



HAL
open science

Structures immobilières pour un groupe de Kac-Moody sur un corps local (version préliminaire)

Cyril Charignon

► **To cite this version:**

Cyril Charignon. Structures immobilières pour un groupe de Kac-Moody sur un corps local (version préliminaire). 2009. hal-00438095v2

HAL Id: hal-00438095

<https://hal.science/hal-00438095v2>

Preprint submitted on 8 Jan 2010 (v2), last revised 22 Mar 2010 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Structures immobilières pour un groupe de Kac-Moody sur un corps local

Cyril Charignon

10 janvier 2010

Table des matières

1	Introduction	2
2	Rappels et notations	3
2.1	Donnée radicielle	3
2.2	Valuation d'une donnée radicielle	5
2.3	Immeubles vectoriels	6
2.3.1	L'immeuble vectoriel déployé	6
2.3.2	Décomposition de Lévi	9
3	Construction générale	10
3.1	L'appartement	10
3.1.1	Façades d'appartement	10
3.1.2	Projections	11
3.1.3	Espaces engendrés	11
3.1.4	Murs et demi-appartements	11
3.1.5	Parties closes	12
3.1.6	Facettes	14
3.1.7	Action de N	14
3.1.8	Opposition	17
3.2	Familles de sous-groupes parahoriques	18
3.2.1	Définition	18
3.2.2	La famille minimale de parahoriques	19
3.2.3	La condition (fonc)	21
3.2.4	Relations entre les conditions (para x)	23
3.3	Définition de la mesure complète	25
3.3.1	La relation d'équivalence	25
3.3.2	Définition	25
3.3.3	Façades d'immeuble	28
3.4	Décomposition d'Iwasawa	29
3.4.1	La décomposition	29
3.4.2	Unicité	30
3.5	Décomposition de Bruhat/Birkhoff	30
3.6	Lien entre les façades	31
3.6.1	Conséquence de (para 2.2)	31
3.6.2	Conséquences de (para 2.2 ⁺)	33
3.6.3	Implications entre ces conditions	34
3.7	Décomposition de Lévi	35

3.8	Complétion d'une famille de parahoriques	36
3.9	Intersection d'appartements	40
3.10	Indépendance par rapport au tore maximal	41
4	Masure complète pour un groupe de Kac-Moody presque déployé	42
4.1	Rappels et notations pour les groupes de Kac-Moody	42
4.2	Le cas déployé	43
4.3	Topologie de Γ	43
4.4	L'immeuble vectoriel rationnel	43
4.5	L'appartement rationnel	44
4.5.1	Action de Γ sur A	44
4.5.2	Action de Γ sur \mathcal{I}	46
4.5.3	Action de $N(T_\sigma)(\mathbb{K})$ sur $Y(\mathbb{K})$	47
4.5.4	Façades	47
4.5.5	Murs et demi-appartements	48
4.5.6	Sous-groupes radiciels	48
4.5.7	\mathbb{K} -Valuation	49
4.5.8	Identification des appartements	51
4.6	L'immeuble rationnel	51
4.6.1	Définition	51
4.6.2	Structure des appartements	53
4.6.3	Décomposition de Lévi	54
4.6.4	Lien entre les façades	55

1 Introduction

Lorsque G est un groupe réductif sur un corps local \mathbb{K} , la théorie de François Bruhat et Jacques Tits permet de lui associer, outre son immeuble vectoriel, ou sphérique, ou "de Tits", un immeuble affine, dit "de Bruhat-Tits". Cet immeuble est plus précis que l'immeuble vectoriel, au sens où la connaissance du premier permet de reconstruire le second. Comme tout immeuble, il s'agit d'une réunion d'appartements, et on le qualifie d'"affine" car ces appartements sont des espaces affines, dont les espaces vectoriels directeurs sont en fait les appartements de l'immeuble vectoriel.

Maintenant, si G est un groupe de Kac-Moody, déployé ou presque déployé, on sait construire son immeuble vectoriel. Il s'agit en fait de deux immeubles jumelés, voir par exemple [Ré02]. Le but du travail présent est, dans le cas où G est un groupe de Kac-Moody sur un corps local, de définir un objet "affine", similaire à l'immeuble de Bruhat-Tits du cas réductif.

Ceci a déjà été fait dans [GR08] par Stéphane Gaussent et Guy Rousseau, pour un groupe déployé sur un corps \mathbb{K} dont le corps résiduel contient \mathbb{C} . L'objet défini est appelé "masure" car il ne satisfait pas toutes les conditions demandées à un immeuble habituel. Pour un corps plus général, mais toujours un groupe déployé, Guy Rousseau ([Rou06]) a défini un "immeuble microaffine", que l'on peut voir comme le bord à l'infini d'une mesure, semblable au bord rajouté à un immeuble affine lorsqu'on définit sa compactification polygônale. Par ailleurs, la définition d'une mesure pour un corps local général est a priori effectuée, toujours par Guy Rousseau, la rédaction est en cours.

On se propose ici de se placer dans le cadre général des groupes munis d'une donnée radicielle valuée, cadre qui inclut les groupes de Kac-Moody déployés ou presque déployés sur un corps muni d'une valuation réelle quelconque. Nous construirons simultanément une "masure" et son bord (qui contient donc un "immeuble microaffine") car celui-ci sera utile à l'étude des propriétés géométriques de la mesure. L'objet obtenu sera appelé une mesure complète.

On se rend compte que plusieurs choix peuvent être faits, menant à différentes mesures complètes. Pour rentrer un peu dans le détail, la construction d'un appartement A ne présente pas de difficulté (partie 3.1), et on cherche donc ensuite, selon le procédé habituel de Bruhat et Tits, à construire un objet immobilier comme quotient de $G \times A$ par la relation d'équivalence déterminée par le choix des sous-groupes de G qui seront les fixateurs des points de A . Ces sous-groupes sont appelés, comme dans le cas réductif, des "sous-groupes parahoriques", et contrairement au cas réductif,

leur définition n'est pas évidente : plusieurs possibilités sont envisageables. Ainsi, dans [GR08], Stéphane Gaussent et Guy Rousseau définissent les familles de groupes parahoriques \mathcal{P}^{min} , \mathcal{P}^{pm} , \mathcal{P}^{nm} dont la définition est quelque peu indirecte, et nécessite l'emploi de "complétions" du groupe de Kac-Moody G considéré.

Toujours par soucis de généralité, nous optons pour une approche axiomatique, c'est-à-dire que nous définissons abstraitement la notion de "famille de parahoriques", et nous étudions les objets immobiliers que l'on peut construire, en fonction des propriétés vérifiées par une telle famille. C'est la partie 3. Dans le cas d'un groupe de Kac-Moody déployé, il y aura essentiellement deux exemples de familles de parahoriques, ce sont ces deux exemples que nous aurons en tête tout au long de cette partie. Dans la partie 4 enfin, on étudie le cas d'un groupe presque déployé : il s'agit de trouver une famille de parahoriques permettant d'utiliser la construction générale de la partie 3.

2 Rappels et notations

Lorsque $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction sur un ensemble X , on notera pour $Y \subset X$, $\alpha(Y) = 0$ si $\alpha(Y) = \{0\}$, $\alpha(Y) > 0$ si $\alpha(Y) \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\alpha(Y) \geq 0$ si $\alpha(Y) \subset \mathbb{R}^+$ etc...

Si A est un complexe simplicial, $\mathcal{F}(A)$ sera l'ensemble de ses facettes. Si f est une facette de A , f^* est la réunion des facettes bordées par f . Ainsi, lorsque \vec{f} est une facette dans un immeuble \vec{I} , \vec{f}^* désignera la réunion des facettes de \vec{I} dont l'adhérence contient \vec{f} . Si \vec{Z} est un appartement de \vec{I} , on notera la réunion des facettes de \vec{Z} dont l'adhérence contient \vec{f} par $\vec{f}^* \cap \vec{Z}$. Enfin, par définition d'un complexe simplicial, $\mathcal{F}(A)$ est muni d'un ordre qu'on notera juste \leq .

2.1 Donnée radicielle

Il y a plusieurs définitions possibles pour une donnée radicielle, selon que l'on considère qu'un système de racines est un sous-ensemble d'un espace vectoriel réel ou un ensemble de demi-complexes de Coxeter. La seconde possibilité est plus générale, la première plus précise, elle permet notamment de distinguer une racine et son double. Un système de racines du premier type sera dit vectoriel, un système du second type sera dit géométrique.

Si α, β sont deux racines d'un système ϕ , l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est défini de la sorte :

- $[\alpha, \beta] = \{p\alpha + q\beta \mid p, q \in \mathbb{N} \text{ et } p\alpha + q\beta \in \phi\}$ lorsque ϕ est un système de racines vectoriel.
- $[\alpha, \beta] = \{\gamma \in \phi \mid \alpha \cap \beta \subset \gamma\}$ lorsque ϕ est un système de racines géométrique.

On définit aussi $] \alpha, \beta [= [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha, \beta\}$ ainsi que $] \alpha, \beta [$ et $[\alpha, \beta [$ de la manière évidente.

Une partie ψ d'un système de racine est dite close lorsque pour tout $\alpha, \beta \in \psi$, $[\alpha, \beta] \subset \psi$. La partie ψ est dite de plus nilpotente si elle est finie. Enfin, une partie ψ est dite prénilpotente s'il existe un système positif ϕ^+ de ϕ et un élément $w \in W(\phi)$ du groupe de Weyl associé à ϕ tel que $\psi \subset \phi^+ \cap w(-\phi^+)$. Une partie ψ est nilpotente si et seulement si elle est close et prénilpotente.

La notion de prénilpotence est principalement utilisée pour les paires de racines. Si $\{\alpha, \beta\}$ est une telle paire, il est presque immédiat que l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est clos, ainsi $\{\alpha, \beta\}$ est prénilpotente si et seulement si $[\alpha, \beta]$ est fini.

Dans la suite, sauf mention du contraire, les systèmes de racines considérés seront toujours de type vectoriel. Ainsi, l'existence d'un système de racines ϕ sous-entend l'existence d'un \mathbb{R} -espace vectoriel \vec{V} tel que $\phi \subset \vec{V}^*$. De plus, \vec{V} sera muni d'une forme bilinéaire invariante sous $W(\phi)$. Un système de racines ϕ est dit réduit si pour tout $\alpha \in \phi$, $\phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha\}$. Lorsque ϕ n'est pas réduit, la seule possibilité est en fait $\phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ ou $\phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\pm\alpha, \pm \frac{1}{2}\alpha\}$.

Définition 2.1.1. Soit ϕ un système de racines, et ϕ^+ un système positif dans ϕ . Soit G un groupe et $(U_\alpha)_{\alpha \in \phi}$ une famille de sous-groupes de G . On note $T = \bigcap_{\alpha \in \phi} N_G(U_\alpha)$ l'intersection des normalisateurs des U_α , $U^+ = \langle \{U_\alpha \mid \alpha \in \phi^+\} \rangle$ et $U^- = \langle \{U_\alpha \mid \alpha \in -\phi^+\} \rangle$.

Le couple $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ est appelé une donnée radicielle de type ϕ si :

- (DR1) : Chaque U_α est un sous-groupe de G non trivial.
- (DR2) : Pour toute paire prénilpotente de racines $\{\alpha, \beta\}$, le groupe $[U_\alpha, U_\beta]$ des commutateurs de U_α et U_β est inclus dans $U_{\gamma} \cup]\alpha, \beta[$.

- (DR3) : Si $\alpha \in \phi$ et $2\alpha \in \phi$, alors $U_{2\alpha}$ est inclus strictement dans U_α .
- (DR4) : Pour tout $\alpha \in \phi$, et tout $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, il existe $u', u'' \in U_{-\alpha}$ tels que $n(u) := u'uu''$ conjugue chaque U_β , $\beta \in \phi$ en $U_{r_\alpha \cdot \beta}$. De plus, les différents $n(u)$ peuvent être choisis de sorte que pour tout $u, v \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $n(u).T = n(v).T$.
- (DR5) : $T.U^+ \cap U^- = \{e\}$.

Cette donnée radicielle est dite génératrice si de plus :

- (DRG) : G est engendré par T et les U_α .

Remarque: C'est la définition utilisée dans [Rou06], 1.5, elle équivaut à la définition de "donnée radicielle jumelée entière" de [Ré02] 6.2.5. Dans la terminologie de [Ré02], le qualificatif "entière" sert à indiquer que le système de racines est de type vectoriel. La définition d'une donnée radicielle pour un système de racines géométriques est exactement la même, à ceci près que la définition d'un intervalle de racines utilisée en (DR2) a changé, et que (DR3) devient inutile.

Le qualificatif "jumelé" sert quand à lui à se rappeler que dans le cas où ϕ est infini, cette donnée radicielle menera à un immeuble jumelé. Il n'a aucune signification formelle, ce qui explique son omission ici.

Signalons enfin que c'est la notion géométrique de donnée radicielle qui est définie dans [AB08].

Lorsque $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ est une donnée radicielle, on notera toujours $T = \bigcap_{\alpha \in \phi} N_G(U_\alpha)$ comme dans la définition. On prouve que les éléments $n(u)$ dans (DR4) sont uniques, on peut donc conserver la notation $n(u)$. On note enfin N le sous-groupe de G engendré par ces éléments et par T . On prouve facilement que $n(u^{-1}) = n(u)^{-1}$, que pour tout $m \in N$, $n(mum^{-1}) = mn(u)m^{-1}$, et que si u' et u'' sont tels que $n(u) = u'uu''$, alors $n(u) = n(u') = n(u'')$.

On prouve que N est le normalisateur de T dès que la condition "(CENT)" définie dans [Ré02] 1.2.5 est vérifiée. Cette condition s'exprime ainsi :

$$(CENT) : \forall \alpha \in \phi, Z_{U_\alpha}(T) = \{e\}.$$

Cette condition est vérifiée par tous les groupes de Kac-Moody sur un corps de cardinal au moins 4 (voir infra), et nous verrons qu'elle l'est aussi pour tous les groupes munis d'une donnée radicielle "valuée" (voir 2.2. On la supposera donc toujours vraie dans la suite.

Le groupe quotient N/T s'identifie au groupe de Weyl du système de racine ϕ en associant pour tout $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $n(u).T$ à la réflexion r_α .

Le groupe T et tous ses conjugués sont appelés les tores maximaux. Si la condition (CENT) est vérifiée, si $T' = gTg^{-1}$ est un tore maximal, on note $N(T') = gNg^{-1}$ son normalisateur, $g\phi$ le système de racines abstraitement isomorphe à ϕ via l'application $\alpha \mapsto g\alpha$, et pour tout $\alpha \in \phi$, on note enfin $U_{g\alpha} = gU_\alpha g^{-1}$. Alors $(G, (U_{g\alpha})_{g\alpha \in g\phi})$ est encore une donnée radicielle.

Dans la suite, on évitera de particulariser la donnée radicielle $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ (correspondant au tore T), on considérera plutôt que G est muni d'une classe d'équivalence, pour la conjugaison, de données radicielles. Pour chaque tore T on notera $\phi(T) \subset \vec{V}(T)^*$ le système de racine et $(U_\alpha)_{\alpha \in \phi(T)}$ les groupes radiciels correspondants.

Si $\mathcal{D} = (G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ est une donnée radicielle, pour toute partie ψ de ϕ , on notera $G(\psi) = \langle \{U_\alpha \mid \alpha \in \psi\} \rangle$.

Par définition même, un groupe de Kac-Moody déployé admet une donnée radicielle. Et c'est un des buts de [Ré02] que de prouver que c'est encore le cas pour une classe de groupes de Kac-Moody plus générale. Le terme employé dans [Ré02] pour qualifier ces groupes est "presque déployé".

Proposition 2.1.2. *Si G est un groupe de Kac-Moody déployé ou presque déployé, alors il admet une donnée radicielle de type un système de racine ϕ à base libre. Si \mathbb{K} est un corps de cardinal au moins 4, alors $G(\mathbb{K})$ vérifie la condition (CENT).*

Référence : [Ré02] 8.4.1.

2.2 Valuation d'une donnée radicielle

A l'exemple de [BT72], on ajoute maintenant une structure supplémentaire à notre donnée radicielle qui permet de rendre compte, dans le cas d'un groupe sur un corps local, de la valuation du corps.

Définition 2.2.1. Soit ϕ un système de racines. Soit $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ une donnée radicielle, soit Λ un groupe abélien totalement ordonné, et pour tout $\alpha \in \phi$ soit φ_α une fonction de U_α dans $\Lambda \cup \{\infty\}$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$ on note $U_{\alpha, \lambda} = \varphi_\alpha^{-1}([\lambda, \infty])$.

On dit que la famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi}$ est une valuation de la donnée radicielle $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$, ou que $(G, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ est une donnée radicielle valuée si :

- (V0) : $\forall \alpha \in \phi, \varphi_\alpha(U_\alpha)$ a au moins trois éléments et contient 0.
- (V1) : Pour tout $\alpha \in \phi$ et $\lambda \in \Lambda$, $U_{\alpha, \lambda}$ est un sous-groupe de U_α , et $U_{\alpha, \infty} = \{e\}$.
- (V2.1) : Pour tout $\alpha, \beta \in \phi, u \in U_\alpha \setminus \{e\}, v \in U_\beta \setminus \{e\}$,

$$\varphi_{r_{\alpha, \beta}}(n(u).v.n(u)^{-1}) = \varphi_\beta(v) - \langle \alpha, \beta \rangle \varphi_\alpha(u)$$

- (V2.2) : Pour tout $\alpha \in \phi$, pour tout $t \in T$,
$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \setminus \{e\} & \rightarrow & \Lambda \\ v & \mapsto & \varphi_\alpha(v) - \varphi_\alpha(tv t^{-1}) \end{array}$$
 est constante.

- (V3) : Pour toute paire prénilpotente de racines $\{\alpha, \beta\}$, pour tous $\lambda, \mu \in \Lambda$:

$$[U_{\alpha, \lambda}, U_{\beta, \mu}] \subset \left\langle \left\{ U_{p\alpha + q\beta} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \text{ et } p\alpha + q\beta \in \phi \right\} \right\rangle$$

- (V4) : Si $\alpha \in \phi$ et $2\alpha \in \phi$ alors $\varphi_{2\alpha}$ est la restriction de φ_α à $U_{2\alpha}$.

Lorsque $(G, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ est une donnée radicielle valuée, on garde la notation $U_{\alpha, \lambda}$ qu'on vient d'introduire.

Remarque: Soit $\alpha \in \phi$, et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. Par (V1), on voit $\varphi_\alpha(u) = \varphi_\alpha(u^{-1})$, et par (V2.1) on obtient $\varphi_{-\alpha}(n(u).u.n(u)^{-1}) = -\varphi_\alpha(u)$.

Dans la définition de la valuation d'une donnée radicielle finie de [BT72], ou même dans la définition de la valuation d'une donnée radicielle quelconque de [Rou06], l'axiome (V2) est beaucoup plus faible que celui présenté ici. Par contre on ajoute un cinquième axiome à savoir :

- (V5) : Pour tout $\alpha \in \phi$, pour tout $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, pour tous $u', u'' \in U_{-\alpha}$ tels que $n(u) = u'uu''$, alors $-\varphi_\alpha(u) = \varphi_{-\alpha}(u') = \varphi_{-\alpha}(u'')$.

Dans le cas d'une donnée radicielle finie, l'axiome (V2) présenté ici est conséquence de sa version faible et de (V0), (V1), (V3), (V4), (V5). Dans le cas général, l'auteur n'a pas su s'en passer. Concernant (V5), on prouvera en 3.1.14 qu'il découle des (V0)...(V4) ci-dessus.

Proposition 2.2.2. Soit $\mathcal{D} = (G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ une donnée radicielle admettant une valuation $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi}$. Alors \mathcal{D} vérifie la condition (CENT).

Démonstration: Soit $\alpha \in \phi, u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. Nous devons trouver $t \in T$ tel que $utu^{-1} \neq t$. Par (V0), il existe $v \in U_\alpha \setminus \{e\}$ tel que $\varphi_\alpha(u) \neq \varphi_\alpha(v)$. Posons $t = n(u)n(v)$, il est clair par (DR4) que t normalise chaque U_β , donc $t \in T$. Montrons que $t^{-1}ut \neq u$. On calcule $\varphi_\alpha(t^{-1}ut)$ en utilisant deux fois (V2.1) :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(n(v)^{-1}n(u)^{-1}.u.n(u)n(v)) &= \varphi_{-\alpha}(n(u)^{-1}un(u)) - \langle -\alpha, \alpha \rangle \varphi_\alpha(v) \\ &= \varphi_\alpha(u) - \langle \alpha, \alpha \rangle \varphi_\alpha(u) + 2\varphi_\alpha(v) = 2\varphi_\alpha(v) - \varphi_\alpha(u) \\ &\neq \varphi_\alpha(u) \end{aligned}$$

Donc $t^{-1}ut \neq u$. □

Proposition 2.2.3. *Soit G un groupe de Kac-Moody déployé, soit \mathbb{K} un corps muni d'une valuation $\varpi : \mathbb{K} \rightarrow \Lambda \cup \{\infty\}$. Alors il existe une valuation $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi}$ de la donnée radicielle $(G(\mathbb{K}), (U_\alpha(\mathbb{K}))_{\alpha \in \phi})$, elle est définie par $\varphi_\alpha(u_\alpha(k)) = \varpi(k)$, où u_α est un isomorphisme entre $(\mathbb{K}, +)$ et $U_\alpha(\mathbb{K})$.*

Démonstration: On trouvera dans [Rou06] 2.2 des références qui prouvent toutes les conditions (Vx) sauf (V2.1). Quand à cette dernière, elle découle de l'existence d'un appartement pour G . En effet, il existe d'après [Rou06], partie 2, une action de $N(T)$ sur l'espace $\vec{V}(T)$ par isométries affines, tel que pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $n(u)$ agit comme la réflexion orthogonale selon l'hyperplan $M(\alpha, \varphi_\alpha(u)) = \{x \in \vec{V} \mid \alpha(x) + \varphi_\alpha(u) = 0\}$. Ainsi la valeur $\varphi_\alpha(u)$ est caractérisée par l'égalité $\alpha(\text{Fix}_{\vec{V}}(n(u))) = \{-\varphi_\alpha(u)\}$.

Soient $\alpha, \beta \in \phi$ et $(u, v) \in U_\alpha \setminus \{e\} \times U_\beta \setminus \{e\}$. Pour calculer $\varphi_{r_\alpha \beta}(n(u).v.n(u)^{-1})$, il faut donc étudier la réflexion $n(n(u).v.n(u)^{-1})$. Par la définition (voir (DR4)), il est clair que $n(n(u).v.n(u)^{-1}) = n(u).n(v).n(u)^{-1}$, et l'ensemble de ses points fixes est $n(u).\text{Fix}_{\vec{V}}(v)$. Il existe un point $o \in \text{Fix}(n(u))$ et un réel x tel que $o + x.\alpha^\vee \in \text{Fix}(n(v))$ (si α et β sont colinéaires, pour tout $o \in \text{Fix}(n(u))$ il existe un tel x , sinon il existe $o \in \text{Fix}(n(u)) \cap \text{Fix}(n(v))$, alors $x = 0$ convient). Alors $n(u).(o + x.\alpha^\vee) = o - x.\alpha^\vee$, on a donc :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(u) &= \alpha(o) \\ \varphi_\beta(v) &= \beta(o + x.\alpha^\vee) = \beta(o) + x\langle \alpha, \beta \rangle \\ \varphi_{r_\alpha \beta}(n(u).v.n(u)^{-1}) &= (r_\alpha \beta)(o - x.\alpha^\vee) = (\beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha)(o - x.\alpha^\vee) \\ &= \beta(o) - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha(o) - x\langle \alpha, \beta \rangle + 2x\langle \alpha, \beta \rangle \\ &= \beta(o) - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha(o) + x\langle \alpha, \beta \rangle \\ &= \varphi_\beta(v) - \langle \alpha, \beta \rangle \varphi_\alpha(u). \end{aligned}$$

□

2.3 Immeubles vectoriels

Ce que nous appelons ici les immeubles vectoriels sont les immeubles décrits dans [Ré02]. Ce sont des immeubles jumelés, donc en fait la réunion de deux immeubles classiques. Dans la réalisation géométrique de ces immeubles que nous considérons, les appartements sont inclus dans des espaces vectoriels, d'où l'appellation "immeubles vectoriels". Une autre appellation fréquente est "immeubles coniques", car les appartements sont des cônes dans ces espaces vectoriels.

Dans cette sous-partie, nous rappelons les principaux résultats concernant ces immeubles, et fixons les notations.

On suppose désormais ϕ à base libre, c'est-à-dire que toute base Π du système de racines ϕ est aussi une base de l'espace vectoriel sous-jacent \vec{V}^* .

2.3.1 L'immeuble vectoriel déployé

Une donnée radicielle permet de définir un immeuble, voir par exemple [Ré02] partie 2. On notera dans la suite \vec{I} l'immeuble obtenu à partir de la donnée radicielle $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$. Dès que ϕ est infini, il s'agit en fait de la réunion de deux immeubles jumelés comme définis dans [Abr96].

Ses appartements sont en bijection avec les tores maximaux de G . Dans sa réalisation géométrique que nous considérons, l'appartement correspondant au tore maximal T est inclus dans un \mathbb{R} -espace vectoriel $\vec{V} = \vec{V}(T)$. Donc $\phi(T) \subset \vec{V}(T)^*$: les racines relatives à T sont des formes linéaires sur cet espace. Le choix d'une base Π de $\phi(T)$ définit un cône $\vec{C} = \{x \in \vec{V}(T) \mid \alpha(x) > 0, \forall \alpha \in \Pi\}$, c'est la chambre positive relative à Π . Les ensembles obtenus en remplaçant certaines des inégalités > 0 par des égalités $= 0$ dans la définition de \vec{C} sont les facettes de \vec{C} . La réunion

des facettes de \vec{C} est donc l'adhérence $\overline{\vec{C}}$ de \vec{C} . L'appartement $\vec{A}(T)$ est alors $W(T).\overline{\vec{C}} \cup W(T).(-\vec{C}) \subset \vec{V}(T)$, ses facettes sont les $\pm w\vec{f}$, pour $w \in W(T)$ et \vec{f} une facette de \vec{C} . Les chambres sont les facettes maximales, donc les images de $\pm\vec{C}$ par un $w \in W(T)$, et les cloisons sont les facettes de codimension 1. \vec{C} est un cône, réunion de deux cônes convexes $\vec{A}^+(T) = W(T).\vec{C}$ et $\vec{A}^-(T) = -\vec{A}^+(T)$. Le cône positif $\vec{A}^+(T)$ est appelé le cône de Tits. Chacun de ces deux cônes convexes, avec sa structure de facettes, est un complexe de Coxeter pour $W(T)$. L'intérieur de $\vec{A}(T)$ dans $\vec{V}(T)$ est une réunion de facettes, appelées les facettes sphériques. Ce sont précisément les facettes dont le fixateur dans $W(T)$ est fini. Les chambres et les cloisons sont toujours sphériques, leur fixateur dans $W(T)$ étant respectivement $\{e\}$ et $\{\pm 1\}$.

L'immeuble \vec{I} est réunion des $\vec{A}(T)$ pour tous les tores maximaux T . Ces appartements sont permutés transitivement par G , selon la formule $g.\vec{A}(T) = \vec{A}(gTg^{-1})$ ([Ré02] 2.6.2). En conséquence, $N(T)$ est le stabilisateur de $\vec{A}(T)$. Pour $\alpha \in \phi$, $u \in U_\alpha$, l'élément $n(u)$ agit sur $\vec{A}(T)$ comme la réflexion selon le mur $\ker(\alpha)$. Le groupe T quand à lui est le fixateur de $\vec{A}(T)$.

Pour une racine $\alpha \in \phi(T)$, $\mathcal{D}(\alpha) := \{x \in \vec{A}(T) \mid \alpha(x) \geq 0\}$ est le demi-appartement associé à α . Le groupe U_α fixe ce demi-appartement, et est simplement transitif sur les appartements le contenant.

Si on fixe un tore maximal T , et une base de $\phi(T)$, on définit $\vec{I}^+ = G.\vec{A}^+(T)$ et $\vec{I}^- = G.\vec{A}^-(T)$. Ce sont deux immeubles au sens classique, qui ne s'intersectent qu'en 0. Le découpage $\vec{I} = \vec{I}^+ \cup \vec{I}^-$ est indépendant des choix de T et de la base de $\phi(T)$, mais \vec{I}^+ et \vec{I}^- sont échangés si on remplace une base de $\phi(T)$ par son opposée. Ces deux immeubles sont jumelés.

Lorsque \vec{f} est une facette sphérique de \vec{I} , on peut définir la projection sur \vec{f} ([Abr96] I.4). On commence par la définir pour les chambres de \vec{I} : si \vec{C} est une chambre de \vec{I} , alors sa projection sur \vec{f} , notée $pr_{\vec{f}}(\vec{C})$ est l'unique chambre de \vec{f}^* qui est à distance minimale (si \vec{C} et \vec{f} sont de même signe) ou à codistance maximale (dans le cas contraire) de \vec{C} . Ensuite, si \vec{g} est une facette quelconque, on pose $pr_{\vec{f}}(\vec{g}) = \bigcap_{\vec{C} \in \vec{f}^*} pr_{\vec{f}}(\vec{C})$. Insistons sur le fait que la projection sur une facette \vec{f} n'est définie que lorsque \vec{f} est sphérique. En fait, lorsque \vec{f} n'est pas sphérique, elle est définie uniquement pour les facettes \vec{g} de même signe que \vec{f} .

On prouve que si \vec{f} et \vec{g} sont dans un appartement \vec{A} , alors $pr_{\vec{f}}(\vec{g}) \subset \vec{A}$ (voir [Abr96], I.4, corollaire 3). On peut alors donner une caractérisation géométrique de $pr_{\vec{f}}(\vec{g})$: il s'agit de la facette de \vec{f}^* qui est ouverte dans $\text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{f} \cup \vec{g})$ et incluse dans l'enveloppe convexe de $\vec{f} \cup \vec{g}$.

Pour toute partie $\vec{\Omega}$ d'un appartement $\vec{A}(T)$, on note $P(\vec{\Omega})$ son fixateur dans G , c'est le *sous-groupe parabolique de G associé à $\vec{\Omega}$* . Rappelons les propriétés essentielles de ces groupes :

Proposition 2.3.1.

1. Si \vec{f} et \vec{g} sont deux facettes de \vec{I} , alors $G = P(\vec{f}).N(T).P(\vec{g})$ où T est un tore maximal tel que $\vec{A}(T)$ contient \vec{f} et \vec{g} . Lorsque \vec{f} et \vec{g} sont de même signe, cette décomposition est dite de Bruhat, sinon de Birkhoff. Ceci entraîne que pour toutes facettes \vec{f} et \vec{g} de \vec{I} , il existe un appartement les contenant.
2. Soit $\vec{\Omega}$ une partie $\vec{A}(T)$ incluse dans $A^+(T)$, incluse dans $A^-(T)$ ou rencontrant $A^+(T)_{sph}$ et $A^-(T)_{sph}$. Pour tout $\vec{\Omega} \subset \vec{A}(T)_{sph}$, $\bigcap_{\vec{f} \in \vec{\Omega}} N(T).P(\vec{f}) = N(T).P(\vec{\Omega})$, ce qui signifie qu'entre deux appartements contenant $\vec{\Omega}$ existe un isomorphisme induit par un élément de G fixant $\vec{\Omega}$. Autrement dit, le groupe $P(\vec{\Omega})$ est transitif sur les appartements contenant $\vec{\Omega}$.
3. Pour toute partie $\vec{\Omega} \subset \vec{A}(T)_{sph}$, on a $P(\vec{\Omega}) = P(Cl(\vec{\Omega}))$, où $Cl(\vec{\Omega})$ est l'enclos de $\vec{\Omega}$ dans $\vec{A}(T)$, c'est-à-dire l'intersection de tous les demi-appartements contenant $\vec{\Omega}$. Au vu du point 2, ceci signifie que l'intersection de deux appartements \vec{A} et \vec{B} est une partie close (i.e. égale à son enclos) dans chacun des appartements \vec{A} et \vec{B} .

Démonstration:

1. Voir [Ré02] partie 1. On prouve qu'un groupe muni d'une donnée radicielle est également muni d'une "BN-paire raffinée" en 1.5.4, puis qu'un tel groupe vérifie une version plus précise que celle énoncée ici de la décomposition de Bruhat en 1.2.3 et de la décomposition de Birkhoff en 1.2.4.

2. La version géométrique de ce résultat est prouvée dans [AB08], 6.73 lorsque $\vec{\Omega}$ est l'adhérence d'une réunion de chambres. Le résultat est de plus connu si $\vec{\Omega} \subset A^+$ ou $\vec{\Omega} \subset A^-$.

Étudions le cas général, où $\vec{\Omega}$ rencontre \vec{A}_{sph}^+ et \vec{A}_{sph}^- . Soit \vec{B} un autre appartement contenant $\vec{\Omega}$, soient \vec{f} et \vec{g} des facettes maximales de $\vec{A}^+ \cap \vec{B}^+$ et $\vec{A}^- \cap \vec{B}^-$, respectivement. Soit \vec{C} une chambre de \vec{A} contenant \vec{f} dans son adhérence, et \vec{D} une chambre de \vec{B} contenant \vec{g} dans son adhérence. Il existe un appartement \vec{Z} contenant $\vec{C} \cup \vec{D}$. On sait que $\vec{Z}^+ \cap \vec{A}^+$ est une partie close contenant la chambre \vec{C} , donc c'est l'adhérence d'un ensemble de chambre. Du côté négatif, comme \vec{g} est une facette sphérique incluse dans $\vec{Z}^- \cap \vec{A}^-$, ce dernier ensemble est clos et contient la chambre $pr_{\vec{g}}(\vec{C})$. Il s'agit donc également de l'adhérence d'un ensemble de chambres. Donc $\vec{A} \cap \vec{Z}$ est l'adhérence d'un ensemble de chambres, et par [AB08], 6.73, il existe $g_1 \in G$ tel que $g_1 \vec{A} = \vec{Z}$, et g_1 fixe \vec{C} , donc \vec{f} , et \vec{g} .

De même, il existe $g_2 \in G$ tel que $g_2 \vec{Z} = \vec{B}$ et g_2 fixe $\vec{f} \cup \vec{g}$. Au final, $g_2 g_1$ fixe $\vec{f} \cup \vec{g}$ et envoie \vec{A} sur \vec{B} . En particulier, $g_2 g_1 (\vec{A} \cap \vec{B}) = \vec{A} \cap \vec{B}$, et comme $g_2 g_1$ fixe une facette maximale dans $(\vec{A} \cap \vec{B})^+$ et dans $(\vec{A} \cap \vec{B})^-$, on obtient que $g_2 g_1$ fixe ces deux parties, et donc en particulier $\vec{\Omega}$.

Pour en déduire la version algébrique du résultat, si $g \in \bigcap_{\vec{f} \in \vec{\Omega}} N.P(\vec{f})$, posons $\vec{B} = g \vec{A}$, et soit $g_2 g_1 \in P(\vec{\Omega})$ comme ci-dessus, alors $g^{-1} g_2 g_1 \vec{A} = \vec{A}$ donc $g^{-1} g_2 g_1 \in N$ et $g \in N.P(\vec{\Omega})$.

3. Encore une fois, ceci est bien connu lorsque $\vec{\Omega} \subset \vec{A}^\pm$, on peut donc supposer que $\vec{\Omega}$ contient des points positifs et négatifs.

Lorsque $\vec{\Omega}$ est une partie "équilibrée" (c'est-à-dire une réunion finie de facettes sphériques en contenant au moins une positive et une négative), on a $P(\vec{\Omega}) = G(\phi(\vec{\Omega}))$ (voir [Ré02], partie 6, ceci sera détaillé un peu au paragraphe suivant). Chaque groupe radiciel U_α , $\alpha \in \phi(\vec{\Omega})$ fixe un demi-appartement contenant $\vec{\Omega}$, donc fixe aussi $\text{Cl}(\vec{\Omega})$.

Si $\vec{\Omega}$ est l'adhérence d'un ensemble de chambres, alors $\text{Cl}(\vec{\Omega})$ est la plus petite partie de \vec{A} fermée et stable par projection sur ses cloisons ([AB08] 5.193, où une partie convexe est par définition un ensemble de chambres stable par projection sur ses cloisons intérieures). Si \vec{f} et \vec{g} sont deux facettes sphériques de signes opposés, alors $\vec{f} \cup \vec{g}$ est une partie équilibrée, et le paragraphe précédent montre que $P(\vec{f} \cup \vec{g})$ fixe $\text{Cl}(\vec{f} \cup \vec{g})$, qui contient $pr_{\vec{f}}(\vec{g})$. Il est alors évident que $P(\vec{\Omega})$ fixe $P(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$.

Pour traiter le cas général, on reprend la démonstration de [AB08] 5.193. On commence par le

Lemme 2.3.2. *Soit c une partie close de \vec{A}^+ ou de \vec{A}^- contenant un point sphérique. Alors c est l'intersection des demi-appartements contenant c et dont le bord contient c ou une cloison sphérique de c .*

Preuve du lemme: Supposons par exemple $c \subset \vec{A}^+$. Soit \vec{f} une facette de $\vec{A}^+ \setminus c$, montrons qu'il existe un demi-appartement comme dans l'énoncé qui sépare \vec{f} de c . Soit \vec{c} une chambre de c (rappelons qu'une partie close d'un système de Coxeter est un complexe de chambre), \vec{c} est donc une facette sphérique de \vec{A}^+ .

Supposons dans un premier temps que $pr_{\vec{c}}(\vec{f}) \neq \vec{c}$. Soit \vec{M} un mur contenant \vec{c} , et donc c , il ne contient alors pas \vec{f} . Le demi-appartement délimité par \vec{M} est comme requis dans l'énoncé, contient c et pas \vec{f} .

