



**HAL**  
open science

# Structures immobilières pour un groupe de Kac-Moody sur un corps local (version préliminaire)

Cyril Charignon

► **To cite this version:**

Cyril Charignon. Structures immobilières pour un groupe de Kac-Moody sur un corps local (version préliminaire). 2009. hal-00438095v1

**HAL Id: hal-00438095**

**<https://hal.science/hal-00438095v1>**

Preprint submitted on 2 Dec 2009 (v1), last revised 22 Mar 2010 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Structures immobilières pour un groupe de Kac-Moody sur un corps local

Cyril Charignon

2 décembre 2009

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Rappels et notations</b>	<b>3</b>
2.1	Donnée radicielle	3
2.2	Valuation d'une donnée radicielle	4
2.3	Immeubles vectoriels	5
2.3.1	L'immeuble vectoriel déployé	5
2.3.2	Décomposition de Lévi	6
<b>3</b>	<b>Construction générale</b>	<b>7</b>
3.1	L'appartement	7
3.1.1	Façades d'appartement	7
3.1.2	Projections	8
3.1.3	Espaces engendrés	8
3.1.4	Murs et demi-appartements	9
3.1.5	Parties closes	9
3.1.6	Facettes	11
3.1.7	Action de $N(T)$	12
3.1.8	Opposition	13
3.2	Familles de sous-groupes parahoriques	13
3.2.1	Définition	13
3.2.2	La famille minimale de parahoriques	14
3.2.3	La condition ( <i>fonc</i> )	16
3.2.4	Relations entre les conditions ( <i>para x</i> )	18
3.3	La définition de l'immeuble	19
3.3.1	La relation d'équivalence	19
3.3.2	Définition	20
3.3.3	Façades d'immeuble	22
3.4	Décomposition d'Iwasawa	23
3.4.1	Préliminaires	23
3.4.2	Démonstration	23
3.4.3	Unicité	24
3.5	Lien entre les façades	25
3.5.1	Conséquence de ( <i>para2.2</i> )	25
3.5.2	Conséquences de ( <i>para2.2</i> <sup>+</sup> )	26
3.5.3	Implications entre ces conditions	27
3.6	Complétion d'une famille de parahoriques	28

3.7	Décomposition de Bruhat/Birkhoff . . . . .	29
3.8	Isomorphismes entre appartements . . . . .	30
3.9	Intersection d'appartements . . . . .	31
3.10	Indépendance par rapport au tore maximal . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Masure complète pour un groupe de Kac-Moody presque déployé</b>	<b>34</b>
4.1	Rappels et notations pour les groupes de Kac-Moody . . . . .	34
4.2	Le cas déployé . . . . .	34
4.3	L'immeuble vectoriel rationnel . . . . .	34
4.4	Topologie de $\Gamma$ . . . . .	35
4.5	L'appartement rationnel . . . . .	35
4.5.1	Action de $\Gamma$ sur $A$ . . . . .	36
4.5.2	Action de $\Gamma$ sur $\mathcal{I}$ . . . . .	38
4.5.3	Action de $N(T_\sigma)(\mathbb{K})$ sur $Y(\mathbb{K})$ . . . . .	38
4.5.4	Façades . . . . .	39
4.5.5	Murs et demi-appartements . . . . .	39
4.5.6	Sous-groupes radiciels . . . . .	39
4.5.7	Valuation . . . . .	41
4.5.8	Identification des appartements . . . . .	42
4.6	L'immeuble rationnel . . . . .	42
4.6.1	Définition . . . . .	42
4.6.2	Structure des appartements . . . . .	45
4.6.3	Décomposition de Lévi . . . . .	46
4.6.4	Lien entre les façades . . . . .	46

## 1 Introduction

Lorsque  $G$  est un groupe réductif sur un corps local  $\mathbb{K}$ , la théorie de François Bruhat et Jacques Tits permet de lui associer, outre son immeuble vectoriel, ou sphérique, ou "de Tits", un immeuble affine, dit "de Bruhat-Tits". Cette immeuble est plus précis que l'immeuble vectoriel, au sens où la connaissance du premier permet de reconstruire le second. Comme tout immeuble, il s'agit d'une réunion d'appartements, et on le qualifie d'"affine" car ces appartements sont des espaces affines, dont les espaces vectoriels directeurs sont en fait les appartements de l'immeuble vectoriel.

Maintenant, si  $G$  est un groupe de Kac-Moody, déployé ou presque déployé, on sait construire son immeuble vectoriel. Il s'agit en fait de deux immeubles jumelés, voir par exemple [Ré02]. Le but du travail présent est, dans le cas où  $G$  est un groupe de Kac-Moody sur un corps local, de définir un objet "affine", similaire à l'immeuble de Bruhat-Tits du cas réductif.

Ceci a déjà été fait dans [GR08] par Stéphane Gaussent et Guy Rousseau, pour un groupe déployé sur un corps  $\mathbb{K}$  dont le corps résiduel contient  $\mathbb{C}$ . L'objet défini est appelé "masure" car il ne satisfait pas toutes les conditions demandées à un immeuble habituel. Pour un corps plus général, mais toujours un groupe déployé, Guy Rousseau ([Rou06]) a défini un "immeuble microaffine", que l'on peut voir comme le bord à l'infini d'une mesure, semblable au bord rajouté à un immeuble affine lorsqu'on définit sa compactification polygonalement. Par ailleurs, la définition d'une mesure pour un corps local général est a priori effectuée, toujours par Guy Rousseau, la rédaction est en cours.

