la variété X' est recouverte par deux ouverts isomorphes à X , pour montrer qu'elle est lisse, il suffit de prouver que la variété X l'est. On observe qu'il n'y a qu'une seule orbite fermée de $G(\bar{k})$ dans X , que l'on note F par la suite. Le diviseur D_1 sur Y contient F dans son adhérence, mais pas le diviseur D_2 . On utilise maintenant le théorème de structure locale des variétés sphériques (cf.[3]). Soit P_0 le stabilisateur de D_2 dans G . C'est un sous-groupe parabolique contenant B_0 . On vérifie facilement que :

$$P_0(\mathbb{C}) = \left\{ g_0 \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} g_0^{-1} \in SL_3(\mathbb{C}) \right\}.$$

Le théorème de structure locale affirme qu'il existe une sous-variété fermée S de X_{F,B_0} contenant $x_{0,\mathbb{C}}$ et un sous-groupe de Levi L de P_0 vérifiant que :

$$\begin{aligned} R_u(P_0) \times S &\rightarrow X_{F,B_0} \\ (r, s) &\mapsto r.s \end{aligned}$$

est un isomorphisme P -équivariant. Par ailleurs, le théorème assure aussi que S est le plongement de l'espace homogène sphérique $L.x_{0,\mathbb{C}}$ correspondant à l'éventail \mathcal{F} . La variété X est recouverte par les translaté de X_{F,B_0} par des éléments de $SL_3(\mathbb{C})$; elle est donc lisse si et seulement si X_{F,B_0} l'est. Pour conclure, il suffit de montrer que S est une variété lisse. On commence par déterminer L . D'après le théorème de structure locale, on a l'égalité (on rappelle que le stabilisateur de $x_{0,\mathbb{C}}$ dans $SL_{3,\mathbb{C}}$ est noté H) :

$$P_0 \cap H = L \cap H.$$

Un petit calcul montre que :

$$P_0 \cap H = \left\{ g_0 \begin{pmatrix} 1-u & -u & 0 \\ u & 1+u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g_0^{-1}, u \in \mathbb{C} \right\}.$$

Comme le groupe $g_0^{-1}Lg_0$ est un sous-groupe de Levi de $g_0^{-1}P_0g_0$ qui contient $P_0 \cap H$, on montre par le calcul que :

$$L = \left\{ M \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} M^{-1} \in SL_3(\mathbb{C}) \right\}$$

où :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

a étant un complexe qu'il est inutile de chercher à déterminer. On fait agir L sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (l, (z_1, z_2, z_3)) &\mapsto (\varepsilon z_1, \delta \varepsilon^3 z_2 - \gamma \varepsilon^3 z_3, -\beta \varepsilon^3 z_2 + \alpha \varepsilon^3 z_3) \end{aligned}$$

où :

$$l = M \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} M^{-1}$$

Lemme 4.39. *L'application :*

$$\begin{aligned} \varphi : L.x_{0,\mathbb{C}} &\rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \\ (x, y) &\mapsto (y_1 - y_2, (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)^2, (x_1 - x_2 - x_3)(y_1 - y_2)^2) \end{aligned}$$

est le plongement de $L.x_{0,\mathbb{C}}$ défini par l'éventail colorié \mathcal{F} .

Démonstration. On commence par prouver que φ est L -équivariante. Soit $l \in L(\mathbb{C})$ et $(x, y) \in L.x_{0,\mathbb{C}}$. Si on note $(X, Y) = l.(x, y)$, alors on prouve par un calcul que :

$$\begin{aligned} Y_1 - Y_2 &= \varepsilon(y_1 - y_2) \\ X_1 - X_2 &= \delta \varepsilon(x_1 - x_2) - \gamma \varepsilon(x_1 - x_2 - x_3) \\ X_1 - X_2 - X_3 &= -\beta \varepsilon(x_1 - x_2) + \alpha \varepsilon(x_1 - x_2 - x_3) \end{aligned}$$

où on a noté :

$$l = M \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} M^{-1}.$$

Ceci montre que φ est bien équivariante. Comme $\varphi(x_{0,\mathbb{C}}) = (1, 1, 1)$, et (comme un calcul le montre) :

$$\text{Stab}_{(1,1,1)} L = L \cap H$$

on voit que φ définit bien un plongement de $L.x_{0,\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$. Par ailleurs, il y a quatre orbites de L dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$:

- L'orbite du point de coordonnées $(1, 1, 1)$. Elle est ouverte dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$, et décrite par $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3, z_1 \neq 0, (z_2, z_3) \neq (0, 0)\}$.
- L'orbite du point de coordonnées $(0, 1, 1)$. Elle est de dimension 2, décrite par $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3, z_1 = 0, (z_2, z_3) \neq (0, 0)\}$.
- L'orbite du point de coordonnées $(1, 0, 0)$. Elle est de dimension 1, décrite par $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3, z_1 \neq 0, (z_2, z_3) = (0, 0)\}$.
- Le point fixe $(0, 0, 0)$.

L'orbite ouverte de $B_0 \cap L$ dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ est décrite par :

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0\}.$$

Son complémentaire dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ est donc la réunion de deux hyperplans de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$, à savoir $H_1 = \{z_2 = 0\}$ et $H = \{z_1 = 0\}$. On vérifie facilement que la fonction $z_1^3 z_2^{-1}$ (resp. z_1^{-1}) est une fonction propre de $B_0 \cap L$ associée au caractère χ_2 (resp. χ_3). On en déduit alors :

$$\rho(\nu_{H_1}) = \mu_1 - \mu_2$$

$$\rho(\nu_H) = -2\mu_1 + 3\mu_2 - \mu_3.$$

Comme expliqué en 3.1, on voit donc que l'éventail coloré associé au plongement φ est bien \mathcal{F} . □

On déduit de ce lemme que la variété S est isomorphe à $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ et donc lisse ce qui, comme expliqué ci-dessus, permet de conclure. □

Remarque 4.40. On peut aussi, comme on l'a fait avec le contre-exemple torique, compactifier le contre-exemple précédent (cette fois-ci, en utilisant des arguments généraux). On obtient de cette manière un exemple de variété sphérique complète lisse contenant deux points qui ne sont pas dans un même ouvert affine.

Références

- [1] A.Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate texts in mathematics, Springer, 1991.
- [2] M.Brion, *Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques*, Duke Math. J. 58 (1989), 397 – 424.
- [3] M.Brion, D.Luna, *Sur la structure locale des variétés sphériques*, Bull. Soc. math. France 115 (1987), 211 – 226.
- [4] M.Brion, *Variétés sphériques*, www.fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/notes.html.
- [5] J.-L.Colliot-Thélène, D.Harari, A.N.Skorobogatov, *Compactification équivariante d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann)*, Expositiones mathematicae 23 (2005) 161 – 170.
- [6] V.I.Danilov, *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surveys, 33 (1978), no.2, 97–154.
- [7] M.Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Sér.4,3 no.4(1970), p.507 – 588.
- [8] S.Encinas, O.Villamayor, *A course on constructive desingularisation and equivariance dans Resolution of singularities*, Progress in Mathematics, vol.181, pp 147 – 227, Birkhauser 2000.
- [9] G.Kempf, F.Knudsen, D.Mumford, B.Saint-Donat, *Toroidal embeddings*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973.
- [10] F.Knop, *The Luna-Vust Theory of spherical embeddings*, pp. 225-249 dans *Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups*, Manoj-Prakashan 1991.
- [11] D.Luna, T.Vust, *Plongements d'espaces homogènes*, Comment. Math. Helv. 58 (1983), 186 – 245.
- [12] J.-P.Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris (1959).
- [13] T.A.Springer, *Linear algebraic groups*, deuxième édition, Birkhauser (1998).
- [14] J.Wlodarczyk, *Embeddings in toric varieties and prevarieties*, J. Algebraic Geometry, 2 (1993), no.4, p.705 – 726.