Supposons à présent que $pr_{\vec{c}}(\vec{f}) = \vec{c}$. Il existe alors une unique cloison \vec{m} de \vec{c} à distance minimale de \vec{f} . Remarquons que puisque c est fermé, $\vec{f} \not\subset \vec{c}$, donc $pr_{\vec{m}}(\vec{f})$ est une facette de même dimension que \vec{c} , différente de \vec{c} , et incluse dans $\text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{c})$. Sachant que \vec{c} est sphérique donc dans l'intérieur du cône de Tits, tout point de \vec{m} est dans un segment ouvert reliant un point de $pr_{\vec{m}}(\vec{f})$ et un point de \vec{c} , donc \vec{m} est dans l'intérieur du cône de Tits, donc \vec{m} est une cloison sphérique de c . Soit \vec{M} un mur contenant \vec{m} et pas \vec{c} , soit \vec{D} le demi-appartement délimité par \vec{M} contenant \vec{c} , alors \vec{D} contient c , sans quoi $pr_{\vec{m}}(\vec{f})$ serait dans c , contredisant la définition de \vec{c} . De plus, $\vec{f} \not\subset \vec{D}$. \square

On montre alors la version géométrique du point 3. Soit \vec{B} un appartement tel que $\vec{A} \cap \vec{B}$ contient des points sphériques positifs et négatifs. Soit ϵ un signe. La partie $c^\epsilon := \vec{A}^\epsilon \cap \vec{B}^\epsilon$ est close dans \vec{A}^ϵ , c'est l'intersection des demi-appartements la contenant et dont le bord contient c^ϵ ou une cloison sphérique de c^ϵ . Notons \mathcal{D}^ϵ cet ensemble de demi-appartements. Soit $\vec{D} \in \mathcal{D}^\epsilon$, et \vec{m} une chambre ou une cloison sphérique de c incluse dans $\partial \vec{D}$. Comme $\vec{A} \cap \vec{B}$ est stable par projection, et que la projection sur \vec{m} est bien définie puisque \vec{m} est sphérique, c^ϵ contient tous les $pr_{\vec{m}}(d)$ pour d une facette de $\vec{A}^{-\epsilon} \cap \vec{B}^{-\epsilon}$. Et ceci entraîne que \vec{D} contient $\vec{A}^{-\epsilon} \cap \vec{B}^{-\epsilon}$.

On prouve ainsi que $\text{Cl}(\vec{A} \cap \vec{B})$ est égal à l'intersection des demi-appartements de $\mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$, puis que $\text{Cl}(\vec{A} \cap \vec{B}) = c^+ \cup c^- \subset \vec{A} \cap \vec{B}$.

Pour en déduire la version algébrique du résultat, soit $g \in P(\vec{\Omega})$, posons $\vec{B} = g.\vec{A}$. Par le point 2, il existe $h \in P(\vec{A} \cap \vec{B})$ tel que $h.\vec{A} = \vec{B}$, donc $g^{-1}h \in N(\vec{\Omega})$. Or $N(\vec{\Omega}) = N(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$, et $\text{Cl}(\vec{\Omega}) \subset \vec{A} \cap \vec{B}$ d'où $h \in P(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$. Au final, on obtient bien $g \in P(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$. □

Pour toute facette \vec{f} , on note \vec{f}^* la réunion des facettes dont l'adhérence contient \vec{f} .

2.3.2 Décomposition de Lévi

On se réfère ici à [Ré02] partie 6.

Soit $\vec{\Omega}$ une partie d'un appartement \vec{A} . On note :

- $\phi^u(\vec{A})(\vec{\Omega}) = \{\alpha \in \phi(\vec{A}) \mid \alpha(\vec{\Omega}) > 0\}$
- $\phi^m(\vec{A})(\vec{\Omega}) = \{\alpha \in \phi(\vec{A}) \mid \alpha(\vec{\Omega}) = 0\}$
- $\phi(\vec{A})(\vec{\Omega}) = \phi^u(\vec{A})(\vec{\Omega}) \sqcup \phi^m(\vec{A})(\vec{\Omega}) = \{\alpha \in \phi(\vec{A}) \mid \alpha(\vec{\Omega}) \geq 0\}$.

L'ensemble de racines $\phi^m(\vec{A})(\vec{\Omega})$ est en fait un sous-système de racines de $\phi(\vec{A})$. Lorsque $\vec{\Omega}$ contient un point sphérique, il est fini.

On définit ensuite les sous-groupes de $P(\vec{\Omega})$ suivants :

- *Le facteur de Lévi de $P(\vec{\Omega})$ par rapport \vec{A} :* $M_{\vec{A}}(\vec{\Omega}) := \text{Fix}_G(\text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{\Omega})) = \text{Fix}_G(\vec{\Omega} \cup \text{op}_{\vec{A}}(\vec{\Omega}))$. Il est d'après 2.3.1 transitif sur les appartements contenant $\text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{\Omega})$. Si $\vec{\Omega}$ est une facette ou si elle contient une facette sphérique, alors $M_{\vec{A}}(\vec{\Omega}) = \langle T, \{U_\alpha \mid \alpha \in \phi^m(\vec{A})(\vec{\Omega})\} \rangle = T.G(\phi^m(\vec{\Omega}))$. Enfin, le couple $(M(\vec{\Omega}), (U_\alpha)_{\alpha \in \phi^m(\vec{\Omega})})$ est une donnée radicielle de système de racines $\phi^m(\vec{\Omega})$, voir [Ré02] 6.2.3. En particulier, lorsque $\vec{\Omega}$ contient un point sphérique, $\phi^m(\vec{\Omega})$ est un système de racines fini, et $M(\vec{\Omega})$ est muni d'une donnée radicielle de type fini, comme définie dans [BT72].
- *Le facteur unipotent de $P(\vec{\Omega})$:* $U(\vec{\Omega})$ est le sous-groupe distingué de $P(\vec{\Omega})$ engendré par $\{U_\alpha \mid \alpha \in \phi^u(\vec{A})(\vec{\Omega})\}$. Il est donc indépendant de l'appartement \vec{A} contenant $\vec{\Omega}$ considéré. Dès que $\phi^u(\vec{\Omega})$ est une partie nilpotente de racines, il admet la décomposition avec écriture unique : $U(\vec{\Omega}) = \prod_{\alpha \in \phi^u(\vec{A})(\vec{\Omega})} U_\alpha$, quel que soit l'ordre des facteurs. C'est en particulier le cas lorsque $\vec{\Omega}$ intersecte une facette positive sphérique et une facette négative sphérique. Lorsque $\vec{\Omega}$ est une chambre, $U(\vec{\Omega}) = \langle \{U_\alpha \mid \alpha \in \phi^u(\vec{A})(\vec{\Omega})\} \rangle = G(\phi^u(\vec{\Omega}))$, et lorsque $\vec{\Omega}$ est une facette, $U(\vec{\Omega})$ est l'intersection des $U(\vec{C})$ pour \vec{C} les chambres de \vec{A} contenant $\vec{\Omega}$ dans leur adhérence. On prouve enfin que si $\vec{\Omega}$ est une facette sphérique, $U(\vec{\Omega}) = U(\vec{C}) \cap U(\vec{D})$ dès que \vec{C} et \vec{D} sont deux chambres opposées dans $\vec{\Omega}^* \cap \vec{A}$.

Une partie équilibrée dans \vec{I} est une partie d'appartement qui contient des points positifs et négatifs et qui est recouverte par un nombre fini de facettes sphériques (éventuellement fermées).

Dans le cas où $\vec{\Omega}$ est soit une facette soit une partie équilibrée de \vec{A} , $P(\vec{\Omega})$ admet une décomposition de Lévi ([Ré02], 6.2.2 et 6.4.1) :

$$P(\vec{\Omega}) = M_{\vec{A}}(\vec{\Omega}) \ltimes U(\vec{\Omega})$$

Une extension vectorielle de $\vec{\Omega}$ est une partie de \vec{I} de la forme $\text{Vect}_{\vec{B}}(\vec{\Omega})$ pour un appartement \vec{B} contenant $\vec{\Omega}$. La décomposition de Lévi peut aussi s'exprimer en disant que $U(\vec{\Omega})$ est simplement transitif sur les extensions vectorielles de $\vec{\Omega}$.

3 Construction générale

Soit \vec{V} un \mathbb{R} -espace vectoriel, $\phi \subset \vec{V}^*$ un système de racines dont les bases sont des bases vectorielles de \vec{V}^* , et $(G, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ un groupe muni d'une donnée radicielle valuée. On suppose la condition (CENT) de [Ré02] 1.2.5 vérifiée, donc le normalisateur d'un tore maximal T est le groupe engendré par T et les $n(u)$, $u \in U_\alpha$, $\alpha \in \phi(T)$. On essaie de voir quel genre d'objet immobilier, semblable à l'immeuble affine de Bruhat-Tits ([BT72]), pourrait être défini dans cette situation.

3.1 L'appartement

Soit T un tore maximal dans G . On définit dans ce numéro l'objet $A(T)$ qui sera l'appartement relatif à T . Il s'agit d'une réunion disjointe d'espaces affines sous $\vec{V}(T)$ et certains de ses sous-espace vectoriels. Dans toute cette partie, on notera $\phi = \phi(T)$ et $N = N(T)$.

3.1.1 Façades d'appartement

Soit $Y(T)$ un espace affine sous \vec{V} . Un cône dans $Y(T)$ est une partie de $Y(T)$ de la forme $f = x + \vec{f}$, où \vec{f} est un cône de $\vec{V}(T)$. Le cône vectoriel \vec{f} est uniquement déterminé, c'est la direction de $x + \vec{f}$. Deux cônes de même direction sont dits parallèles, on note $g \parallel f$. Lorsque g est parallèle et inclus dans f , on dit que c'est un sous-cône parallèle, abrégé en "scp".

On définit une relation d'équivalence \sim (ou \sim_T lorsqu'il faut préciser) sur l'ensemble des cônes convexes de $Y(T)$. Soient $f = x + \vec{f}$ et $g = y + \vec{g}$, on pose :

$$f \sim g \Leftrightarrow (f \parallel g \text{ et } f \cap g \neq \emptyset) \Leftrightarrow (f \cap g \text{ contient un scp de } f \text{ et de } g) \Leftrightarrow (f \parallel g \text{ et } \vec{x}\vec{y} \in \text{Vect}(\vec{f}))$$

Pour tout cône convexe \vec{f} on note $Y(T)_{\vec{f}}$ l'ensemble des cônes dirigés par \vec{f} quotienté par \sim . C'est la façade de $Y(T)$ de direction \vec{f} . C'est un espace affine isomorphe à $Y(T)/\text{Vect}(\vec{f})$, et l'action de $\vec{V}(T)$ sur A passe au quotient sur $Y(T)_{\vec{f}}$.

Soit $\mathcal{F}(\vec{A}(T))$ l'ensemble des facettes de $\vec{A}(T)$, ce sont en particulier des cônes convexes de $\vec{V}(T)$. L'appartement (complet) associé à T est alors :

$$A(T) := \bigcup_{\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T))} Y(T)_{\vec{f}}$$

On notera $A(T)_{\vec{f}}$ pour désigner la façade $Y(T)_{\vec{f}}$, et les façades de $Y(T)$ seront appelées les façades de $A(T)$. Les façades ainsi construites seront appelées façades d'appartement, pour les distinguer des façades d'immeubles dont la définition est à venir. Lorsque a est un point de $A(T)$, on notera \vec{f}_a la direction de la façade le contenant. L'espace \vec{V} agit donc sur $A(T)$ et les orbites sont les façades.

On note $A(T)_{sph}$ la réunion des façades sphériques de $A(T)$, c'est-à-dire des façades de type une facette vectorielle sphérique. On note aussi $A(T)_{sph}^+$ et $A(T)_{sph}^-$ la réunion des façades sphériques positives et négatives. Dans la terminologie de [Rou06], $A(T)_{sph}^+$ et $A(T)_{sph}^-$ sont deux réalisations de Satake d'appartements microaffines.

On définit une topologie sur $A(T)$, telle que les voisinages d'un point $[x + \vec{f}]$ sont les :

$$\mathcal{V}(U, \vec{f}) = \{a \in A(T) \mid \text{un représentant de } a \text{ est inclus dans } U + \vec{f}\},$$

pour tous les voisinages U de x dans l'espace affine $Y(T)$. Cette topologie induit la topologie classique d'un espace affine de dimension finie sur chaque façade et l'adhérence d'une façade $A_{\vec{f}}$ est l'union des façades $A_{\vec{g}}$ pour $\vec{f} \subset \vec{g}$. Cette topologie est séparée, et si \vec{f} est une facette sphérique, alors $\overline{A_{\vec{f}}} = \bigcup_{\vec{g} \text{ tq } \vec{f} \subset \vec{g}} A_{\vec{g}}$ est compact ([Cha08]).

Comme les bases de ϕ sont des bases de \vec{V}^* , la plus petite facette de $\vec{A}(T)$ est $\{0\}$. La façade $A(T)_{\{0\}} = Y(T)$ est appelée la façade principale de $A(T)$, c'est l'intérieur de $A(T)$. On la notera donc $\mathring{A}(T)$, et on pourra oublier la notation $Y(T)$.

Jusqu'à la fin de 3.1, on notera $A = A(T)$ et $\vec{A} = \vec{A}(T)$.

3.1.2 Projections

On a déjà parlé de la projection vectorielle dans \vec{T} . On définit ici une projection affine, pour l'instant dans l'appartement $A(T)$:

Définition 3.1.1. Soient \vec{f}, \vec{g} deux facettes vectorielles telles que $\vec{f} \subset \text{Vect}(\vec{g})$. Soit $a = [x + \vec{f}] \in A_{\vec{f}}$, on pose alors $pr_{\vec{g}}(a) = [x + \vec{g}]$.

La fonction $pr_{\vec{g}}$ est la projection sur la façade $A_{\vec{g}}$, elle est définie sur la réunion des façades dirigées par une facette incluse dans $\text{Vect}(\vec{g})$.

Remarque: L'hypothèse $\vec{f} \subset \text{Vect}(\vec{g})$ assure que ceci est bien défini.

3.1.3 Espaces engendrés

Définition 3.1.2. Si $\Omega \subset A = A(T)$ est dans une façade $A_{\vec{f}}$, et si \vec{E} est un sous-espace vectoriel de $\vec{Y}(T)$ contenant \vec{f} , alors on définit $\langle \Omega, \vec{E} \rangle_A = \overline{pr_{\vec{f}}^{-1}(\Omega) + \vec{E}}$.

Si \vec{E} est juste une partie de \vec{A} , la notation $\langle \Omega, \vec{E} \rangle$ désignera $\langle \Omega, \text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{E}) \rangle$.

Remarque: Quels que soient Ω et \vec{E} , si $\Omega \neq \emptyset$, alors $\langle \Omega, \vec{E} \rangle_A$ coupe toujours la façade principale.

3.1.4 Murs et demi-appartements

On fixe une origine $o \in \mathring{A}$, et on identifie les formes linéaires sur $\vec{V} = \vec{A}$ à des formes affines sur \mathring{A} qui s'annulent en o . En particulier les racines relatives à T sont identifiées à des formes affines sur \mathring{A} . Soit $\alpha \in \phi$ une telle racine. Si $\vec{f} \in \mathcal{F}$ est une facette telle que $\alpha(\vec{f}) = 0$, alors α définit encore une forme affine sur $A_{\vec{f}}$. Si $\alpha(\vec{f}) > 0$, on dit que α prend la valeur ∞ sur $A_{\vec{f}}$. Enfin si $\alpha(\vec{f}) < 0$, on dit que α prend la valeur $-\infty$ sur $A_{\vec{f}}$. De la sorte, α définit une fonction sur A , à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Ces définitions permettent une caractérisation pratique de la topologie de A :

Lemme 3.1.3. La topologie de A est engendrée par les demi-espaces ouverts $\{x \in A \mid \alpha(x) > a\}$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \phi$. Autrement dit, une suite x_n tend vers une limite x si et seulement si $\forall \alpha \in \phi, \alpha(x_n) \rightarrow \alpha(x)$.

□

Pour tout $\alpha \in \phi$ et $\lambda \in \Lambda$, on pose $M(\alpha, \lambda) = \{x \in A \mid \alpha(x) + \lambda = 0\}$ et $\mathcal{D}(\alpha, \lambda) = \{x \in A \mid \alpha(x) + \lambda \geq 0\}$. L'ensemble des $M(\alpha, \lambda)$ ainsi obtenus pour $\alpha \in \phi$ et $\lambda \in \varphi_\alpha(U_\alpha \setminus \{e\})$ est l'ensemble des murs de A ; l'ensemble des $\mathcal{D}(\alpha, \lambda)$ correspondants est l'ensemble des demi-appartements de A .

Si $M = M(\alpha, \lambda)$ est un mur de $A(T)$, on notera $\vec{M} = \ker(\alpha) \subset \vec{V}$ la direction de M , c'est un mur de \vec{A} (ou plutôt sa trace sur \vec{A} est un mur de \vec{A}).

Voici le résultat qui justifie la définition des $\langle \Omega, \vec{E} \rangle_A$:

Lemme 3.1.4. *Si M est un mur contenant Ω dont la direction contient \vec{E} , alors $\langle \Omega, \vec{E} \rangle_A \subset M$.*

□

Un isomorphisme affine ψ entre les façades principales de deux appartements $A(T)$ et $A(T')$ dont la partie vectorielle préserve \mathcal{F} induit une bijection, encore notée ψ , entre $A(T)$ et $A(T')$. Si cette bijection préserve l'ensemble des murs, on dit que ψ est un isomorphisme d'appartements. Remarquons qu'un isomorphisme d'appartements ainsi défini ne préserve pas forcément les types des facettes de $\vec{A}(T)$ ni même leur signe.

Pour tout mur $M = M(\alpha, \lambda)$, r_M désigne la réflexion de direction r_α qui fixe $M \cap \vec{A}$. Elle induit un automorphisme involutif de $A(T)$, qu'on appelle la réflexion selon M .

Soit M un mur de $A(T)$ et $\vec{f} \in \mathcal{F}$. Alors $M \cap A(T)_{\vec{f}}$ est soit vide, soit un hyperplan de $A(T)_{\vec{f}}$. Ces hyperplans seront appelés les murs de $A(T)_{\vec{f}}$.

On notera pour toute partie Ω de A , et pour tout $\alpha \in \phi$, $U_\alpha(\Omega) = \{u \in U_\alpha \mid \Omega \subset \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u))\}$. Pour toute partie ψ de ϕ , on notera aussi $G(\psi, \Omega) = \langle \{U_\alpha(\Omega) \mid \alpha \in \psi\} \rangle$. Enfin, $G(\Omega)$ désignera $G(\phi, \Omega)$.

3.1.5 Parties closes

Définition 3.1.5. *Une partie close de $A(T)$ est une intersection finie de demi-appartements. L'enclos d'une partie E de $A(T)$ est le filtre noté $Cl(E)$ engendré par les parties closes de $A(T)$ contenant E .*

Remarques:

- Avec cette définition, $Cl(\emptyset) = \emptyset$.
- Cette définition de partie close est plus restrictive que celle de [GR08], elle conduit donc à des enclos plus grand. En effet, dans [GR08], on autorise des demi-appartements dirigés par des racines imaginaires, et une intersection infinie de demi-appartements est close, pourvu que ces demi-appartements soient dirigés par des racines deux à deux non colinéaires.

Si Ω est une partie de A , on notera $\vec{\Omega}$ la réunion des directions des façades rencontrées par Ω . Lorsque Ω est un filtre, $\vec{\Omega}$ sera la réunion des directions des façades rencontrées par tous les éléments de Ω .

Exemples 3.1.6.

1. Soit \vec{C} une chambre de \vec{A} et $\Omega = A_{\vec{C}}$. Alors $Cl(\Omega)$ est le filtre des voisinages de Ω , $\vec{\Omega} = \vec{C}$, et $Cl(\vec{\Omega}) = \overline{Cl(\Omega)} = \vec{C}$.

Tout élément du filtre $Cl(\Omega)$ contient des points de chaque façade dirigée par une facette de \vec{C} , mais pourtant, $Cl(\Omega)$ ne contient aucun point d'aucune façade $A_{\vec{f}}$ pour $\vec{f} \subset \partial \vec{C}$.

2. Soit \vec{m} une cloison de \vec{A} , prenons $\Omega = A_{\vec{m}} \cup A_{-\vec{m}}$. Alors $\vec{\Omega} = \vec{m} \cup -\vec{m}$, et $\text{Cl}(\vec{\Omega})$ est l'hyperplan contenant \vec{m} . Mais $\text{Cl}(\Omega) = A$, donc $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)} = \vec{A} \neq \text{Cl}(\vec{\Omega})$. (Il suffit même de prendre $\Omega = A_{\vec{m}} \cup \{x\}$ avec x un point de $A_{-\vec{m}}$.)
3. Avec encore \vec{m} une cloison de \vec{A} , en prenant $\Omega = A_{\vec{m}}$, on obtient $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)} = \vec{m}^* \neq \text{Cl}(\vec{\Omega}) = \vec{m}$. Ainsi même en restant dans A^+ ou A^- on n'a pas $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)} = \text{Cl}(\vec{\Omega})$.

Proposition 3.1.7. *Pour toute partie Ω de A , $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)}$ est close. En conséquence, $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)} \supset \text{Cl}(\vec{\Omega})$.*

Démonstration:

Soit $\vec{f} \in \text{Cl}(\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)})$, montrons que $\vec{f} \in \overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)}$. Il s'agit de prouver que tout élément du filtre $\text{Cl}(\Omega)$ contient un point de $A_{\vec{f}}$. Soit donc $D_1 \cap \dots \cap D_k \in \text{Cl}(\Omega)$ une intersection finie de demi-appartements contenant Ω . Pour tout i , $\text{Cl}(\Omega) \subset D_i$ donc $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)} \subset \vec{D}_i$, donc $\vec{f} \in \vec{D}_i$. Si \vec{f} est dans l'intérieur de \vec{D}_i , alors $A_{\vec{f}} \subset D_i$. On peut donc, quitte à retirer les D_i tels que \vec{f} est dans l'intérieur de \vec{D}_i , supposer que pour tout i , $\vec{f} \in \partial \vec{D}_i$. Alors $D_1 \cap D_2 \dots \cap D_k$ est stable par $\text{Vect}(\vec{f})$ et contient donc $\langle \Omega, \vec{f} \rangle_A$, qui contient bien au moins un point de $A_{\vec{f}}$ si $\Omega \neq \emptyset$. Le cas $\Omega = \emptyset$ est trivial. \square

Le résultat suivant fournit une description plus ou moins constructive de la trace de l'enclos d'une partie Ω dans une façade $A_{\vec{f}_0}$.

Proposition 3.1.8. *Soit Ω une partie de A . Soit \mathcal{D} l'ensemble des facettes de $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)}$. On effectue les opérations suivantes sur Ω :*

1. *Pour chaque couple (a, \vec{g}) tel que $a \in \Omega$, $\vec{g} \in \mathcal{D}$ et a est dans la façade $A_{\vec{f}}$ avec $\vec{f} \in \text{Vect}(\vec{g})$, on rajoute $pr_{\vec{g}}(a)$ à Ω .*
2. *Pour chaque couple (b, \vec{f}) , avec $b \in \Omega$, $\vec{f} \in \mathcal{D}$, tels que b est dans la façade $A_{\vec{g}}$ avec $\vec{f} \in \text{Vect}(\vec{g})$, on choisit $a \in pr_{\vec{g}}^{-1}(b) \cap A_{\vec{f}}$ et on rajoute $a + \vec{g}$ à Ω .*

Appelons $\Omega^1(C_1)$ l'ensemble ainsi obtenu, où C_1 représente les choix effectués à chaque opération 2. Si de nouveaux couples (a, \vec{g}) ou (b, \vec{f}) vérifiant les conditions ci-dessus sont apparus, on effectue à nouveau les opérations 1 et 2, et on note $\Omega^2(C_2)$ l'ensemble obtenu. On obtient ainsi par récurrence un ensemble $\Omega^n(C_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\Omega^\infty(C)$ la réunion de tous ces ensembles, il dépend de la suite C de tous les choix effectués à chaque opération 2. Notons \mathcal{c} l'ensemble de toutes les suites de choix possibles. Alors pour tout $\vec{f}_0 \in \mathcal{F}(\vec{A}(T))$:

$$\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}_0} = \bigcap_{C \in \mathcal{c}} \text{Cl}(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}_0})$$

Ou plutôt, $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}_0}$ est le filtre engendré par les $\text{Cl}(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}_0})$, pour $C \in \mathcal{c}$.

Remarque: Ceci signifie grosso modo que $\text{Cl}(\Omega)$ est la clôture de Ω sous les opérations 1, 2, et "prendre la clôture dans chaque façade". La difficulté de rédaction vient du fait que l'opération 2 n'est pas bien définie puisqu'elle dépend d'un choix.

Démonstration:

Pour montrer l'inclusion " \supset ", il suffit de vérifier que pour tout demi-appartement D contenant Ω , il existe un choix $C \in \mathcal{c}$ tel que $D \supset \Omega^\infty(C)$. Ceci revient à vérifier que si D contient une partie Θ , alors il contient toute partie obtenue à partir de Θ par une opération 1, et que pour chaque couple (b, \vec{f}) vérifiant les conditions de 2, il existe un choix de $a \in pr_{\vec{g}}^{-1}(b)$ tel que la partie obtenue par l'opération 2 à partir de Θ est encore incluse dans D . Ces vérifications sont immédiates.

Pour montrer l'autre inclusion, il faut prouver que si D est un demi-appartement, dirigé par une racine $\alpha \in \phi^m(\vec{f}_0)$, contenant un $\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}_0}$, pour un $C \in \mathcal{c}$, alors $D \supset \Omega$. Soit donc D un tel demi-appartement, et supposons par l'absurde qu'il existe $\omega \in \Omega \setminus D$. Soit \vec{g} la direction de la façade contenant ω . Soit $\vec{h} = pr_{\vec{f}_0}(\vec{g})$, en appliquant l'opération 1

à Ω avec le couple (ω, \vec{h}) , on voit que $pr_{\vec{h}}(\omega) \in \Omega^\infty(C)$. Ensuite, en appliquant l'opération 2 avec le couple $(pr_{\vec{h}}(\omega), \vec{f}_0)$, on voit que $\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}_0}$, et donc en particulier D , contient un cône de la forme $a + \vec{h}$. Ceci entraîne que $\alpha(\vec{h}) \geq 0$, d'où $\alpha(\vec{g}) \geq 0$. D'autre part, $\alpha(\vec{g}) \leq 0$ sans quoi on aurait $\omega \in A_{\vec{g}} \subset D$. Ainsi, $\alpha(\vec{g}) = 0 : \vec{g}, \vec{f}_0$ et donc aussi \vec{h} sont dans $\ker(\alpha)$. Donc $\alpha(\omega) = \alpha(pr_{\vec{h}}(\omega)) = \alpha(a)$. Mais ceci contredit le fait que $\omega \notin D$ alors que $a \in D$. \square

Corollaire 3.1.9. Soient \vec{f}, \vec{g} deux facettes incluses dans $\overline{Cl(\Omega)}$, telles que $\vec{f} \subset \text{Vect}(\vec{g})$. On note $\Omega_{\vec{g}} = Cl(\Omega) \cap A_{\vec{g}}$, $\Omega_{\vec{f}} = Cl(\Omega) \cap A_{\vec{f}}$. Alors $\Omega_{\vec{g}} = pr_{\vec{g}}(\Omega_{\vec{f}})$.

Pour utiliser le résultat de la proposition 3.1.8 lorsqu'on ne connaît pas précisément les directions des façades rencontrées par $Cl(\Omega)$, on pourra utiliser le lemme suivant :

Lemme 3.1.10. On se place à nouveau dans les conditions de la proposition 3.1.8. On suppose en outre que $\vec{f}_0 \subset Cl(\vec{\Omega})$. Alors le résultat de la proposition 3.1.8 est encore valable si on définit les $\Omega^\infty(C)$ de la même manière, mais en n'effectuant les opérations 1 et 2 que lorsque les facettes \vec{f} ou \vec{g} concernées sont dans $Cl(\vec{\Omega})$.

Preuve du lemme:

Les ensembles $\Omega^\infty(C)$ obtenus ici sont plus petits que ceux obtenus en 3.1.8, donc l'inclusion $Cl(\Omega) \cap A_{\vec{f}_0} \supset \bigcap_{C \in C} Cl(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}_0})$ est encore vraie.

Pour l'inclusion réciproque, la preuve de 3.1.8 est encore vraie puisqu'elle ne passe que par des facettes $\vec{g} \subset \vec{\Omega}$ et $\vec{h} = pr_{\vec{f}_0}(\vec{g}) \subset Cl(\vec{\Omega})$. \square

3.1.6 Facettes

Définition 3.1.11. Soit $x \in A$, soit \vec{f} la direction de la façade contenant x . On note \vec{A}_x l'espace vectoriel $\vec{A}_{\vec{f}}$ muni des directions des murs contenant x . C'est donc un complexe de Coxeter, a priori non essentiel, de groupe $W(\vec{A}_x) = \{\vec{w} \in W(\vec{A}) \mid w.x = x\} \subset \text{Fix}_{W(\vec{A})}(\vec{f})$. On y pense comme à l'espace tangent de A en x .

Soit $x \in A(T)$, soit $A(T)_{\vec{f}}$ la façade contenant x . Soit $\vec{F} \subset \overline{A(T)_{\vec{f}}}$ une facette de \vec{A}_x . On note $\mathcal{F}il(x, \vec{F})$ le filtre engendré par les parties closes de $A(T)$ contenant un voisinage de x dans $x + \vec{F}$ (pour la topologie induite). Insistons sur le fait que $\mathcal{F}il(x, \vec{F})$ est engendré uniquement par des parties closes.

L'ensemble de ces filtres est l'ensemble des facettes de $A(T)$. Si $F = \mathcal{F}il(x, \vec{F})$ est une facette de $A(T)$, la facette vectorielle \vec{F} est uniquement déterminée par F , c'est la direction de F . Le point x par contre n'est uniquement déterminé que lorsque Λ est non discret.

Dans le cas où Λ est discret, et où $\phi(T)$ est fini, les facettes sont en fait les filtres associés à des ensembles, et ces ensembles sont les facettes affines fermées habituelles.

Remarque: Cette définition est identique à celle de [Rou06] pour une facette sphérique, bien que non présentée de la même manière. Elle diffère cependant de celle de [GR08] pour une facette de \vec{A} .

3.1.7 Action de N

Le normalisateur N du tore T agit sur l'appartement vectoriel \vec{A} , et même sur l'espace \vec{V} . On notera $\vec{\nu} : N \rightarrow Gl(\vec{V})$ cette action. On va définir (suivant l'exemple de [BT72]) une action affine ν de N sur \vec{A} , qui s'étendra à A , dont la partie vectorielle sera $\vec{\nu}$, et telle que l'élément $n(u)$, pour $u \in U_\alpha$, $\alpha \in \phi$ agira par réflexion selon le mur $M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$. Remarquons que puisque le tore T fixe \vec{V} , il devra agir sur A par translation.

Proposition 3.1.12. *Pour tout $t \in T$, il existe un unique vecteur $\vec{v}_t \in \vec{V}$ tel que pour tout $\alpha \in \phi$, pour tout $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$,*

$$\mathcal{D}(\alpha, \varphi(tut^{-1})) = \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) + \vec{v}_t .$$

Ce vecteur est caractérisé par les égalités $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u) - \varphi(tut^{-1})$, pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$.

L'application qui à t associe la translation de vecteur \vec{v}_t est alors une action de T sur $Y(T)$.

Démonstration:

On commence par prouver l'unicité. Si \vec{v}_t est un vecteur convenable, alors pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u) + \vec{v}_t) &= \{a \in \mathring{A} \mid \alpha(a) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} + \vec{v}_t \\ &= \{a + \vec{v}_t \in \mathring{A} \mid \alpha(a) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} \\ &= \{a \in \mathring{A} \mid \alpha(a - \vec{v}_t) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} \\ &= \{a \in \mathring{A} \mid \alpha(a) - \alpha(\vec{v}_t) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} = \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u) - \alpha(\vec{v}_t)) . \end{aligned}$$

On en déduit $\varphi(tut^{-1}) = \varphi_\alpha(u) - \alpha(\vec{v}_t)$ ou encore $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u) - \varphi(tut^{-1})$. Comme ϕ est une famille génératrice de \vec{V}^* , ces conditions pour tous les $\alpha \in \phi$ forcent l'unicité de \vec{v}_t .

Passons à l'existence. D'après le calcul précédent, la condition $\mathcal{D}(\alpha, \varphi(tut^{-1})) = \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) + \vec{v}_t$ équivaut à $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u) - \varphi(tut^{-1})$. Soit Π un système de racines simples dans ϕ , il s'agit donc d'une base de \vec{V}^* . Pour chaque $\alpha \in \phi$, on choisit un $u_\alpha \in U_\alpha \setminus \{e\}$. Il existe alors un unique $\vec{v}_t \in \vec{V}$ tel que $\forall \alpha \in \Pi$, $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u_\alpha) - \varphi(tu_\alpha t^{-1})$. D'après la condition (V2.2) des valuations de données radicielles, la quantité $\varphi_\alpha(u_\alpha) - \varphi(tu_\alpha t^{-1})$ est indépendante du choix de u_α , donc l'égalité précédent reste vraie pour tout $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. Il reste à montrer que l'ensemble des racines vérifiant cette propriété est stable par n'importe quelle réflexion $r_\beta, \beta \in \Pi$.

C'est une conséquence de (V2.1). Soit $\alpha \in \phi$ une racine vérifiant $\forall u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u_\alpha) - \varphi(tu_\alpha t^{-1})$. Soit β une racine simple. Alors :

$$\begin{aligned} r_\beta.\alpha(\vec{v}_t) &= \alpha(\vec{v}_t) - \langle \alpha, \beta \rangle \beta(\vec{v}_t) \\ &= \varphi_\alpha(u_\alpha) - \varphi(tu_\alpha t^{-1}) - \langle \alpha, \beta \rangle (\varphi_\beta(u_\beta) - \varphi_\beta(tu_\beta t^{-1})) \\ &= (\varphi_\alpha(u_\alpha) - \langle \alpha, \beta \rangle \varphi_\beta(u_\beta)) - (\varphi(tu_\alpha t^{-1}) - \langle \alpha, \beta \rangle \varphi_\beta(tu_\beta t^{-1})) \end{aligned}$$

Mais par (V2.1), le premier terme est $\varphi_{r_\alpha.\beta}(n(u_\beta).u_\alpha.n(u_\beta))$ et le second est $\varphi_{r_\alpha.\beta}(n(tu_\beta t^{-1}).tu_\alpha t^{-1}.n(tu_\beta t^{-1})^{-1})$. Comme $n(tu_\beta t^{-1}) = tn(u_\beta)t^{-1}$, ceci vaut $\varphi_{r_\alpha.\beta}(tn(u_\beta).u_\alpha.n(u_\beta)t^{-1})$, d'où le résultat.

Enfin, si t_1 et t_2 sont deux élément de T , alors pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, on a $\mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(t_1 t_2 u t_2^{-1} t_1^{-1})) = \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) + \vec{v}_{t_1 t_2}$ et d'autre part $\mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(t_1 t_2 u t_2^{-1} t_1^{-1})) = \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) + \vec{v}_{t_2} + \vec{v}_{t_1}$. Par unicité des \vec{v}_t , on obtient $\vec{v}_{t_1 t_2} = \vec{v}_{t_1} + \vec{v}_{t_2}$: on a bien une action de groupe. \square

Proposition 3.1.13. *Il existe une unique action ν de N sur \mathring{A} par isométries affines telle que pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, $\nu(n(u))$ est la réflexion selon le mur $M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$ et pour tout $t \in T$, $\nu(t)$ est la translation de vecteur \vec{v}_t .*

Pour tout $n \in N$, on a $\overrightarrow{\nu(n)} = \vec{v}(n)$, autrement dit la partie vectorielle de cette action est \vec{v} . Enfin, cette action préserve les demi-appartements de \mathring{A} , plus précisément, pour tout $n \in N$, $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$,

$$\nu(n).\mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) = \mathcal{D}(\vec{v}(n).\alpha, \varphi_{\vec{v}(n).\alpha}(nun^{-1})) .$$

En particulier, N agit sur A par automorphismes d'appartements.

Démonstration:

Rappelons qu'on a fixé un point $o \in \mathring{A}$ tel que pour tout $\alpha \in \phi$, le mur $M(\alpha, 0)$ passe par o . Notons $N_o = \langle \{n(u) \mid \alpha \in \phi, u \in U_\alpha \setminus \{e\} \text{ et } \varphi_\alpha(u) = 0\} \rangle$. On commence par définir ν sur N_o en posant que $\forall n \in N_o, \nu(n)$ est l'automorphisme affine de $Y(T)$ qui fixe o et dont la partie vectorielle est $\vec{\nu}(n)$.

On veut ensuite définir ν sur T en posant pour $t \in T$ que $\nu(t)$ soit la translation de vecteur $\vec{\nu}_t$, il faut vérifier que les deux définitions sont compatibles sur $N_o \cap T$. Déjà, $\vec{\nu}(T) = \{id_{\vec{Y}}\}$, donc $\nu(N_o \cap T) = \{id_{Y(T)}\}$. Il reste donc à prouver que pour tout $t \in N_o \cap T, \vec{\nu}_t = \vec{0}$. Fixons un tel t , au vu de la preuve précédente, il suffit de prouver que pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}, \varphi_\alpha(u) = \varphi_\alpha(tut^{-1})$. Fixons de tels α et u . Il découle de (V2.1) que pour tout $\beta \in \phi$ et $v \in U_\beta$ tel que $\varphi_\beta(v) = 0, \varphi_{r_\beta, \alpha}(n(v).u.n(v)^{-1}) = \varphi_\alpha(u)$. Ceci entraîne que pour tout $n \in N_o, \varphi_{n, \alpha}(nun^{-1}) = \varphi_\alpha(u)$, et en particulier, $\varphi_\alpha(u) = \varphi_\alpha(tut^{-1})$.

Ceci permet de définir ν sur $N_o \cup T$. Ensuite, montrons que $N = N_o.T$. Pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, il existe $u_o \in U_\alpha \setminus \{e\}$ tel que $\varphi_\alpha(u_o) = 0$. Donc $n(u)n(u_o) \in T$ et $n(u_o) \in N_o$, on prouve ainsi que $N = \langle N_o, T \rangle$. Mais comme N_o normalise T , on obtient bien $N = N_o.T$.