On se propose ici de se placer dans le cadre général des groupes munis d'une donnée radicielle valuée, cadre qui inclut les groupes de Kac-Moody déployés ou presque déployés sur un corps muni d'une valuation réelle quelconque. Nous construisons simultanément une "masure" et son bord (qui contient donc un "immeuble microaffine") car celui-ci sera utile à l'étude des propriétés géométriques de la mesure. L'objet obtenu sera appelé une mesure complète.

On se rend compte que plusieurs choix peuvent être faits, menant à différentes mesures complètes. Pour rentrer un peu dans le détail, la construction d'un appartement  $A$  ne présente pas de difficulté (partie 3.1), et on cherche donc ensuite, selon le procédé habituel de Bruhat et Tits, à construire un objet immobilier comme quotient de  $G \times A$  par la

relation d'équivalence déterminée par le choix des sous-groupes de  $G$  qui seront les fixateurs des points de  $A$ . Ces sous-groupes sont appelés, comme dans le cas réductif, des "sous-groupes parahoriques", et contrairement au cas réductif, leur définition n'est pas évidente : plusieurs possibilités sont envisageables. Ainsi, dans [GR08], Stéphane Gaussent et Guy Rousseau définissent les familles de groupes parahoriques  $\mathcal{P}^{min}$ ,  $\mathcal{P}^{pm}$ ,  $\mathcal{P}^{nm}$  dont la définition est quelque peu indirecte, et nécessite l'emploi de "complétions" du groupe de Kac-Moody  $G$  considéré.

Toujours par soucis de généralité, nous optons pour une approche axiomatique, c'est-à-dire que nous définissons abstraitement la notion de "famille de parahoriques", et nous étudions les objets immobiliers que l'on peut construire, en fonction des propriétés vérifiées par une telle famille. C'est la partie 3. Dans le cas d'un groupe de Kac-Moody déployé, nous aurons essentiellement deux exemples de familles de parahoriques, ce sont ces deux exemples que nous aurons en tête tout au long de cette partie. Dans la partie 4 enfin, on étudie le cas d'un groupe presque déployé : il s'agit de trouver une famille de parahoriques permettant d'utiliser la construction générale de la partie 3.

## 2 Rappels et notations

Lorsque  $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction sur un ensemble  $X$ , on notera pour  $Y \subset X$ ,  $\alpha(Y) = 0$  si  $\alpha(Y) = \{0\}$ ,  $\alpha(Y) > 0$  si  $\alpha(Y) \subset \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\alpha(Y) \geq 0$  si  $\alpha(Y) \subset \mathbb{R}^+$  etc...

Si  $A$  est un complexe simplicial,  $\mathcal{F}(A)$  sera l'ensemble de ses facettes. Si  $f$  est une facette de  $A$ ,  $f^*$  est la réunion des facettes bordées par  $f$ . Ainsi, lorsque  $\vec{f}$  est une facette dans un immeuble  $\vec{I}$ ,  $\vec{f}^*$  désignera la réunion des facettes de  $\vec{I}$  dont l'adhérence contient  $\vec{f}$ . Si  $\vec{Z}$  est un appartement de  $\vec{I}$ , on notera la réunion des facettes de  $\vec{Z}$  dont l'adhérence contient  $\vec{f}$  par  $\vec{f}^* \cap \vec{Z}$ . Enfin, par définition d'un complexe simplicial,  $\mathcal{F}(A)$  est muni d'un ordre qu'on notera juste  $\leq$ .

### 2.1 Donnée radicielle

Il y a plusieurs définitions possibles pour une donnée radicielle, selon que l'on considère qu'un système de racines est un sous-ensemble d'un espace vectoriel réel ou un ensemble de demi-complexes de Coxeter. La seconde possibilité est plus générale, la première plus précise, elle permet notamment de distinguer une racine et son double. Un système de racines du premier type sera dit vectoriel, un système du second type sera dit géométrique.

Si  $\alpha, \beta$  sont deux racines d'un système  $\phi$ , l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  est défini de la sorte :

- $[\alpha, \beta] = \{p\alpha + q\beta \mid p, q \in \mathbb{N} \text{ et } p\alpha + q\beta \in \phi\}$  lorsque  $\phi$  est un système de racines vectoriel.
- $[\alpha, \beta] = \{\gamma \in \phi \mid \alpha \cap \beta \subset \gamma\}$  lorsque  $\phi$  est un système de racines géométrique.

On définit aussi  $] \alpha, \beta [ = [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha, \beta\}$  ainsi que  $] \alpha, \beta ]$  et  $[ \alpha, \beta [$  de la manière évidente.

Une partie  $\psi$  d'un système de racine est dite close lorsque pour tout  $\alpha, \beta \in \psi$ ,  $[\alpha, \beta] \subset \psi$ . La partie  $\psi$  est dite de plus nilpotente si elle est finie. Enfin, une partie  $\psi$  est dite prénilpotente s'il existe un système de positif  $\phi^+$  de  $\phi$  et un élément  $w \in W(\phi)$  du groupe de Weyl associé à  $\phi$  tel que  $\psi \subset \phi^+ \cap w(-\phi^+)$ . Une partie  $\psi$  est nilpotente si et seulement si elle est close et prénilpotente.

La notion de prénilpotence est principalement utilisée pour les paires de racine. Si  $\{\alpha, \beta\}$  est une telle paire, il est presque immédiat que l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  est clos, ainsi  $\{\alpha, \beta\}$  est prénilpotente si et seulement si  $[\alpha, \beta]$  est fini.

Dans la suite, sauf mention du contraire, les systèmes de racines considérés seront toujours de type vectoriel. Ainsi, l'existence d'un système de racines  $\phi$  sous-entend l'existence d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\vec{V}$  tel que  $\phi \subset \vec{V}^*$ . Un système de racines  $\phi$  est dit réduit si pour tout  $\alpha \in \phi$ ,  $\phi \cap \mathbb{R} \cdot \alpha = \{\pm\alpha\}$ . Lorsque  $\phi$  n'est pas réduit, la seule possibilité est en fait  $\phi \cap \mathbb{R} \cdot \alpha = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$  ou  $\phi \cap \mathbb{R} \cdot \alpha = \{\pm\alpha, \pm \frac{1}{2}\alpha\}$ .

**Définition 2.1.1.** Soit  $\phi$  un système de racines, et  $\phi^+$  un système positif dans  $\phi$ . Soit  $G$  un groupe et  $(U_\alpha)_{\alpha \in \phi}$  une famille de sous-groupes de  $G$ . On note  $T = \bigcap_{\alpha \in \phi} N_G(U_\alpha)$  l'intersection des normalisateurs des  $U_\alpha$ ,  $U^+ = \langle \{U_\alpha \mid \alpha \in \phi^+\} \rangle$  et  $U^- = \langle \{U_\alpha \mid \alpha \in -\phi^+\} \rangle$ .

Le couple  $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$  est appelé une donnée radicielle de type  $\phi$  si :

- (DRI) : Chaque  $U_\alpha$  est un sous-groupe de  $G$  non trivial.

- (DR2) : Pour toute paire prénipotente de racines  $\{\alpha, \beta\}$ ,  $[U_\alpha, U_\beta] \subset \langle \{U_\gamma \mid \gamma \in [\alpha, \beta]\} \rangle$ . ( $[U_\alpha, U_\beta]$  est le groupe des commutateurs de  $U_\alpha$  et  $U_\beta$ .)
- (DR3) : Si  $\alpha \in \phi$  et  $2\alpha \in \phi$ , alors  $U_{2\alpha}$  est inclus strictement dans  $U_\alpha$ .
- (DR4) : Pour tout  $\alpha \in \phi$ , et tout  $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$ , il existe  $u', u'' \in U_{-\alpha}$  tels que  $n(u) := u'uu''$  conjugue chaque  $U_\beta$ ,  $\beta \in \phi$  en  $U_{r_\alpha \beta}$ . De plus, les différents  $n(u)$  peuvent être choisis de sorte que pour tout  $u, v \in U_\alpha \setminus \{e\}$ ,  $n(u).T = n(v).T$ .
- (DR5) :  $T.U^+ \cap U^- = \{e\}$ .

Cette donnée radicielle est dite *génératrice* si de plus :

- (DRG) :  $G$  est engendré par  $T$  et les  $U_\alpha$ .

*Remarque:* C'est la définition utilisée dans [Rou06], 1.5, elle équivaut à la définition de "donnée radicielle jumelée entière" de [Ré02] 6.2.5. Dans la terminologie de [Ré02], le qualificatif "entière" sert à indiquer que le système de racines est de type vectoriel. La définition d'une donnée radicielle pour un système de racines géométrique est exactement la même, à ceci près que la définition d'un intervalle de racines utilisée en (DR2) a changé, et que (DR3) devient inutile.

Le qualificatif "jumelé" sert quand à lui à se rappeler que dans le cas où  $\phi$  est infini, cette donnée radicielle menera à un immeuble jumelé. Il n'a aucune signification formelle, ce qui explique son omission ici.

Signalons enfin que c'est la notion géométrique de donnée radicielle qui est définie dans [AB08].

Lorsque  $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$  est une donnée radicielle, on notera toujours  $T = \bigcap_{\alpha \in \phi} N_G(U_\alpha)$  comme dans la définition. On prouve que les éléments  $n(u)$  dans (DR4) sont uniques, on peut donc conserver la notation  $n(u)$ . On note de plus  $N$  le sous-groupe de  $G$  engendré par ces éléments et par  $T$ , on prouve qu'il s'agit du normalisateur de  $T$  sous la condition (CENT) définie dans [Ré02] 1.2.5. Le groupe quotient  $N/T$  s'identifie au groupe de Weyl du système de racine  $\phi$  en associant pour tout  $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$ ,  $n(u).T$  à la réflexion  $r_\alpha$ .

Le groupe  $T$  et tous ses conjugués sont appelés les tores maximaux. Si la condition (CENT) est vérifiée, si  $T' = gTg^{-1}$  est un tore maximal, on note  $N(T') = gNg^{-1}$  son normalisateur,  $g\phi$  le système de racines abstraitement isomorphe à  $\phi$  via l'application  $\alpha \mapsto g\alpha$ , et pour tout  $\alpha \in \phi$ , on note enfin  $U_{g\alpha} = gU_\alpha g^{-1}$ . Alors  $(G, (U_{g\alpha})_{g\alpha \in g\phi})$  est encore une donnée radicielle.

Dans la suite, on évitera de particulariser la donnée radicielle  $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$  (correspondant au tore  $T$ ), on considérera plutôt que  $G$  est muni d'une classe d'équivalence (pour la conjugaison) de données radicielles. Pour chaque tore  $T$  on notera  $\phi(T) \subset \vec{V}(T)^*$  le système de racine et  $(U_\alpha)_{\alpha \in \phi(T)}$  les groupes radiciels correspondants.

Si  $\mathcal{D} = (G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$  est une donnée radicielle, pour toute partie  $\psi$  de  $\phi$ , on notera  $G(\psi) = \langle \{U_\alpha \mid \alpha \in \psi\} \rangle$ .

Par définition même, un groupe de Kac-Moody déployé admet une donnée radicielle. Et c'est un des buts de [Ré02] que de prouver que c'est encore le cas pour une classe de groupes de Kac-Moody plus générale. Le terme employé dans [Ré02] pour qualifier ces groupes est "presque déployé".