On définit alors ν sur N par $\nu(n_o t) = \nu(n_o) \circ \nu(t)$, pour tous $n_o \in N_o$ et $t \in T$. Ceci est bien défini car ν est trivial sur $N_o \cap T$. Comme $\vec{\nu}(T) = \{id\}$, il est évident que la partie vectorielle de $\nu(n)$ est $\vec{\nu}(n)$ pour tout $n \in N$. Montrons que ν est une action de groupe. Soient $n_1, n_2 \in N_o$ et $t_1, t_2 \in T$, par définition on a $\nu(n_1 t_1 n_2 t_2) = \nu(n_1 n_2 n_2^{-1} t_1 n_2 t_2) = \nu(n_1) \nu(n_2) \nu(n_2 t_2 n_2^{-1}) \nu(t_2)$. Ceci devrait valoir $\nu(n_1) \nu(t_1) \nu(n_2) \nu(t_2)$, nous devons donc prouver que $\nu(n_2) \nu(n_2^{-1} t_2 n_2) = \nu(t_2) \nu(n_2)$ autrement dit que $\vec{\nu}(n_2^{-1}).\vec{\nu}_{t_2} = \vec{\nu}_{n_2^{-1} t_2 n_2}$. Il suffit de traiter le cas où $\vec{\nu}(n_2)$ est une réflexion : il existe alors $\beta \in \phi$ et $v \in U_\beta \setminus \{e\}$, avec $\varphi_\beta(v) = 0$ tel que $n_2 = n(v)$. Soit $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. Alors :

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{\nu}_{n_2^{-1} t_1 n_2}) &= \varphi_\alpha(n_2^{-1} t_1 n_2 . u . n_2^{-1} t_1^{-1} n_2) - \varphi_\alpha(u) \\ &= \varphi_{r_\beta \alpha}(t_1 n_2 . u . n_2^{-1} t_1^{-1}) + \langle \alpha, \beta \rangle \varphi_\beta(v) - \varphi_\alpha(u) \\ &= r_\beta \alpha(\vec{\nu}_{t_1}) + \varphi_{r_\beta \alpha}(n_2 u n_2^{-1}) + \langle \alpha, \beta \rangle \varphi_\beta(v) - \varphi_\alpha(u) \\ &= \alpha(r_\beta . \vec{\nu}_{t_1}) + \varphi_\alpha(u) - \langle \alpha, \beta \rangle \varphi_\beta(v) + \langle \alpha, \beta \rangle \varphi_\beta(v) - \varphi_\alpha(u) \\ &= \alpha(r_\beta . \vec{\nu}_{t_1}) \\ &= \alpha(\vec{\nu}(n_2^{-1}).\vec{\nu}_{t_1}) \end{aligned}$$

Ceci, étant vrai quelque soit $\alpha \in \phi$, prouve bien que $\vec{\nu}(n_2^{-1}).\vec{\nu}_{t_1} = \vec{\nu}_{n_2^{-1} t_1 n_2}$.

Comme la partie vectorielle de cette action est $\vec{\nu}$, qui préserve l'ensemble des facettes de \vec{A} , elle s'étend à une action sur A . Prouvons qu'elle stabilise l'ensemble des demi-appartements de \mathring{A} selon la formule annoncée. Soit $\alpha \in \phi, u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. La relation $\nu(n).\mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) = \mathcal{D}(\vec{\nu}(n).\alpha, \varphi_{\vec{\nu}(n), \alpha}(nun^{-1}))$ est déjà vraie pour $n \in T$, par la définition des $\vec{\nu}_t$. Soit $n \in N_o$, on a déjà vu qu'alors $\varphi_{\vec{\nu}(n), \alpha}(nun^{-1}) = \varphi_\alpha(u)$. Il ne reste plus qu'à calculer :

$$\begin{aligned} \nu(n).\mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u)) &= \{\nu(n).(o + \vec{\nu}) \in A \mid \alpha(o + \vec{\nu}) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} \\ &= \{o + \vec{\nu} \in A \mid \alpha(\nu(n)^{-1}(o + \vec{\nu})) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} \\ &= \{o + \vec{\nu} \in A \mid \alpha(o + \vec{\nu}(n)^{-1} . (\vec{\nu})) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} \\ &= \{o + \vec{\nu} \in A \mid \vec{\nu} . \alpha(o + \vec{\nu}) + \varphi_\alpha(u) \geq 0\} \\ &= \mathcal{D}(\vec{\nu}(n).\alpha, \varphi_\alpha(u)) \\ &= \mathcal{D}(\vec{\nu}(n).\alpha, \varphi_{\vec{\nu}(n), \alpha}(nun^{-1})) \end{aligned}$$

A présent, soit $\alpha \in \phi, u \in U_\alpha \setminus \{e\}$, montrons que $\nu(n(u))$ est la réflexion selon le mur $M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$. On sait déjà que $\nu(n(u))$ est une réflexion, sa partie vectorielle étant la réflexion selon le mur $\vec{D}(\alpha)$. Par le résultat qu'on vient de prouver, $\nu(n).M(\alpha, \varphi_\alpha(u)) = M(-\alpha, \varphi_{-\alpha}(n(u).u.n(u)^{-1}))$. Mais par (V2.1), $\varphi_{-\alpha}(n(u).u.n(u)^{-1}) = \varphi_\alpha(u) - \langle \alpha, \alpha \rangle \varphi_\alpha(u) = -\varphi_\alpha(u)$. Donc $\nu(n).M(\alpha, \varphi_\alpha(u)) = M(-\alpha, -\varphi_\alpha(u)) = M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$. Sachant que l'hyperplan fixe de $\nu(n(u))$ est parallèle à $M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$, ceci entraîne que c'est précisément $M(\alpha, \varphi_\alpha(u))$, et donc que $\nu(n(u))$ est la réflexion annoncée.

Enfin, l'unicité de ν est claire car N est engendré par T et les $n(u)$, pour $u \in U_\alpha \setminus \{e\}, \alpha \in \phi$. \square

La définition de cette action de N permet de prouver la condition "(V5)" présente dans la définition de la valuation d'une donnée radicielle pour [BT72] ou [Rou06] :

Corollaire 3.1.14. Soit $\alpha \in \phi$, $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$ et $u', u'' \in U_{-\alpha}$ tels que $n(u) = u'u''$. Alors $\varphi_\alpha(u) = -\varphi_{-\alpha}(u') = -\varphi_{-\alpha}(u'')$.

Démonstration: Il est classique que $n(u) = n(u') = n(u'')$. Rapelons tout de même la preuve : on a $u'uu'' = uu''n(u)^{-1}u'n(u)$. Mais $n(u)^{-1}u'n(u) \in U_\alpha$, d'où le résultat. Or $n(u), n(u'), n(u'')$ agissent respectivement par les réflexions selon $M(\alpha, \varphi_\alpha(u)), M(-\alpha, \varphi_\alpha(u'))$ et $M(-\alpha, \varphi_\alpha(u''))$. L'égalité de ces trois murs entraîne bien les égalités annoncées. \square

Définition 3.1.15. Le fixateur dans N d'un point ou d'une partie a de A ou de \vec{A} sera noté $N(a)$ (et donc $N(T)(a)$ s'il faut préciser le tore). Le fixateur de A sera noté $H(T)$, ou juste H s'il est inutile de préciser le tore.

Dans la suite, on omettra souvent de noter v et \vec{v} pour l'action d'un élément de N sur un point de A ou de \vec{A} .

Exemple 3.1.16. Remarquons tout de suite que pour une partie $\Omega \subset A$, $N(\Omega) \not\subset N(\text{Cl}(\Omega))$. Il suffit de choisir deux chambres \vec{c} et \vec{d} de $\vec{A}(T)$, séparées par une cloison \vec{m} , et de trouver $t \in T$ qui induit une translation dont la direction n'est pas incluse dans \vec{m} . Alors t fixe $A_{\vec{c}} \cup A_{\vec{d}}$ mais pas $A_{\vec{m}}$, alors que $\text{Cl}(A_{\vec{c}} \cup A_{\vec{d}}) = A_{\vec{c}} \cup A_{\vec{d}} \cup A_{\vec{m}}$.

Il est par contre clair d'après 2.3.1 qu'un $n \in N(\Omega)$ agit comme une translation sur chaque sous-espace $\langle \omega, \text{Vect}(\text{Cl}(\vec{\Omega})) \rangle_A$. La proposition suivante améliore un peu ce résultat, en permettant de remplacer $\text{Cl}(\vec{\Omega})$ par $\overline{\text{Cl}(\vec{\Omega})}$. Notons que les différentes translations induites sur chaque $\omega + \text{Vect}(\overline{\text{Cl}(\vec{\Omega})})$ ne sont a priori pas selon le même vecteur.

Proposition 3.1.17. Soit Ω une partie de A , alors $N(\Omega) \subset N(\overline{\text{Cl}(\vec{\Omega})})$.

Démonstration:

Soit $n \in N(\Omega)$, soit $\vec{E} = \text{Fix}_{\vec{A}}(n)$, c'est une partie close de \vec{A} contenant $\text{Cl}(\vec{\Omega})$. Supposons $\vec{E} \neq \overline{\text{Cl}(\vec{\Omega})}$. Alors il existe $\alpha \in \phi$ tel que $\vec{E} \subset \vec{D}(\alpha)$ et un point $a \in \text{Cl}(\vec{\Omega})$ tel que $\alpha(a) = -\infty$. Ce point a n'est donc dans aucun demi-appartement dirigé par α , et pourtant il est dans $\text{Cl}(\vec{\Omega})$: il n'existe donc pas de demi-appartement dirigé par α qui contienne Ω . Il existe donc $(\omega) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ tel que $\alpha(\omega_i) \in \mathbb{R} \forall i \in \mathbb{N}$ et $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(\omega_i) = -\infty$.

L'ensemble $\vec{E} \cap \ker \alpha \subset \vec{A}$ est clos et non vide puisqu'il contient les directions des façades contenant les ω_n . Soit \vec{f} une facette maximale de $\vec{E} \cap \ker \alpha$, alors tous les ω_n se projettent sur $A_{\vec{f}}$, et ces projetés sont fixes par n . Soit $(\omega'_n)_n \in (A_{\vec{f}})^{\mathbb{N}}$ la suite ainsi obtenue. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha(\omega'_0 \omega'_n) < 0$. Alors n fixe la droite contenant $\{\omega'_0, \omega'_n\}$, donc sa direction $\overline{\omega'_0 \omega'_n}$, puis la facette \vec{g} contenant cette direction. Donc $\vec{g} \subset \vec{E}$, mais $\alpha(\vec{g}) = \mathbb{R}^{-*}$ donc $\vec{g} \not\subset \vec{D}(\alpha)$, ce qui est impossible. Donc $\vec{E} = \overline{\text{Cl}(\vec{\Omega})}$. \square

Remarque: La définition des façades $A_{\vec{f}} \simeq A/\text{Vect}(\vec{f})$ revient à essentialiser \vec{A} pour le groupe de Coxeter $\text{Fix}_{W(\vec{A})}(\vec{f})$. Cette construction est semblable à la compactification polyédrale, ou de Satake, d'un appartement d'un immeuble affine. Elle permet d'avoir sur A une topologie séparée, et telle que l'adhérence d'une façade sphérique est compacte. Elle a cependant le défaut de perdre une partie de l'action du tore. En effet, si t induit une translation de direction incluse dans $\text{Vect}(\vec{f})$ sur $Y(T)$, alors t agit trivialement sur $A_{\vec{f}}$. Par exemple les éléments de $\bigcap_{\alpha \in \phi \subset T^*} \ker(\alpha)$ fixent A , mais pas forcément $Y(T)$, si ϕ n'engendre pas T^* . Dans la première réalisation d'un appartement microaffine dans [Rou06] par exemple, les façades sont toutes isomorphes comme espaces affines à $Y(T)$, ce qui évite ce soucis.

3.1.8 Opposition

Définition 3.1.18. Si $a = [x + \vec{f}] \in A(T)$, le point opposé à a dans $A(T)$ est $op_{A(T)}(a) = [x - \vec{f}]$.

L'application $op_{A(T)}$ est une involution qui permute les façades de $A(T)$, préserve l'ensemble des murs et commute à l'action de $W(T)$. Plus généralement, elle commute à tout isomorphisme d'appartements. Cependant, ce n'est pas

un automorphisme d'appartement car l'action sur le bord d'une façade n'est pas induite par l'action sur cette façade ($op_{A(T)}$ n'est pas continue). En fait, $op_{A(T)}$ fixe la façade principale, et le seul automorphisme d'appartement de $A(T)$ fixant la façade principale est $id_{A(T)}$.

3.2 Familles de sous-groupes parahoriques

Maintenant que nous disposons des appartements $A(T)$, il faut, pour définir un immeuble selon la méthode usuelle, déterminer quels seront les fixateurs des points de $A(T)$. Ces fixateurs seront appelés des sous-groupes parahoriques de G .

Dans cette sous-section, on étudie quelles sont en général les propriétés qu'on peut demander à une famille de sous-groupes parahoriques, et quelles sont les conséquences de ces propriétés sur l'immeuble obtenu. Ensuite, nous prouverons quelques unes de ces propriétés pour la famille minimale de parahoriques.

On fixe un tore maximal T , et on note $A = A(T)$, $N = N(T)$.

3.2.1 Définition

Définition 3.2.1. Soit $Q = (Q(a))_{a \in A}$ une famille de sous-groupes de G . Si Ω est une partie de A , on note $Q(\Omega) = \bigcap_{\omega \in \Omega} Q(\omega)$. Si Ω est un filtre de A , on note $Q(\Omega) = \bigcup_{\Omega' \in \Omega} Q(\Omega')$.

On dit que Q est une famille de sous-groupes parahoriques pour \mathcal{D} si elle vérifie :

- (para 0.1) : Si $a \in A_{\vec{f}}$, alors $Q(a) \subset P(\vec{f})$. (compatibilité avec l'immeuble vectoriel)
- (para 0.2) : $\forall a \in A(T)$, $N(T)_a \subset Q(a)$. (compatibilité de l'action de $N(T)$)
- (para 0.3) : $\forall a \in A(T)$, $\forall (\alpha, \lambda) \in \phi(T) \times \Lambda$ tel que $a \in \mathcal{D}(\alpha, \lambda)$, $U_{\alpha, \lambda} \subset Q(a)$. (points fixes des groupes radiciels)
- (para 0.4) : $\forall n \in N(T)$, $\forall a \in A(T)$, $nQ(a)n^{-1} = Q(na)$.

La plus petite famille de parahoriques pour \mathcal{D} sera notée \mathcal{P} . On définit encore les conditions suivantes sur Q , certaines dépendent d'une facette $\vec{g} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T))$, d'une partie $\Omega \subset A$, d'un point $a \in A$ ou d'une chambre $\vec{C} \subset \vec{A}$:

- (para inj) : $\forall a \in A(T)$, $N(T)_a = Q(a) \cap N(T)$. (inclusion des appartements dans l'immeuble)
- (para 2.1)(\vec{g}) : $\forall \vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{g})$, $\forall a \in A_{\vec{f}}$, $Q(a) \cap P(\vec{g}) = Q(\{a, pr_{\vec{g}}(a)\})$. (lien entre une façade et son bord, affaibli)
- (para 2.2)(\vec{g}) : $\forall \vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{g})$, $\forall a \in A_{\vec{f}}$, $N(T)Q(a) \cap N(T)P(\vec{g}) = N(T)Q(\{a, pr_{\vec{g}}(a)\})$. (lien entre une façade et son bord)
- (para 2.1⁺)(\vec{g}) : $\forall \vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{g})$, $\forall a \in A_{\vec{f}}$, $Q(a) \cap P(\vec{g}) = \overline{Q(a + \vec{g})}$. (lien entre une façade et son bord, intermédiaire)
- (para 2.2⁺)(\vec{g}) : $\forall \vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{g})$, $\forall a \in A_{\vec{f}}$, $N(T)Q(a) \cap N(T)P(\vec{g}) = N(T)\overline{Q(a + \vec{g})}$. (lien entre une façade et son bord, renforcé)
- (para sph) : Pour tout $a \in A_{sph}$, $Q(a) = P(a)$. (valeur sur les points sphériques)
- (para dec)(\vec{C}, a) : $Q(a) = (Q(a) \cap U(\vec{C})) \cdot (Q(a) \cap U(-\vec{C})) \cdot N(a)$. (décomposition de $Q(a)$)
- (para 6)(Ω) : $Q(\Omega) = N_{\Omega} \cdot Q(Cl(\Omega))$. (intersections d'appartements)
- (para 5)(Ω) : $\bigcap_{a \in \Omega} (N(T) \cdot Q(a)) = N(T) \cdot Q(\Omega)$. (isomorphismes entre appartements)

Lorsque Q vérifie (para 2.1)(\vec{f}) (ou une de ses variantes) pour toute facette \vec{f} , on dira juste que Q vérifie (para 2.1). Lorsqu'elle vérifie (para 2.1)(\vec{f}) pour toute facette sphérique $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A})$, on dira qu'elle vérifie (para 2.1)(sph), lorsqu'elle vérifie (para 2.1)(\vec{m}) pour toute cloison \vec{m} de \vec{A} , on dira qu'elle vérifie (para 2.1)(cloison), etc...

Remarque:

- Dans (para 6)et (para 5), les inclusions $Q(\Omega) \supset Q(\text{Cl}(\Omega))$ et $\bigcap_{a \in \Omega} (N(T).Q(a)) \supset N(T).Q(\Omega)$ sont évidemment toujours vérifiées.
- Le but est de trouver une famille de parahoriques vérifiant les conditions ci-dessus, qui soit "la plus petite possible" pour que l'immeuble obtenu soit "le plus gros possible". Bien sûr, les compromis sont envisagés, on va considérer des familles de parahoriques vérifiant les conditions précédentes pour seulement certaines parties Ω , certaines facettes \vec{f} et certaines chambres \vec{C} . C'est déjà ce qui arrive dans [GR08], où on construit une "masure" (ce qui correspond à la façade principale de l'immeuble considéré ici) pour un groupe de Kac-Moody sur un corps local dont le corps résiduel contient \mathbb{C} , et où on définit un ensemble des parties Ω , appelées "parties qui ont un bon fixateur", sur lesquelles (para 6)et (para 5)sont vérifiées.

La suite de cette partie est destinée à étudier la famille minimale de parahoriques, et diverses implications ou conditions suffisantes pour les conditions (para x). Ce ne sera qu'en 3.8 que nous définirons notre principal exemple de famille de parahoriques.

3.2.2 La famille minimale de parahoriques

Dans ce paragraphe, on étudie le premier exemple de famille de parahoriques disponible : la famille minimale \mathcal{P} .

Pour tout $a \in A$, $P(a)$ doit contenir, à cause de (para 0.2 et 0.3), le groupe $\langle N(a), G(a) \rangle = \langle N(a), \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi\} \rangle$. Mais ce groupe vérifie (para 0.1 et 0.4), d'où :

$$\mathcal{P} = (P(a))_{a \in A} = (\langle N(a), G(a) \rangle)_{a \in A}$$

Soit $a \in A$, et \vec{f} la direction de la façade de a . Pour tout $\alpha \in \phi^u(\vec{f})$, on a $U_\alpha(a) = U_\alpha$, et pour $\alpha \in \phi \setminus \phi(\vec{f})$, $U_\alpha(a) = \{e\}$. Donc $G(a) = G(\phi(\vec{f}), a) = \langle \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi(\vec{f})\} \rangle$. Sachant que $P(a) \subset P(\vec{f}) = U(\vec{f}) \rtimes M_{\vec{A}}(\vec{f})$, le groupe $\langle N(a), G(\phi^m(\vec{f}), a) \rangle = \langle N(a), \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f})\} \rangle$, qui est inclus dans $M_{\vec{A}}(\vec{f})$, normalise $U(\vec{f}) \cap P(a)$, et on prouve :

$$P(a) = (U(\vec{f}) \cap P(a)) \rtimes \langle N(a), G(\phi^m(\vec{f}), a) \rangle$$

Comme $N(a)$ normalise à la fois $U(\vec{f}) \cap P(a)$ et $G(\phi^m(\vec{f}), a)$, on a aussi les décompositions :

$$\begin{aligned} P(a) &= (U(\vec{f}) \cap P(a)) \rtimes (N(a) \cdot G(\phi^m(\vec{f}), a)) \\ &= N(a) \cdot (U(\vec{f}) \cap P(a)) \cdot G(\phi^m(\vec{f}), a) \end{aligned}$$

Le groupe $N(a).G(\phi^m(\vec{f}), a) = M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(a)$ est le sous-groupe parahorique au point a de l'appartement $\overline{A_{\vec{f}}}$, pour la famille minimale de parahoriques dans le groupe $M_{\vec{A}}(\vec{f})$ muni de la donnée radicielle valuée $(M_{\vec{A}}(\vec{f}), (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi^m(\vec{f})})$.

Le groupe $U(\vec{f}) \cap P(a)$ est le sous-groupe distingué de $P(a)$ engendré par $G(\phi^u(\vec{f}))$, et plus précisément le plus petit sous-groupe de $P(a)$ contenant $G(\phi^u(\vec{f}))$ et normalisé par $G(\phi^m(\vec{f}), a)$. Il peut être strictement inclus dans $U(\vec{f})$.

Lorsque Ω est une partie de $A_{\vec{f}}$, par l'unicité dans la décomposition de Lévi $P(\vec{f}) = U(\vec{f}) \rtimes M_{\vec{A}}(\vec{f})$, on obtient :

$$P(\Omega) = (U(\vec{f}) \cap P(\Omega)) \rtimes (M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(\Omega)) .$$

Lorsque \vec{f} est sphérique, la théorie de Bruhat-Tits décrit bien les facteurs $M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(a)$, permettant de prouver la proposition suivante (qui est la raison d'être de la condition (para *sph*)) :

Proposition 3.2.2. *Soit \vec{f} une facette sphérique, et $\Omega \subset A_{\vec{f}}$.*

1. $P(\Omega) = (U(\vec{f}) \cap P(\Omega)) \rtimes (N(\Omega) \cdot G(\phi^m(\vec{f}), \Omega))$.

2. Pour tout $p \in P(\Omega)$, il existe une partie $\Omega_0 \subset \mathring{A}$ et $n \in N(\Omega)$ tels que $pr_{\vec{f}}(\Omega_0) = \Omega$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, np fixe $\overline{\omega + \vec{f}}$.

3. $P(\Omega) = N(\Omega).P(Cl_{A_{\vec{f}}}(\Omega))$.

4. Pour tout $a \in A_{\vec{f}}$, $U(\vec{f}) \cap P(a) = U(\vec{f})$. En conséquence, le point 1 devient :

$$P(\Omega) = U(\vec{f}) \times (N(\Omega) \cdot G(\phi^m(\vec{f}), \Omega)) .$$

5. $\bigcap_{\omega \in \Omega} N.P(\omega) = N.P(\Omega)$.

6. Pour tout $a \in A_{\vec{f}}$ et $\vec{g} \in \vec{f}^{\pm} \cap \vec{A}$, $P(a) \cap P(\vec{g}) = P(a + \vec{g})$.

7. Pour toute chambre \vec{C} de \vec{f}^{\pm} , $P(\Omega) = (P(\Omega) \cap U(\vec{C})) \cdot (P(\Omega) \cap U(-\vec{C})) \cdot N(\Omega)$, autrement dit, P vérifie (para dec)(Ω).

Remarque: Dans le point 2, np fixe une partie $\Omega' \subset A$ telle que $\Omega_0 + \vec{f} \subset \Omega' \subset \overline{\Omega_0 + \vec{f}}$. Sans aucune propriété topologique sur Ω_0 on ne peut savoir si $\Omega' = \Omega_0 + \vec{f}$.

Démonstration:

1. Par [BT72], $M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(\Omega) = N(\Omega) \cdot \langle \{U_{\alpha}(\Omega) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f})\} \rangle$. Le résultat découle alors de la décomposition de $P(\Omega)$ écrite plus haut.

2. Comme $N(\Omega)$ normalise $U(\vec{f}) \cap P(\Omega)$, le point précédent entraîne $P(\Omega) = N(\Omega) \cdot (U(\vec{f}) \cap P(\Omega)) \cdot G(\phi^m(\vec{f}), \Omega)$. Le groupe $G(\phi^m(\vec{f}), \Omega)$ fixe $\langle \Omega, \vec{f} \rangle_A$, il reste juste à étudier $U(\vec{f}) \cap P(\Omega)$. Pour tout $a \in \Omega$, la description de $U(\vec{f}) \cap P(a)$ comme le plus petit groupe contenant $G(\phi^u(\vec{f}))$ et normalisé par $G(\phi^m(\vec{f}), a)$ prouve que tout élément de $U(\vec{f}) \cap P(a)$ fixe un cône de la forme $\overline{\omega + \vec{f}}$ pour un $\omega \in \mathring{A}$ tel que $pr_{\vec{f}}(\omega) = a$. D'où le résultat.

3. Le groupe $P(\Omega)$ agit sur l'immeuble de Bruhat-Tits $\mathcal{I}_{\vec{f}}$ par automorphisme, et il fixe Ω . Il stabilise donc $Cl_{A_{\vec{f}}}(\Omega)$, et y agit via un élément de N . D'où $P(\Omega) = N(\Omega).P(Cl_{A_{\vec{f}}}(\Omega))$.

4. Tout élément u du groupe $U(\vec{f})$ fixe un cône de la forme $\overline{x + \vec{C}}$ avec $x \in \mathring{A}$ pour toute chambre \vec{C} de $\vec{f}^{\pm} \cap \vec{A}$. L'intersection avec $A_{\vec{f}}$ de la réunion de ces cônes contient une partie dont l'enclos dans $A_{\vec{f}}$ est $A_{\vec{f}}$. Ceci entraîne que u stabilise $A_{\vec{f}}$. Mais l'espace affine engendré par les $\overline{x + \vec{C}}$ fixés par u est $A_{\vec{f}}$. Donc au final, u fixe $A_{\vec{f}}$.

5. On calcule :

$$\begin{aligned} \bigcap_{\omega \in \Omega} N.P(\omega) &= N \cdot \bigcap_{\omega \in \Omega} N(\vec{f}).P(\omega) \\ &= N \cdot \bigcap_{\omega \in \Omega} U(\vec{f}) \cdot N(\vec{f}) \cdot \langle \{U_{\alpha}(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f})\} \rangle \\ &= N.U(\vec{f}) \cdot \bigcap_{\omega \in \Omega} N(\vec{f}) \cdot (M(\vec{f}) \cap P(a)) \\ &= N.U(\vec{f}) \cdot N(\vec{f}) \cdot (M(\vec{f}) \cap P(\Omega)) \\ &= N.P(\Omega) \end{aligned}$$

La première égalité est vraie car pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\omega) \subset P(\vec{f})$. La troisième vient de l'unicité de la décomposition de Lévi de $P(\vec{f})$, et la quatrième est le résultat classique dans les immeubles, voir [BT72].

6. Soit $g \in P(a) \cap P(\vec{g})$. Comme $P(a) = U(\vec{f}) \cdot (M(\vec{f}) \cap P(a))$, et $U(\vec{f}) \subset P(\overline{a + \vec{g}})$ grâce au point précédent, on peut supposer $g \in M(\vec{f}) \cap P(a) \cap P(\vec{g})$. Le résultat est alors classique, voir [BT72].

7. Le groupe $M(\vec{f}) \cap P(\Omega)$ admet par [BT72] une telle décomposition, elle s'écrit ici :

$$M(\vec{f}) \cap P(\Omega) = G(\phi(\vec{C}) \cap \phi^m(\vec{f}), \Omega) \cdot G(\phi(\vec{C}') \cap \phi^m(\vec{f}), \Omega) \cdot N(\Omega)$$

, où \vec{C}' est la chambre opposée à \vec{C} dans f^* . Mais $\phi(\vec{C}') \cap \phi^m(\vec{f}) = \phi(-\vec{C}) \cap \phi^m(\vec{f})$, d'où

$$M(\vec{f}) \cap P(\Omega) \subset G(\phi(\vec{C}), \Omega) \cdot G(\phi(-\vec{C}), \Omega) \cdot N(\Omega) \subset (P(\Omega) \cap U(\vec{C})) \cdot (P(\Omega) \cap U(-\vec{C})) \cdot N(\Omega) .$$

Comme $U(\vec{f}) \subset P(\Omega) \cap U(\vec{C})$ et $P(\Omega) = U(\vec{f}) \cdot (M(\vec{f}) \cap P(\Omega))$, on arrive au résultat annoncé.

□

Corollaire 3.2.3. *Les résultats de la proposition précédente sont vrais pour n'importe quelle famille Q de parahoriques vérifiant (para sph).*

Dans le cas où \mathcal{D} vient d'un groupe de Kac-Moody déployé, Guy Rousseau a prouvé que \mathcal{P} vérifie (para dec). Pour le cas d'un groupe de Kac-Moody sur un $\mathbb{C}((t))$, c'est [GR08] 3.4.1.

Proposition 3.2.4. *Si \mathcal{D} est la donnée radicielle valuée issue d'un groupe de Kac-Moody déployé G , alors la famille minimale de parahoriques attachée à \mathcal{D} vérifie (para dec).*

3.2.3 La condition (fonc)

Définition 3.2.5. *La donnée radicielle valuée $\mathcal{D} = (G, \Lambda, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ vérifie la condition (fonc) si pour tout groupe Δ tel que $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{R}$, il existe une donnée radicielle valuée notée $\mathcal{D}^\Delta = (G^\Delta, \Delta, (U_\alpha^\Delta, \varphi_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \phi})$ telle que, avec les notations évidentes :*

1. $G \subset G^\Delta$.
2. Pour tout $\alpha \in \phi$, $U_\alpha = U_\alpha^\Delta \cap G$.
3. Pour tout $\alpha \in \phi$, $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha^\Delta|_{U_\alpha}$.

Lorsqu'une donnée radicielle $\mathcal{D} = (G, \Lambda, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha)$ vérifie (fonc), et lorsque Δ est un groupe tel que $\Lambda \subset \Delta$, on notera $\mathcal{D}^\Delta, G^\Delta, U_\alpha^\Delta, N^\Delta, T^\Delta, \mathcal{P}^\Delta = (P^\Delta(a))_{a \in A}, \dots$ tous les objets obtenus grâce à la donnée radicielle valuée \mathcal{D}^Δ .

On notera Δ^A l'appartement pour \mathcal{D}^Δ , muni de ses murs, facettes et son action de N^Δ , défini à partir de l'espace affine \mathring{A} et du point de base o (c'est-à-dire les mêmes que pour A).

Proposition 3.2.6. *Un groupe de Kac-Moody G déployé sur un corps local \mathbb{K} vérifie toujours la condition (fonc).*

Démonstration: Lorsque G est un groupe de Kac-Moody déployé sur un corps \mathbb{K} , il s'agit en fait de la valeur en \mathbb{K} d'un foncteur \mathcal{G} des \mathbb{K} -algèbres vers les groupes munis d'une donnée radicielle de système de racine fixé, et pour toute \mathbb{K} -algèbre \mathbb{K}' , les sous-groupes radiciels de $\mathcal{G}(\mathbb{K}')$ sont isomorphes à $(\mathbb{K}', +)$. Étant donné Δ , il suffit donc de choisir une extension \mathbb{K}^Δ de \mathbb{K} ramifiée de sorte que $\varpi(\mathbb{K}^\Delta) = \Delta$, puis de prendre $G^\Delta = \mathcal{G}(\mathbb{K}^\Delta)$. Le lemme 8.4.4 de [Ré02] prouve que G^Δ est muni d'une donnée radicielle vérifiant le point 2 ci-dessus, les points 1 et 3 sont clairs. □

Remarque: Lorsque G n'est que presque déployé, il s'agit encore d'un foncteur des \mathbb{K} -algèbres vers les groupes munis d'une donnée radicielle, mais le système de racine varie, et les groupes radiciels ne sont plus isomorphes au groupe additif du corps. La condition (fonc) devrait cependant pouvoir être prouvée par descente, mais nous n'en aurons pas besoin.

Proposition 3.2.7. Soit \mathcal{D} une donnée radicielle vérifiant (fonc), soit Δ tel que $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{R}$. Alors :

1. $T = T^\Delta \cap G$, et $N^\Delta \cap G = N$.
2. L'action de N sur \vec{A} est la restriction de l'action de N^Δ . En particulier, pour toute facette \vec{f} de \vec{A} , $G \cap N^\Delta(\vec{f}) = N(\vec{f})$.
3. Pour tout $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A})$, $P^\Delta(\vec{f}) \cap G = P(\vec{f})$, puis $U(\vec{f}) = U^\Delta(\vec{f}) \cap G$, $M(\vec{f}) = M^\Delta(\vec{f}) \cap G$, et $N^\Delta.P^\Delta(\vec{f}) \cap G = N.P(\vec{f})$.
4. L'immeuble $\vec{I} = \vec{I}(\mathcal{D})$ s'injecte dans $\vec{I}^\Delta = \vec{I}(\mathcal{D}^\Delta)$, les appartements de ces deux immeubles sont isomorphes.
5. Pour tout $a \in A_{sph}$, $P(a) = P^\Delta(a) \cap G$.
6. $\vec{v} = \vec{v}^\Delta|_N$ et $v = v^\Delta|_N$, à condition bien sûr de choisir le même point de base o dans Y pour définir v et v^Δ . En particulier, pour tout $a \in A$, $N(a) = N^\Delta(a) \cap G$.
7. Lorsque $\Delta = \mathbb{R}$, tout point de A est un sommet spécial dans \vec{I}^Δ .

Démonstration:

1. On rappelle que par définition $T = \bigcap_{\alpha \in \phi} N_G(U_\alpha)$, où $N_G(U_\alpha)$ est le normalisateur de U_α . Soit $g \in G \cap T^\Delta$, alors pour tout $\alpha \in \phi$, $gU_\alpha g^{-1} \subset G \cap U_\alpha^\Delta = U_\alpha$. Donc $g \in T$.
Étudions $N^\Delta \cap G$. Le groupe N^Δ est engendré par T^Δ et par un $n(u)$, pour un $u \in U_\alpha^\Delta$ pour chaque $\alpha \in \phi$. On peut choisir $u \in U_\alpha$, il vient alors $N^\Delta = N.T^\Delta$. Pour conclure, $N^\Delta \cap G = N.T^\Delta \cap G = N.(T^\Delta \cap G) = N.T = N$.
2. L'action de N^Δ sur \vec{A} se fait via $W^\Delta = N^\Delta/T^\Delta$, et celle de N via $W = N/T$. Mais $N^\Delta = N.T^\Delta$ et $T^\Delta \cap N = T$, donc $W^\Delta = N/T = W$.
3. Soit \vec{f} une facette de \vec{A} et $g \in P^\Delta(\vec{f}) \cap G$. Soit \vec{C} une chambre de $\vec{f}^* \cap \vec{A}$, on notera $U^+ = U(\vec{C})$ et $\phi^+ = \phi(\vec{C})$. On rappelle la décomposition de Bruhat fine :

$$G = \bigsqcup_{n \in N} U^+.n.(U^+ \cap n^{-1}U^+n).$$

Soit $g = u_1 n u_2$ l'unique écriture de g selon cette décomposition.

La même décomposition pour $P^\Delta(\vec{f})$ donne :

$$P^\Delta(\vec{f}) = \bigsqcup_{n \in N^\Delta(\vec{f})} U^{\Delta+}.n.(U^{\Delta+} \cap n^{-1}U^{\Delta+}n).$$

Soit $g = u_1^\Delta n^\Delta u_2^\Delta$ la décomposition correspondante de g . Si $n \neq n^\Delta$, les cellules $U^{\Delta+}.n^\Delta.(U^{\Delta+} \cap n^{\Delta-1}U^{\Delta+}n^\Delta) \subset U^{\Delta+}n^\Delta U^{\Delta+}$ et $U^+.n.(U^+ \cap n^{-1}U^+n) \subset U^{\Delta+}n U^{\Delta+}$ sont disjointes. Donc $n = n^\Delta \in N \cap N^\Delta(\vec{f}) = N(\vec{f})$. Ensuite, l'unicité de l'écriture dans la cellule $U^{\Delta+}.n.(U^{\Delta+} \cap n^{-1}U^{\Delta+}n)$ entraîne $u_1 = u_1^\Delta \in U(\vec{C})$ et $u_2 = u_2^\Delta \in U(\vec{C})$. Ceci prouve que $g \in U^+N(\vec{f})U^+ \subset P(\vec{f})$.

Ensuite, l'unicité de l'écriture dans la décomposition de Lévi $P^\Delta(\vec{f}) = U^\Delta(\vec{f}) \rtimes M^\Delta(\vec{f})$, et les inclusions $U(\vec{f}) \subset U^\Delta(\vec{f})$ et $M(\vec{f}) \subset M^\Delta(\vec{f})$ entraînent les deux égalités $U(\vec{f}) = U^\Delta(\vec{f}) \cap G$, $M(\vec{f}) = M^\Delta(\vec{f}) \cap G$.

Soit enfin $g \in G \cap N^\Delta.P^\Delta(\vec{f})$. Comme N et N^Δ induisent le même groupe de transformations sur \vec{A} (c'est juste le groupe de Weyl associé au système de racines ϕ), il existe $n \in N$ tel que $ng \in P^\Delta(\vec{f})$. Alors $ng \in P^\Delta(\vec{f}) \cap G = P(\vec{f})$.

4. Par construction, $\vec{I} = G \times \vec{A} / \sim$ où \sim est la relation d'équivalence $(g, a) \sim (h, b) \Leftrightarrow \exists n \in N$ tq $b = na$ et $g^{-1}bn \in P(\vec{f})$, où \vec{f} est la facette contenant a . Pour \vec{I} et \vec{I}^Δ , les deux appartements de référence sont les mêmes, et le point précédent permet facilement de vérifier que \vec{I} s'injecte dans \vec{I}^Δ .