**Proposition 2.1.2.** *Si  $G$  est un groupe de Kac-Moody déployé ou presque déployé, alors il admet une donnée radicielle. Si  $\mathbb{K}$  est un corps de cardinal au moins 4, alors  $G(\mathbb{K})$  vérifie la condition (CENT).*

## 2.2 Valuation d'une donnée radicielle

A l'exemple de [BT72], on ajoute maintenant une structure supplémentaire à notre donnée radicielle qui permet de rendre compte, dans le cas d'un groupe sur un corps local, de la valuation du corps.

**Définition 2.2.1.** *Soit  $\phi$  un système de racines. Soit  $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$  une donnée radicielle, soit  $\Lambda$  un groupe abélien totalement ordonné, et pour tout  $\alpha \in \phi$  soit  $\varphi_\alpha$  une fonction de  $U_\alpha$  dans  $\Lambda \cup \{\infty\}$ . Pour tout  $\lambda \in \Lambda$  on note  $U_{\alpha, \lambda} = \varphi_\alpha^{-1}([\lambda, \infty])$ .*

*On dit que la famille  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi}$  est une valuation de la donnée radicielle  $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ , ou que  $(G, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi})$  est une donnée radicielle valuée si :*

- (V0) :  $\forall \alpha \in \phi, \varphi_\alpha(U_\alpha)$  a au moins trois éléments.
- (V1) : Pour tout  $\alpha \in \phi$  et  $\lambda \in \Lambda$ ,  $U_{\alpha,\lambda}$  est un sous-groupe de  $U_\alpha$ , et  $U_{\alpha,\infty} = \{e\}$ .
- (V2.1) : Pour tout  $\alpha \in \phi$ , pour tout  $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$ , la fonction 
$$U_\alpha \setminus \{e\} \rightarrow \Lambda$$
$$v \mapsto \varphi_{-\alpha}(v) - \varphi_\alpha(n(u)vn(u)^{-1})$$
 est constante.
- (V2.2) : Pour tout  $\alpha \in \phi$ , pour tout  $t \in T$ , 
$$U_\alpha \setminus \{e\} \rightarrow \Lambda$$
$$v \mapsto \varphi_\alpha(v) - \varphi_\alpha(tvt^{-1})$$
 est constante.
- (V3) : Pour toute paire prénipotente de racines  $\{\alpha, \beta\}$ , pour tous  $\lambda, \mu \in \Lambda$  :
$$[U_{\alpha,\lambda}, U_{\beta,\mu}] \subset \left\langle \left\{ U_{p\alpha+q\beta} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \text{ et } p\alpha + q\beta \in \phi \right\} \right\rangle$$
- (V4) : Si  $\alpha \in \phi$  et  $2\alpha \in \phi$  alors  $\phi_{2\alpha}$  est la restriction de  $\phi_\alpha$  à  $U_{2\alpha}$ .
- (V5) : Pour tout  $\alpha \in \phi$ , pour tout  $u \in U_\alpha \setminus \{e\}$ , soient  $u', u'' \in U_{-\alpha}$  tels que  $n(u) = u'uu''$ , alors  $-\varphi_\alpha(u) = \varphi_{-\alpha}(u') = \varphi_{-\alpha}(u'')$ .

Lorsque  $(G, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi})$  est une donnée radicielle valuée, on garde la notation  $U_{\alpha,\lambda}$  introduite pour la définition.

**Proposition 2.2.2.** Soit  $G$  un groupe de Kac-Moody déployé, soit  $\mathbb{K}$  un corps muni d'une valuation  $\varpi : \mathbb{K} \rightarrow \Lambda \cup \{\infty\}$ . Alors il existe une valuation  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi}$  de la donnée radicielle  $(G(\mathbb{K}), (U_\alpha(\mathbb{K}))_{\alpha \in \phi})$ , elle est définie par  $\varphi_\alpha(u_\alpha(k)) = \varpi(k)$ , où  $u_\alpha$  est un isomorphisme entre  $(\mathbb{K}, +)$  et  $U_\alpha(\mathbb{K})$ .

Référence : [Rou06]

□

## 2.3 Immeubles vectoriels

Ce que nous appelons ici les immeubles vectoriels sont les immeubles décrits dans [Ré02]. Ce sont des immeubles jumelés, donc en fait la réunion de deux immeubles classiques. Dans la réalisation géométrique de ces immeubles que nous considérons, les appartements sont inclus dans des espaces vectoriels, d'où l'appellation "immeubles vectoriels". Une autre appellation fréquente est "immeubles coniques", car les appartements sont des cônes dans ces espaces vectoriels.

Dans cette sous-partie, nous rappelons les principaux résultats concernant ces immeubles, et fixons les notations.

On suppose désormais  $\phi$  à base libre, c'est-à-dire que toute base  $\Pi$  du système de racines  $\phi$  est aussi une base de l'espace vectoriel sous-jacent  $\vec{V}^*$ .

### 2.3.1 L'immeuble vectoriel déployé

Une donnée radicielle permet de définir un immeuble, voir par exemple [Ré02] partie 2. On notera  $\vec{I}$  l'immeuble obtenu à partir de la donnée radicielle  $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi})$ .

Ses appartements sont en bijection avec les tores maximaux de  $G$ . Dans la réalisation de  $\vec{I}$  que nous considérons, l'appartement correspondant au tore maximal  $T$  est inclus dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\vec{V} = \vec{V}(T)$ . Donc  $\phi(T) \subset \vec{V}(T)^*$  : les racines relatives à  $T$  sont des formes linéaires sur cet espace. Le choix d'une base  $\Pi$  de  $\phi(T)$  définit un cône  $\vec{C} = \{x \in \vec{V}(T) \mid \alpha(x) > 0, \forall \alpha \in \Pi\}$ , c'est la chambre positive relative à  $\Pi$ . Les ensembles obtenus en remplaçant certaines des inégalités  $> 0$  par des égalités  $= 0$  dans la définition de  $\vec{C}$  sont les facettes de  $\vec{C}$ . L'appartement  $\vec{A}(T)$  est alors  $W(T).\vec{C} \cup W(T).(-\vec{C}) \subset \vec{V}(T)$ , ses facettes sont les  $\pm w\vec{f}$ , pour  $w \in W(T)$  et  $\vec{f}$  une facette de  $\vec{C}$ . Les chambres sont les facettes maximales, donc les images de  $\pm \vec{C}$  par un  $w \in W(T)$ , et les cloisons sont les facettes de codimension 1. C'est un cône, réunion de deux cônes convexes  $\vec{A}^+(T) = W(T).\vec{C}$  et  $\vec{A}^-(T) = -\vec{A}^+(T)$ . Le cône positif  $\vec{A}^+(T)$  est

appelé le cône de Tits. Chacun de ces deux cônes convexes, avec sa structure de facettes, est un complexe de Coxeter pour  $W(T)$ .

L'intérieur de  $\vec{A}(T)$  dans  $\vec{V}(T)$  est une réunion de facettes, appelées les facettes sphériques. Ce sont précisément les facettes dont le fixateur dans  $W(T)$  est fini. Les chambres et les cloisons sont toujours sphériques, leur fixateur dans  $W(T)$  étant respectivement  $\{e\}$  et  $\{\pm 1\}$ .

L'immeuble  $\vec{I}$  est réunion des  $\vec{A}(T)$  pour tous les tores maximaux  $T$ . Ces appartements sont permutés transitivement par  $G$ , selon la formule  $g.\vec{A}(T) = \vec{A}(gTg^{-1})$  ([Ré02] 2.6.2). En conséquence,  $N(T)$  est le stabilisateur de  $\vec{A}(T)$ . Pour  $\alpha \in \phi$ ,  $u \in U_\alpha$ , l'élément  $n(u)$  agit sur  $\vec{A}(T)$  comme la réflexion selon le mur  $\ker(\alpha)$ . Le groupe  $T$  quand à lui est le fixateur de  $\vec{A}(T)$ .

Pour une racine  $\alpha \in \phi(T)$ ,  $\mathcal{D}(\alpha) := \{x \in \vec{A}(T) \mid \alpha(x) \geq 0\}$  est le demi-appartement associé à  $\alpha$ . Le groupe  $U_\alpha$  fixe ce demi-appartement, et est simplement transitif sur les appartements le contenant.

Si on fixe un tore maximal  $T$ , et une base de  $\phi(T)$ , on définit  $\vec{I}^+ = G.\vec{A}^+(T)$  et  $\vec{I}^- = G.\vec{A}^-(T)$ . Ce sont deux immeubles au sens classique, qui ne s'intersectent qu'en 0. Le découpage  $\vec{I} = \vec{I}^+ \cup \vec{I}^-$  est indépendant des choix de  $T$  et de la base de  $\phi(T)$ , mais  $\vec{I}^+$  et  $\vec{I}^-$  sont échangés si on remplace une base de  $\phi(T)$  par son opposée. Ces deux immeubles sont jumelés.

Pour toute partie  $\vec{\Omega}$  d'un appartement  $\vec{A}(T)$ , on note  $P(\vec{\Omega})$  son fixateur dans  $G$ , c'est le *sous-groupe parabolique de  $G$  associé à  $\vec{\Omega}$* . Rappelons les propriétés essentielles de ces groupes :

**Proposition 2.3.1.**

1. Pour tout  $\vec{\Omega} \subset \vec{A}(T)$ ,  $\bigcap_{\vec{f} \in \vec{\Omega}} N(T).P(\vec{f}) = N(T).P(\vec{\Omega})$ , ce qui signifie qu'entre deux appartements contenant  $\vec{\Omega}$  existe un isomorphisme induit par un élément de  $G$  fixant  $\vec{\Omega}$ . Autrement dit, le groupe  $P(\vec{\Omega})$  est transitif sur les appartements contenant  $\vec{\Omega}$ .
2. Pour toute partie  $\vec{\Omega} \subset \vec{A}(T)$ , on a  $P(\vec{\Omega}) = P(Cl(\vec{\Omega}))$ , où  $Cl(\vec{\Omega})$  est l'enclos de  $\vec{\Omega}$  dans  $\vec{A}(T)$ , c'est-à-dire l'intersection de tous les demi-appartements contenant  $\vec{\Omega}$ . Ceci entraîne que l'intersection de deux appartements  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est une partie close (ie égale à son enclos) dans chacun des appartements  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ .
3. Si  $\vec{f}$  et  $\vec{g}$  sont deux facettes de  $\vec{I}$ , alors  $G = P(\vec{f}).N(T).P(\vec{g})$  où  $T$  est un tore maximal tel que  $\vec{A}(T)$  contient une des deux facettes. Ceci entraîne qu'il existe un appartement contenant  $\vec{f} \cup \vec{g}$ . Lorsque  $\vec{f}$  et  $\vec{g}$  sont de même signe, cette décomposition est dite de Bruhat, sinon de Birkhoff.

**2.3.2 Décomposition de Lévi**

On se réfère ici à [Ré02] partie 6.

Soit  $\vec{\Omega}$  une partie d'un appartement  $\vec{A}$ . On note :

- $\phi^u(\vec{A})(\vec{\Omega}) = \{\alpha \in \phi(\vec{A}) \mid \alpha(\vec{\Omega}) > 0\}$
- $\phi^m(\vec{A})(\vec{\Omega}) = \{\alpha \in \phi(\vec{A}) \mid \alpha(\vec{\Omega}) = 0\}$
- $\phi(\vec{A})(\vec{\Omega}) = \phi^u(\vec{A})(\vec{\Omega}) \sqcup \phi^m(\vec{A})(\vec{\Omega}) = \{\alpha \in \phi(\vec{A}) \mid \alpha(\vec{\Omega}) \geq 0\}$ .