5. Soit \vec{f} une facette sphérique, $a \in A_{\vec{f}}$ et $p \in P^\Delta(a) \cap G$. Alors $p \in U^\Delta(\vec{f}) \rtimes M^\Delta(a) \cap G = (U^\Delta(\vec{f}) \cap G) \rtimes (M^\Delta(a) \cap G)$ grâce au point 2 et à l'unicité dans la décomposition de Lévi de $P^\Delta(\vec{f})$. Le groupe $M^\Delta(a) \cap G$ est le fixateur dans G du point a de l'immeuble de Bruhat-Tits de la donnée radicielle $(M^\Delta(\vec{f}), (U_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \phi^m(\vec{f})})$. D'après [BT72] proposition 9.1.17, il s'agit de $M(a)$. D'autre part, il a déjà été vu que $U^\Delta(\vec{f}) \cap G = U(\vec{f})$.
6. La relation $\vec{v} = \vec{v}_{|N}^\Delta$ est une reformulation de 2. Comme le point de base o est le même dans A et A^Δ , les action ν et ν^Δ coïncident sur N_o . Il reste à étudier l'action de T . Rappelons que pour $t \in T$, $\nu(t)$ est par définition la translation de Y de vecteur \vec{v}_t tel que $\alpha(\vec{v}_t) = \varphi_\alpha(u) - \varphi_\alpha(tut^{-1})$ pour tout $\alpha \in \phi$ et $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$. L'égalité de $\nu(t)$ et de $\nu^\Delta(t)$ est alors conséquence du troisième point de la définition de la condition (fonc).
7. Clair.

□

Remarque: C'est le dernier point qui justifie l'étude de cette condition (fonc). Par exemple, lorsque x est un sommet spécial dans A^Δ , alors $N^\Delta.Q^\Delta(x) = T^\Delta.Q^\Delta(x)$ pour toute famille de parahoriques Q^Δ pour \mathcal{D}^Δ .

Lorsqu'une donnée radicielle valuée \mathcal{D} vérifie (fonc), il sera utile, étant donnée une famille de parahoriques Q pour \mathcal{D} de savoir si Q se comporte bien vis-à-vis des extensions \mathcal{D}^Δ données par (fonc). Ceci justifie d'introduire encore une définition :

Définitions 3.2.8. Soit Q une famille de parahoriques pour une donnée radicielle valuée \mathcal{D} .

- Pour toute partie Ω de A , on dira que Q vérifie la condition (fonc)(Ω) si \mathcal{D} vérifie (fonc) et si pour tout Δ tel que $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{R}$, il existe une famille de parahoriques Q^Δ pour \mathcal{D}^Δ telle que $\forall a \in \Omega, Q^\Delta(a) \cap G = Q(a)$.
- On dira que Q vérifie un ensemble de conditions (para x_1, \dots, x_k) "fonctoriellement" si \mathcal{D} vérifie (fonc) et si pour tout groupe Δ avec $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{R}$, il existe une famille de parahoriques Q^Δ pour \mathcal{D}^Δ , contenant Q , et vérifiant (para x_1, \dots, x_k).
- On dira que Q vérifie (fonc)(Ω) et un ensemble de conditions (para x_1, \dots, x_k) "fonctoriellement" si \mathcal{D} vérifie (fonc) et si pour tout groupe Δ avec $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{R}$, il existe une famille de parahoriques Q^Δ pour \mathcal{D}^Δ , vérifiant (para x_1, \dots, x_k), et telle que $\forall a \in \Omega, Q^\Delta(a) \cap G = Q(a)$.
- Les notations (fonc) et (fonc)(sph) désigneront respectivement (fonc)(A) et (fonc)(A_{sph}).

Nous avons vu par exemple que dès que \mathcal{D} vérifie (fonc), alors la famille minimale de parahoriques associée vérifie (fonc)(sph). De plus, toutes les propriétés que nous prouverons être vérifiées par la famille minimale de parahorique \mathcal{P} le seront en fait fonctoriellement. En particulier :

Proposition 3.2.9. Si \mathcal{D} est la donnée radicielle valuée attachée à un groupe de Kac-Moody G , alors la famille minimale de parahoriques \mathcal{P} vérifie (para dec)fonctoriellement.

3.2.4 Relations entre les conditions (para x)

Nous étudions les relations les plus directes entre les différentes conditions introduites en 3.2.1 et 3.2.3. La philosophie est la suivante : les conditions (para inj), (para sph) et les variantes de (para 2.1) sont celles qui seront utilisées pour construire l'immeuble. Elle entraînent notamment certains cas de (para 5) et (para 6), qui elles sont équivalentes aux propriétés d'incidences classiques attendues d'un immeuble. Mais surtout, elles ont déjà une interprétation géométrique, et ceci permettra de les descendre d'un groupe de Kac-Moody déployé à un groupe presque déployé.

Les conditions (para dec) et (fonc) sont plutôt des intermédiaires techniques, vérifiés par les groupes de Kac-Moody déployés et qui entraînent les conditions précédentes. On ne s'en préoccupera a priori plus lors de l'étude d'un groupe presque déployé.

On étudiera les relations un peu moins directes entre ces conditions après avoir défini la mesure $I(\mathcal{D}, \mathcal{Q})$, car certaines implications sont plus facilement prouvées grâce à cet outil géométrique.

Proposition 3.2.10. *Soit \mathcal{Q} une famille de parahoriques vérifiant (para dec)(décomposition de $Q(a)$) fonctoriellement. Alors pour tout point a et toute facette sphérique \vec{f} , $Q(a) \cap P(\vec{f}) = Q(a) \cap P(pr_{\vec{f}}(a))$.*

En particulier, \mathcal{Q} vérifie fonctoriellement (para sph)et (para 2.1)(sph).

Démonstration: Comme \vec{f} est sphérique, on a la décomposition de Bruhat de $M_{\vec{f}}(\vec{f})$:

$$\begin{aligned} P(\vec{f}) &= U(\vec{f}) \rtimes M_{\vec{f}}(\vec{f}) \\ &= U(\vec{f}) \rtimes (G(\phi^m(\vec{f}), a) \cdot N_{\vec{f}} \cdot G(\phi^m(\vec{f}), a)) \\ &= G(\phi^m(\vec{f}), a) \cdot U(\vec{f}) \cdot N_{\vec{f}} \cdot G(\phi^m(\vec{f}), a) \\ &\subset P(\langle a, \vec{f} \rangle_A) \cdot U(\vec{f}) \cdot N_{\vec{f}} \cdot P(\langle a, \vec{f} \rangle_A) \end{aligned}$$

Soit $g \in Q(a) \cap P(\vec{f})$, nous pouvons donc supposer $g \in Q(a) \cap (U(\vec{f}) \rtimes N_{\vec{f}})$.

Dans un premier temps, supposons que a est un sommet spécial. Alors quitte à multiplier par un élément de $N(a + \vec{f})$, on peut supposer $g \in Q(a) \cap (U(\vec{f}) \rtimes T)$. Soit $u \in U(\vec{f}), t \in T$ tels que $g = u.t$. Par ailleurs, soit \vec{C} une chambre de $\vec{f} \cap \vec{A}$, et soient $u^+ \in U(\vec{C}) \cap Q(a)$, $u^- \in U(-\vec{C}) \cap Q(a)$ et $n \in N_a$ tels que $g = u^+ u^- n$. Alors $g = u^+ n n^{-1} u^- n = u.t$, et par l'unicité modulo T du facteur dans N dans la décomposition de Birkhoff pour les chambres \vec{C} et $-n^{-1}\vec{C}$, on obtient que $n.T = T$, donc g est dans la double classe $U^+ T U^-$. Enfin, par unicité d'écriture dans cette double classe, on obtient $u^+ = u \in U(\vec{f}) \cap Q(a)$, $n = t \in T \cap N(a)$ et $n^{-1} u^- n = e$ d'où $u^- = e$. L'élément $t \in N(a) \cap T$ fixe a , sa façade et son adhérence, et $u \in U(\vec{f}) \cap Q(a)$ fixe a et $A_{\vec{f}}$ en entier. Donc $g \in Q(a) \cap P(pr_{\vec{f}}(a))$.

Lorsque a n'est pas un sommet spécial de A , il l'est dans un certain A^Δ grâce à (fonc). Le paragraphe précédent entraîne alors que $Q(a) \cap P(\vec{f}) \subset Q(a) \cap P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a))$. Mais $G \cap P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a)) = P(pr_{\vec{f}}(a))$ d'après 3.2.7. \square

Proposition 3.2.11. *Toute famille \mathcal{Q} de parahoriques vérifiant fonctoriellement (para sph)et (para 2.1)(\vec{m}) pour toute cloison \vec{m} de \vec{A} vérifie (para in j).*

Démonstration:

Soit $a \in A$ et $g \in N \cap Q(a)$. Soit Δ tel que a est un sommet spécial dans A^Δ , soient $\mathcal{D}^\Delta = (G^\Delta, (U_\alpha^\Delta)), N^\Delta, T^\Delta \dots$ les groupes donnés par la condition (fonc).

Il existe $n \in N^\Delta(a)$ tel que $ng \in T^\Delta \cap n.Q(a) \subset T^\Delta \cap Q^\Delta(a)$. Pour toute cloison \vec{m} de \vec{A} , Q^Δ vérifie (para 2.1)(\vec{m}) d'où $ng \in T^\Delta \cap Q^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$. Comme \vec{m} est sphérique, par (para sph)on obtient $ng \in T^\Delta \cap P^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$ ce qui vaut $T^\Delta \cap U^\Delta(\vec{m}) \rtimes M^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$ par la proposition 3.2.2. Ici, $M^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$ est le sous-groupe parahorique au sens de Bruhat-Tits au point $pr_{\vec{f}}(a)$ pour la donnée radicielle finie $(M^\Delta(\vec{m}), (U_\alpha^\Delta, \varphi_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \phi^m(\vec{m})})$. Comme $T^\Delta \subset M^\Delta(\vec{m})$ on obtient $ng \in T^\Delta \cap M^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$ et par [BT72], ceci est le fixateur dans $M^\Delta(\vec{m})$ de $A_{\vec{m}}$, donc l'ensemble des $t \in T^\Delta$ induisant une translation de vecteur $\vec{v}_t \in \text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{m})$.

Ceci étant pour chaque cloison \vec{m} de \vec{A} , et comme l'intersection des murs contenant ces cloisons est triviale car \vec{A} est essentiel, on voit que ng induit une translation triviale, autrement dit, $ng \in H^\Delta$ puis $g \in N^\Delta(a) \cap G$. Or ceci vaut $N(a)$ par 3.2.7. \square

Remarque: L'hypothèse la plus précise pour ce théorème est en fait " \mathcal{Q} vérifie fonctoriellement (para sph)et (para 2.1)(\vec{f}) pour \vec{f} dans une famille \mathcal{F} de facettes sphériques de \vec{A} telle que $\bigcap_{\vec{f} \in \mathcal{F}} \text{Vect}(\vec{f}) = \{0\}$. Mais en général, nous appliquerons ce résultat à des familles vérifiant (para 2.1)(sph), ce qui entraîne bien (para 2.1)(\vec{m}) pour toute

cloison \vec{m} .

En assemblant les deux propositions précédentes, on trouve :

Corollaire 3.2.12. *Toute famille vérifiant fonctoriellement (para dec) vérifie fonctoriellement (para inj), (para sph) et (para 2.1)(sph).*

C'est en particulier le cas, lorsque \mathcal{D} est la donnée radicielle valuée issue d'un groupe de Kac-Moody G déployé, pour la famille minimale de parahoriques \mathcal{P} .

3.3 Définition de la mesure complète

3.3.1 La relation d'équivalence

Soit Q une famille de sous groupes de G vérifiant (para 0.1, 0.2 et 0.3).

Définition 3.3.1. *Soit \sim_Q la relation sur $G \times A$ définie par :*

$$(g, a) \sim_Q (h, b) \Leftrightarrow \exists n \in N(T) \text{ tq } b = na \text{ et } g^{-1}hn \in Q(a)$$

Proposition 3.3.2. *La relation \sim_Q est une relation d'équivalence si et seulement si Q vérifie (para 0.4), c'est-à-dire si et seulement si Q est une famille de parahoriques.*

Démonstration:

Déjà, \sim_Q est toujours réflexive.

Supposons que Q vérifie (para 0.4).

Commençons par montrer que \sim_Q est symétrique. Soient (g, a) et (h, b) tels que $(g, a) \sim_Q (h, b)$. Soit $n \in N(T)$ tel que $b = na$ et $g^{-1}hn \in Q(a)$. Alors $a = n^{-1}b$ et $h^{-1}gn^{-1} = n(g^{-1}hn)^{-1}n^{-1} \in nQ(a)n^{-1} = Q(b)$.

Pour la transitivité, soient (g, a) , (h, b) et (k, c) tels que $(g, a) \sim_Q (h, b) \sim_Q (k, c)$. Soit $n \in N(T)$ tel que $b = na$ et $g^{-1}hn \in Q(a)$, et soit $m \in N(T)$ tel que $c = mb$ et $h^{-1}km \in Q(b)$.

Alors $c = mna$ et $g^{-1}kmn = (g^{-1}hn)n^{-1}(h^{-1}km)n \in Q(a).n^{-1}Q(b)n = Q(a)$.

Réciproquement, supposons \sim_Q une relation d'équivalence. Soit $n \in N(T)$ et $a \in A(T)$. soit $q \in Q(na)$, alors $(1, na) \sim_Q (q^{-1}n, a)$. D'où par symétrie, $(q^{-1}n, a) \sim_Q (1, na)$, donc il existe $n' \in N(T)$ tel que $na = n'a$ et $n^{-1}qn' \in Q(a)$. Alors $n^{-1}n' \in \text{Fix}_{N(T)}(a) \subset Q(a)$ par (para 0.2). D'où $n^{-1}qn \in Q(a)$. Nous avons montré que $n^{-1}Q(na)n \subset Q(a)$. L'inclusion inverse s'obtient en appliquant ce résultat à n^{-1} . \square

3.3.2 Définition

On fixe un tore maximal T_0 , et une famille de parahoriques Q sur $A(T_0)$. On va construire l'objet immobilier $I(Q)$ en se basant sur l'appartement $A(T_0)$, on vérifiera en 3.10 que la construction est indépendante du choix de T_0 .

Définition 3.3.3. *Soit $I_Q = G \times A(T_0) / \sim_Q$. C'est la mesure complète associée à (\mathcal{D}, Q) . Lorsque le contexte sera clair, on notera juste ga pour la classe de (g, a) dans I_Q . Sinon on la notera $[g, a]_Q$.*

On définit une action de G sur I par $g'. [g, a] = [g'g, a]$.

Soit $t_{T_0, Q} : \begin{array}{ccc} A(T_0) & \rightarrow & I_Q \\ a & \mapsto & [1, a]_Q \end{array}$. C'est l'injection canonique de $A(T_0)$ dans I_Q . Son image est l'appartement de $I(Q)$ associé à T_0 . Les images de ce dernier par les éléments de G sont les appartements de $I(Q)$.

Remarque: Lorsque G est un groupe réductif, et $Q = \mathcal{P}$, \mathcal{I} est le compactifié polyédral maximal de l'immeuble de Bruhat-Tits de G , la partie $G.\dot{A}(T_0)$ étant l'immeuble (essentiel) de Bruhat-Tits lui-même. En particulier, $G.\dot{A}(T_0)$ est un immeuble affine.

Proposition 3.3.4. *La fonction $\iota_{T_0, Q}$ est injective si et seulement si Q vérifie (para in j).*

Dans ce cas, on identifie $A(T_0)$ à $\iota_{T_0, Q}(A(T_0))$.

Démonstration:

Si Q vérifie (para in j), soient $a, b \in A(T_0)$ tels que $(1, a) \sim_Q (1, b)$. Alors il existe $n \in N(T_0)$ tel que $b = na$ et $n \in Q(a)$. Donc $n \in Q(a) \cap N(T_0) = \text{Fix}_{N(T_0)}(a)$, donc $a = b$.

Réciproquement, supposons ι_Q injective. L'inclusion $\text{Fix}_{N(T_0)}(a) \subset Q(a) \cap N(T_0)$ est vraie par (para 0.2). Pour l'autre inclusion, soit $q \in Q(a) \cap N(T_0)$. Alors $qa \in A(T_0)$ et $(1, a) \sim_Q (1, qa)$ d'où par injectivité de ι_Q , $a = qa$ et $q \in \text{Fix}(a)$. \square

On suppose désormais que Q vérifie (para in j).

Proposition 3.3.5. *Le stabilisateur de $A(T_0)$ dans G est $N(T_0)$.*

Démonstration: L'inclusion $N(T_0) \subset \text{Stab}_G(A(T_0))$ est vraie par la définition de \sim_Q . Réciproquement, soit $g \in G$ tel que $g.A(T_0) = A(T_0)$. Soit $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T_0))$, soit $a \in A_{\vec{f}}$. Alors $g.a \in A(T)$ et par la définition de \sim_Q , il existe $n \in N(T_0)$ tel que $g.a = n.a$. Donc $g \in n.P(a) \subset N(T_0).P(\vec{f})$. Ceci étant valable pour toute facette $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T_0))$, on obtient $g \in \bigcap_{\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T_0))} N(T_0).P(\vec{f}) = N(T_0).P(\vec{A}(T_0)) = N(T_0).T_0 = N(T_0)$. \square

Les deux propositions précédentes permettent de définir la structure des appartements de $\mathcal{I}(Q)$:

Définition 3.3.6. *La structure d'appartement sur $A(T_0)$ (c'est-à-dire les façades, les murs, les facettes, et la structure affine sur chaque façade) est celle qui fait de $\iota_{T_0, Q}$ un isomorphisme d'appartements. On munit $A(T_0)$ de l'action de $N(T_0)$ qui fait de $\iota_{T_0, Q}$ un isomorphisme $N(T_0)$ -équivariant.*

Pour tout autre appartement $g.A(T_0)$, la structure d'appartement sur $g.A(T_0)$ est celle qui fait de $g|_{A_0}$ un isomorphisme d'appartements. On munit $g.A(T_0)$ de l'action de $N(gT_0g^{-1}) = gN(T_0)g^{-1}$ définie par $n.(g.a) = g.((g^{-1}n)g.a)$ pour $n \in N(gT_0g^{-1})$ et $a \in A(T_0)$. Ces deux définitions sont indépendantes du choix de g d'après la proposition précédente. L'appartement $g.A(T_0)$ sera noté $A(gT_0g^{-1})$.

Voici quelques propriétés immédiates de \mathcal{I} :

Proposition 3.3.7.

1. *Le fixateur d'un point $x \in A(T_0)$ est $Q(x)$. Plus généralement, pour un appartement $B = g.A(T_0) = A(gT_0g^{-1})$, le fixateur d'un point $x \in B$ est $gQ(g^{-1}x)g^{-1}$.*
2. *Soit T un tore maximal, $a \in A(T)$, $g \in G$. Si $g.a \in A(T)$, alors il existe $n \in N(T)$ tel que $g.a = n.a$.*
3. *Pour tout $x \in \mathcal{I}$, le groupe $\text{Fix}_G(x)$ est transitif sur les appartements contenant x .*

Démonstration:

1. Si $(g, x) \sim_Q x$, alors il existe $n \in N(T_0)$ tel que $nx = x$ et $g^{-1}n \in Q(x)$. Alors $n \in \text{Fix}_{N(T_0)}(x) \subset Q(x)$ par (para 0.2), et donc $g \in Q(x)$. La réciproque est claire, le cas général aussi.
2. Dans $A(T_0)$, c'est la définition de \sim_Q . Le cas plus général s'y ramène car $hN(T_0)h^{-1} = N(hT_0h^{-1})$.
3. Soient A et $g.A$ deux appartements contenant x . On peut supposer $A = A(T_0)$. Alors $g^{-1}x \in A(T_0)$, et par le point précédent, il existe $n \in N(T_0)$ tel que $g^{-1}x = nx$. Alors $gn \in \text{Fix}_G(x)$, et $g.A(T_0) = gnA(T_0)$.

□

On prolonge naturellement la définition des sous-groupes parahoriques, de manière cohérente avec les notations $Q(x)$, $Q(\Omega)$ déjà introduites :

Définition 3.3.8. *Pour tout $x \in I$, on note $Q(x) = \text{Fix}_G(x)$. Pour toute partie Ω de I , on note $Q(\Omega) = \text{Fix}_G(\Omega)$.*

Remarques:

- L'action ainsi définie de $N(T)$ sur $A(T)$ coïncide avec l'action induite par celle de G sur I .
- On a ainsi défini $A(T)$, pour tout tore maximal T de G , comme un appartement inclus dans $I(Q)$. Mais cet appartement est isomorphe à l'appartement $A(T)$ défini dans la partie précédente, via $g|_{A(T_0)} \circ \iota_{T_0, Q}$ pour tout $g \in G$ tel que $T = gT_0g^{-1}$.
- Si A est un appartement, si $a \in A$ et $\vec{v} \in \vec{A}$, alors le point $a +_A \vec{v} \in A$ est bien défini par la formule $a +_A \vec{v} = g(g^{-1}(a) +_{A(T_0)} g^{-1}(\vec{v}))$, où $g \in G$ est tel que $g.A(T_0) = A$. Mais ceci dépend a priori de l'appartement A contenant a et tel que $\vec{v} \in \vec{A}$ considéré. On ne peut donc pas noter ce point $a + \vec{v}$. En terme de condition sur la famille Q , le point $a + \vec{v}$ est bien défini si $N.Q(g^{-1}a) \cap N.P(g^{-1}\vec{v}) \subset N.(Q(\{g^{-1}a, g^{-1}(a + \vec{v})\}) \cap P(g^{-1}\vec{v}))$ (où l'addition est faite dans $A(T_0)$). Ceci est une conséquence de (para 2.2⁺), voir la section 3.6.2.
- Il en va de même pour les projections : si $a \in A$ et $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A})$, on peut noter $pr_{A, \vec{f}}(a)$ la projection de a sur la façade $A_{\vec{f}}$ dans l'appartement A . Le projeté $pr_{\vec{f}}(a)$ est bien défini si $N.Q(a) \cap N.P(\vec{f}) \subset N.Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$, en particulier si Q vérifie (para 2.2)(\vec{f}). Voir 3.6.1.
- Pour l'enclos enfin, si Ω est une partie d'un appartement A , on notera $Cl_A(\Omega)$ l'enclos de Ω dans A . Ceci sera indépendant de A si Q vérifie (para 5)(Ω) et (para 6)(Ω).

Enfin, on montre une caractérisation géométrique des sous-groupes radiciels valués $U_{\alpha, k}$.

Proposition 3.3.9. *Soit T un tore maximal, $\alpha \in \phi(T)$, $u \in U_{\alpha}$. Alors l'ensemble des points fixes de u dans $A(T)$ est précisément $\mathcal{D}(\alpha, \varphi_{\alpha}(u))$.*

Démonstration:

Notons $k = \varphi_{\alpha}(u)$. Par (para 0.3) et comme pour tout $a \in A$, $Q(a) = \text{Fix}(a)$, $U_{\alpha, k}$ fixe $\mathcal{D}(\alpha, k)$.

Supposons que u fixe un point $x \in \mathcal{D}(-\alpha, -k) \setminus M(\alpha, k)$. Soient $u', u'' \in U_{-\alpha}$ tels que $n(u) = u'uu''$. D'après 3.1.14, $\varphi_{-\alpha}(u') = \varphi_{-\alpha}(u'') = -k$ donc u' et u'' fixent x . Ainsi $n(u) \in Q(x)$. Or $n(u)$ induit la réflexion selon le mur $M(\alpha, k)$ qui ne contient pas x . Donc $n(u) \in (Q(x) \cap N) \setminus N(x)$, ceci contredit (para in j). □

Définition 3.3.10. *Soit T un tore maximal, $\alpha \in \phi(T)$, Ω une partie de $A(T)$. On note $U_{\alpha}(\Omega) = \{u \in U_{\alpha} \mid \Omega \subset \mathcal{D}(\alpha, \varphi_{\alpha}(u))\}$.*

Si Ω est un filtre dans $A(T)$, on pose $U_{\alpha}(\Omega) = \bigcup_{\Omega' \in \Omega} U_{\alpha}(\Omega')$.

Si ψ est une partie de $\phi(T)$ et Ω un ensemble ou un filtre dans $A(T)$, on pose $G(\psi, \Omega) = \langle \{U_{\alpha}(\Omega) \mid \alpha \in \psi\} \rangle$.

Enfin, la notation $G(\Omega)$ désignera $G(\phi(T), \Omega)$.

Par exemple, $U_{\alpha}(A(T)) = \{e\}$ et $U_{\alpha}(\emptyset) = U_{\alpha}$.

On pense au groupe $N(\Omega).G(\Omega)$ comme au plus grand groupe qui fixe de manière évidente Ω . Autre exemple : le groupe $G(\phi^u(\vec{f}), \Omega)$ est le plus grand groupe inclus de manière évidente dans $U(\vec{f}) \cap Q(\Omega)$.

Corollaire 3.3.11. *Pour $\alpha \in \phi(T)$ et $x \in A(T)$, $U_{\alpha}(x) = \{u \in U_{\alpha} \mid u \text{ fixe } x\}$.*

Corollaire 3.3.12. Soit $\alpha \in \phi(T)$, $x \in A(T)$, et $g \in G$. Alors $gU_\alpha(x)g^{-1} = U_{g\alpha}(g.x)$.

Proposition 3.3.13. Soient Q et R deux familles de parahoriques telles que pour tout $a \in A(T_0)$, $Q(a) \subset Q'(a)$. Alors il existe une projection naturelle G équivariante $\phi : \mathcal{I}(Q) \rightarrow \mathcal{I}(R)$, $[g, a]_Q \mapsto [g, a]_R$. En particulier, l'immeuble $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ correspondant à la famille minimale de parahoriques se projette sur tous les autres immeubles de G .

Démonstration: Si $(g, a) \sim_Q (h, b)$, alors il existe $n \in N$ tel que $b = na$ et $g^{-1}hn \in Q(a)$. Comme $Q(a) \subset R(a)$, ceci entraîne $(g, a) \sim_R (h, b)$. Donc ϕ est bien définie. Le reste est évident. \square

3.3.3 Façades d'immeuble

Rappelons que, par définition, les façades d'appartements dans \mathcal{I} sont toutes les parties de la forme $g.(A_{0\vec{f}})$, avec $g \in G$ et $\vec{f} \in \mathcal{F}(A_0)$.

Lemme 3.3.14. Soient $\mathfrak{f} = (hA_0)_{h\vec{f}}$ et $\mathfrak{e} = (gA_0)_{g\vec{e}}$ deux façades d'appartements. Si $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{e} \neq \emptyset$, alors $h\vec{f} = g\vec{e}$.

Preuve du lemme: On peut supposer $h = e$. Soit $a \in A_{0\vec{f}} \cap (gA_0)_{g\vec{e}}$. Alors $g^{-1}a \in A_{0\vec{e}}$ donc il existe $n \in N$ tel que $gn \in Q(a)$. En particulier, $gn \in P(\vec{f})$ donc $g^{-1}\vec{f} = n\vec{e}$, et d'autre part $g^{-1}a = na$ d'où $n.\vec{f} = \vec{e}$. Au final, $g^{-1}\vec{f} = \vec{e}$. \square

En conséquence de ceci, la direction d'une façade d'appartement dans \mathcal{I} est bien définie :

Définition 3.3.15. Soit $\mathfrak{f} = g.(A_{0\vec{f}})$ une façade d'appartement, alors la facette vectorielle $g.\vec{f}$ est appelée la direction de \mathfrak{f} .

La réunion de toutes les façades d'appartement dirigées par une facette vectorielle \vec{f} est appelée la façade de \mathcal{I} de direction \vec{f} . On la note $\mathcal{I}_{\vec{f}}$.

Proposition 3.3.16. Les façades de \mathcal{I} forment une partition de \mathcal{I} . De plus, l'application $\vec{f} \mapsto \mathcal{I}_{\vec{f}}$ est une bijection G -équivariante entre les facettes de $\vec{\mathcal{I}}$ et les façades de \mathcal{I} . En conséquence, le stabilisateur dans G de la façade $\mathcal{I}_{\vec{f}}$ est $P(\vec{f})$.

Démonstration: Le lemme prouve que deux façades sont disjointes ou égales. De plus, A_0 est la réunion de ses façades, donc $\mathcal{I} = G.A_0$ est la réunion de ses façades d'appartement, et donc de ses façades d'immeuble.

L'application $\vec{f} \mapsto \mathcal{I}_{\vec{f}}$ est clairement surjective et G -équivariante. Si $\mathcal{I}_{\vec{f}} = \mathcal{I}_{\vec{g}}$, soit \mathfrak{f} une façade d'appartement de direction \vec{f} et $a \in \mathfrak{f}$. Par hypothèse, il existe g de direction \vec{g} contenant a . Le lemme entraîne alors $\vec{f} = \vec{g}$. \square

Proposition 3.3.17. Si \vec{f} est une facette sphérique de $\vec{\mathcal{I}}$, et si Q vérifie (para inj), la façade $\mathcal{I}_{\vec{f}}$ est l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe $M_{\vec{A}}(\vec{f})$, pour tout appartement \vec{A} contenant \vec{f} .

Pour une facette \vec{f} générale, la façade fermée $\overline{\mathcal{I}_{\vec{f}}} := \bigcup_{\vec{g} \in \vec{f}^*} \mathcal{I}_{\vec{g}}$ est la mesure complète pour la donnée radicielle valuée $(M(\vec{f}), (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi^m(\vec{f})})$ avec la famille de parahorique Q restreinte à $\overline{\vec{A}_{\vec{f}}}$.

Remarque: Le groupe $P(\vec{f}) = U(\vec{f}) \rtimes M(\vec{f})$, et pas seulement $M(\vec{f})$, agit sur $\mathcal{I}_{\vec{f}}$. Dans le cas où \vec{f} est sphérique, le facteur $U(\vec{f})$ agit trivialement, d'après 3.2.2. Dans le cas général, $U(\vec{f})$ agit trivialement sur $A_{\vec{f}}$ au moins si Q vérifie (para 2.1⁺)(\vec{C}) pour toute chambre \vec{C} .

3.4 Décomposition d'Iwasawa

On prouve ici la décomposition d'Iwasawa $G = P(\vec{C}) \cdot N(T) \cdot G(F)$, valable pour toute chambre \vec{C} de $\vec{A}(T)$ et pour toute facette $F \subset A$. Rappelons que selon nos notations, le groupe $G(F)$ est défini par $G(F) = \langle \{U_\alpha(F) \mid \alpha \in \phi(T)\} \rangle$, avec $U_\alpha(F) := \{u_\alpha(k) \mid k \in \mathbb{K} \text{ et } F \subset \mathcal{D}(\alpha, \omega(k))\}$. Pour toute famille de parahorique Q , on a $G(F) \subset Q(F)$, donc la décomposition d'Iwasawa implique $G = P(\vec{f}) \cdot N(T) \cdot Q(F)$, pour toute facette \vec{f} de $\vec{A}(T)$ et F de $A(T)$.

3.4.1 La décomposition

Lemme 3.4.1. *Soit \vec{C} une chambre de $\vec{A}(T)$, soit $\alpha \in \phi(T)$ qui s'annule sur une cloison \vec{m} de \vec{C} . Autrement dit, α est une racine simple de $\phi(\vec{C})$. Alors :*

$$U(\vec{C}) = U(\vec{m}) \rtimes U_\alpha$$

Remarque: Pour une chambre \vec{C} , $U(\vec{C}) = G(\phi(\vec{C}))$.

Preuve du lemme:

Le groupe U_α fixe la cloison \vec{m} donc normalise $U(\vec{m})$. Soit $u \in U_\alpha \cap U(\vec{m})$, alors u fixe les deux chambres de \vec{A} qui bordent \vec{m} , et $u \in U_\alpha$, ceci entraîne $u = e$. Ainsi le groupe engendré par U_α et $U(\vec{m})$ est bien un produit semi-direct. Il est inclus dans $U(\vec{C})$ car U_α tout comme $U(\vec{m})$ le sont ($U(\vec{m}) = U(\vec{C}) \cap U(r_{\vec{m}} \cdot \vec{C})$ si $r_{\vec{m}}$ est la réflexion dans \vec{A} par rapport à \vec{m}). Enfin, pour toute racine $\beta \in \phi(\vec{C})$, on a soit $\beta = \alpha$, soit $\beta \in \phi^u(\vec{m})$, et dans les deux cas $U_\beta \subset U(\vec{m}) \rtimes U_\alpha$. D'où le résultat. \square

Proposition 3.4.2. *(Décomposition d'Iwasawa) Soit \vec{C} une chambre de $\vec{A}(T)$ et F une facette de $A(T)$. Alors :*

$$G = U(\vec{C}) \cdot N(T) \cdot G(F).$$

Démonstration:

La preuve est classique. Il suffit de prouver que l'ensemble $Z := U(\vec{C}) \cdot N(T) \cdot G(F)$ est stable par multiplication à gauche par n'importe quel élément de G . Or G est engendré par T , par les U_α avec $\alpha \in \phi(\vec{C})$ et par les U_β avec β une racine simple de $\phi(-\vec{C})$. Déjà, Z est clairement stable par multiplication à gauche par T et les U_α . Soit donc $\beta = -\alpha$ une racine simple de $\phi(-\vec{C})$, montrons que Z est stable par multiplication à gauche par U_β .

Par le lemme précédent, $U(\vec{C}) = U(\vec{m}) \rtimes U_\alpha$, avec \vec{m} la cloison de \vec{C} qui est incluse dans le noyau de β . Le groupe $U(\vec{m})$ est normalisé par U_β , et $U_\beta \cdot Z \subset U(\vec{m}) \cdot U_\beta \cdot U_\alpha \cdot N(T) \cdot G(F)$. L'ensemble $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, -\alpha\}$ est un système de racine fini, donc par [BT72], $U_\beta \cdot U_\alpha \subset \langle U_\beta, U_\alpha, T \rangle = U_\alpha \cdot T \{e, r_\alpha\} U_\alpha = U_\alpha \cdot T \sqcup U_\alpha U_{-\alpha} T r_\alpha \subset U_\alpha U_{-\alpha} N$, où $r_\alpha = n(u)$ est la réflexion générée par un élément quelconque u de U_α .

Ainsi, $U_\beta \cdot Z \subset U(\vec{m}) \cdot U_\alpha \cdot U_{-\alpha} \cdot N(T) \cdot G(F) = U(\vec{C}) \cdot U_{-\alpha} \cdot N(T) \cdot G(F)$.

Étudions maintenant le produit $U_{-\alpha} \cdot N(T) \cdot G(F)$. Pour tout $n \in N(T)$, $U_{-\alpha} \cdot n = n n^{-1} U_{-\alpha} n = n U_{-n^{-1} \cdot \alpha}$. En utilisant la décomposition d'Iwasawa du groupe $\langle U_{-n^{-1} \cdot \alpha}, U_{n^{-1} \cdot \alpha}, T \rangle$, il vient $U_{-n^{-1} \cdot \alpha} \subset U_{n^{-1} \cdot \alpha} \cdot N(T) \cdot G(F)$. D'où $U_{-\alpha} \cdot N(T) \cdot G(F) \subset U_\alpha \cdot N(T) \cdot G(F)$.

On a alors obtenu : $U_\beta \cdot Z \subset U(\vec{m}) \cdot U_\alpha \cdot N(T) \cdot G(F) \subset U(\vec{C}) \cdot N(T) \cdot G(F)$. \square

Corollaire 3.4.3. *Pour toutes facettes $\vec{f} \subset \vec{A}(T)$ et $F \subset A(T)$, pour toute famille Q de parahoriques sur $A(T)$, on a*

$$G = P(\vec{f}) \cdot N(T) \cdot Q(F)$$

Corollaire 3.4.4. *Pour toutes facettes \vec{f} de \vec{I} et F de $I(Q)$, il existe un appartement A tel que $F \subset A$ et $\vec{f} \subset \vec{A}$.*

Démonstration: On peut supposer $\vec{f} \subset \vec{A}(T)$. Soit $g \in G$ tel que $F \subset g.A(T)$. Par le corollaire précédent, $g \in P(\vec{f})N(T)Q(g^{-1}F)$. Soit $g = pnq$ une écriture de g correspondante. Alors $p.A(T) = gq^{-1}n^{-1}.A(T)$ contient F et $p.\vec{A}(T)$ contient \vec{f} . \square

3.4.2 Unicité

Lorsque Q vérifie (para dec) pour une facette F , on prouve un résultat d'unicité pour le facteur dans N pour toute décomposition d'Iwasawa faisant intervenir F .

Proposition 3.4.5. *Soient \vec{C} une chambre de \vec{A} et F une facette de A , $F' \subset A$ un élément du filtre F . Soit $g \in G$ et $n, n' \in N$ tels que $g \in U(\vec{C}).n.G(F) \cap U(\vec{C}).n'.G(F')$.*

Pour tout $a \in F'$, si Q vérifie (para dec)(a), alors $n^{-1}n' \in N(a)$. Autrement dit, le facteur dans N dans la décomposition de Lévi est unique modulo $N(a)$.

En particulier, si Q vérifie (para dec)(a) pour tout $a \in F'$, alors $n^{-1}n' \in N(F)$.

Démonstration:

Soit $a \in F'$ tel que Q vérifie (para dec)(a). On a $n' \in U(\vec{C}).n.Q(F')$, d'où $n^{-1}n' \in U(n^{-1}\vec{C}).Q(F') \subset U(n^{-1}\vec{C}).Q(a) = U(n^{-1}\vec{C}).(U(-n^{-1}\vec{C}) \cap Q(a)).N(a)$ par (para dec)(a). Donc il existe $n_a \in N(a)$ tel que $n^{-1}n'n_a \in U(n^{-1}\vec{C}).U(-n^{-1}\vec{C})$. Par unicité du facteur de N dans la décomposition de Birkhoff vectorielle, on obtient $n^{-1}n'n_a = e$. \square

Corollaire 3.4.6. *Soit Q une famille de parahoriques vérifiant (para dec)fonctoriellement. Alors pour tout Δ tel que $\Lambda \leq \Delta \leq \mathbb{R}$, pour tout $a \in A$, $G \cap N^\Delta.Q^\Delta(a) = N.(G \cap Q^\Delta(a))$.*

Et donc si Q vérifie en outre (fonc)(a), alors $G \cap N^\Delta.Q^\Delta(a) = N.Q(a)$.

Démonstration: Soit $g = u.n.p$ une écriture de g dans la décomposition d'Iwasawa $G = U(\vec{C}).N.Q(a)$, pour \vec{C} une chambre quelconque de \vec{A} . Comme $P(a) \subset P^\Delta(a)$, $N \subset N^\Delta$, et $U(\vec{C}) \subset U^\Delta(\vec{C})$, c'est aussi une écriture de g dans $G^\Delta = U^\Delta(\vec{C}).N^\Delta.Q^\Delta(a)$.

Par ailleurs, soit $g = n^\Delta.q^\Delta$ une écriture venant de l'hypothèse $g \in N^\Delta.Q^\Delta(a)$. Par la proposition précédente, $n.N^\Delta(a) = n^\Delta.N^\Delta(a)$. Donc $g \in n.Q^\Delta(a)$, puis $g \in n.(Q^\Delta(a) \cap G)$, ce qui vaut $n.Q(a)$ si (fonc)(a) est vrai. \square

Remarque: Le même raisonnement permettra la même conclusion lorsqu'on étudiera un groupe presque déployé par descente galoisienne.

3.5 Décomposition de Bruhat/Birkhoff

Proposition 3.5.1. *Soient F_1 et F_2 deux facettes d'un appartement $A(T)$. On suppose qu'au moins une des deux est sphérique. Alors $G = G(F_1)N(T)G(F_2)$.*

Remarque: En fait, l'hypothèse minimale sur les facettes F_1 et F_2 pour que la décomposition soit vraie, et prouvée par la preuve à suivre est : si \vec{f}_1 et \vec{f}_2 sont les directions des façades de F_1 et F_2 , alors pour tout $w \in W(\vec{A}(T))$, $\phi^m(\vec{f}_1 \cup w\vec{f}_2)$ est fini.

Démonstration:

Soient \vec{f}_1 et \vec{f}_2 les directions des façades de F_1 et F_2 . On fixe $g \in G$. Pour cette preuve, l'appartement par défaut est $A(T)$, c'est-à-dire qu'on notera N pour $N(T)$, $M(f)$ pour $M_A(f)$...

Par la décomposition d'Iwasawa de G , $g \in P(\vec{f}_1).N.G(F_2) = U(\vec{f}_1).M(\vec{f}_1).N.G(F_2)$. Comme $U(\vec{f}_1) \subset G(F_1)$, on peut supposer qu'il existe $n \in N$ tel que $g \in M(\vec{f}_1).n$.

On utilise alors la décomposition d'Iwasawa dans $M(\vec{f}_1)$, avec la facette affine F_1 et la facette vectorielle $pr_{\vec{f}_1}(nf_2)$. Le sous-groupe unipotent de $M(\vec{f}_1)$ correspondant à cette facette vectorielle est le groupe engendré par les U_α avec $\alpha \in \phi^m(\vec{f}_1) \cap \phi(n\vec{f}_2) = \phi(\vec{\Omega})$, en notant $\vec{\Omega} = \text{conv}(\vec{f}_1 - \vec{f}_1 + n\vec{f}_2)$. Donc $M(\vec{f}_1) = U_{\min}(F_1) \cdot N(\vec{f}_1) \cdot U_{\phi(\vec{\Omega})}$. Notons que $\vec{\Omega}$ est équilibrée, car les deux facettes $pr_{\vec{f}_1}(\vec{f}_2)$ et $pr_{-\vec{f}_1}(\vec{f}_2)$ sont sphériques, incluses dans $\vec{\Omega}$, et de signes opposés. Donc $U_{\phi(\vec{\Omega})} \subset M(\vec{\Omega}) \times U(\vec{\Omega}) \subset M(\vec{\Omega}) \times U(n\vec{f}_2)$. Ainsi,

$$g \in G(F_1) \cdot N(\vec{f}_1) \cdot M(\vec{\Omega}) \cdot U(n\vec{f}_2).n = G(F_1) \cdot N(\vec{f}_1) \cdot M(\vec{\Omega}) \cdot n.U(\vec{f}_2)$$

On peut donc supposer qu'il existe $n_1 \in N(\vec{f}_1)$ tel que :

$$g \in n_1.M(\vec{\Omega}).n$$

Les facettes nF_2 et $n_1^{-1}F_1$ se projettent sur $A_{\vec{\Omega}}$. Et par la décomposition de Bruhat dans le groupe muni d'une donnée radicielle valuée finie $M(\vec{\Omega})$, on a $M(\vec{\Omega}) = G(\phi^m(\vec{\Omega}), pr_{\vec{\Omega}}(n_1^{-1}F_1)) \cdot N(\vec{\Omega}) \cdot G(\phi^m(\vec{\Omega}), pr_{\vec{\Omega}}(nF_2))$. Enfin, sachant que pour toute partie F de $A_{\vec{\Omega}}$, $G(\phi^m(\vec{\Omega}), F) \subset G(\langle F, \text{Vect}(\vec{\Omega}) \rangle_A)$, on arrive à

$$M(\vec{\Omega}) \subset G(n_1^{-1}F_1) \cdot N(\vec{\Omega}) \cdot G(nF_2)$$

, puis :

$$g \in n_1G(n_1^{-1}F_1) \cdot N(\vec{\Omega}) \cdot G(nF_2).n = G(F_1) \cdot n_1N(\vec{\Omega}).n \cdot G(F_2) \subset G(F_1) \cdot N \cdot G(F_2)$$

□

Corollaire 3.5.2. *Pour toute famille Q de parahoriques, pour toutes facettes F_1 et F_2 d'un appartement $A(T)$, si l'une des deux est sphérique, alors :*

$$G = Q(F_1) \cdot N(T) \cdot Q(F_2)$$

Corollaire 3.5.3. *Pour toute famille Q de parahoriques, pour toutes facettes F_1 et F_2 de $I(Q)$, si l'une des deux est sphérique, alors il existe un appartement contenant $F_1 \cup F_2$.*

Démonstration: Soit $A(T)$ un appartement contenant F_1 , soit $g \in G$ tel que $F_2 \subset g.A(T)$. Par la décomposition de Bruhat/Birkhoff, $G = Q(F_1) \cdot N(T) \cdot Q(g^{-1}F_2)$. Soit $g = q_1nq_2$ l'écriture correspondante de g . Alors $F_1 \cup F_2 \subset q_1.A(T)$. □

3.6 Lien entre les façades

3.6.1 Conséquence de (para 2.2)

La première conséquence de (para 2.2)(\vec{f}) est que la projection $pr_{\vec{f}}(a)$ est bien définie dans \mathcal{I} , indépendamment de l'appartement contenant a et \vec{f} considéré :

Proposition 3.6.1. *Si Q vérifie (para 2.2)(\vec{f}), alors la projection $pr_{\vec{f}}$ est bien définie sur la réunion des $A(T)_{\vec{g}}$ tels que $\vec{f} \cup \vec{g} \subset \vec{A}(T)$ et $\vec{g} \subset \text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{f})$. Pour tout $p \in P(\vec{f})$, on a $p.pr_{\vec{f}}(a) = pr_{\vec{f}}(p.a)$.*

Démonstration:

Soit a dans une façade $A(T)_{\vec{g}}$ telle que $\vec{f} \cup \vec{g} \subset \vec{A}(T)$ et $\vec{g} \subset \text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{f})$. Soit T_0 un tore maximal de référence, soit $g \in G$ tel que $g.A(T) = A(T_0)$. Alors $g.\vec{f}$ et $g.\vec{g}$ sont deux facettes de $\vec{A}(T_0)$ telles que $g.\vec{g} \subset \text{Vect}_{\vec{A}(T_0)}(g.\vec{f})$ donc la projection $pr_{g.\vec{f}}(ga)$ est bien définie dans $A(T_0)$. On veut poser $pr_{\vec{f}}(a) = g^{-1}(pr_{g.\vec{f}}(ga))$, il s'agit de vérifier que ceci est indépendant de T et de g .

Soient donc T' et g' d'autres choix possibles. Alors $g'.g'^{-1}$ envoie ga et $g'\vec{f}$ sur un autre point de $A(T_0)$ et une autre

facette de $\vec{A}(T_0)$. Donc $g'g^{-1} \in N(T_0)Q(ga) \cap N(T_0)P(g\vec{f})$. Ceci vaut $N(T_0)Q(\{ga, pr_{g\vec{f}}(ga)\})$ par (para 2.2)(\vec{f}). Soit $n \in N(T_0)$ tel que $g'g^{-1} \in n.Q(\{ga, pr_{g\vec{f}}(ga)\})$. Alors $g'g^{-1}(pr_{g\vec{f}}(ga)) = n(pr_{g\vec{f}}(ga)) = pr_{ng\vec{f}}(nga) = pr_{g'\vec{f}}(g'a)$. Ceci prouve que $g^{-1}(pr_{g\vec{f}}(ga)) = (g')^{-1}(pr_{g'\vec{f}}(g'a))$. \square

On peut alors dans une certaine mesure caractériser un point de \mathcal{I} par ses projetés dans diverses façades. Par exemple, on prouve le :

Lemme 3.6.2. *Soit \vec{f} une facette de \vec{A} , et Q une famille de parahoriques vérifiant (para 2.2)(\vec{m}) pour toute cloison \vec{m} de $\vec{f}^* \cap \vec{A}$. Alors pour tout $u \in U(\vec{f})$, pour tout $a \in A$, soit $u.a = a$, soit $u.a \notin A$.*

Preuve du lemme: Soit $a \in A$, supposons $u.a \in A$. Soit \vec{m} une cloison de $\vec{f}^* \cap \vec{A}$, alors $u \in P(\vec{m})$, donc $u.pr_{\vec{m}}(a) = pr_{\vec{m}}(u.a) \in A_{\vec{m}}$. Ainsi u envoie le point $pr_{\vec{m}}(a)$ sur un autre point de l'appartement $A_{\vec{m}}$. Sachant que u fixe par ailleurs un cône ouvert de $A_{\vec{m}}$ (c'est-à-dire une demi-droite, puisque $\dim(A_{\vec{m}}) = 1$), et que $\mathcal{I}_{\vec{m}}$ est un immeuble affine (en fait un arbre), ceci entraîne que $u.pr_{\vec{m}}(a) = pr_{\vec{m}}(a)$, d'où $pr_{\vec{m}}(u.a) = pr_{\vec{m}}(a)$.

Donc a et $u.a$ sont deux points de A dont les projetés sur tous les $A_{\vec{m}}$, pour \vec{m} une cloison de \vec{f}^* coïncident. Ceci entraîne que $\overrightarrow{a(u.a)}$ est dans l'intersection de ces \vec{m} . Mais celle-ci est triviale. \square

Proposition 3.6.3. *On suppose que Q vérifie (para 2.2)(\vec{m}) pour toute cloison \vec{m} . Soit $\psi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset \phi^u(\vec{C})$ un ensemble réduit de racines, rangées dans un ordre grignotant. (Ceci signifie que pour tout i , $\ker(\alpha_i)$ contient une cloison incluse dans l'intérieur de $\bigcap_{j \geq i} \mathcal{D}(\alpha_j)$).*

Soit $u = u_1 \dots u_k$ avec $u_i \in U_{\alpha_i}$. Alors :

$$\text{Fix}_A(u) = \bigcap_i \text{Fix}(u_i) = \bigcap_i \mathcal{D}(\alpha_i, \varphi_{\alpha_i}(u_i))$$

Démonstration:

La seconde égalité vient de 3.3.9. Pour la première, l'inclusion "⊃" est claire.

Soit $a \in \text{Fix}_A(u)$. Par hypothèse, il existe une cloison \vec{m}_1 , incluse dans $\ker(\alpha_1)$ et dans l'intérieur de $\bigcap_{j \geq 1} \mathcal{D}(\alpha_j)$. Ainsi, $u \in P(\vec{m}_1)$, et pour tout $j > 1$, u_j fixe $A_{\vec{m}_1}$. Donc u agit sur $A_{\vec{m}_1}$ comme u_1 . Par la proposition 3.6.1, u et u_1 fixent le point $pr_{\vec{m}_1}(a)$. Ceci entraîne $u_1 \in U_{\alpha_1}(pr_{\vec{m}_1}(a)) = U_{\alpha_1}(a)$.

Maintenant l'élément $u_1^{-1}u = u_2 \dots u_k$ fixe a et est le produit de $k - 1$ éléments de groupes radiciels dans un ordre grignotant, par récurrence on obtient que pour tout $i \in \llbracket 2, k \rrbracket$, $u_i \in U_{\alpha_i}(a)$.

D'où $u \in U_{\alpha_1}(a) \dots U_{\alpha_k}(a)$ et $a \in \bigcap_{i=1}^k \text{Fix}(u_i)$. \square

La proposition suivante donne dans certains cas une décomposition de Lévi pour $Q(\Omega)$:

Proposition 3.6.4. *Soit \vec{f} une facette sphérique de \vec{A} , soit Q une famille de parahoriques vérifiant (para 2.1)(\vec{f}) et (para 2.2)(\vec{m}) pour chaque cloison \vec{m} de $\vec{f}^* \cap \vec{A}$. Soit Ω une partie de A telle que $\text{Cl}(\vec{\Omega}) = \vec{f}$. Alors :*

$$\begin{aligned} Q(\Omega) &= (U(\vec{f}) \cap Q(\Omega)) \rtimes (N(\Omega).G(\phi^m(\vec{f}), \Omega)) \\ &= (U(\vec{f}) \cap Q(\Omega)) \rtimes Q(\langle \Omega, \vec{f} \rangle_A). \end{aligned}$$

Démonstration:

Il est clair que $(U(\vec{f}) \cap Q(\Omega)) \rtimes (N(\Omega).G(\phi^m(\vec{f}), \Omega)) \subset (U(\vec{f}) \cap Q(\Omega)) \rtimes Q(\langle \Omega, \vec{f} \rangle_A) \subset Q(\Omega)$.

Soit $g \in Q(\Omega)$. Notons $\Omega_{\vec{f}} = pr_{\vec{f}}(\Omega)$, d'après (para 2.1)(\vec{f}), $g \in Q(\Omega_{\vec{f}})$. D'après 3.2.2, point 4, on a même $g \in U(\vec{f}) \rtimes (N(\Omega_{\vec{f}}).G(\phi^m(\vec{f}), \Omega_{\vec{f}}))$. Mais $G(\phi^m(\vec{f}), \Omega_{\vec{f}}) = G(\phi^m(\vec{f}), \Omega)$, on peut donc supposer $g \in (U(\vec{f}).N(\Omega_{\vec{f}})) \cap Q(\Omega)$. Maintenant, le lemme 3.6.2 entraîne $g \in (U(\vec{f}) \cap Q(\Omega)) \cdot N(\Omega)$. \square

Cette proposition permet, pour prouver que Q vérifie (para 2.1⁺)(\vec{f}), de se ramener à l'étude de $U(\vec{f}) \cap Q(a)$, comme l'indique le corollaire suivant :

Corollaire 3.6.5. *Soit Q une famille de parahoriques vérifiant les hypothèses de la proposition. Si a est un point d'une façade $A_{\vec{g}}$ avec $\vec{g} \subset \vec{f}$, alors :*

$$\begin{aligned} Q(a) \cap P(\vec{f}) &= (U(\vec{f}) \cap Q(a)) \rtimes (N(a + \vec{f}).G(\phi^m(\vec{f}), a)) \\ &= (U(\vec{f}) \cap Q(a)) \rtimes Q(\langle a, \vec{f} \rangle_A). \end{aligned}$$

Démonstration: Ayant remarqué que $Q(a) \cap P(\vec{f}) = Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$, on applique la proposition à $\Omega = \{a, pr_{\vec{f}}(a)\}$. \square

3.6.2 Conséquences de (para 2.2⁺)

Proposition 3.6.6. *Soit \vec{f} une facette de \vec{A} . Si Q vérifie (para 2.2⁺)(\vec{f}), alors pour tout $\vec{v} \in \vec{f}$ et $a \in A$, pour tout appartement B contenant a et \vec{f} , on a $a +_A \vec{v} = a +_B \vec{v}$. Autrement dit, l'opération $a + \vec{v}$ est bien définie, et indépendante de l'appartement contenant a et \vec{f} considéré.*

De plus, tout appartement contenant a et \vec{f} contient alors $a + \vec{f}$, et cet ensemble est indépendant de A . On pourra donc le noter juste $a + \vec{f}$.

Démonstration:

Soit $g \in G$ tel que $g.B = A$. Alors $g \in N.Q(a) \cap N.P(\vec{f}) = N.Q(a + \vec{f})$ (adhérence dans A). On peut supposer $g \in Q(a + \vec{f})$, en particulier, g fixe $a +_A \vec{v}$, donc $g^{-1}(a +_A \vec{v}) = a +_A \vec{v}$. Mais par définition de la structure affine sur les appartements, $g^{-1}(a +_A \vec{v}) = g^{-1}(a) +_{g^{-1}A} g^{-1}(\vec{v}) = a +_B \vec{v}$. D'où $a +_A \vec{v} = a +_B \vec{v}$.

Ensuite, le fait que $B = g^{-1}A$, avec $g^{-1} \in Q(a + \vec{f})$ entraîne que $a + \vec{f} \subset A \cap B$. Or de manière générale, $g^{-1}.a + \vec{f} = g^{-1}a + g^{-1}\vec{f}$, on obtient donc ici que $a + \vec{f} = a + \vec{f}$. \square

La condition (para 2.2⁺) permet surtout de prouver que la condition d'isomorphismes entre appartements (para 5) est vérifiée sur certaines parties de A :

Proposition 3.6.7. *Soit Q une famille de parahoriques vérifiant (para 2.2⁺) et (para sph). Soit Ω une partie de A contenant au moins un point sphérique et incluse dans A^+ ou dans A^- , ou contenant au moins un point sphérique positif et un point sphérique négatif.*

Alors :

$$\bigcap_{\omega \in \Omega} N.Q(\omega) = N.Q(\Omega)$$

Démonstration:

Soit $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega} N.Q(\omega)$. En particulier, $g \in \bigcap_{\vec{f} \in \vec{\Omega}} N.P(\vec{f}) = N.P(\vec{\Omega}) = N.P(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$ par la proposition 2.3.1, on peut donc supposer $g \in P(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$, d'où $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega} N(\vec{f}_\omega).Q(\omega)$.

Soit \vec{f} une facette maximale de $\text{Cl}(\vec{\Omega})$, elle est donc sphérique. Par (para 2.2⁺)(\vec{f}) et (para sph), on obtient $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega} N.P(pr_{\vec{f}}(\omega))$, et sachant que $g \in P(\vec{f})$ ceci devient $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega} N(\vec{f}).P(pr_{\vec{f}}(\omega))$. Alors par 3.2.2, on arrive à $g \in N(\vec{f}).P(pr_{\vec{f}}(\Omega))$. On peut supposer $g \in P(pr_{\vec{f}}(\Omega))$, sans perdre l'hypothèse $g \in P(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$ car $N(\vec{f}) = N(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$. On peut même supposer, toujours grâce à 3.2.2 qu'il existe une partie Ω_0 de \vec{A} telle que $pr_{\vec{f}}(\Omega_0) = pr_{\vec{f}}(\Omega)$ et que g fixe Ω_0 et tous les $\omega_0 + \vec{f}$ pour $\omega_0 \in \Omega_0$.

Soit $\omega \in \Omega$, et $\omega_0 \in \Omega_0$ tel que $pr_{\vec{f}}(\omega) = pr_{\vec{f}}(\omega_0)$. Alors $g \in N(\vec{f}_\omega).Q(\omega) \cap P(\vec{f})$, donc par (para 2.2⁺), $g \in N(\vec{f}_\omega).Q(\omega + \vec{f})$. Mais par ailleurs, g fixe $\omega_0 + \vec{f}$ qui contient un scp C de $\omega + \vec{f}$. Soit $g = n.q$ une écriture de g venant de $g \in N(\vec{f}_\omega).Q(\omega + \vec{f})$, alors q et g fixent C , donc n aussi. Comme n agit de manière affine sur $A_{\vec{f}_\omega}$, ceci entraîne $n \in Q(\omega + \vec{f})$, en particulier, $g \in Q(\omega)$.

On a donc prouvé que $g \in Q(\Omega)$. □

Corollaire 3.6.8. *Si Q vérifie (para 2.2⁺) et (para sph), si A et B sont deux appartements de $I(Q)$ dont l'intersection contient un point sphérique, alors il existe $g \in G$ tel que $g.A = B$ et g induit de A sur B un isomorphisme fixant $A \cap B$.*

Autrement dit, si Ω est une partie d'appartement contenant au moins un point sphérique, alors $Q(\Omega)$ est transitif sur les appartements contenant Ω .

3.6.3 Implications entre ces conditions

Il n'est pas la peine d'insister sur le fait que (para 2.1⁺)(\vec{f}) implique (para 2.1)(\vec{f}) et que (para 2.2⁺)(\vec{f}) implique (para 2.2)(\vec{f}), pour toute facette \vec{f} . Par contre, nous prendrons quelques instants pour étudier les relations entre (para 2.1) et (para 2.2) d'une part, et (para 2.1⁺) et (para 2.2⁺) d'autre part.

Proposition 3.6.9.

1. Soit Q une famille de parahoriques, soit \vec{f} une facette sphérique telle que Q vérifie (para dec), (para sph) et (para 2.1)(\vec{f}) fonctoriellement. Alors Q vérifie (para 2.2)(\vec{f}) (fonctoriellement).
2. Soit \vec{f} une facette telle que Q vérifie (para 2.2)(\vec{f}). On suppose de plus que Q vérifie (para in j). Alors Q vérifie (para 2.1)(\vec{f}).

Remarque: Les conditions du deuxième point sont plutôt plus faibles que celles du premier point, et sa preuve plus simple, on peut donc considérer (para 2.1) comme une version affaiblie de (para 2.2).

Démonstration:

1. Soit $g \in N.Q(a) \cap N.P(\vec{f})$, on peut supposer $g \in Q(a) \cap N.P(\vec{f})$. Grâce à (fonc), soit Δ tel que a est spécial dans A^Δ , puis soit $n \in N^\Delta(a)$ tel que $ng \in P^\Delta(\vec{f})$. Comme Q vérifie fonctoriellement (para 2.1)(\vec{f}) puis (para sph), on a $ng \in Q^\Delta(a) \cap P^\Delta(\vec{f}) = Q^\Delta(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\}) \subset P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a))$. D'où $g \in N^\Delta.P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a)) \cap G$. Le point $pr_{\vec{f}}(a)$ étant sphérique, la famille Q vérifie (fonc)($pr_{\vec{f}}(a)$) (par 3.2.7) et (para dec)($pr_{\vec{f}}(a)$) (grâce à 3.2.2). Par le corollaire 3.4.6, puis la proposition 3.2.2, on obtient $g \in Q(a) \cap N.P(pr_{\vec{f}}(a)) = Q(a) \cap N.U(\vec{f}).G(\phi^m(\vec{f}), a)$. Comme $G(\phi^m(\vec{f}), a) \subset Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$, on peut supposer $g \in Q(a) \cap N.U(\vec{f})$.

Soit \vec{C} une chambre dont l'adhérence contient \vec{f} . Soit $g = nu$ une écriture de g correspondant à $g \in N.U(\vec{f})$ et $g = n'u^{-\epsilon}u^\epsilon$ une écriture correspondant à $g \in Q(a) = N(a).(U(-\vec{C}) \cap Q(a)).(U(\vec{C}) \cap Q(a))$ (obtenue par (para dec)(a)). Alors $n^{-1}n' = u(u^\epsilon)^{-1}(u^{-\epsilon})^{-1}$. Et $u(u^\epsilon)^{-1} \in U(\vec{C})$. Donc par l'unicité dans la décomposition de Birkhoff de G , on obtient $u = u^\epsilon \in U(\vec{f}) \cap Q(a) \subset Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$. Donc $g = nu \in N.Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$.

2. Soit $q \in Q(a) \cap P(\vec{f})$. D'après (para 2.2)(\vec{f}), on a alors $q \in N.Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$. Soit $g = nq$ l'écriture correspondante, on a $a = g.a = n.a$, d'où $n \in Q(a) \cap N = N(a)$ grâce à (para in j). De même, $\vec{f} = q.\vec{f} = n.\vec{f}$ d'où $n \in N(\vec{f})$. Mais comme N agit de manière affine sur A , $n \in N(a) \cap N(\vec{f}) = N(a + \vec{f}) \subset Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$. □

Corollaire 3.6.10. *Toute famille de parahoriques Q vérifiant fonctoriellement (para dec) vérifie fonctoriellement (para sph), (para in j), (para 2.1)(sph) et (para 2.2)(sph).*

C'est en particulier le cas pour la famille minimale de parahoriques dans un groupe de Kac-Moody déployé.

Démonstration: C'est une conséquence du corollaire 3.2.12 et de la proposition ci-dessus. \square

Passons à (para 2.1⁺) et (para 2.2⁺) :

Proposition 3.6.11.

1. Soit \vec{f} une facette sphérique telle que Q vérifie (fonc), (para dec), et (para 2.1⁺)(\vec{f}) fonctoriellement. Alors Q vérifie (para 2.2⁺)(\vec{f}) (fonctoriellement).
2. Soit \vec{f} une facette telle que Q vérifie (para 2.2⁺)(\vec{f}). On suppose de plus que Q vérifie (para in j). Alors Q vérifie (para 2.1⁺)(\vec{f}).

Démonstration:

Soit $a \in A$, avec $\vec{f}_a \subset \vec{f}$, soit $g \in N.Q(a) \cap N.P(\vec{f})$. On peut supposer $g \in Q(a) \cap N.P(\vec{f})$, et il existe $\Delta, n \in N^\Delta(a)$ tels que $ng \in Q^\Delta(a) \cap P^\Delta(\vec{f}) = Q^\Delta(a + \vec{f})$ par (para 2.1⁺)(\vec{f}). Donc $g \in N^\Delta(a).Q^\Delta(a + \vec{f}) \cap G$.

Soient $(n^\Delta, q^\Delta) \in N^\Delta \times Q^\Delta(a + \vec{f})$ tels que $g = n^\Delta.q^\Delta$, et soit $g = unq$ une écriture de g correspondant à la décomposition d'Iwasawa $G = U(\vec{C}).N.Q(F)$ pour \vec{C} une chambre quelconque et F la facette contenant $germ_a(a + \vec{f})$. Par unicité dans la décomposition d'Iwasawa de G^Δ (proposition 3.4.5), on obtient $n^{-1}n^\Delta \in N^\Delta(F)$. Mais $N^\Delta(F) = N^\Delta(a + \vec{f}) \subset Q^\Delta(a + \vec{f})$. Ainsi, $g \in n.Q^\Delta(a + \vec{f}) \cap G = n.(Q^\Delta(a + \vec{f}) \cap G)$. Mais Q^Δ vérifie (fonc), donc $Q^\Delta(a + \vec{f}) \cap G = Q(a + \vec{f})$.

Le second point se prouve facilement, exactement comme son homologue dans la proposition précédente. \square

3.7 Décomposition de Lévi

Nous avons vu (3.6.4) une décomposition de Lévi pour le groupe $Q(\Omega)$ lorsque $\vec{\Omega}$ est dans l'adhérence d'une facette \vec{f} . Cette décomposition repose sur la décomposition de Lévi vectorielle de $P(\vec{f})$. Il y a un autre cas où on dispose d'une décomposition de Lévi vectorielle, c'est pour un groupe de la forme $P(\vec{\Omega})$ avec $\vec{\Omega}$ une partie équilibrée (c'est-à-dire une union finie de facettes sphériques dont au moins une est positive et une négative). Ceci fournit naturellement une décomposition des groupes $Q(\Omega)$ correspondants.

Proposition 3.7.1. Soit Ω une partie de A contenant au moins un point sphérique positif et un point sphérique négatif. On suppose que Q est une famille de parahoriques vérifiant (para 2.1)(sph) et (para 2.2)(sph). Alors :

$$Q(\Omega) = U(\Omega) \ltimes (M(\vec{\Omega}) \cap Q(\Omega))$$

avec :

$$U(\Omega) := G(\phi^u(\vec{\Omega}), \Omega)$$

$$M(\vec{\Omega}) \cap Q(\Omega) = N(\Omega).G(\phi^m(\vec{\Omega}), \Omega).$$

Démonstration:

Soient \vec{f}^+ et \vec{f}^- des facettes maximales de $Cl(\vec{\Omega}) \cap \vec{A}^+$ et $Cl(\vec{\Omega}) \cap \vec{A}^-$. Alors $\text{Vect}(\vec{f}^+) = \text{Vect}(\vec{f}^-) = \text{Vect}(Cl(\vec{\Omega}))$, donc $M(\vec{f}^+) = M(\vec{f}^-) = M(Cl(\vec{\Omega})) = M(\vec{\Omega})$. De plus, $\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-$ est une partie équilibrée, donc son fixateur admet la décomposition de Lévi $P(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) = U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) \rtimes M(\vec{\Omega})$.

Soit $g \in Q(\Omega)$. En particulier, $g \in P(\vec{\Omega}) = P(Cl(\vec{\Omega})) \subset P(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)$, donc $g \in Q(\Omega) \cap (U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) \rtimes M(\vec{\Omega}))$. Comme Q vérifie (para 2.1)(sph), on a de plus $g \in P(pr_{\vec{f}^+}(\Omega))$. Mais $U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)$ fixe toute la façade $A_{\vec{f}^+}$, donc $g \in U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-).(M(\vec{\Omega}) \cap P(pr_{\vec{f}^+}(\Omega)))$.

Comme $M(\vec{\Omega}) = M(\vec{f}^+)$, la proposition 3.2.2 entraîne que $M(\vec{\Omega}) \cap P(pr_{\vec{f}^+}(\Omega)) = N(pr_{\vec{f}^+}(\Omega)).G(\phi^m(\vec{\Omega}), pr_{\vec{f}^+}(\Omega)) = N(pr_{\vec{f}^+}(\Omega)).G(\phi^m(\vec{\Omega}), \Omega)$. On peut donc supposer $g = un \in Q(\Omega) \cap U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-).N(pr_{\vec{f}^+}(\Omega))$. Maintenant, le lemme

3.6.2 entraîne que u et n fixent Ω , donc $g \in (Q(\Omega) \cap U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)).N(\Omega)$.

A présent, le seul point qui n'est pas encore clair est la description de $Q(\Omega) \cap U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)$. Comme $\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-$ sont deux facettes sphériques de signes opposés, on sait par [Ré02] 6.3.1 que $U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) = G(\phi^u(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)) = \prod_{\alpha \in \phi^u(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)} U_\alpha$, pour un ordre qu'on peut choisir grignotant sur $\phi^u(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)$ (car $\phi(T)$ est réduit). Alors la proposition 3.6.3 permet de montrer que :

$$Q(\Omega) \cap U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) = \prod_{\alpha \in \phi^u(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-)} U_\alpha(\Omega).$$

Mais si $\alpha \notin \phi^u(\vec{\Omega})$, alors $U_\alpha(\Omega) = \{e\}$. D'où finalement :

$$Q(\Omega) \cap U(\vec{f}^+ \cup \vec{f}^-) = \prod_{\alpha \in \phi^u(\vec{\Omega})} U_\alpha(\Omega).$$

□

Corollaire 3.7.2. *Dans les conditions de la proposition, $Q(\Omega) = N(\Omega).Q(Cl(\Omega))$.*

3.8 Complétion d'une famille de parahoriques

Lemme 3.8.1. *Soit \vec{C} une chambre de \vec{A} et \vec{m} une cloison de \vec{C} . Soit $\alpha \in \phi$ la racine telle que $\alpha(\vec{C}) > 0$ et $\alpha(\vec{m}) = 0$. Pour toute famille Q de parahorique vérifiant (para sph) et (para 2.1)(\vec{m}), on a :*

$$Q(a) \cap U(\vec{C}) = (Q(a) \cap U(\vec{m})) \rtimes U_\alpha(a).$$

Preuve du lemme: Soit $g \in Q(a) \cap U(\vec{C})$. On sait par le lemme 3.4.1 que $U(\vec{C}) = U(\vec{m}) \rtimes U_\alpha$, il existe donc une décomposition $g = u.u_\alpha$ avec $u \in U(\vec{m})$ et $u_\alpha \in U_\alpha$. Comme $U(\vec{C}) \subset P(\vec{m})$, on a $g \in Q(a) \cap P(\vec{m}) = Q(\{a, pr_{\vec{m}}(a)\})$ par (para 2.1)(\vec{m}). Le facteur $u \in U(\vec{m})$ fixe toute la cloison $A_{\vec{m}}$ (car Q vérifie (para sph), 3.2.2), on en déduit que $u_\alpha \in U_\alpha \cap P(pr_{\vec{m}}(a))$, c'est-à-dire $u_\alpha \in U_\alpha(a)$. En particulier, u_α fixe a , donc u aussi : $u \in U(\vec{m}) \cap Q(a)$. □

Lemme 3.8.2. *Soit ϵ un signe, soit Q une famille de parahoriques vérifiant (para sph) et (para 2.1)(\vec{m}) pour toute cloison \vec{m} de signe ϵ . On suppose que la famille minimale P vérifie aussi (para 2.1)(\vec{m}) pour toute cloison \vec{m} . Alors pour toute chambre \vec{C} de \vec{A}^ϵ et pour tout $a \in A$, l'ensemble :*

$$(Q(a) \cap U(\vec{C})) \cdot (P(a) \cap U(-\vec{C})) \cdot N(a)$$

est un sous-groupe de $Q(a)$ contenant $P(a)$. Il est en outre indépendant de la chambre \vec{C} de \vec{A}^ϵ choisie.

En particulier, la famille des sous-groupes obtenus pour $a \in A$ est une famille de parahoriques vérifiant (para dec).

Preuve du lemme:

Supposons $\epsilon = +$. Soit $a \in A$ et \vec{C} une chambre de \vec{A}^+ , notons $R_{\vec{C}}(a) = (Q(a) \cap U(\vec{C})) \cdot (P(a) \cap U(-\vec{C})) \cdot N(a)$.

Commençons par montrer que $R_{\vec{C}}(a)$ est indépendant de \vec{C} : il suffit de prouver que $R_{\vec{C}}(a) = R_{r_\alpha \vec{C}}(a)$ pour toute racine simple α de $\phi(\vec{C})$. Soit α une telle racine, et \vec{m}_α la cloison de \vec{C} correspondante. D'après le lemme précédent, $Q(a) \cap U(\vec{C}) = (Q(a) \cap U(\vec{m}_\alpha)) \cdot U_\alpha(a)$ et de même $P(a) \cap U(-\vec{C}) = (P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)) \rtimes U_{-\alpha}(a)$. De plus, $U_\alpha(a)$ normalise $P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} R_{\vec{C}}(a) &= (Q(a) \cap U(\vec{m}_\alpha)) \cdot U_\alpha(a) \cdot (P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)) \cdot U_{-\alpha}(a) \cdot N(a) \\ &= (Q(a) \cap U(\vec{m}_\alpha)) \cdot (P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)) \cdot U_\alpha(a) \cdot U_{-\alpha}(a) \cdot N(a) \end{aligned}$$

L'ensemble $U_\alpha(a).U_{-\alpha}(a)$ est inclus dans le groupe avec donnée radicielle valuée finie $M(\vec{m}_\alpha)$. Il est même inclus dans le fixateur $\text{Fix}_{M(\vec{m}_\alpha)}(pr_{\vec{m}_\alpha}(a))$ du point $pr_{\vec{m}_\alpha}(a)$ de $\vec{I}_{\vec{m}_\alpha}$, l'immeuble de Bruhat-Tits de $M(\vec{m}_\alpha)$. Or ce fixateur est égal à $U_\alpha(a).U_{-\alpha}(a).(N(a) \cap M(\vec{m}_\alpha)) = U_{-\alpha}(a).U_\alpha(a).(N(a) \cap M(\vec{m}_\alpha))$ d'après [BT72]. Donc $U_\alpha(a).U_{-\alpha}(a) \subset U_{-\alpha}(a).U_\alpha(a).N(a)$ et finalement :

$$\begin{aligned} R_{\vec{C}}(a) &= (Q(a) \cap U(\vec{m}_\alpha)) \cdot (P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)) \cdot U_{-\alpha}(a).U_\alpha(a).N(a) \\ &= (Q(a) \cap U(\vec{m}_\alpha)).U_{-\alpha}(a) \cdot (P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)).U_\alpha(a) \cdot N(a) \end{aligned}$$

Or $\phi(r_\alpha \vec{C}) = (\phi(\vec{C}) \setminus \{\alpha\}) \cup \{-\alpha\}$ et similairement pour $\phi(-r_\alpha \vec{C})$, donc le lemme précédent indique que $(Q(a) \cap U(\vec{m}_\alpha)).U_{-\alpha}(a) = Q(a) \cap U(r_\alpha \vec{C})$ et $(P(a) \cap U(-\vec{m}_\alpha)).U_\alpha(a) = P(a) \cap U(-r_\alpha \vec{C})$. Nous avons bien prouvé que $R_{\vec{C}}(a) = R_{r_\alpha \vec{C}}(a)$.

On peut maintenant noter $R(a)$ au lieu de $R_{\vec{C}}(a)$. Pour montrer qu'il s'agit d'un groupe, il suffit de montrer qu'il est stable par multiplication à gauche par $P(a)$ et par $N(a)$. Commençons par la stabilité par multiplication par $P(a)$. Comme $P(a) = \langle \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi\} \rangle$, il suffit de voir la stabilité sous la multiplication par un $U_\alpha(a)$, $\alpha \in \phi$. Mais pour tout $\alpha \in \phi$, il existe une chambre \vec{C} positive telle que $\alpha \in \phi(\vec{C})$. Alors $U_\alpha(a) \subset Q(a) \cap U(\vec{C})$ d'où $U_\alpha(a).R(a) \subset R(a)$.

Pour finir, soit $n \in N(a)$, fixons \vec{C} une chambre positive. Alors $n.R(a) = n.R_{\vec{C}}(a) = n.(Q(a) \cap U(\vec{C})) \cdot (P(a) \cap U(-\vec{C})) \cdot N(a) = (Q(a) \cap U(n\vec{C})) \cdot (P(a) \cap U(-n\vec{C})) \cdot nN(a) = R_{n\vec{C}}(a) = R(a)$.