L'ensemble de racines  $\phi^m(\vec{A})(\vec{\Omega})$  est en fait un sous-système de racines de  $\phi(\vec{A})$ . Lorsque  $\vec{\Omega}$  contient un point sphérique, il est fini.

On définit ensuite les sous-groupes de  $P(\vec{\Omega})$  suivants :

- Le facteur de Lévi de  $P(\vec{\Omega})$  par rapport  $\vec{A} : M_{\vec{A}}(\vec{\Omega}) := \text{Fix}_G(\text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{\Omega})) = \text{Fix}_G(\vec{\Omega} \cup \text{op}_{\vec{A}}(\vec{\Omega}))$ . Il est d'après 2.3.1 transitif sur les appartements contenant  $\text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{\Omega})$ . Si  $\vec{\Omega}$  est une facette ou si elle contient une facette sphérique, alors  $M_{\vec{A}}(\vec{\Omega}) = \langle T, \{U_\alpha \mid \alpha \in \phi^m(\vec{A})(\vec{\Omega})\} \rangle$ . Enfin, le couple  $(M(\vec{\Omega}), (U_\alpha)_{\alpha \in \phi^m(\vec{\Omega})})$  est une donnée radicielle de

système de racines  $\phi^m(\vec{\Omega})$ . En particulier, lorsque  $\vec{\Omega}$  contient un point sphérique,  $\phi^m(\vec{\Omega})$  est un système de racines fini, et  $M(\vec{\Omega})$  est muni d'une donnée radicielle de type fini, comme définie dans [BT72].

- *Le facteur unipotent de  $P(\vec{\Omega})$*  :  $U(\vec{\Omega})$  est le sous-groupe distingué de  $P(\vec{\Omega})$  engendré par  $\{U_\alpha \mid \alpha \in \phi^u(\vec{A})(\vec{\Omega})\}$ . Il est donc indépendant de l'appartement  $\vec{A}$  contenant  $\vec{\Omega}$  considéré. Dès que  $\phi^u(\vec{\Omega})$  est une partie nilpotente de racines, il admet la décomposition avec écriture unique :  $U(\vec{\Omega}) = \prod_{\alpha \in \phi^u(\vec{A})(\vec{\Omega})} U_\alpha$ , quel que soit l'ordre des facteurs. C'est en particulier le cas lorsque  $\vec{\Omega}$  intersecte une facette positive sphérique et une facette négative sphérique. Lorsque  $\vec{\Omega}$  est une chambre,  $U(\vec{\Omega}) = \langle \{U_\alpha \mid \alpha \in \phi^u(\vec{A})(\vec{\Omega})\} \rangle$ , et lorsque  $\vec{\Omega}$  est une facette,  $U(\vec{\Omega})$  est l'intersection des  $U(\vec{C})$  pour  $\vec{C}$  les chambres de  $\vec{A}$  contenant  $\vec{\Omega}$  dans leur adhérence. On prouve enfin que si  $\vec{\Omega}$  est une facette sphérique,  $U(\vec{\Omega}) = U(\vec{C}) \cap U(\vec{D})$  dès que  $\vec{C}$  et  $\vec{D}$  sont deux chambres opposées dans  $\vec{\Omega}^* \cap \vec{A}$ .

Une partie équilibrée dans  $\vec{I}$  est une partie d'appartement qui contient des points positifs et négatifs et qui est recouverte par un nombre fini de facettes sphériques.

Dans le cas où  $\vec{\Omega}$  est soit une facette soit une partie équilibrée de  $\vec{A}$ ,  $P(\vec{\Omega})$  admet une décomposition de Lévi ([Ré02], 6.2.2 et 6.4.1) :

$$P(\vec{\Omega}) = M_{\vec{A}}(\vec{\Omega}) \ltimes U(\vec{\Omega})$$

Une extension vectorielle de  $\vec{\Omega}$  est une partie de  $\vec{I}$  de la forme  $\text{Vect}_{\vec{B}}(\vec{\Omega})$  pour un appartement  $\vec{B}$  contenant  $\vec{\Omega}$ . La décomposition de Lévi peut aussi s'exprimer en disant que  $U(\vec{\Omega})$  est simplement transitif sur les extensions vectorielles de  $\vec{\Omega}$ .

### 3 Construction générale

Soit  $\vec{V}$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $\phi \subset \vec{V}^*$  un système de racines dont les bases sont des bases vectorielles de  $\vec{V}^*$ , et  $(G, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi})$  un groupe muni d'une donnée radicielle valuée. On suppose la condition (CENT) de [Ré02] 1.2.5 vérifiée, donc le normalisateur d'un tore maximal  $T$  est le groupe engendré par  $T$  et les  $n(u)$ ,  $u \in U_\alpha$ ,  $\alpha \in \phi(T)$ . On essaie de voir quel genre d'objet immobilier, semblable à l'immeuble affine de Bruhat-Tits ([BT72]), pourrait être défini dans cette situation.

#### 3.1 L'appartement

Soit  $T$  un tore maximal dans  $G$ . On définit dans ce numéro l'objet  $A(T)$  qui nous sera l'appartement relatif à  $T$ . Il s'agit d'une réunion disjointe d'espaces affines sous  $\vec{V}(T)$  et certains de ses sous-espace vectoriels. Dans toute cette partie, on notera  $\phi = \phi(T)$  et  $N = N(T)$ .