Ceci prouve que $R(a)$ est un groupe. Il est clair que $P(a) \subset R(a) \subset Q(a)$, et ceci entraîne immédiatement que $(R(a))_{a \in A}$ est une famille de parahoriques. De plus, pour toute chambre \vec{C} positive, $Q(a) \cap U(\vec{C}) = R(a) \cap U(\vec{C})$ et $P(a) \cap U(-\vec{C}) \subset R(a) \cap U(\vec{C})$ donc R vérifie (para dec)(\vec{C}). \square

Remarque: Ceci et la proposition 3.2.10 prouvent que pour la famille minimale de parahoriques P , les conditions (para 2.1)(sph) fonctorielle et (para dec)fonctorielle sont équivalentes.

Définition 3.8.3. Soit Q une famille de parahoriques vérifiant (para 2.2)(sph) et (para sph). On définit les familles \bar{Q}^p , \bar{Q}^n et \bar{Q} par :

$$\begin{aligned} \bar{Q}^p(a) &= \{g \in P(\vec{f}_a) \mid \forall \vec{f} \in (\vec{f}_a^* \cap \vec{I}_{sph}^+, g.pr_{\vec{f}}(a) = pr_{g.\vec{f}}(a))\} \\ \bar{Q}^n(a) &= \{g \in P(\vec{f}_a) \mid \forall \vec{f} \in (\vec{f}_a^* \cap \vec{I}_{sph}^-, g.pr_{\vec{f}}(a) = pr_{g.\vec{f}}(a))\} \\ \bar{Q}(a) &= \{g \in P(\vec{f}_a) \mid \forall \vec{f} \in (\vec{f}_a^* \cap \vec{I}_{sph}, g.pr_{\vec{f}}(a) = pr_{g.\vec{f}}(a))\} \end{aligned}$$

, étant convenu que lorsque $(\vec{f}_a^* \cap \vec{I}_{sph}^+ = \emptyset, \bar{Q}^p(a) = Q(a)$ et lorsque $(\vec{f}_a^* \cap \vec{I}_{sph}^- = \emptyset, \bar{Q}^n(a) = Q(a)$.

Ainsi, $\bar{Q}(a)$ (resp. $\bar{Q}^p(a), \bar{Q}^n(a)$) est l'ensemble des éléments de G qui permutent les projetés de a dans les façades de $\vec{I}(Q)_{sph}$ (resp. $\vec{I}(Q)_{sph}^+, \vec{I}(Q)_{sph}^-$).

Proposition 3.8.4. Soit Q une famille de parahoriques vérifiant (para 2.2)(sph) et (para sph). Alors les familles \bar{Q}, \bar{Q}^p et \bar{Q}^n sont des familles de parahoriques qui vérifient (para sph). Elles sont liées par la relation $\bar{Q}(a) = \bar{Q}^p(a) \cap \bar{Q}^n(a)$, pour tout $a \in A$. De plus, \bar{Q} vérifie (para 2.1), \bar{Q}^p vérifie (para 2.1⁺)(\vec{f}) pour toute facette \vec{f} sphérique positive, et \bar{Q}^n vérifie (para 2.1⁺)(\vec{f}) pour toute facette \vec{f} sphérique négative.

Démonstration:

Il est clair que pour tout $a \in A$, $\bar{Q}(a), \bar{Q}^p(a)$ et $\bar{Q}^n(a)$ sont des sous-groupes de $P(\vec{f}_a)$, qui contiennent $Q(a)$. Donc \bar{Q}, \bar{Q}^p et \bar{Q}^n sont des familles de parahoriques.

Soit $a \in A_{sph}$. Si $a \in A_{sph}^-$, alors \vec{f}_a est une facette négative donc $\vec{f}_a^* \cap \vec{I}^+ = \emptyset$ (une facette sphérique ne peut être à la fois négative et positive) et $\bar{Q}^p(a) = Q(a) = P(a)$ car Q vérifie (para sph). Sinon \vec{f}_a est une facette sphérique

positive donc pour tout $g \in \bar{Q}^p(a)$, $a = pr_{\vec{f}_a}(a) = pr_{g\vec{f}_a}(a) = g.(pr_{\vec{f}_a}(a)) = g.a$. Donc $g \in Q(a)$. Ainsi encore une fois, $\bar{Q}(a) = Q(a) = P(a)$. Le raisonnement pour \bar{Q}^- est identique, celui pour \bar{Q} est encore plus simple.

En distinguant les cas où a est sphérique positif, sphérique négatif ou non sphérique, il est maintenant immédiat de vérifier que pour tout $a \in A$, $\bar{Q}(a) = \bar{Q}^p(a) \cap \bar{Q}^n(a)$.

Étudions (para 2.1) pour \bar{Q} . Soit $a \in A$, $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A})$ et $q \in \bar{Q}(a) \cap P(\vec{f})$. Pour montrer que $q \in \bar{Q}(pr_{\vec{f}}(a))$, il suffit de montrer que pour toute facette $\vec{h} \in (\vec{f}^*)_{\text{sph}}$, $q.pr_{\vec{h}}(pr_{\vec{f}}(a)) = pr_{q\vec{h}}(pr_{\vec{f}}(a))$. Mais $pr_{\vec{h}}(pr_{\vec{f}}(a)) = pr_{\vec{h}}(a)$, et $pr_{q\vec{h}}(pr_{\vec{f}}(a)) = pr_{q\vec{h}}(a)$, le résultat en découle.

Pour finir, soit \vec{f} une facette sphérique positive, montrons que \bar{Q}^p vérifie (para 2.1⁺)(\vec{f}) (le raisonnement pour \bar{Q}^n est bien sûr identique). Soit $a \in A$ et $g \in \bar{Q}^p(a) \cap P(\vec{f})$. Soit $b \in a + \vec{f}$, montrons que $g \in \bar{Q}(b)$, c'est-à-dire que pour tout $\vec{h} \in \mathcal{F}(\vec{f}_b^*) \cap \vec{I}_{\text{sph}}^+$, $g.pr_{\vec{h}}(b) = pr_{g\vec{h}}(b)$. On peut noter que le résultat est déjà clair pour $\vec{h} \subset \vec{f}^*$, car dans ce cas, $pr_{\vec{h}}(b) = pr_{\vec{h}}(a)$ et $pr_{g\vec{h}}(b) = pr_{g\vec{h}}(a)$.

Dans le cas général, comme g fixe d'après le paragraphe précédent $pr_{\vec{f}}(a)$, il existe $m \in G(\phi^m(\vec{f}), a)$ tel que $m.g$ fixe $A_{\vec{f}}$ et donc $\bar{A}_{\vec{f}}$. En particulier, $m.g \in P(\vec{f} \cap \vec{A})$, de plus $m \in G(\phi^m(\vec{f}), a) \subset Q(\langle a, \text{Vect}(\vec{f}) \rangle) \subset Q(\langle a, b \rangle)$ donc $m.g \in \bar{Q}^p(a)$.

Comme \vec{f} et \vec{h} sont du même signe, il existe une galerie $\Gamma = \vec{C}_1, \dots, \vec{C}_k$ minimale de \vec{f} à \vec{h} . Notons \vec{m}_i les cloisons traversées par Γ , et α_i les racines correspondantes, avec la convention $\alpha_i(\vec{h}) > 0$. On a $m.g \in P(\vec{C}_1) \cap \bar{Q}(a) \subset P(\vec{m}_1) \cap \bar{Q}^p(a)$, donc par définition de $\bar{Q}^p(a)$, $m.g$ fixe le point $pr_{\vec{m}_1}(a)$ de $\mathcal{I}(Q)$. Puis par 3.2.2, $m.g$ fixe $pr_{\vec{m}_1}(a) + \vec{C}_1$, qui est un demi-appartement de $\mathcal{I}_{\vec{m}_1}$, dirigé par α_1 . Il existe donc $u_1 \in U_{\alpha_1}(a)$ tel que $u_1.m.g$ fixe $A_{\vec{m}_1}$. Comme tout élément de U_{α_1} , u_1 fixe aussi $\bar{A}_{\vec{f}}$, et le fait que $u_1 \in U_{\alpha_1}(a)$ implique $u_1 \in Q(b)$. On construit ainsi $u_1, \dots, u_{k-1} \in U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_{k-1}}$ tels que $u_{k-1} \dots u_1.m.g \in \bar{Q}^p(a) \cap P(\vec{f}) \cap P(\vec{h})$ et $u_{k-1} \dots u_1.m \in Q(\langle a, b \rangle)$. Notons $q = (u_{k-1} \dots u_1.m)^{-1}$. La première relation entraîne $q^{-1}.g \in P(pr_{\vec{h}}(a))$, donc $g.pr_{\vec{h}}(a) = q.pr_{\vec{h}}(a) = pr_{q\vec{h}}(q.a)$. Comme q fixe a et $g.\vec{h} = q.\vec{h}$, on trouve $g.pr_{\vec{h}}(a) = pr_{q\vec{h}}(a)$. \square

Pour l'instant, nous avons pu compléter une famille Q pour qu'elle vérifie (para 2.1⁺) pour les facettes sphériques positives ou négatives, au choix. Nous allons maintenant prouver que la famille \bar{Q} vérifie en fait (para 2.1⁺)(sph), et même (para 2.2⁺)(sph). Ici, il n'est pas du tout évident que (para 2.1⁺)(sph) implique (para 2.2⁺)(sph), car la proposition 3.6.11 ne s'applique pas puisqu'on ne sait pas si \bar{Q} vérifie (para *dec*). Les mêmes idées de démonstration s'appliquent néanmoins, avec un peu de soin.

Pour commencer, on énonce quelques propriétés simples de la projection entre deux immeubles correspondant à deux familles de parahoriques incluses l'une dans l'autre et vérifiant (para 2.2)(sph) et (para *sph*). Cette projection est apparue dans le cas général en 3.3.13.

Lemme 3.8.5. Soient Q et R deux familles de parahoriques vérifiant (para *sph*) et (para 2.2)(sph). On suppose que pour tout $a \in A$, $Q(a) \subset R(a)$. Alors le morphisme surjectif G -équivariant d'immeubles $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}(Q) & \rightarrow & \mathcal{I}(R) \\ [g, a]_Q & \mapsto & [g, a]_R \end{array}$ induit un isomorphisme entre $\mathcal{I}(Q)_{\text{sph}}$ et $\mathcal{I}(R)_{\text{sph}}$, et pour toute facette sphérique \vec{h} , pour tout point a tel que la projection $pr_{\vec{h}}(a)$ est définie, on a $\varphi(pr_{\vec{h}}(a)) = pr_{\vec{h}}(\varphi(a))$.

Preuve du lemme: Il est clair que φ envoie $\mathcal{I}(Q)_{\text{sph}}$ sur $\mathcal{I}(R)_{\text{sph}}$. Montrons qu'elle est injective sur $\mathcal{I}(Q)_{\text{sph}}$. Soient $g, h \in G$, $a, b \in A_{\text{sph}}$ tels que $(g, a) \sim_R (h, b)$. Alors il existe $n \in N$ tel que $b = na$ et $g^{-1}hn \in R(a)$. Mais $R(a) = P(a) = Q(a)$ car R et Q vérifient (para *sph*). D'où $(g, a) \sim_Q (h, b)$.

Lorsque Q et R vérifient (para 2.2)(\vec{h}) pour une certaine facette \vec{h} , la compatibilité entre φ et $pr_{\vec{h}}$ est claire sur la définition. \square

Proposition 3.8.6. Si Q et R sont deux familles de parahoriques comme dans le lemme, alors $\bar{Q} = \bar{R}$, $\bar{Q}^p = \bar{R}^p$ et $\bar{Q}^n = \bar{R}^n$.

Démonstration: Ceci découle du lemme et du fait que la définition de \bar{Q} , \bar{Q}^p , \bar{Q}^n ne fait intervenir que l'action de G sur $I(Q)_{\text{sph}}$. Voici par exemple une preuve pour \bar{Q} :

Soit $a \in A$ et $q \in \bar{Q}(a)$. Soit $\vec{h} \in (\vec{f}_a^*)_{\text{sph}}$, montrons que dans $I(R)$, $q.pr_{\vec{h}}(a) = pr_{q\vec{h}}(a)$. Soit φ la projection de $I(Q)$ sur $I(R)$, alors $a = \varphi(a)$ et $q.pr_{\vec{h}}(a) = q.pr_{\vec{h}}(\varphi(a)) = q.\varphi(pr_{\vec{h}}(a)) = \varphi(q.pr_{\vec{h}}(a)) = \varphi(pr_{q\vec{h}}(a)) = pr_{q\vec{h}}(\varphi(a))$.

Pour l'autre inclusion, soit $q \in \bar{R}(a)$ et $\vec{h} \in (\vec{f}_a^*)_{\text{sph}}$. Alors $q.pr_{\vec{h}}(a) = \varphi^{-1} \circ \varphi(q.pr_{\vec{h}}(a)) = \varphi^{-1}(q.pr_{\vec{h}}(\varphi(a))) = \varphi^{-1}(pr_{q\vec{h}}(\varphi(a))) = pr_{q\vec{h}}(a)$. \square

On étudie maintenant la relation entre \bar{Q} et \bar{Q}^Δ de manière analogue, lorsque Q est une famille vérifiant (para sph)et (para 2.2)(sph) fonctoriellement.

Lemme 3.8.7. *Soit Q une famille de parahoriques vérifiant (para sph)et (para 2.2)(sph) fonctoriellement. Alors l'application*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} I(Q) & \rightarrow & I(Q^\Delta) \\ [g, a]_Q & \mapsto & [(g, a)]_{Q^\Delta} \end{array}$$

est bien définie, G -équivariante, et compatible aux projections (c'est-à-dire $\varphi(pr_{\vec{f}}(a)) = pr_{\vec{f}}(\varphi(a))$ pour toute facette \vec{f} sphérique et tout $a \in A_{\vec{g}}$ avec $\vec{g} \subset \overline{\text{vec } f}$). Elle induit une injection de $I(Q)_{\text{sph}}$ dans $I(Q^\Delta)_{\text{sph}}$, et plus généralement, l'image inverse d'un point $[(g, a)]_{Q^\Delta}$, $a \in A$ et $g \in G$ est de cardinal 1 dès que $G \cap N^\Delta.Q^\Delta(a) = N.Q(a)$.

En conséquence, la famille \bar{Q} vérifie (fonc), autrement dit pour tout $a \in A$, $\bar{Q}^\Delta(a) \cap G = \bar{Q}(a)$.

Preuve du lemme: Les vérifications sont simples, et similaires à celles du lemme et de la proposition précédents. Notons juste quelques mots pour prouver le dernier point :

Soit Δ une extension de Λ , $a \in A$ et $q \in \bar{Q}^\Delta \cap G$, montrons que $q \in \bar{Q}(a)$. Soit \vec{f} une facette sphérique de \vec{f}_a^* , montrons que $q.pr_{\vec{f}}(a) = pr_{q\vec{f}}(a)$. Pour commencer, $q.pr_{\vec{f}}(a) = q.pr_{\vec{f}}(\varphi^{-1}(\varphi(a)))$, où nous notons $\varphi^{-1}(\varphi(a))$ un antécédent quelconque de $\varphi(a)$. Sachant que $\varphi(q.pr_{\vec{f}}(\varphi^{-1}(\varphi(a)))) = q.pr_{\vec{f}}(\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(a)))) = q.pr_{\vec{f}}(\varphi(a))$, on en déduit que $q.pr_{\vec{f}}(\varphi^{-1}(\varphi(a)))$ est l'unique antécédent par φ de $q.pr_{\vec{f}}(\varphi(a))$, autrement dit $q.pr_{\vec{f}}(\varphi^{-1}(\varphi(a))) = \varphi^{-1}(q.pr_{\vec{f}}(\varphi(a)))$ (l'unicité vient de la première partie du lemme, car $q.pr_{\vec{f}}(\varphi(a))$ est un point sphérique). Maintenant, le fait que $q \in \bar{Q}^\Delta(a)$ entraîne $q.pr_{q\vec{f}}(\varphi(a)) = pr_{q\vec{f}}(\varphi(a))$. Et comme précédemment, on vérifie que $\varphi^{-1}(pr_{q\vec{f}}(\varphi(a))) = pr_{q\vec{f}}(a)$. \square

Proposition 3.8.8. *Soit Q une famille de parahoriques vérifiant fonctoriellement (para sph)et (para 2.2)(sph). On suppose que la famille minimale P vérifie également fonctoriellement (para 2.2) sur les cloisons. Alors \bar{Q} vérifie (para 2.1⁺)(sph) et (para 2.2⁺)(sph).*

Démonstration:

On notera R^p et R^n les familles de parahoriques obtenues comme dans le lemme 3.8.2 à partir de \bar{Q}^p et \bar{Q}^n . Comme elles vérifient fonctoriellement (para dec), la proposition 3.2.10 entraîne qu'elles vérifient (para 2.2)(sph). Alors la proposition 3.8.6 entraîne $\bar{R}^p = \bar{R}^n = \bar{Q}$. Ainsi, pour tout $a \in A$, $R^p(a) \subset \bar{Q}(a) \subset \bar{Q}^p(a)$ et $R^n(a) \subset \bar{Q}(a) \subset \bar{Q}^n(a)$. De plus, par définition de R^p et R^n , pour toute facette \vec{f} sphérique positive, $\bar{Q}^p(a) \cap U(\vec{f}) \subset R^p(a)$, et pour toute facette \vec{f} sphérique négative, $\bar{Q}^n(a) \cap U(\vec{f}) \subset R^n(a)$.

Prouvons (para 2.2⁺)(sph). Soit $a \in A$ et \vec{f} une facette sphérique, soit $g \in \bar{Q}(a) \cap N.P(\vec{f})$. Soit Δ une extension de Λ et $n \in N^\Delta(a)$ tel que $ng \in P^\Delta(\vec{f}) \cap \bar{Q}^\Delta(a)$. Par (para 2.1)(\vec{f}), (para sph), puis comme $pr_{\vec{f}}(a)$ est sphérique, $ng \in P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a)) = N^\Delta(pr_{\vec{f}}(a)).U^\Delta(\vec{f}).G^\Delta(\phi^m(\vec{f}), a)$. Quite à modifier n , on peut supposer $ng \in T^\Delta.U^\Delta(\vec{f}).G^\Delta(\phi^m(\vec{f}), a)$. Soit $q \in G^\Delta(\phi^m(\vec{f}), a)$ tel que $ngq \in T^\Delta \rtimes U^\Delta(\vec{f}) \cap \bar{Q}^\Delta(a)$. Notons t le facteur dans T^Δ .

Soit \vec{m} une cloison de $\vec{f}^* \cap \vec{A}$, alors $ngq \in \bar{Q}^\Delta(a) \cap P^\Delta(\vec{m})$ et par (para 2.1)(\vec{m}) et (para sph), $ngq \in P^\Delta(pr_{\vec{m}}(a)) \cap t.U^\Delta(\vec{f})$. Soit α la racine contenant \vec{f} et dont le noyau contient \vec{m} , alors ngq agit sur l'immeuble affine $I_{\vec{m}}$ comme un élément de $t.U_\alpha^\Delta \subset T^\Delta.U_\alpha^\Delta$ qui fixe $pr_{\vec{m}}(a)$. Ceci implique que t fixe $pr_{\vec{m}}(a)$, donc t fixe $A_{\vec{m}}$. Ceci étant pour toute cloison

\vec{m} de $\vec{f}^* \cap \vec{A}$, on obtient $t \in H^\Delta$.

Ainsi $ngq \in H^\Delta \cdot U(\vec{f}) \cap \bar{Q}^\Delta(a)$. Soit $h \in H^\Delta$ tel que $hngq \in U^\Delta(\vec{f}) \cap \bar{Q}^\Delta(a) \subset U^\Delta(\vec{f}) \cap \bar{Q}^{\epsilon\Delta}(a) = U^\Delta(\vec{f}) \cap \overline{\bar{Q}^{\epsilon\Delta}(a + \vec{f})}$ car $\bar{Q}^{\epsilon\Delta}$ vérifie (para 2.1⁺)(\vec{f}). Mais $U^\Delta(\vec{f}) \cap \bar{Q}^{\epsilon\Delta}(a + \vec{f}) \subset R^{\epsilon\Delta}(a + \vec{f})$. Par ailleurs, h et q sont dans $R^{\epsilon\Delta}(a + \vec{f})$, d'où $ng \in R^{\epsilon\Delta}(a + \vec{f})$.

On est arrivé à $g \in G \cap N^\Delta \cdot \overline{R^{\epsilon\Delta}(a + \vec{f})}$. Soit F la facette de A basée en a dont la direction contient \vec{f} . Soit $g = un'q$ une écriture de g dans la décomposition d'Iwasawa $G = U(\vec{C}) \cdot N \cdot R^\epsilon(F)$. C'est en particulier une écriture de g pour la décomposition $G^\Delta = U^\Delta(\vec{C}) \cdot N^\Delta \cdot R^{\epsilon\Delta}$. Comme R^ϵ vérifie (para *dec*), la proposition 3.4.5 implique $n \in n' \cdot N^\Delta(F) \subset n' \cdot R^{\epsilon\Delta}(a + \vec{f})$. Donc $g \in G \cap N \cdot R^{\epsilon\Delta}(a + \vec{f}) = N \cdot (G \cap R^{\epsilon\Delta}(a + \vec{f}))$. Mais $G \cap R^{\epsilon\Delta}(a + \vec{f}) \subset G \cap \bar{Q}^\Delta(a + \vec{f}) = \bar{Q}(a + \vec{f})$ car \bar{Q} vérifie (fonc)par le lemme précédent. Ceci prouve (para 2.2⁺)(sph).

La propriété (para 2.1⁺)(sph) est alors simple conséquence de la proposition 3.6.11. \square

Nous avons en particulier prouvé que \bar{Q} vérifie (para 2.2)(sph), on peut donc appliquer la proposition 3.8.6 à P et \bar{Q} , on obtient $\bar{Q} = \bar{P}$.

Ainsi, \bar{P} est l'unique famille maximale de parahorique vérifiant (para *sph*)et (para 2.2)(sph).

Elle existe dès que P vérifie (para 2.2)(sph), ce qui est le cas au moins dans le cadre d'un groupe de Kac-Moody déployé (ou presque déployé comme on le verra). Elle vérifie (para *sph*), (para 2.1⁺)(sph) et (para 2.2⁺)(sph), et ceci entraîne (para *inj*). On ne sait pas si elle vérifie (para *dec*), cependant elle contient deux sous-familles R^p et R^n qui vérifient (para *dec*)et qui sont définies par $R^p(a) = (\bar{P}(a) \cap U(\vec{C})) \cdot (P(a) \cap U(-\vec{C})) \cdot N(a)$ et $R^n(a) = (\bar{P}(a) \cap U(-\vec{C})) \cdot (P(a) \cap U(\vec{C})) \cdot N(a)$, pour n'importe quelle chambre positive \vec{C} .

Comme \bar{P} est la plus grande famille de parahorique vérifiant (para 2.2)(sph) et (para *sph*), on peut donc penser qu'il s'agit de la famille de parahoriques vérifiant un maximum de condition de type (para x), c'est pourquoi dans la suite, sauf indication contraire, la famille de parahoriques considérée sera toujours \bar{P} .

3.9 Intersection d'appartements

On passe maintenant à l'étude de (para 6). On a vu en s'appuyant sur la décomposition de Lévi de $Q(\Omega)$, que cette condition est vérifiée pour des parties $\Omega \subset A$ contenant un point sphérique positif et un point sphérique négatif. Nous allons maintenant étudier le cas d'une partie Ω composée de points sphériques d'un même signe.

Proposition 3.9.1. *Soit $\Omega \subset A_{sph}$. Alors :*

$$Q(\Omega) = N_\Omega \cdot Q(Cl(\Omega) \cap A_{sph})$$

De plus, tout $g \in Q(\Omega)$ fixe modulo N une partie de la forme $\bigcup_{\omega \in \Omega_0} \overline{\omega + Cl(\vec{\Omega})}$, avec Ω_0 une partie de \mathring{A} telle que pour tout $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{\Omega})$, $pr_{\vec{f}}(\Omega_0) = Cl(\Omega) \cap A_{\vec{f}}$.

Remarque: Le premier point est en fait la proposition 3.9 de [Rou06], adaptée au contexte présent.

Démonstration:

L'inclusion " \supset " est claire.

Soit $g \in Q(\Omega)$. En particulier, $g \in P(Cl(\vec{\Omega}))$. Comme Q vérifie (para 2.1)(sph), et grâce à 3.2.2, point 2, il existe un choix $C \in \mathcal{C}$ tel que défini dans le lemme 3.1.10, tel que $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega'(C)} N_{\vec{f}_\omega} \cdot Q(\omega)$, où \vec{f}_ω est la direction de la façade contenant ω , et où $\Omega'(C)$ est l'intersection de $\Omega^\infty(C)$ avec l'union des façades sphériques de direction incluse dans

$\text{Cl}(\vec{\Omega})$. Lorsque \vec{f} est une facette sphérique de $\text{Cl}(\vec{\Omega})$, on obtient alors $g \in N_{\vec{f}} \cdot \mathcal{Q}(\text{Cl}(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}}) \cap A_{\vec{f}})$. Or la partie $\text{Cl}(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}}) \cap A_{\vec{f}}$ contient $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}}$, d'après le lemme 3.1.10, d'où $g \in N_{\vec{f}} \cdot \mathcal{Q}(\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}})$.

Nous voulons maintenant prouver le résultat similaire lorsque \vec{f} est une facette sphérique de $\overline{\text{Cl}(\vec{\Omega})}$. Supposons qu'il existe \vec{f} une telle facette non incluse dans $\text{Cl}(\vec{\Omega})$. Quitte à projeter \vec{f} sur une facette adéquate de $\text{Cl}(\vec{\Omega})$ de codimension 1, on peut supposer qu'une face \vec{m} de \vec{f} de codimension 1 est incluse dans $\text{Cl}(\vec{\Omega})$. La facette \vec{m} est dans l'intérieur de l'enclos de $\Omega \cup \vec{f}$ (pour la topologie induite), elle est donc sphérique. Le fait que $\vec{f} \not\subset \text{Cl}(\vec{\Omega})$ signifie qu'il existe $\alpha \in \phi(\vec{\Omega})$ telle que $\alpha(\vec{f}) < 0$. Tout demi-appartement dirigé par α ne contient aucun point de $A_{\vec{f}}$, or $\vec{f} \subset \overline{\text{Cl}(\vec{\Omega})}$, ceci implique qu'aucun demi-appartement dirigé par α ne contient Ω . Il existe donc $(\omega) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha(\omega_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} -\infty$ et $\alpha(\omega_n) \in \mathbb{R}$ pour tout n . La facette \vec{m} est maximale dans $\text{Cl}(\vec{\Omega}) \cap \ker(\alpha)$, donc tous les ω_n ont un projeté ω'_n dans $A_{\vec{m}}$. Comme \vec{m} est sphérique, $A_{\vec{m}}$ est compact, et la suite (ω') a une valeur d'adhérence ω_∞ dans $A_{\vec{m}}$. Comme $\alpha(\omega_\infty) = -\infty$, ω_∞ est dans une facette $\vec{g} \not\subset \text{Cl}(\vec{\Omega})$, sphérique. Or, par (para 2.1), g fixe tous les ω'_n , $n \in \mathbb{N}$, puis comme \vec{g} est sphérique, g fixe $\text{Cl}\{\omega'_n | n \in \mathbb{N}\}$. Donc g fixe un cône $c \subset A_{\vec{m}}$ tel que $\omega_\infty = [c]_{A_{\vec{m}}}$.

$g \in \mathcal{Q}(\omega_\infty) \subset P(\vec{g})$, on peut donc rajouter ω_∞ à Ω , et \vec{g} à $\vec{\Omega}$. On arrive ainsi à prouver que $g \in P(\overline{\text{Cl}(\vec{\Omega})})$.

Alors il existe un choix $C \in \mathcal{C}$ et $\Omega^\infty(C)$, comme définis cette fois à la proposition 3.1.8, tels que $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega^\infty(C)} N_{\vec{\omega}} \mathcal{Q}(\omega)$. Donc pour chaque facette sphérique de $\overline{\text{Cl}(\vec{\Omega})}$, $g \in N_{\vec{f}} \cdot \mathcal{Q}(A_{\vec{f}} \cap \text{Cl}(A_{\vec{f}} \cap \Omega^\infty(C)))$, or $A_{\vec{f}} \cap \text{Cl}(A_{\vec{f}} \cap \Omega^\infty(C))$ contient $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}}$, d'après la proposition 3.1.8. On conclut alors grâce à la proposition 3.6.7 que $g \in N_{\vec{\Omega}} \cdot \mathcal{Q}(\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\text{sph}})$.

Ensuite, par 3.2.2 et 3.1.8, on obtient que g fixe modulo un $n \in N_{\vec{\Omega}}$, une partie V contenant $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\text{sph}}$ ainsi qu'un voisinage de $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\text{sph}}$ dans chaque $\text{Aff}_A(\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}})$ pour $\vec{f} \subset \overline{\text{Cl}(\vec{\Omega})} \setminus \vec{A}_{\text{sph}}$. \square

3.10 Indépendance par rapport au tore maximal

Pour construire les mesures pour G , on est parti d'un tore maximal T_0 et d'une famille de parahoriques sur $A(T_0)$. Le but de cette partie est de vérifier qu'on obtient bien les mêmes mesures quel que soit le tore maximal choisi au départ.

Plus précisément, si $T' = gT_0g^{-1}$ est un autre tore maximal de G , alors l'application $\alpha \mapsto (t \mapsto \alpha(g^{-1}tg))$ est un isomorphisme de T_0^* sur T'^* qui envoie $\phi(T_0)$ sur $\phi(T')$, et l'application $c \mapsto (k \mapsto gc(t)g^{-1})$ est un isomorphisme de T_{0*} sur T'^* , qui induit un isomorphisme d'appartements vectoriels entre $\vec{A}(T_0)$ et $\vec{A}(T')$. Comme on a fixé des origines $o \in A(T_0)$ et $o' \in A(T')$, cet isomorphisme définit ensuite un unique isomorphisme d'appartements entre $A(T_0)$ et $A(T')$.

On note encore g ces applications. Rappelons que pour $\chi \in T_0^*$ et $\phi \in T_{0*}$, on a $(g \cdot \chi)(\phi) = \chi(g^{-1}\phi)$.

Pour $\alpha \in \phi(T_0)$, on a $gU_\alpha g^{-1} = U_{g\alpha}$. Notons $u_{g\alpha} : \begin{matrix} \mathbb{K} & \rightarrow & U_{g\alpha} \\ k & \mapsto & gu_\alpha(k)g^{-1} \end{matrix}$, c'est un choix possible d'isomorphisme entre $(\mathbb{K}, +)$ et $U_{g\alpha}$. Il entraîne que $gU_{\alpha,\lambda}g^{-1} = U_{g\alpha,\lambda}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Lemme 3.10.1. *Avec ce choix pour $u_{g\alpha}$, pour tout $a \in A(T')$, $gN(T_0)_{g^{-1}ag^{-1}} = N(T')_a$. De plus, pour tout $\alpha \in \phi(T_0)$ et $\lambda \in \Lambda$, $g \cdot \mathcal{D}(\alpha, \lambda) = \mathcal{D}(g\alpha, \lambda)$.*

Preuve du lemme:

Pour le premier point, il suffit de montrer que $(gng^{-1}) \cdot (gb) = g \cdot (nb)$ pour tout $n \in N(T_0)$ et $b \in A(T_0)$. A n fixé, les deux applications $b \mapsto (gng^{-1}) \cdot (gb)$ et $b \mapsto g \cdot (nb)$ sont des isomorphismes d'appartements. Il est déjà connu que leurs parties vectorielles coïncident, il suffit donc de prouver le résultat pour $b = o$ l'origine fixée dans $A(T_0)$.

Le groupe $N(T_0)$ se décompose en un produit $N(T_0) = T_0 \cdot N(T_0)_o$ où $N(T_0)_o$ est le groupe engendré par les $n_\alpha(\pm 1)$, $\alpha \in \phi(T_0)$, et ce groupe fixe o , par définition de l'action de $N(T_0)$ sur $A(T_0)$ (voir [Rou06], 2.8 et 2.9). Soit $n = tn_o$ une écriture de n dans ce produit, alors $g.(n.o) = g.(t.o)$ et $(gn_g^{-1}).(go) = (gtg^{-1}gn_o g^{-1}).o'$. Avec le choix pris pour l'isomorphisme $u_{g\alpha}$, on voit que $gN(T_0)_o g^{-1} = N(T')_{o'}$, et par conséquent $gn_o g^{-1}.o' = o'$. Il ne reste plus qu'à montrer que $gtg^{-1}.o' = g.(t.o)$.

Par définition, $to = o + \vec{v}_t$ où $\vec{v}_t \in T_{0*} \otimes \mathbb{R}$ est défini par $\chi(\vec{v}_t) = -\omega(\chi(t))$, pour tout $\chi \in T_0^*$. De même, $gtg^{-1}.o' = o' + \vec{v}_{gtg^{-1}}$, et $\vec{v}_{gtg^{-1}}$ est défini par $\chi(\vec{v}_t) = -\omega(\chi(gtg^{-1}))$, pour tout $\chi \in T'^*$. Comme $g.o = o'$, nous voulons juste vérifier que $g.\vec{v}_t = \vec{v}_{gtg^{-1}}$. Or pour $\chi \in T'^*$, $\chi(g.\vec{v}_t) = (g^{-1}\chi)(\vec{v}_t) = -\omega((g^{-1}\chi)(t)) = -\omega(\chi(gtg^{-1}))$. D'où $g.\vec{v}_t = \vec{v}_{gtg^{-1}}$.

Passons au deuxième point. Il suffit en fait de prouver que $(g.\alpha)(g.a) = \alpha(a)$, pour tout $a \in A(T_0)$. Ecrivons a sous la forme $a = o + \vec{v}$, avec $\vec{v} \in T_{0*} \otimes \mathbb{R}$. Alors $(g.\alpha(g(o + \vec{v}))) = (g.\alpha(o' + g.\vec{v})) = (g.\alpha)(g.\vec{v}) = \alpha(\vec{v}) = \alpha(o + \vec{v})$. \square

Proposition 3.10.2. *Si $Q = (Q(a)_{a \in A(T_0)})$ est une famille de parahoriques sur $A(T_0)$, alors $g.Q := (gQ(g^{-1}b)g^{-1})_{b \in A(T')}$ est une famille de parahoriques sur $A(T')$. De plus, pour $n \in \llbracket 2, 7 \rrbracket$, elle vérifie la condition (para n) si et seulement si Q la vérifie.*

Les immeubles I_Q et $I_{g.Q}$ sont isomorphes, par l'application induite par

$$\begin{aligned} G \times A(T_0) &\rightarrow G \times A(T') \\ (h, a) &\mapsto (hg^{-1}, ga) \end{aligned}$$

Démonstration:

Pour tout $n \in \llbracket 0, 7 \rrbracket$, il s'agit de voir que si Q vérifie (para n), alors $g.Q$ aussi.

Pour (para 0) : Soit $a \in A(T')_{\vec{f}}$, alors $g^{-1}.a \in A(T_0)_{g^{-1}\vec{f}}$. Par (para 0) pour Q , $U(g^{-1}\vec{f}) \subset Q(g^{-1}a) \subset P(\vec{f})$, puis $U(\vec{f}) \subset gQ(g^{-1}a)g^{-1} \subset P(\vec{f})$.

Les autres vérifications sont tout aussi simples, en se servant du lemme pour (para 1). \square

4 Mesure complète pour un groupe de Kac-Moody presque déployé

4.1 Rappels et notations pour les groupes de Kac-Moody

Nous nous référons pour les groupes de Kac-Moody à [Ré02]. Soit G un groupe de Kac-Moody sur \mathbb{K} , presque déployé, déployé sur \mathbb{K}_s . Il s'agit donc d'un foncteur des \mathbb{K} -algèbres vers les groupes, qui coïncide avec le foncteur constructif de Tits sur les \mathbb{K}_s -algèbres. Le groupe de Galois Γ agit sur $G(\mathbb{K}_s)$ et sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , en vérifiant $Ad(\sigma g) = \sigma \circ Ad(g) \circ \sigma^{-1}$ pour $\sigma \in \Gamma$ et $g \in G$. On a de plus $G(\mathbb{K}) = G(\mathbb{K}_s)^\Gamma$.

Pour chaque tore maximal $T = T(\mathbb{K}_s)$, on note T^* son groupe de caractères et T_* son groupe de cocaractères. Il existe une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : T^* \times T_* \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $\langle \chi, h \rangle = n$ si $\chi \circ h(k) = k^n$ pour tout $k \in \mathbb{K}_s$.

A chaque tore maximal T correspond un système de racines $\phi^c(T) \subset T^*$. Une racine est soit réelle, soit imaginaire, on note $\phi(T)$ l'ensemble des racines réelles, et $\phi^{im}(T)$ celui des racines imaginaires. L'ensemble $\phi^c(T)$ est appelé le système complet de racines. Dans la suite, ce sera le plus souvent $\phi(T)$ qui interviendra, ce qui explique qu'on ait

choisi la notation la plus courte pour le désigner.

A chaque racine réelle $\alpha \in \phi(T)$ correspond un sous-groupe U_α de G , isomorphe à $(\mathbb{K}_s, +)$. Il existe une action de G sur l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\mathbb{K}_s)$, appelée action adjointe et notée Ad , ainsi qu'un choix des isomorphismes $(u_\alpha)_{\alpha \in \phi}$ entre les U_α et $(\mathbb{K}_s, +)$ tels que pour $\alpha \in \phi$, $Ad(u_\alpha(k)) = \exp(ad(ke_\alpha)) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$, où $(e_\alpha)_{\alpha \in \phi}$ est une partie d'une base de Chevalley de \mathfrak{g} . Le tore T agit diagonalement, par $Ad(t).e_\alpha = \alpha(t).e_\alpha$.

Le groupe U_α est normalisé par T , plus précisément, la formule suivante est vérifiée pour $t \in T$ et $u \in U_\alpha$:

$$tu_\alpha(k)t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t).k)$$

On note $N(T)$ le normalisateur de T , il est engendré par T et les éléments $n_\alpha(k) := u_{-\alpha}(k^{-1})u_\alpha(k)u_{-\alpha}(k^{-1})$ pour $\alpha \in \phi$ et $k \in \mathbb{K}_s$. On note également $W(T) = N(T)/T$ le groupe de Weyl vectoriel relatif à T . La paire $(W(T), (n_\alpha(1).T)_{\alpha \in \pi})$ forme un système de Coxeter pour toute base Π de ϕ .

Tout ceci entraîne que la famille $(T, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi(T)})$ est une donnée radicielle pour G au sens de [Rou06] (ou "donnée radicielle jumelée entière" au sens de [Ré02]).

4.2 Le cas déployé

Comme nous l'avons déjà dit, la famille minimale de parahorique $\mathcal{P} = (P(a))_{a \in A}$ pour une donnée radicielles valuée venant d'un groupe de Kac-Moody déployé vérifie les conditions (para *dec*), (para *inj*), (para 2.1)(sph), et (para 2.2)(sph). Son complété $\hat{\mathcal{P}}$ vérifie en outre (para 2.1⁺) et (para 2.2⁺)(sph). Sauf mention du contraire, on notera $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\hat{\mathcal{P}})$.

Remarquons que lorsque $x \in A(T)_{sph}$, le groupe $P(x)$ coïncide avec le groupe $\hat{P}(x)$ défini par Guy Rousseau dans [Rou06]. Par ailleurs, le groupe $P(\Omega)$ est présentement par définition $\bigcap_{\omega \in \Omega} P(\omega)$ alors que dans [GR08], c'est le groupe engendré par les $U_\alpha(\Omega)$ et les $n_\alpha(k)$ tels que $\Omega \subset M(\alpha, \omega(k))$.

4.3 Topologie de Γ

On suppose désormais \mathbb{K} muni d'une valuation non triviale $\omega : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$. Soit $\bar{\mathbb{K}}_s \subset \bar{\mathbb{K}}$ la clôture séparable de \mathbb{K}_s , et $\Gamma = \mathcal{G}al(\bar{\mathbb{K}}_s, \bar{\mathbb{K}})$. On suppose \mathbb{K} complet, ce qui entraîne en particulier que ω se prolonge de manière unique à $\bar{\mathbb{K}}_s$, la valuation obtenue est alors nécessairement Γ -stable. On note $\Lambda = \omega(\bar{\mathbb{K}}_s)$ et $\Lambda_{\mathbb{K}} = \omega(\mathbb{K})$.

On a $\Gamma = \varprojlim \{ \mathcal{G}al(\mathbb{E}|\mathbb{K}) \mid \mathbb{E} \text{ extension galoisienne finie de } \mathbb{K} \}$, et la topologie de Γ est induite par la topologie produit sur $\prod \{ \mathcal{G}al(\mathbb{E}|\mathbb{K}) \mid \mathbb{E} \text{ extension galoisienne finie de } \mathbb{K} \}$. Une base d'ouverts est donc l'ensemble des $\{ \sigma \in \Gamma \mid \sigma|_{\mathbb{E}} = \sigma_0 \}$ pour \mathbb{E} une extension galoisienne finie de \mathbb{K} et $\sigma_0 \in \mathcal{G}al(\mathbb{E}|\mathbb{K})$. Les sous-groupes ouverts de Γ sont donc d'indice fini, et lorsque Γ agit continuellement sur un ensemble discret, les orbites sont finies.

4.4 L'immeuble vectoriel rationnel

Le groupe de Galois Γ agit par définition d'un groupe presque déployé sur G et sur son algèbre de lie \mathfrak{g} , en vérifiant $\sigma(Ad(g).x) = Ad(\sigma g).\sigma x$ pour $g \in G$ et $x \in \mathfrak{g}$. Ceci définit une action de Γ sur $\vec{\mathcal{I}}$, par automorphismes d'immeubles, qui préserve les immeubles positif et négatif, mais qui ne préserve pas le type des facettes.

Les appartements de l'immeuble $\vec{\mathcal{I}}(\mathbb{K})$, qu'on appelle des \mathbb{K} -appartements vectoriels, sont les parties maximales de $\vec{\mathcal{I}}(\mathbb{K})$ de la forme $\vec{V} \cap \vec{A}(T)$ avec \vec{V} un sous-espace vectoriel de $\vec{Y}(T)$ rencontrant l'intérieur de $\vec{A}(T)$. Ils sont en bijection avec l'ensemble des tores \mathbb{K} -déployés maximaux de $G(\mathbb{K})$. Comme Γ ne respecte pas les types, un \mathbb{K} -appartement n'est

généralement pas une réunion de facettes de \vec{I} . Un appartement de $\vec{I}(\mathbb{K})$ est toujours inclus dans un appartement de \vec{I} qui est Γ -stable, ceci correspond à l'inclusion d'un tore \mathbb{K} -déployé maximal dans un tore maximal défini sur \mathbb{K} . Réciproquement, si $T_d \subset T$ est l'inclusion d'un tore déployé maximal dans un tore maximal défini sur \mathbb{K} , alors $\vec{A}(T)$ est un appartement Γ -stable, dont le lieu des points fixes sous Γ est $\vec{A}_{\mathbb{K}}(T_d)$. Le fixateur du \mathbb{K} -appartement $\vec{A}_{\mathbb{K}}(T_d)$ est le centralisateur de T_d , noté $Z(T_d)$. Le fixateur de $\vec{A}_{\mathbb{K}}(T_d)$ dans $G(\mathbb{K})$ est donc $G(\mathbb{K}) \cap Z(T_d) = Z(T_d)^\Gamma$ qu'on notera $Z_{\mathbb{K}}(T_d)$.

Soit $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ un \mathbb{K} -appartement vectoriel inclus dans un appartement vectoriel \vec{A} . Les \mathbb{K} -facettes de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ sont les $f^\Gamma = \vec{f} \cap \vec{A}_{\mathbb{K}}$ pour \vec{f} une facette coupant $\vec{A}_{\mathbb{K}}$. Lorsque \vec{f} est sphérique, la \mathbb{K} -facette f^Γ est dite sphérique. Les \mathbb{K} -murs de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ sont les $\vec{M} \cap \vec{A}_{\mathbb{K}}$ pour \vec{M} un mur de \vec{A} ne contenant pas $\vec{A}_{\mathbb{K}}$. Un \mathbb{K} -mur est réel s'il contient une \mathbb{K} -facette sphérique, autrement dit s'il coupe l'intérieur de $\vec{A}(T)$. Les \mathbb{K} -racines relativement à $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ sont les restrictions à $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ des racines relatives à \vec{A} . Les \mathbb{K} -racines géométriques sont les intersections non triviales d'un demi-appartement de A et de $A_{\mathbb{K}}$. Une \mathbb{K} -racine est dite réelle si elle induit un \mathbb{K} -mur réel. L'ensemble des \mathbb{K} -racines réelles par rapport à un tore T_d forme un système de racines, noté $\phi_{\mathbb{K}}(T_d)$ qui n'est plus nécessairement réduit. Son groupe de Weyl est $N_{\mathbb{K}}(T_d)/Z_{\mathbb{K}}(T_d)$. L'ensemble des \mathbb{K} -racines géométriques, noté $\phi_{\text{géo}\mathbb{K}}(T_d)$ est un système de racines au sens large (au sens des demi-complexes de Coxeter, où la notion de réduction n'a plus de sens). A chaque \mathbb{K} -racine réelle $\alpha_{\mathbb{K}}$ est associé un sous-groupe radiciel $U_{\alpha_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K})$ de $G(\mathbb{K})$, et la famille $(Z(T_d)(\mathbb{K}), (U_{\alpha_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}))_{\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}(T_d)})$ est une donnée radicielle pour $G(\mathbb{K})$. L'immeuble obtenu à partir de cette donnée radicielle n'est pas toujours exactement \vec{I}^Γ : il peut y avoir dans \vec{I}^Γ des facettes non sphériques en plus (voir [Ré02] 12.4.4 et 13.4.2).

4.5 L'appartement rationnel

On veut maintenant définir une mesure pour un groupe de Kac-Moody presque déployé $G(\mathbb{K})$. Pour utiliser la partie 3, il nous suffit de montrer que $G(\mathbb{K})$ admet une donnée radicielle valuée, puis de trouver une famille de parahoriques adéquate. En fait, nous allons définir directement une (supposée) mesure $I(\mathcal{Q})_{\mathbb{K}}$ à l'intérieur de $I(\mathcal{Q})$, la mesure du groupe de Kac-Moody déployé $G(\mathbb{K}_s)$ pour une famille de parahoriques \mathcal{Q} . On sait déjà que $G(\mathbb{K})$ dispose d'une donnée radicielle, sa valuation sera construite géométriquement, exactement comme dans le cas classique. La famille de parahoriques sur un appartement $A_{\mathbb{K}}(T_d)$ sera simplement la famille $\mathcal{Q}_{\mathbb{K}} = (Q(a)^\Gamma)_{a \in A_{\mathbb{K}}(T_d)}$, où $(Q(a)_{a \in I(\mathbb{K}_s)})$ est la famille de parahoriques de $I(\mathbb{K}_s)$. On vérifiera alors que la définition abstraite de $I(\mathcal{Q}_{\mathbb{K}})$ coïncide avec celle de $I(\mathcal{Q})_{\mathbb{K}}$. Tous les résultats de la partie 3 pourront alors s'appliquer.

4.5.1 Action de Γ sur A

On choisit $T_d \leq T_0$ un tore \mathbb{K} -déployé maximal dans un tore \mathbb{K} -défini. On note $\vec{Y}_0 = \vec{Y}(T_0)$ et $Y_0 = Y(T_0)$. Le fait que T_0 est défini sur \mathbb{K} implique que \vec{Y}_0 est Γ -stable, et que Γ permute les racines et les sous-groupes radiciels relatifs à T_0 , de manière compatible à son action sur l'algèbre de Lie. On a précisément, pour $\sigma \in \Gamma$ et $\alpha \in \phi(T_0)$:

$$\sigma u_\alpha(k) = u_{\sigma\alpha}(\sigma(k).k_\alpha^\sigma)$$

où k_α^σ est défini par $\sigma.e_\alpha = k_\alpha^\sigma.e_{\sigma\alpha}$.

D'où

$$\sigma U(\alpha, \lambda) = U(\sigma\alpha, \lambda + \omega_\alpha^\sigma)$$

où $\omega_\alpha^\sigma \in \Lambda$ vaut $\omega(k_\alpha^\sigma)$.

Par conséquent, on veut définir une action de Γ sur A_0 telle que σ envoie $\mathcal{D}(\alpha, \lambda)$ sur $\mathcal{D}(\sigma\alpha, \lambda + \omega_\alpha^\sigma)$. Cette action doit être compatible avec l'action vectorielle de Γ sur \vec{Y}_0 , il ne reste donc qu'à déterminer l'image du point o . Voici en quelques mots la justification de la définition qui va suivre :

Nous voulons $\sigma M(\alpha, \lambda) = M(\sigma\alpha, \lambda + \omega_\alpha^\sigma)$, c'est-à-dire

$$\{\sigma x \in Y_0 \mid \alpha(x) + \lambda = 0\} = \{x \in Y_0 \mid \sigma\alpha(x) + \lambda + \omega_\alpha^\sigma = 0\}$$

Il faut donc que $\alpha(\sigma^{-1}(x)) = (\sigma\alpha)(x) + \omega_\alpha^\sigma$, et ce pour tout $\alpha \in \phi$. Soit $\vec{u} \in \vec{Y}_0$ tel que $x = o + \vec{u}$, alors $(\sigma\alpha)(x) = (\sigma\alpha)(\vec{u}) = \alpha(\sigma^{-1}(\vec{u}))$. D'autre part, si nous définissons une action affine de σ sur Y , dont la partie vectorielle coïncide avec l'action déjà connue de σ sur \vec{Y}_0 , nous aurons $\sigma^{-1}(x) = o + \overrightarrow{o\sigma^{-1}(o)} + \sigma^{-1}(\vec{u})$, puis $\alpha(\sigma^{-1}(x)) = \alpha(\overrightarrow{o\sigma^{-1}(o)}) + \alpha(\sigma^{-1}(\vec{u}))$. Finalement, il nous faut faire en sorte que $\alpha(\overrightarrow{o\sigma^{-1}(o)}) = \omega_\alpha^\sigma$.

Lemme 4.5.1. *Soit $\sigma \in \Gamma$, on note $\omega_\alpha = \omega_\alpha^\sigma$ pour $\alpha \in \phi(T_0)$. Soient $\alpha, \beta \in \phi$, $s \in S$ tels que $\alpha = s.\beta = \beta - \langle \beta, h_s \rangle \alpha$. Alors $\omega_\alpha = \omega_{\beta - \langle \beta, h_s \rangle \alpha}$.*

Preuve du lemme: On note pour $\gamma \in \phi(T_0)$, $k_\gamma = k_\gamma^\sigma$, donc $\omega_\gamma = \omega(k_\gamma)$. On note également $k_s = k_s^\sigma$, et on reprend les notations de [Ré02] partie 7.

Puisque $\alpha = s.\beta$, on a $e_\alpha = \pm s^* e_\beta = \pm Ad(n_{\alpha_s}(1)).e_\beta$. (La notation s^* désigne l'automorphisme de \mathfrak{g} qui relève l'élément du groupe de Weyl $s \in W(\phi)$, c'est-à-dire $s^* = \exp(ad_{f_s}) \exp(ad_{e_s}) \exp(ad_{f_s})$). Appliquant σ à cette égalité, on trouve :

$$\begin{aligned} k_\alpha e_{\sigma\alpha} &= \pm Ad(\sigma(n_{\alpha_s}(1))).\sigma(e_\beta) \\ &= \pm k_\beta Ad(n_{\sigma\alpha_s}(k_s))e_{\sigma\beta} \\ &= \pm k_\beta Ad(n_{\sigma\alpha_s}(1)).k_s^{-h_{\sigma s}} e_{\sigma\beta} \\ &= \pm k_\beta k_s^{-\langle b, h_s \rangle} Ad(n_{\sigma\alpha_s}(1)).e_{\sigma\beta} \\ &= \pm \pm k_\beta k_s^{-\langle b, h_s \rangle} e_{\sigma(s).\sigma(\beta)} \\ &= \pm \pm k_\beta k_s^{-\langle b, h_s \rangle} e_{\sigma\alpha} \end{aligned}$$

D'où $\omega_\alpha = \omega_{\beta - \langle b, h_s \rangle \alpha}$. □

Pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe $\vec{v}_\sigma \in \vec{Y}_0$ tel que $\alpha_s(\vec{v}_\sigma) = \omega_{\alpha_s}^{\sigma^{-1}}$. Alors d'après le lemme, on a aussi $\alpha(\vec{v}_\sigma) = \omega_\alpha^{\sigma^{-1}}$ pour toute racine réelle α .

Si la famille $(\alpha_s)_{s \in S}$ n'est pas génératrice, \vec{v}_σ n'est pas unique. On choisit dans ce cas un supplémentaire \vec{Y}_1 au sous-espace $\bigcap_{s \in S} \ker(\alpha_s) = \bigcap_{\alpha \in \phi} \ker(\alpha)$, et on prend \vec{v}_σ dans \vec{Y}_1 pour tout $\sigma \in \Gamma$. Le choix est alors unique. Comme $\bigcap_{\alpha \in \phi} \ker(\alpha)$ est Γ -stable, on peut choisir \vec{Y}_1 Γ -stable.

Comme dans la définition de l'appartement $A(T_0)$ on quotiente par $\bigcap_{\alpha \in \phi} \ker(\alpha)$, le choix de \vec{Y}_1 n'importe pas.

Définition 4.5.2. *Pour $\sigma \in \Gamma$ et $\vec{u} \in \vec{Y}_0$, on pose*

$$\sigma(o + \vec{u}) = o + \vec{v}_\sigma + \sigma(\vec{u})$$

Proposition 4.5.3. *La formule ci-avant définit une action de groupe de Γ sur Y_0 , par isomorphismes d'appartements, compatible avec celle de $N(T_0) = \text{Stab}_G(Y_0)$ au sens où $(\sigma n).x = \sigma(n(\sigma^{-1}.x))$, et compatible avec l'action de Γ sur les sous-groupes radiciels au sens où $\sigma.\mathcal{D}(\alpha, \lambda) = \mathcal{D}(\sigma\alpha, \mu)$ si $\sigma.U_{\alpha, \lambda} = U_{\sigma\alpha, \mu}$. L'ensemble de ses points fixes est un espace affine dirigé par \vec{Y}_0^Γ .*

Démonstration:

Pour vérifier qu'il s'agit d'une action de groupe, on vérifie la condition de cocycle attendue sur les ω_α^σ . Soient $\alpha \in \phi(T_0)$, $\sigma, \gamma \in \Gamma$, on calcule dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} :

$$\gamma\sigma.e_\alpha = \gamma(k_\alpha^\sigma e_{\sigma\alpha}) = \gamma(k_\alpha^\sigma)k_{\sigma\alpha}^\gamma e_{\gamma\sigma\alpha}$$

et d'autre part :

$$\gamma\sigma.e_\alpha = k_\alpha^{\gamma\sigma} e_{\gamma\sigma\alpha}$$

D'où la relation $\omega_\alpha^{\gamma\sigma} = \omega(\gamma(k_\alpha^\sigma)) + \omega_{\sigma\alpha}^\gamma = \omega_\alpha^\sigma + \omega_{\sigma\alpha}^\gamma$, la deuxième égalité car Γ préserve la valuation ω .

Par construction, Γ agit par automorphismes affines et préserve l'ensemble des murs, il agit donc bien par isomorphismes d'appartements.

Maintenant, si $\gamma, \sigma \in \Gamma$, on a pour $\vec{u} \in \vec{Y}_0$, $\gamma(\sigma(o + \vec{u})) = o + \vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma) + \gamma\sigma(\vec{u})$. Par conséquent, il faut vérifier que $\vec{v}_{\gamma\sigma} = \vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma)$.

Soit $\alpha \in \Delta^{re}$, alors $\alpha(\vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma)) = \omega_\alpha^{\gamma^{-1}} + (\gamma^{-1}\alpha)(\vec{v}_\sigma) = \omega_\alpha^{\gamma^{-1}} + \omega_{\gamma^{-1}\alpha}^{\sigma^{-1}}$. Par le calcul précédent, ceci vaut $\omega_\alpha^{\sigma^{-1}\gamma^{-1}} = \omega_\alpha^{(\gamma\sigma)^{-1}} = \alpha(\vec{v}_{\gamma\sigma})$. Comme $\vec{v}_{\gamma\sigma}$ est l'unique vecteur de \vec{Y}_1 vérifiant cette relation pour tout $\alpha \in \phi^{re}(T_0)$, et comme $\vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma) \in \vec{Y}_1$ car \vec{Y}_1 est Γ -stable, on obtient bien $\vec{v}_{\gamma\sigma} = \vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma)$, et l'action de Γ sur Y_0 est bien une action de groupe.

Montrons la compatibilité avec l'action de $N(T_0)$. Pour commencer, un élément de la forme $n_\alpha(r)$ induit sur Y_0 la réflexion r selon le mur $M(\alpha, \omega(r))$. L'élément $\sigma(n_\alpha(r)) = n_{\sigma\alpha}(\sigma(r)k_\alpha^\sigma)$ induit alors la réflexion selon le mur $M(\sigma\alpha, \omega(r) + \omega_\alpha^\sigma) = \sigma.M(\alpha, \omega(r))$. C'est la bien la conjugaison par l'action de σ de la réflexion r . Comme $N(T_0)$ est engendré par les $n_\alpha(r)$ et T_0 , il reste à vérifier que $(\sigma t).x = \sigma(t(\sigma^{-1}x))$ pour $t \in T_0$. Soit $t \in T_0$, t agit sur Γ par translation selon le vecteur \vec{v}_t défini par

$$\xi(\vec{v}_t) = -\omega(\xi(t)), \quad \forall \xi \in T_0^* \subset \vec{Y}_0^*$$

Or pour $\xi \in T_0^*$, $\xi \circ \sigma$ est encore dans T_0^* d'où

$$\xi(\sigma\vec{v}_t) = -\omega(\xi(\sigma t)), \quad \forall \xi \in T_0^* \subset \vec{Y}_0^*$$

Ce qui entraîne $\vec{v}_{\sigma t} = \sigma(\vec{v}_t)$ d'où la relation de compatibilité entre les actions de t et de σ .

Enfin, l'action de Γ est continue sur \mathfrak{g} , ceci implique que l'orbite sous Γ de chaque e_α est finie, donc l'ensemble des ω_α^σ , pour σ dans Γ et α une racine simple est fini. Donc l'ensemble des \vec{v}_σ , $\sigma \in \Gamma$ est fini, ainsi que l'orbite $\Gamma.o$. Ceci entraîne que l'action de Γ sur Y_0 fixe un point, disons o' . Dès lors, $Y_0^\Gamma = o' + \vec{Y}_0^\Gamma$. \square

L'action de Γ sur Y_0 ainsi définie préserve la décomposition en facettes de \vec{Y} , par conséquent elle s'étend à une action de Γ sur A_0 par isomorphismes d'appartements.

Définition 4.5.4. On note $\vec{Y}(T_d)(\mathbb{K}) = \vec{Y}_0^\Gamma$ et $Y_0(\mathbb{K}) = Y_0^\Gamma$.

Proposition 4.5.5. L'espace $\vec{Y}(T_d)(\mathbb{K})$ ne dépend effectivement que de T_d et pas de T_0 . Il s'agit de $(T_d)_* \otimes \mathbb{R}$.

4.5.2 Action de Γ sur \mathcal{I}

Par définition, $\mathcal{I} = G \times A_0 / \sim$, où \sim est la relation d'équivalence définie par $(g, x) \sim (h, y) \Leftrightarrow \exists n \in N(T)$ tq $y = nx$ et $g^{-1}hn \in P(x)$.

Le groupe $N(T)$ est défini sur \mathbb{K} , et d'après la proposition 4.5.3, les groupes $P(x)$, pour $x \in A_0$ vérifient $\sigma P(x) = P(\sigma x)$. Par conséquent, l'action de Γ sur $G \times A_0$ par $\sigma.(g, x) = (\sigma g, \sigma x)$ passe au quotient et définit une action sur \mathcal{I} , cette action stabilise A_0 et prolonge l'action définie précédemment.

Lemme 4.5.6. Soit $\sigma \in \Gamma$ et Z un appartement. Alors σZ est un appartement, $(\sigma\vec{Z}) = \sigma(\vec{Z})$ et σ induit un isomorphisme d'appartements entre Z et σZ .

Preuve du lemme:

Soit $g \in G$ tel que $Z = g.A_0$. Alors $\sigma Z = \sigma(g).A_0$, c'est donc un appartement, l'appartement vectoriel lui correspondant est $\sigma(g).\vec{A}_0 = \sigma(g.\vec{A}_0) = \sigma(\vec{Z})$. De plus, en notant σ_Z la restriction de l'action de σ à Z , et σ_{A_0} sa restriction à A_0 , on

a $\sigma_Z = \sigma(g) \circ \sigma_{A_0} \circ g^{-1}$. Comme g^{-1} , $\sigma(g)$ et σ_{A_0} induisent des isomorphismes entre les appartements concernés, σ_Z est bien un isomorphisme d'appartements. \square

En particulier, si $y = x + \vec{v}$ dans un certain appartement Z , alors $\sigma(y) = \sigma(x) + \sigma(\vec{v})$ dans σZ . Ceci entraîne également que $\sigma(A(T)) = A(\sigma(T))$, et que tout $A(T)$ avec T un tore maximal \mathbb{K} défini est Γ -stable.

4.5.3 Action de $N(T_d)(\mathbb{K})$ sur $Y(\mathbb{K})$

Nous voulons définir une action de $N(T_d)(\mathbb{K})$, le normalisateur du tore déployé maximal T_d , sur $Y_0(\mathbb{K})$. On sait que $N(T_d)$ est le stabilisateur de $\vec{Y}(\mathbb{K})$, par conséquent on dispose déjà de la partie vectorielle de l'action. En fait, nous allons changer d'appartement, pour obtenir un autre espace affine $Y(\mathbb{K})$, toujours dirigé par $\vec{Y}(\mathbb{K})$ qui soit stable par $N(T_d)(\mathbb{K})$.

Remarque: Comme le groupe $N(T)$ stabilise Y_0 , son groupe de point rationnels $N(T)(\mathbb{K})$ stabilise $Y_0(\mathbb{K})$, par compatibilité de l'action de Γ sur G et sur Y_0 . On retrouve que $N(T)(\mathbb{K}) \subset N(T_d)(\mathbb{K})$, et ce sous-groupe agit déjà sur $Y_0(\mathbb{K})$.

Soit $\mathcal{J} := \mathcal{I}_{\vec{Y}(\mathbb{K})}$ la façade de \mathcal{I} de type $\vec{Y}(\mathbb{K})$. C'est un immeuble affine, car $\vec{Y}(\mathbb{K})$ contient des facettes sphériques. En fait, c'est l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe $M(\vec{Y}(\mathbb{K})) = \text{Fix}_G(\vec{Y}(\mathbb{K})) = Z(T_d)$. Les groupes $N(T_d)$ et Γ agissent sur \mathcal{J} , et $N(T_d)(\mathbb{K})$ préserve l'ensemble \mathcal{J}^Γ , qui contient le point $Y_0(\mathbb{K})$.

Lemme 4.5.7. *L'ensemble \mathcal{J}^Γ est borné.*

Preuve du lemme: L'immeuble \mathcal{J} est l'immeuble de Bruhat-Tits de $Z(T_d)$, c'est donc aussi l'immeuble du semi-simplifié de $Z(T_d)$, c'est-à-dire de $Z(T_d)/Z(Z(T_d))$. Comme $T_d \subset Z(Z(T_d))$, et T_d est un tore \mathbb{K} -déployé maximal, ce semi-simplifié n'a pas de tore \mathbb{K} -déployé, il est anisotrope.

Proposition 4.5.8. *Il existe un sous-espace affine $Y(\mathbb{K})$ dans \mathcal{I} , stable par $N(T_d)(\mathbb{K})$, fixe par Γ , dirigé par $\vec{Y}(\mathbb{K})$.*

Démonstration:

Le produit $N(T_d)(\mathbb{K}) \times \Gamma$ agit sur \mathcal{J} en stabilisant \mathcal{J}^Γ . Donc par le lemme, il admet au moins une orbite bornée, et donc un point fixe. Ce point fixe a un unique représentant qui est un espace affine $Y(\mathbb{K})$ de \mathcal{I} , dirigé par $\vec{Y}(\mathbb{K})$, et stable par Γ . Alors Γ agit sur $Y(\mathbb{K})$ par automorphismes affines, avec des orbites finies, donc $Y(\mathbb{K})$ admet lui même un point Γ -fixe p , et comme $\vec{Y}(\mathbb{K})$ est Γ -fixe, on voit finalement que $Y(\mathbb{K})$ est Γ -fixe. \square

4.5.4 Façades

Nous voulons à présent rajouter ses façades à $Y(\mathbb{K})$ pour obtenir un appartement isomorphe à l'appartement abstrait obtenu par la partie 3.1 à partir de la donnée radicielle $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$.

Soit \vec{f} une facette de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$, on définit $Y_{\mathbb{K}, \vec{f}}$ comme l'ensemble des cônes de $Y_{\mathbb{K}}$ dirigés par \vec{f} quotienté par la relation \sim , définie comme dans 3.1.1 : $f \sim g \Leftrightarrow f \parallel g$ et $f \cap g \neq \emptyset$.

On pose ensuite

$$A(\mathbb{K}) = A(T)(\mathbb{K}) = \bigsqcup_{\vec{f} \text{ } \mathbb{K}\text{-facette de } \vec{A}_{\mathbb{K}}} Y(\mathbb{K})_{\vec{f}}$$

Proposition 4.5.9. *Soit $\vec{f} \subset \vec{Y}(\mathbb{K})$ une facette de $\vec{\mathcal{I}}(\mathbb{K})$. Soit T un tore maximal contenant T_d , soit \vec{f}_1 la facette de $\vec{A}(T)$*

contenant \vec{f} , alors l'application $\iota_{\vec{f}, T} : \begin{matrix} Y(\mathbb{K})_{\vec{f}} & \rightarrow & Y(T)(\mathbb{K})_{\vec{f}_1} \\ [x + \vec{f}] & \mapsto & [x + \vec{f}_1] \end{matrix}$ est une application affine bien définie et injective. Si

T est défini sur \mathbb{K} , elle est de plus surjective.

Démonstration:

L'application $\iota_{\vec{f}, T}$ est bien définie car $\vec{f} \subset \vec{f}_1$.

Vérifions l'injectivité : soient $x, y \in A_{\mathbb{K}}$ tels que $x + \vec{f}_1 \sim y + \vec{f}_1$. Alors $\vec{x}\vec{y} \in \text{Vect}(\vec{f}_1) \cap \vec{A}_{\mathbb{K}} = \vec{f}$ donc $x + \vec{f} \sim y + \vec{f}$.

Enfin, si $[x + \vec{f}_1]$ est un point Γ -fixe de $Y_{\vec{f}_1}$, et si nous supposons $Y(T)$ Γ -stable, alors pour tout $\sigma \in \Gamma$, $\sigma(x + \vec{f}_1) = \sigma(x) + \vec{f}_1 \sim x + \vec{f}_1$. Donc le sous-espace affine $x + \text{Vect}(\vec{f}_1) \subset Y(T)$ est Γ -stable, il admet un point Γ -fixe x' . Alors $[x' + \vec{f}] \in Y_{\mathbb{K}, \vec{f}}$ et son image par $\iota_{\vec{f}, T}$ est bien $[x + \vec{f}_1]$. \square

En conséquence de ceci, si \vec{f} est une facette sphérique, la façade $Y(\mathbb{K})_{\vec{f}}$ est un appartement pour le groupe réductif $M(\vec{f})(\mathbb{K})$.

4.5.5 Murs et demi-appartements

Lemme 4.5.10. *Entre deux appartements contenant $A_{\mathbb{K}}$ existe un isomorphisme fixant $A_{\mathbb{K}}$.*

Preuve du lemme: L'appartement rationnel $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ contient un point sphérique, donc la proposition ?? s'applique. \square

Le lemme permet cette définition :

Définition 4.5.11. *Soit A un appartement de \mathcal{I} contenant $A_{\mathbb{K}}$. Les \mathbb{K} -murs (resp. les \mathbb{K} -demi-appartements) de $A_{\mathbb{K}}$ sont les intersections avec $A_{\mathbb{K}}$ des murs (resp. demi-appartements) de A .*

Lorsqu'un \mathbb{K} -mur M est dirigé par un mur réel de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$, c'est-à-dire lorsque \vec{M} coupe une facette sphérique de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$, il est dit réel. Un \mathbb{K} -demi-appartement bordé par un \mathbb{K} -mur réel est dit réel.

Remarque: Un \mathbb{K} -mur qui n'est pas réel est appelé imaginaire, il correspond au noyau d'une \mathbb{K} -racine imaginaire.

4.5.6 Sous-groupes radiciels

Rappelons d'abord la définition des sous groupes radiciels rationnels dans le cadre vectoriel :

Soit $\vec{\Omega}$ un demi-espace d'un appartement $\vec{A}(T)$ tel que que $\partial\vec{\Omega}$ coupe l'intérieur de $\vec{A}(T)$, donc $\vec{\Omega}$ est une partie équilibrée. L'ensemble $\phi^u(T)(\vec{\Omega})$ est juste l'ensemble des racines α relatives à T telles que $\alpha(\vec{\Omega}) \geq 0$. C'est une partie nilpotente de $\phi(T)$.

Les \mathbb{K} -racines géométriques pour $G(\mathbb{K})$, relatives à $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ sont par définition les \mathbb{K} -demi-appartements réels de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$, elles entrent donc dans le cadre précédent. On note $\delta_{\mathbb{K}} = \delta_{\mathbb{K}}(T_d)$ l'ensemble des \mathbb{K} -racines géométriques, il s'agit d'un système de racines géométrique, c'est-à-dire que les racines sont des demi-complexes de Coxeter.

Si \vec{D} est une telle racine, le sous-groupe radiciel correspondant est par définition $U_{\vec{D}}(\mathbb{K}) = U(\vec{D})^{\Gamma}$, et on sait que $U(\vec{D}) = \prod_{\alpha \in \phi^u(\vec{D})} U_{\alpha}$ avec écriture unique quelque soit l'ordre sur $\phi^u(\vec{D})$. (Comme Γ permute les racines de $\phi^u(\vec{D})$, on ne peut en déduire une telle décomposition pour $U_{\vec{D}}(\mathbb{K})$.)

Il est prouvé dans [Ré02] que $(G(\mathbb{K}), Z(T_d), (U_{\vec{D}})_{\vec{D} \in \Delta_{\mathbb{K}}})$ est une donnée radicielle (au sens faible, géométrique).

Mais $G(\mathbb{K})$ est également muni d'un système de racines au sens fort, c'est-à-dire vectoriel. Il s'agit de $\phi_{\mathbb{K}} = \phi_{\mathbb{K}}(T_d) = \{\alpha_{|\vec{A}_{\mathbb{K}}} \mid \alpha \in \phi(T)\}$. Contrairement à ϕ , ce système de racine n'est pas forcément réduit. Si $\alpha_{\mathbb{K}}$ est une telle racine, le sous-groupe radiciel associé est $U_{\alpha_{\mathbb{K}}} = \langle \{U_{\alpha} \mid \alpha_{|\vec{A}_{\mathbb{K}}} = \alpha_{\mathbb{K}}\} \rangle$, et le \mathbb{K} -sous-groupe radiciel associé est $U_{\alpha_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K})$. Ainsi, si \vec{D} est un \mathbb{K} -demi-appartement, $U_{\vec{D}} = \langle \{U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \mid \alpha_{\mathbb{K}}(\vec{D}) \geq 0\} \rangle$. En fait, le fait que $\phi_{\mathbb{K}}$ est un système de racines entraîne qu'il y a au plus deux racines $\alpha_{\mathbb{K}}$ telles que $\alpha_{\mathbb{K}}(\vec{D}) \geq 0$.

On prouve dans [Ré02] que $\phi_{\mathbb{K}}$ est effectivement un système de racine (au sens vectoriel), et que $(G(\mathbb{K}), Z(T_d), (U_{\alpha_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}))_{\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}})$

est une donnée radicielle (au sens fort, dénommé dans [Ré02] par "donnée radicielle jumelée entière").

Lemme 4.5.12. Soit \vec{D} un demi-appartement réel de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$, soit $u \in U(\vec{D})$. Alors $\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(u)$ est un demi-appartement dirigé par \vec{D} .

Preuve du lemme:

Soit T un tore maximal tel que $\vec{D} \subset \vec{A}(T)$, soit $\phi^u = \phi^u(T)(\vec{D})$. C'est un ensemble nilpotent de racines, donc $U(\vec{D}) = \prod_{\alpha \in \phi^u} U_{\alpha}$, avec écriture unique, quelque soit l'ordre choisit sur ϕ^u . Comme $\phi(T)$ est réduit, on peut choisir un ordre grignotant. Soit $u = u_1 \dots u_n$ l'écriture de u dans cette décomposition, avec $u_i \in U_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \phi^u$. On a par la proposition 3.6.3 :

$$\text{Fix}_{A(T)}(u) = \bigcap_{i=1}^n \text{Fix}_{A(T)}(u_i)$$

Or, chaque $\text{Fix}_{A(T)}(u_i)$ est un demi-appartement dirigé par $\vec{D}(\alpha_i)$ (par 3.3.9), et son intersection avec $A_{\mathbb{K}}$ est un demi-appartement dirigé par $\vec{D}(\alpha_i) \cap \vec{A}_{\mathbb{K}} = \vec{D}$. \square

Définition 4.5.13. Soit D un \mathbb{K} -demi-appartement réel de $A_{\mathbb{K}}$, donc \vec{D} est un demi-appartement réel de $\vec{A}(T)$. Le sous-groupe radiciel de D est :

$$U(D) = \{x \in U(\vec{D}) \mid x \text{ fixe } D\}$$

Le \mathbb{K} -sous-groupe radiciel correspondant est :

$$U(D)(\mathbb{K}) = U(D)^{\Gamma}$$

Définition 4.5.14. Un \mathbb{K} -demi-appartement réel D est dit vrai s'il existe $u \in U(D)(\mathbb{K})$ tel que $\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(u) = D$. Un \mathbb{K} -mur réel est dit vrai si les appartements qu'il délimite sont vrais.

Proposition 4.5.15. Lorsqu'un \mathbb{K} -mur réel M délimite deux demi-appartements D_1 et D_2 , alors D_1 est vrai si et seulement si D_2 l'est.

Remarque: Un \mathbb{K} -mur réel non vrai est appelé "fantôme", c'est en fait un mur où l'immeuble $I_{\mathbb{K}}$ "ne branche pas", c'est-à-dire un mur "mince". Dans le cas déployé, les murs vrais sont ceux de la forme $\mathcal{D}(\alpha, \lambda)$ pour $\lambda \in \omega(\mathbb{K}) \subset \Lambda = \omega(\mathbb{K}_s)$.

4.5.7 \mathbb{K} -Valuation

Définition 4.5.16. Soit $\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}(T_d)$. Pour tout $u \in U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \setminus \{e\}$, $\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(u)$ est un demi-appartement dirigé par $\vec{D}(\alpha_{\mathbb{K}}) := \{x \in \vec{A}_{\mathbb{K}} \mid \alpha_{\mathbb{K}}(x) \geq 0\}$. On note $M(u)$ le bord de ce demi-appartement, c'est donc un mur réel dirigé par $\ker(\alpha_{\mathbb{K}})$. On définit alors

$$\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}} : \begin{array}{l} U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \rightarrow \Lambda \cup \{\infty\} \\ u \mapsto \begin{cases} \alpha_{\mathbb{K}}(M(u)) \text{ si } u \neq e \\ \infty \text{ si } u = e \end{cases} \end{array}$$

Pour $\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}$ et $\lambda \in \Lambda \cup \{\infty\}$, on note $U_{\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda} = \phi^{-1}([\lambda, \infty])$.