##### 3.1.1 Façades d'appartement

Soit  $Y(T)$  un espace affine sous  $\vec{V}$ . Un cône dans  $Y(T)$  est une partie de  $Y(T)$  de la forme  $f = x + \vec{f}$ , où  $\vec{f}$  est un cône de  $\vec{V}(T)$ . Le cône vectoriel  $\vec{f}$  est uniquement déterminé, c'est la direction de  $x + \vec{f}$ . Deux cônes de même direction sont dits parallèles, on note  $g \parallel f$ . Lorsque  $g$  est parallèle et inclus dans  $f$ , on dit que c'est un sous-cône parallèle, abrégé en "scp".

On définit une relation d'équivalence  $\sim$  (ou  $\sim_T$  lorsqu'il faut préciser) sur l'ensemble des cônes convexes de  $Y(T)$ . Soient  $f = x + \vec{f}$  et  $g = y + \vec{g}$ , on pose :

$$f \sim g \Leftrightarrow (f \parallel g \text{ et } f \cap g \neq \emptyset) \Leftrightarrow (f \cap g \text{ contient un scp de } f \text{ et de } g) \Leftrightarrow (f \parallel g \text{ et } \vec{x} \in \text{Vect}(\vec{f}))$$

Pour tout cône convexe  $\vec{f}$  on note  $Y(T)_{\vec{f}}$  l'ensemble des cônes dirigés par  $\vec{f}$  quotienté par  $\sim$ . C'est la façade de  $Y(T)$  de direction  $\vec{f}$ . C'est un espace affine isomorphe à  $Y(T)/\text{Vect}(\vec{f})$ , et l'action de  $\vec{V}(T)$  sur  $A$  passe au quotient sur



$Y(T)_{\vec{f}}$ .

Soit  $\mathcal{F}(\vec{A}(T))$  l'ensemble des facettes de  $\vec{A}(T)$ , ce sont en particulier des cônes convexes de  $\vec{V}(T)$ . L'appartement (complet) associé à  $T$  est alors :

$$A(T) := \bigcup_{\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T))} Y(T)_{\vec{f}}$$

On notera  $A(T)_{\vec{f}}$  pour désigner la façade  $Y(T)_{\vec{f}}$ , et les façades de  $Y(T)$  seront appelées les façades de  $A(T)$ . Les façades ainsi construites seront appelées façades d'appartement, pour les distinguer des façades d'immeubles dont la définition est à venir. Lorsque  $a$  est un point de  $A(T)$ , on notera  $\vec{f}_a$  la direction de la façade le contenant. L'espace  $\vec{V}$  agit donc sur  $A(T)$  et les orbites sont les façades.

On note  $A(T)_{sph}$  la réunion des façades sphériques de  $A(T)$ , c'est-à-dire des façades de type une facette vectorielle sphérique. On note aussi  $A(T)_{sph}^+$  et  $A(T)_{sph}^-$  la réunion des façades sphériques positives et négatives. Dans la terminologie de [Rou06],  $A(T)_{sph}^+$  et  $A(T)_{sph}^-$  sont deux réalisations de Satake d'appartements microaffines.

On définit une topologie sur  $A(T)$ , telle que les voisinages d'un point  $[x + \vec{f}]$  sont les :

$$\mathcal{V}(U, \vec{f}) = \{a \in A(T) \mid \text{un représentant de } a \text{ est inclus dans } U + \vec{f}\},$$

pour tous les voisinages  $U$  de  $x$  dans l'espace affine  $Y(T)$ . Cette topologie induit la topologie classique d'un espace affine de dimension finie sur chaque façade et l'adhérence d'une façade  $A_{\vec{f}}$  est l'union des façades  $A_{\vec{g}}$  pour  $\vec{f} \subset \vec{g}$ . Cette topologie est séparée, et si  $\vec{f}$  est une facette sphérique, alors  $\overline{A_{\vec{f}}} = \bigcup_{\vec{g} \text{ tq } \vec{f} \subset \vec{g}} A_{\vec{g}}$  est compact ([Cha08]).

Comme les bases de  $\phi$  sont des bases de  $\vec{V}^*$ , la plus petite facette de  $\vec{A}(T)$  est  $\{0\}$ . La façade  $A(T)_{(0)} = Y(T)$  est appelée la façade principale de  $A(T)$ , c'est l'intérieur de  $A(T)$ . On la notera donc  $\vec{A}(T)$ , et on pourra oublier la notation  $Y(T)$ .

Jusqu'à la fin de 3.1, on notera  $A = A(T)$  et  $\vec{A} = \vec{A}(T)$ .

### 3.1.2 Projections

On rappelle d'abord la notion de projection dans  $\vec{I}$  : si  $\vec{f}$  et  $\vec{g}$  sont des facettes de  $\vec{I}$ , alors la projection de  $\vec{g}$  sur  $\vec{f}$ , notée  $pr_{\vec{f}}(\vec{g})$  est la facette de dimension maximale, bordant  $\vec{f}$ , incluse dans  $\text{Cl}(\vec{f} \cup \vec{g})$ .

On définit également une projection affine, pour l'instant dans l'appartement  $A(T)$  :

**Définition 3.1.1.** Soient  $\vec{f}, \vec{g}$  deux facettes vectorielles telles que  $\vec{f} \subset \text{Vect}(\vec{g})$ . Soit  $a = [x + \vec{f}] \in A_{\vec{f}}$ , on pose alors  $pr_{\vec{g}}(a) = [x + \vec{g}]$ .

La fonction  $pr_{\vec{g}}$  est la projection sur la façade  $A_{\vec{g}}$ , elle est définie sur la réunion des façades dirigées par une facette incluse dans  $\text{Vect}(\vec{g})$ .