Proposition 4.5.17. La famille $(\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}})_{\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}}$ est une valuation de la donnée radicielle $(G(\mathbb{K}), (U_{\alpha_{\mathbb{K}}})_{\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}})$.

Démonstration:

(V0) : Pour tout $\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}$, $\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}$ est une application de $U_{\alpha_{\mathbb{K}}}$ dans $\Lambda \cup \{\infty\}$, où Λ est un groupe abélien totalement ordonné. L'image de $\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}$ a au moins trois éléments.

Pour s'assurer que l'image de $\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}$ contient au moins trois éléments, remarquons que pour $u \in U_{\alpha_{\mathbb{K}}}$ et $t \in T_d(\mathbb{K})$, $M(tut^{-1}) = M(u) + \vec{v}_t$. Il suffit donc de trouver un $t \in T_d$ tel que $\alpha_{\mathbb{K}}(\vec{v}_t) \neq 0$ (et on prouvera en fait que $\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(U_{\alpha_{\mathbb{K}}})$ est infini).

(V1) : Pour tout $\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}$, pour tout $\lambda \in \Lambda \cup \{\infty\}$, $U_{\alpha_{\mathbb{K}},\lambda}$ est un sous-groupe de $U_{\alpha_{\mathbb{K}}}$, et $U_{\alpha_{\mathbb{K}},\{\infty\}} = \{e\}$.

On constate que $U_{\alpha_{\mathbb{K}},\lambda} = \{u \in U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \mid u \text{ fixe le demi-appartement } \mathcal{D}(\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda)\}$. Il est alors clair que c'est un groupe. Et $U_{\alpha_{\mathbb{K}},\{\infty\}} = \{e\}$ par définition.

(V2.1) : Pour tout $\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}$, pour tout $u \in U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \setminus \{e\}$, l'application $v \mapsto \varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(v) - \varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(n(u)vn(u)^{-1})$ est constante sur $U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \setminus \{e\}$.

Pour tout $v \in U_{-\alpha_{\mathbb{K}}} \setminus \{e\}$, on a $\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(n(u)vn(u)^{-1}) = n(u).\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(v)$. Or $n(u)$ agit sur $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ comme la réflexion selon le mur $\ker(\alpha_{\mathbb{K}})$, donc $n(u)$ agit sur $A_{\mathbb{K}}$ comme une réflexion selon un mur M de direction $\ker(\alpha_{\mathbb{K}})$, et $\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(v) - \varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(n(u)vn(u)^{-1}) = -2\alpha_{\mathbb{K}}(M)$, ce qui est indépendant de v .

(V2.2) : Pour tout $\alpha \in \phi_{\mathbb{K}}$ et $t \in Z(T_d)(\mathbb{K})$, la fonction
$$\begin{array}{ccc} U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \setminus \{e\} & \rightarrow & \Lambda \\ v & \mapsto & \varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(v) - \varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(tv t^{-1}) \end{array}$$
 est constante.

L'élément $t \in Z(T_d)$ induit sur $A_{\mathbb{K}}$ une translation, soit $\vec{v}_t \in \vec{A}_{\mathbb{K}}$ son vecteur. Le même raisonnement que pour (V2.1) montre alors que la fonction est constante égale à $\alpha_{\mathbb{K}}(\vec{v}_t)$.

(V3) : Pour toute paire prénilpotente de \mathbb{K} -racines $\{\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}\}$, on a :

$$[U_{\alpha_{\mathbb{K}},\lambda}, U_{\beta_{\mathbb{K}},\mu}] \subset \left\langle \left\{ U_{p\alpha_{\mathbb{K}}+q\beta_{\mathbb{K}},p\lambda+q\mu} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \text{ et } p\alpha_{\mathbb{K}} + q\beta_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}} \right\} \right\rangle.$$

L'ensemble des racines $\gamma \in \phi_{\mathbb{K}}$ qui s'écrivent sous la forme $p\alpha_{\mathbb{K}} + q\beta_{\mathbb{K}}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ est noté $]\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}[$. Il s'agit d'un ensemble nilpotent de racines. Le fait que $(Z(T_d)(\mathbb{K}), (U_{\alpha_{\mathbb{K}}})_{\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}})$ est une donnée radicielle au sens fort ("entière" pour la nomenclature de [Ré02]) entraîne déjà que $[U_{\alpha_{\mathbb{K}}}, U_{\beta_{\mathbb{K}}}] \subset \left\langle \left\{ U_{\gamma} \mid \gamma \in]\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}[\right\} \right\rangle = \prod_{\gamma \in]\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}[} U_{\gamma}$. Ce produit peut s'effectuer dans n'importe quel ordre. Les seules relations de colinéarité possible dans $\phi_{\mathbb{K}}$ sont du type $\gamma = 2\delta$, et dans ce cas on a $U_{2\delta} \subset U_{\delta}$, toujours par les axiomes d'une donnée radicielle. Fixons sur $]\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}[$ un ordre pour lequel deux racines colinéaires se suivent. Alors $[U_{\alpha_{\mathbb{K}}}, U_{\beta_{\mathbb{K}}}] \subset \prod_{\gamma \in]\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}[_{\text{red}}} U_{\gamma}$, où $]\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}[_{\text{red}}$ est l'ensemble $]\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}[$ auquel on a retiré les doubles des racines qu'il contient.

Soit $u \in [U_{\alpha_{\mathbb{K}},\lambda}, U_{\beta_{\mathbb{K}},\mu}]$, alors $u \in \prod_{\gamma \in]\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}[_{\text{red}}} U_{\gamma}$ (en fixant sur $]\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}[_{\text{red}}$ n'importe quel ordre grignotant) et u fixe $\mathcal{D}(\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda) \cap \mathcal{D}(\beta_{\mathbb{K}}, \mu)$. Soient $(u_{\gamma})_{\gamma \in]\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}[_{\text{red}}}$ tels que $u = \prod_{\gamma} u_{\gamma}$. Comme $]\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}[_{\text{red}}$ est un ensemble réduit de racines, on a $\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(u) = \bigcap_{\gamma} \text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(u_{\gamma})$ (proposition 3.6.3), donc chaque u_{γ} fixe $\mathcal{D}(\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda) \cap \mathcal{D}(\beta_{\mathbb{K}}, \mu)$. Ceci entraîne bien que si $\gamma = p\alpha_{\mathbb{K}} + q\beta_{\mathbb{K}}$, alors $u_{\gamma} \in U_{\gamma,p\lambda+q\mu}$.

(V4) : Si $\alpha_{\mathbb{K}}$ et $2\alpha_{\mathbb{K}}$ sont des \mathbb{K} -racines, $\varphi_{2\alpha_{\mathbb{K}}}$ est la restriction de $\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}$ à $U_{2\alpha_{\mathbb{K}}}$.

Ce point est clair d'après la définition.

(V5) : Pour tout $\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}$, pour tout $u \in U_{\alpha_{\mathbb{K}}}$, si $u', u'' \in U_{-\alpha_{\mathbb{K}}}$ sont tels que $n(u) = u''u'u'$, alors $\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u') = \varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u'') = -\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(u)$.

Sachant que $U_{\pm\alpha_{\mathbb{K}}} \subset U(\vec{\mathcal{D}}(\pm\alpha_{\mathbb{K}}))$, on utilise le lemme 3.6.2. L'élément $n(u)$ agit sur $A_{\mathbb{K}}$ comme une réflexion selon un mur dirigé par $\ker(\alpha_{\mathbb{K}})$, et $\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(u) = \mathcal{D}(\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda)$ en notant $\lambda = \varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(u)$. Supposons par exemple que u' fixe plus que $\mathcal{D}(-\alpha_{\mathbb{K}}, -\lambda)$, c'est-à-dire que $\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u') = \lambda' > -\lambda$. Alors la bande $\{x \in A_{\mathbb{K}} \mid \alpha_{\mathbb{K}}(x) \in [\lambda, \lambda']\}$ est fixe par u et u' . Par le lemme 3.6.2, elle est alors soit fixe soit envoyée hors de $A_{\mathbb{K}}$ par u'' donc par $n(u)$. Mais ces deux cas sont incompatibles avec le fait que $n(u)$ induit une réflexion sur $A_{\mathbb{K}}$. De même, $\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u'') \leq -\lambda$.

En l'absence d'idée directe pour montrer les autres inégalité, il reste l'argument suivant : après le choix d'un tore maximal \mathbb{K} -défini T contenant T_d les racines concernées sont en nombre fini, puisque leur ensemble est $\phi(T)(\ker(\alpha_{\mathbb{K}})) = \phi^m(T)(\ker(\alpha_{\mathbb{K}}))$ et $\ker(\alpha_{\mathbb{K}})$ est une partie équilibrée de $\vec{A}(T)$. Ainsi $(T, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi(\ker(\alpha_{\mathbb{K}}))})$ est une donnée radicielle finie pour le groupe $M_{A(T)}(\ker(\alpha_{\mathbb{K}}))$, son immeuble de Bruhat-Tits est $I_{\ker(\alpha_{\mathbb{K}})}$. Elle est de plus Γ -stable, et ses racines forment deux orbites opposées sous Γ : le \mathbb{K} -système de racines associé est juste $\{\alpha_{\mathbb{K}}, -\alpha_{\mathbb{K}}\}$. Donc $I_{\ker(\alpha_{\mathbb{K}})}^\Gamma$, s'il n'est pas forcément un immeuble, est au moins un arbre. L'étude de l'action de u, u' et u'' sur cet arbre permet maintenant de conclure facilement, sachant que $A_{\mathbb{K}}$ se projette en une droite, que u et u' comme u et u'' en fixent des demi-droites opposées, et que $n'(u) = u''uu'$ y induit une réflexion.

Pour détailler, notons $p = pr_{\ker(\alpha_{\mathbb{K}})}$. Soit $s_1 \in p(A_{\mathbb{K}})$ tel que $\alpha_{\mathbb{K}}(s_1) = -\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u')$, s_2 tel que $\alpha_{\mathbb{K}}(s_2) = \varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(u)$ et s_3 tel que $\alpha_{\mathbb{K}}(s_3) = -\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(u'')$, soient aussi ϵ et $-\epsilon$ les bouts de $p(A_{\mathbb{K}})$ dans la direction de $\alpha_{\mathbb{K}}$ et $-\alpha_{\mathbb{K}}$, respectivement. Ainsi, $\text{Fix}_{p(A_{\mathbb{K}})}(u) = [s_2, \epsilon[$, $\text{Fix}_{p(A_{\mathbb{K}})}(u') = [s_1, -\epsilon[$ et $\text{Fix}_{p(A_{\mathbb{K}})}(u'') = [s_3, -\epsilon[$. Supposons que $\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u') < -\lambda$, c'est-à-dire que l'intervalle $]s_1, s_2[$ est non vide, et aucun de ses points n'est fixé par u ni par u' . Sachant que $n(u).p(A_{\mathbb{K}}) = p(A_{\mathbb{K}})$, on vérifie dans cette situation (avec les notations évidentes) que $\epsilon < s_1 < s_2 < n(u).s_1 < n(u).s_2 < \epsilon$. Ceci empêche que $n(u)$ fixe un point de $]s_1, s_2[$. Par des raisonnements semblables, $n(u)$ ne peut avoir de point fixe dans $] -\epsilon, s_1[$, $] -\epsilon, s_3[$, ni $]s_2, \epsilon[$. Mais $n(u)$ doit tout même avoir un point fixe puisqu'il s'agit d'une réflexion : on arrive à une contradiction. Donc $s_1 = s_2$. On prouve similairement que $s_3 = s_2$, et ceci entraîne bien $\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u') = -\lambda = \varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u'')$. \square

4.5.8 Identification des appartements

Il faut vérifier que l'appartement $A_{\mathbb{K}}$ est isomorphe à l'appartement obtenu abstraitement à partir de la donnée radicielle valuée $(Z(T_d)(\mathbb{K}), (U_{\alpha_{\mathbb{K}}})_{\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}})$.

4.6 L'immeuble rationnel

4.6.1 Définition

On définit la famille de parahorique suivante sur $A_{\mathbb{K}}$: $Q_{\mathbb{K}} = (Q_{\mathbb{K}}(a))_{a \in A_{\mathbb{K}}}$ avec $Q_{\mathbb{K}}(a) = Q(a)^\Gamma$, où Q est la famille de parahoriques pour G sur un appartement $A(T)$ contenant $A_{\mathbb{K}}$. Il est immédiat qu'il s'agit d'une famille de parahoriques. Cette définition est indépendante du tore T considéré, car $Q(a)$ dispose de la définition intrinsèque $Q(a) = \text{Fix}_G(a)$, mais fixons tout de même un tel tore T , jusqu'à la fin de ce numéro.

Il y a deux définitions possibles pour l'immeuble de $G(\mathbb{K})$: la première $I(Q(\mathbb{K}))$ est l'immeuble construit selon la partie 3 à partir de l'appartement $A_{\mathbb{K}}$ et de la famille de parahoriques $Q_{\mathbb{K}}$, la seconde est $I_{\mathbb{K}} = G(\mathbb{K}).A_{\mathbb{K}} \subset I(Q)$. Par définition, les appartements de $I_{\mathbb{K}}$ seront les $g.A_{\mathbb{K}}$ pour $g \in G(\mathbb{K})$, les murs d'un appartement $g.A_{\mathbb{K}}$ seront les murs vrais.

Un de nos premiers buts est bien sûr de montrer que ces deux définitions coïncident. Nous pourrions alors utiliser d'une part les résultats abstraits de 3, et d'autre part certaines propriétés de $I(Q)$ qui se transmettront à son sous-immeuble $I_{\mathbb{K}}$.

Remarque: L'immeuble $I(\mathbb{K})$ est inclus dans l'ensemble des points Γ -fixes de I , mais n'est généralement pas égal à cet ensemble, comme c'est déjà le cas pour l'immeuble affine \mathbb{K} -rationnel d'un groupe réductif sur un corps local.

Posons :

$$j : \begin{array}{ccc} I(Q_{\mathbb{K}}) & \rightarrow & I_{\mathbb{K}} \\ [(g, a)]_{Q_{\mathbb{K}}} & \mapsto & g.a = [(g, a)]_Q \in I(Q) \end{array}$$

Il est immédiat de vérifier que j est une application $G(\mathbb{K})$ -équivariante, bien définie et surjective. L'injectivité fait l'objet de la proposition suivante.

En attendant, soit ι_Q l'injection de $A(T)$ dans $I(Q)$, qui restreinte à $A_{\mathbb{K}}$ donne une injection de $A_{\mathbb{K}}$ dans $I_{\mathbb{K}}$. Soit aussi $\iota_{Q_{\mathbb{K}}}$ l'application canonique (injective si et seulement si $Q_{\mathbb{K}}$ vérifie (para 1)) de $A_{\mathbb{K}}$ dans $I(Q_{\mathbb{K}})$. Alors d'après les

définitions, $\iota_Q|_{A_{\mathbb{K}}} = j \circ \iota_{Q_{\mathbb{K}}}$. Le membre de gauche étant injectif, ceci prouve que $\iota_{Q_{\mathbb{K}}}$ est injective, donc que $Q_{\mathbb{K}}$ vérifie (para 1).

Proposition 4.6.1.

1. $\text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(\iota_Q(A_{\mathbb{K}})) = N(T_d)(\mathbb{K}) = \text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(\iota_{Q_{\mathbb{K}}}(A_{\mathbb{K}}))$
2. Les appartements de $\vec{I}_{\mathbb{K}}$ sont en bijection $G(\mathbb{K})$ -équivariante avec ceux de $I(Q_{\mathbb{K}})$ et de $\vec{I}(\mathbb{K})$, donc avec les tores \mathbb{K} -déployés maximaux.
3. $N_{\mathbb{K}} := N(T_d)(\mathbb{K}) = G(\mathbb{K}) \cap ((N(T) \cap N(T_d)) \cdot \text{Fix}_G(A_{\mathbb{K}}))$.
4. $G(\mathbb{K})$ vérifie la décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{K}) = U_{\mathbb{K}}(\vec{C}) \cdot N(T_d)(\mathbb{K}) \cdot U_{\mathbb{K},\min}(F)$ pour toute \mathbb{K} -chambre \vec{C} de $\vec{A}_{\mathbb{K}}(T_d)$ et toute facette F de $A_{\mathbb{K}}(T_d)$.
De plus, le facteur de $N(T_d)(\mathbb{K})$ est unique modulo $N(T_d)(\mathbb{K})(F) = \text{Fix}_{N(T_d)(\mathbb{K})}(F)$.
5. Pour tout $a \in A_{\mathbb{K}}(T_d)$, pour tout T tel que $A_{\mathbb{K}}(T_d) \subset A(T)$, on a :

$$G(\mathbb{K}) \cap (N(T) \cdot Q(a)) = N(T_d)(\mathbb{K}) \cdot Q_{\mathbb{K}}(a)$$

Géométriquement, ceci signifie que si deux points a et b de $A(T)$, avec $a \in A_{\mathbb{K}}$, sont conjugués, pour l'action de G sur $I(Q)$, à la fois par $G(\mathbb{K})$ et par $N(T)$, alors ils sont conjugués par $N(T_d)(\mathbb{K})$.

6. j induit un isomorphisme d'appartements entre $\iota_{Q_{\mathbb{K}}}(A_{\mathbb{K}})$ et $\iota_Q(A_{\mathbb{K}})$.
7. L'application j est une bijection entre $I(Q_{\mathbb{K}})$ et $I_{\mathbb{K}}$.
8. La famille de parahoriques $Q_{\mathbb{K}}$ vérifie (para 5), et pour toute \mathbb{K} -facette \vec{f} de $\vec{I}(\mathbb{K})$, elle vérifie les conditions (para 2.1)(\vec{f}) et (para 2.2)(\vec{f}) dès que Q les vérifie pour la facette \vec{f} de \vec{I} contenant \vec{f} .

Remarque: Le point essentiel est le 5. Il découle de l'unicité du facteur de N dans la décomposition d'Iwasawa du groupe déployé G (proposition 3.4.5).

Démonstration:

1. Par construction, $N(T_d)(\mathbb{K})$ est inclus dans les deux stabilisateurs. Ensuite, si $g \in \text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(\iota_Q(A_{\mathbb{K}}))$, alors g permute les façades de $A_{\mathbb{K}}$. Plus précisément, g permute $\{\vec{f} \mid \vec{f}^{\text{T}} \in \mathcal{F}(\vec{A}_{\mathbb{K}})\}$ (voir la proposition 4.5.9). Donc $g \in \text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(\vec{A}_{\mathbb{K}}) = N(T_d)(\mathbb{K})$. Enfin, le fait que j soit $G(\mathbb{K})$ -équivariante entraîne $\text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(\iota_{Q_{\mathbb{K}}}(A_{\mathbb{K}})) \subset \text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(\iota_Q(A_{\mathbb{K}}))$, ce qui permet de conclure.
2. découle du point précédent.
3. Cela vient du fait que $Q(A_{\mathbb{K}})$ est transitif sur les appartements contenant $A_{\mathbb{K}}$, car $A_{\mathbb{K}}$ contient un point sphérique (??).
4. Comme $(G(\mathbb{K}), (U_{\alpha}, \phi_{\alpha})_{\alpha \in \phi_{\mathbb{K}}})$ est une donnée radicielle valuée, la proposition 3.4.2 prouve que $G(\mathbb{K})$ admet la décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{K}) = U_{\mathbb{K}}(\vec{C}) \cdot \text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(A_{\mathbb{K}}(T_d)) \cdot G_{\mathbb{K}}(F)$, avec $U_{\mathbb{K}}(\vec{C}) = \langle \{U_{\alpha} \mid \alpha \in \phi_{\mathbb{K}}(\vec{C})\} \rangle$ et $G_{\mathbb{K}}(F) = \langle \{U_{\alpha}(F) \mid \alpha \in \phi_{\mathbb{K}}\} \rangle$. De plus, $\text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(A_{\mathbb{K}}(T_d)) = N(T_d)(\mathbb{K})$ par le point 1.

Étudions l'unicité de n : soient $g = u_1 n_1 u'_1 = u_2 n_2 u'_2$ deux écritures de $g \in G(\mathbb{K})$. Soit T un tore maximal tel que $A(T) \supset A_{\mathbb{K}}(T_d)$, on va se ramener à l'unicité dans la décomposition d'Iwasawa du groupe déployé G dans l'appartement $A(T)$.

Soit \vec{C}' une chambre de $\vec{A}(T)$ contenant \vec{C} dans son adhérence, alors $U_{\mathbb{K}}(\vec{C}) \subset U(\vec{C}')$. Soit F' un élément du filtre F tel que u'_1 et u'_2 sont dans $G(F')$.

On décompose enfin n_1 et n_2 grâce au point 3 : il existe $n'_1, n'_2 \in N(T) \cap N(T_d)$ et $z_1, z_2 \in Z(T_d)$ tels que $n_1 = n'_1 \cdot z_1$ et $n_2 = n'_2 \cdot z_2$. Alors pour tout $a \in F'$, $g = u_1 n'_1(z_1 \cdot u'_1) = u_2 n'_2(z_2 \cdot u'_2)$ sont deux écritures de G pour la décomposition d'Iwasawa $G = U(\vec{C}') \cdot N \cdot P(a)$. Par la proposition 3.4.5, on obtient $n'_1{}^{-1} n'_2 \in N(a)$. Ceci étant pour tout $a \in F'$, on a donc $n'_1{}^{-1} n'_2 \in N(F')$. Puis $n_1^{-1} n_2 = z_1^{-1} n'_1{}^{-1} n'_2 z_2 \in N_{\mathbb{K}}(F') \subset N_{\mathbb{K}}(F)$.

5. Soit $g = nq \in G(\mathbb{K}) \cap N(T) \cdot Q(a)$. Soit \vec{C} une \mathbb{K} chambre de $\vec{A}_{\mathbb{K}}$, par la décomposition d'Iwasawa de $G(\mathbb{K})$, il existe $n_{\mathbb{K}} \in N(T_d)(\mathbb{K})$ tel que $g \in U_{\mathbb{K}}(\vec{C}) \cdot n_{\mathbb{K}} \cdot Q_{\mathbb{K}}(a)$. On va utiliser comme au point précédent l'unicité de la décomposition d'Iwasawa dans G . On sait que $N(T_d)(\mathbb{K}) \subset \text{Stab}_G(A_{\mathbb{K}}) = (N(T) \cap N(T_d)) \cdot \text{Fix}_G(A_{\mathbb{K}})$, car $\text{Fix}_G(A_{\mathbb{K}})$ est transitif sur les appartements contenant $A_{\mathbb{K}}$. Soit donc $n_{\mathbb{K}} = n'z$ une écriture correspondante, alors $z \in Q(a)$ d'où $g \in U(\vec{C}') \cdot n' \cdot Q(a)$, pour n'importe quelle chambre \vec{C}' de $\vec{A}(T)$ contenant \vec{C} . Par la proposition 3.4.5, $n \in n' \cdot N(a)$. Donc $g \in n'Q(a) = n_{\mathbb{K}} z^{-1} Q(a) = n_{\mathbb{K}} Q(a)$. Donc $g \in G(\mathbb{K}) \cap N(T_d)(\mathbb{K}) \cdot Q(a) = N(T_d)(\mathbb{K}) \cdot Q_{\mathbb{K}}(a)$.
6. Soit $B_{\mathbb{K}}$ un appartement de $\mathcal{I}(Q_{\mathbb{K}})$. Le fait que $Q_{\mathbb{K}}$ vérifie (para 1) entraîne que j induit une bijection de $B_{\mathbb{K}}$ sur son image. Ensuite, $j|_{A_{\mathbb{K}}} = \iota_{Q|A_{\mathbb{K}}}^{-1} \circ \iota_{Q_{\mathbb{K}}}$, et $\iota_{Q|A_{\mathbb{K}}}$ comme $\iota_{Q_{\mathbb{K}}}$ sont des isomorphismes d'appartements par définition de la structure d'appartement de $A_{\mathbb{K}}$ et de $\iota_{Q_{\mathbb{K}}}(A_{\mathbb{K}})$.
7. Montrons que j est injective : soient $[(g, a)]_{Q_{\mathbb{K}}}$ et $[(h, b)]_{Q_{\mathbb{K}}}$ avec $g, h \in G(\mathbb{K})$ et $a, b \in A_{\mathbb{K}}$, deux points de $\mathcal{I}(Q_{\mathbb{K}})$, tels que $[(g, a)]_Q = [(h, b)]_Q$, montrons que $[(g, a)]_{Q_{\mathbb{K}}} = [(h, b)]_{Q_{\mathbb{K}}}$. On peut supposer $h = e$. Alors il existe $n \in N(T)$ tel que $n.a = b$ et $g \in nQ(a)$. Comme $g \in G(\mathbb{K})$, le point précédent entraîne $g \in N(T_d)(\mathbb{K}) \cdot Q_{\mathbb{K}}(a)$. Soit $n_{\mathbb{K}} \in N(T_d)(\mathbb{K})$ tel que $g \in n_{\mathbb{K}} \cdot Q_{\mathbb{K}}(a)$. Dans $\mathcal{I}(Q)$, on a $g.a = b$, d'où $n_{\mathbb{K}}.a = b$. Par définition de cette action, cette égalité reste vraie pour l'action de $N(T_d)$ sur l'appartement abstrait $A_{\mathbb{K}}$. Alors la définition de $\sim_{Q_{\mathbb{K}}}$ entraîne $[(g, a)]_{Q_{\mathbb{K}}} = [(e, b)]_{Q_{\mathbb{K}}}$.
8. Soit $a \in A_{\mathbb{K}}$ un point d'une façade A_f sphérique. Alors $Q(a) = U(\vec{f}) \rtimes M_A(a) = U(\vec{f}) \rtimes Q(a \cup \text{op}_A(a))$. Les deux groupes sont \mathbb{K} -définis, et la trivialité de leur intersection entraîne $Q(a)^\Gamma = U(\vec{f})^\Gamma \rtimes M_A(a)^\Gamma$. Nous renvoyons alors à [BT72] pour prouver que $M_A(a)^\Gamma$ est le groupe engendré par $N_{\mathbb{K}}(a)$ et par les $U_\alpha(a)$, $\alpha \in \phi_{\mathbb{K}}(\vec{f})$, et à [Ré02] pour prouver que $U(\vec{f})^\Gamma$ est bien le sous-groupe distingué de $P(\vec{f}^\dagger)$ engendré par les U_α , $\alpha \in \phi''(\vec{f})$.

Passons à (para 2.1)(\vec{f}). Soit a un point de $A_{\mathbb{K}}$ dans une façade bordée par $A_{\mathbb{K}, \vec{f}}$. Soit $g \in N_{\mathbb{K}} \cdot Q_{\mathbb{K}}(a) \cap N_{\mathbb{K}} \cdot P_{\mathbb{K}}(\vec{f})$. On a $N_{\mathbb{K}} \cdot Q_{\mathbb{K}}(a) \subset N \cdot Q(a)$ par le point 3 et $N_{\mathbb{K}} \cdot P_{\mathbb{K}}(\vec{f}) \subset N \cdot P(\vec{f}) = N \cdot P(\vec{f}^\dagger)$ par le même raisonnement. Donc par (para 2.1)(\vec{f}^\dagger), $g \in G(\mathbb{K}) \cap (N \cdot Q(\text{pr}_{\vec{f}}(a)))$, et $g \in N_{\mathbb{K}} \cdot Q_{\mathbb{K}}(\text{pr}_{\vec{f}}(a))$ par le point 5.

Prouvons (para 2.2)(\vec{f}). Soit $a \in A_{\mathbb{K}, \vec{f}}$ et $g \in Q(a)$. Soit \vec{g} une facette dans le bord de \vec{f} , et \vec{g}' la facette de \vec{I} la contenant. Par (para 2.2)(\vec{f}^\dagger), il existe $b_0 \in \text{pr}_{\vec{f}}^{-1}(a) \cap A_{\vec{g}'}$ et $n \in N(a)$ tels que ng fixe le cône $b_0 + \vec{f} \subset A_{\vec{g}'}$. Alors il existe $b \in b_0 + \vec{f} \cap A_{\mathbb{K}}$. Pour toute racine $\alpha \in \phi(\vec{f}^\dagger)$, $\alpha(b) = \alpha(a)$. Et comme $b \in A_{\mathbb{K}}$, pour toute racine $\alpha \in \phi_{\mathbb{K}}(\vec{f})$, $\alpha(b)$ est bien défini, et vaut donc $\alpha(a)$. Ceci prouve que $\text{pr}_{\vec{f}}(b) = a$. Ainsi, $b \in A_{\mathbb{K}, \vec{g}} \cap \text{pr}_{\vec{f}}^{-1}(a)$ et $g \in G(\mathbb{K}) \cap (N \cdot Q(b + \vec{f})) = N_{\mathbb{K}} \cdot Q_{\mathbb{K}}(b + \vec{f})$.

□

On identifie donc désormais $\mathcal{I}(Q_{\mathbb{K}})$ et $\mathcal{I}_{\mathbb{K}}$. Comme la famille de parahoriques $Q_{\mathbb{K}}$ vérifie les conditions (para 1, 5, 2.2) et (para 2.1)(\vec{f}) pour \vec{f} sphérique, les résultats de la partie 3 s'appliquent.

4.6.2 Structure des appartements

Soit $A_{\mathbb{K}}$ un \mathbb{K} -appartement, nous allons définir les murs, parties closes et facettes de $A_{\mathbb{K}}$.

Définition 4.6.2. – Un \mathbb{K} -isomorphisme d'appartements est un isomorphisme affine qui préserve l'ensemble des murs vrais.
– Une partie \mathbb{K} -close de $A_{\mathbb{K}}$ est une intersection finie de vrais demi-appartements. Le filtre engendré par les parties \mathbb{K} -closes contenant une partie Ω de $A_{\mathbb{K}}$ est le \mathbb{K} -enclos de Ω , il est noté $Cl_{\mathbb{K}}(\Omega)$.

Remarque: Il faudrait en fait noter $Cl_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$, car tant qu'on n'a pas (para 5 et 6)(\mathbb{K}), l'enclos d'une partie d'appartement Ω dépend de l'appartement la contenant considéré.

Proposition 4.6.3. L'action de $G(\mathbb{K})$ sur $A_{\mathbb{K}}$ préserve les ensembles des murs vrais, donc tout $g \in G(\mathbb{K})$ induit un isomorphisme sur chaque appartement de $\mathcal{I}(\mathbb{K})$.

Démonstration: L'action de $G(\mathbb{K})$ préserve l'ensemble des murs, et celui des murs réels car elle préserve \mathcal{I}_{sph} . Soit $D = \text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(U(D)(\mathbb{K}))$ un demi-appartement réel. Soit $g \in G(\mathbb{K})$, alors $g.D = \text{Fix}_{g.A_{\mathbb{K}}}(gU(D)(\mathbb{K})g^{-1}) = \text{Fix}_{g.A_{\mathbb{K}}}(U(gD)(\mathbb{K}))$, car $g \in G(\mathbb{K})$. \square

On définit les facettes de $A_{\mathbb{K}}$ de la même manière que celles de A .

Définition 4.6.4. Pour $x \in A_{\mathbb{K}}$, $(\vec{A}_{\mathbb{K}})_x$ est l'espace directeur de la façade contenant x , muni des directions des murs de $A_{\mathbb{K}}$ contenant x . Pour \vec{F} une facette de $(\vec{A}_{\mathbb{K}})_x$, $\mathcal{F}il(x, \vec{F})$ est le filtre engendré par les parties closes de $A_{\mathbb{K}}$ qui induisent un voisinage de x dans $x + \vec{F}$. Les facettes de $A_{\mathbb{K}}$ sont tous les filtres obtenus ainsi, auxquels on rajoute encore la facette vide, qui est le filtre $\mathcal{P}(A_{\mathbb{K}})$ de toutes les parties de $A_{\mathbb{K}}$.
Si $F = \mathcal{F}il(x, \vec{F})$, alors \vec{F} est la direction de F , et si $x \in A_{\mathbb{K}, \vec{f}}$, alors $A_{\mathbb{K}, \vec{f}}$ ou même \vec{f} est appelé la façade de F . De manière générale, étant donnée une facette F , on notera \vec{F} sa direction et \vec{f} sa façade.
Une facette est dite sphérique lorsque sa façade est sphérique.

Comme il y a moins de murs dans $A_{\mathbb{K}}$ que dans A , et comme $A_{\mathbb{K}}$ lui-même n'est pas une partie close de A , le seul lien entre les facettes de A et celles de $A_{\mathbb{K}}$ est ceci :

Proposition 4.6.5. Si F est une facette de A , alors $F \cap A_{\mathbb{K}}$ est incluse dans une \mathbb{K} -facette de $A_{\mathbb{K}}$.

4.6.3 Décomposition de Lévi

Soit $\Omega \subset A_{\mathbb{K}}$ telle que $Cl(\vec{\Omega})$ est l'adhérence d'une facette ou une partie équilibrée. Alors $Q(\Omega) = U(\Omega) \rtimes M_A(\Omega)$ pour tout appartement A contenant $A_{\mathbb{K}}$. L'écriture $M_A(\Omega) = Q(\Omega \cup \text{op}_A(\Omega))$ prouve, puisque $\text{op}_A(\Omega) = \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega) \subset A_{\mathbb{K}}$ que $M_A(\Omega)$ est en fait indépendant de A , on pourra donc noter ce groupe $M_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$.
Les trois groupes $Q(\Omega)$, $U(\Omega)$, et $M_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$ sont \mathbb{K} -définis, et ceci entraîne que la décomposition de Lévi est encore vraie au niveau rationnel : $Q(\Omega)(\mathbb{K}) = U(\Omega)(\mathbb{K}) \rtimes M_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)(\mathbb{K})$.

Lorsque $Cl(\vec{\Omega}) \cap \mathcal{I}_{\text{sph}}$ est de plus non vide, la simple transitivité de $U(\Omega)$ sur les parties d'appartement opposées à Ω entraîne celle de $U(\Omega)(\mathbb{K})$ sur les parties d'appartement opposées à Ω et Γ -stables.

Par ailleurs, $M_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$ est alors un groupe réductif, donc $M_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)(\mathbb{K})$ est transitif sur les \mathbb{K} -appartements contenant $\Omega \cup \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$.

On conclut alors par la décomposition de Lévi que $Q(\Omega)(\mathbb{K})$ est transitif sur les \mathbb{K} -appartements contenant Ω .

En résumé :

Proposition 4.6.6. Soit $\Omega \subset A_{\mathbb{K}}$ telle que $Cl(\vec{\Omega})$ est équilibrée ou l'adhérence d'une facette sphérique. Alors $Q(\Omega)(\mathbb{K})$ est transitif sur les \mathbb{K} -appartements contenant Ω , $U(\Omega)(\mathbb{K})$ est simplement transitif sur les parties de \mathbb{K} -appartement opposées à Ω , et $M_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$ est transitif sur les appartements contenant $\Omega \cup \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$.

Remarque: Le raisonnement sur $U(\Omega)(\mathbb{K})$ montre en fait l'équivalence entre "être une partie d'appartement opposée à Ω et Γ -stable", "être une partie d'appartement opposée à Ω et Γ -fixe", et "être une partie de \mathbb{K} -appartement opposée à Ω ".

4.6.4 Lien entre les façades

Proposition 4.6.7. *Soit $A_{\mathbb{K}}$ un \mathbb{K} -appartement et $a \in A_{\mathbb{K}}$ un point sphérique. Soit $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}_{\mathbb{K}})$ telle que $a \in (A_{\mathbb{K}})_{\vec{f}}$. Alors pour tout $q \in Q(a)(\mathbb{K})$, il existe $a_0 \in \mathring{A}_{\mathbb{K}}$ et $n \in N(T_d)(\mathbb{K}) \cap P(a)$ tels que $nq \in P(a_0 + \vec{f})$.*

Démonstration: Sachant que $Q(a)(\mathbb{K}) = U(a)(\mathbb{K}) \rtimes M_{A_{\mathbb{K}}}(a)(\mathbb{K})$, et que tout élément de $U(a)(\mathbb{K})$ fixe un cône de la forme $a_0 + \vec{f}$ dans $\mathring{A}_{\mathbb{K}}$, on peut supposer $q \in M_{A_{\mathbb{K}}}(a)(\mathbb{K}) = Q(\{a, \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(a)\})(\mathbb{K})$. Comme a est dans une façade sphérique, on a $Q(\{a, \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(a)\}) \subset \text{Stab}_G(\text{Cl}(\{a, \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(a)\}))$ (corollaire ??), donc $A_{\mathbb{K}} \cap q.A_{\mathbb{K}} \supset \text{Cl}(\{a, \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(a)\})$. D'après la proposition 4.6.6, il existe alors $m \in Q(\text{Cl}(\{a, \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(a)\}))(\mathbb{K})$ tel que $mq \in \text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(A_{\mathbb{K}}) = N(T_d)(\mathbb{K})$. Comme m fixe $\text{Cl}(\{a, \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(a)\})$ qui contient un cône du type $a_0 + \vec{f}$, ceci prouve la proposition. \square

A présent que nous savons que $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ vérifie (para 0,1,3,4, 2.1 et 7)(\mathbb{K}), et (para 2.2)(\mathbb{K}) lorsque la façade de départ est sphérique, on peut appliquer les résultats des parties ?? et 3.9.

Références

- [AB08] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown. *Building, theory and applications*. Springer, 2008.
- [Abr96] Peter Abramenko. *Twin buildings and applications to S-arithmetic groups*. Number 1641 in Lecture notes in mathematics. Springer, 1996.
- [BT72] François Bruhat and Jacques Tits. Groupes réductifs sur un corps local I, données radicielles valuées. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 41 :5–184, 1972.
- [Cha08] Cyril Charignon. Compactification polyédrale d'un immeuble affine. *arXiv ou HAL*, 2008.
- [GR08] Stéphane Gaussent and Guy Rousseau. Kac-moody groups, hovels and littelman paths. *Annales de l'Institut Joseph Fourier*, 58 :2605–2657, 2008.
- [Rou06] Guy Rousseau. Groupes de kac-moody sur un corps local, immeubles microaffines. *Compositio Math.*, 142 :501–528, 2006.
- [Ré02] Bertrand Rémy. *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*, volume 277. Astérisque, 2002.