*Remarque:* L'hypothèse  $\vec{f} \subset \text{Vect}(\vec{g})$  assure que ceci est bien défini.

### 3.1.3 Espaces engendrés

**Définition 3.1.2.** Si  $\Omega \subset A = A(T)$  est dans une façade  $A_{\vec{f}}$ , et si  $\vec{E}$  est un sev de  $\vec{Y}(T)$  contenant  $\vec{f}$ , alors on définit

$$\langle \Omega, \vec{E} \rangle_A = \overline{pr_{\vec{f}}^{-1}(\Omega) + \vec{E}}.$$

Si  $\vec{E}$  est juste une partie de  $\vec{A}$ , la notation  $\langle \Omega, \vec{E} \rangle$  désignera  $\langle \Omega, \text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{E}) \rangle$ .

*Remarque:* Quels que soient  $\Omega$  et  $\vec{E}$ , si  $\Omega \neq \emptyset$ , alors  $\langle \Omega, \vec{E} \rangle_A$  coupe toujours la façade principale.

### 3.1.4 Murs et demi-appartements

On fixe une origine  $o \in Y(T)$ , et on identifie les formes linéaires sur  $\vec{Y}(T)$  à des formes affines sur  $Y(T)$  qui s'annulent en  $o$ . Ainsi les racines relatives à  $T$  sont identifiées à des formes affines sur  $Y(T)$ . Soit  $\alpha \in \phi(T)$  une telle racine. Si  $\vec{f} \in \mathcal{F}$  est une facette telle que  $\alpha(\vec{f}) = 0$ , alors  $\alpha$  définit encore une forme affine sur  $Y(T)_{\vec{f}}$ . Si  $\alpha(\vec{f}) > 0$ , on dit que  $\alpha$  prend la valeur  $\infty$  sur  $Y(T)_{\vec{f}}$ . Enfin si  $\alpha(\vec{f}) < 0$ , on dit que  $\alpha$  prend la valeur  $-\infty$  sur  $Y(T)_{\vec{f}}$ . De la sorte,  $\alpha$  définit une fonction sur  $A(T)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

Ces définitions permettent une caractérisation pratique de la topologie de  $A(T)$  :

**Lemme 3.1.3.** *La topologie de  $A(T)$  est engendrée par les demi-espaces ouverts  $\{x \in A \mid \alpha(x) > a\}$  pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \phi$ . Autrement dit, une suite  $x_n$  tend vers une limite  $x$  si et seulement si  $\forall \alpha \in \phi, \alpha(x_n) \rightarrow \alpha(x)$ .*

Pour tout  $\alpha \in \phi(T)$  et  $\lambda \in \Lambda$ , on pose  $M(\alpha, \lambda) = \{x \in A(T) \mid \alpha(x) + \lambda = 0\}$  et  $\mathcal{D}(\alpha, \lambda) = \{x \in A(T) \mid \alpha(x) + \lambda \geq 0\}$ . L'ensemble des  $M(\alpha, \lambda)$  ainsi obtenus pour  $\alpha \in \phi$  et  $\lambda \in \varphi_\alpha(U_\alpha \setminus \{e\})$  est l'ensemble des murs de  $A(T)$ ; l'ensemble des  $\mathcal{D}(\alpha, \lambda)$  correspondants est l'ensemble des demi-appartements de  $A(T)$ . Si  $M = M(\alpha, \lambda)$  est un mur de  $A(T)$ , on notera  $\vec{M} = \ker(\alpha) \subset \vec{V}$  la direction de  $M$ , c'est un mur de  $\vec{A}$  (ou plutôt sa trace sur  $\vec{A}$  est un mur de  $\vec{A}$ ).

Voici le résultat qui justifie la définition des  $\langle \Omega, \vec{E} \rangle_A$  :

**Lemme 3.1.4.** *Si  $M$  est un mur contenant  $\Omega$  dont la direction contient  $\vec{E}$ , alors  $\langle \Omega, \vec{E} \rangle_A \subset M$ .*

Un isomorphisme affine  $\psi$  entre les façades principales de deux appartements  $A(T)$  et  $A(T')$  dont la partie vectorielle préserve  $\mathcal{F}$  induit une bijection, encore notée  $\psi$ , entre  $A(T)$  et  $A(T')$ . Si cette bijection préserve l'ensemble des murs, on dit que  $\psi$  est un isomorphisme d'appartements. Remarquons qu'un isomorphisme d'appartement ainsi défini ne préserve pas forcément les types de facettes de  $\vec{A}(T)$  ni même leur signe.

Pour tout mur  $M = M(\alpha, \lambda)$ ,  $r_M$  désigne la réflexion de direction  $r_\alpha$  qui fixe  $M \cap \vec{A}$ . Elle induit un automorphisme involutif de  $A(T)$ , qu'on appelle la réflexion selon  $M$ .

Soit  $M$  un mur de  $A(T)$  et  $\vec{f} \in \mathcal{F}$ . Alors  $M \cap A(T)_{\vec{f}}$  est soit vide, soit un hyperplan de  $A(T)_{\vec{f}}$ . Ces hyperplans seront appelés les murs de  $A(T)_{\vec{f}}$ .

On notera pour toute partie  $\Omega$  de  $A$ , et pour tout  $\alpha \in \phi$ ,  $U_\alpha(\Omega) = \{u \in U_\alpha \mid \Omega \subset \mathcal{D}(\alpha, \varphi_\alpha(u))\}$  et  $G(\psi, \Omega) = \langle U_\alpha(\Omega) \mid \alpha \in \psi \rangle$ .

### 3.1.5 Parties closes

**Définition 3.1.5.** *Une partie close de  $A(T)$  est une intersection finie de demi-appartements. L'enclos d'une partie  $E$  de  $A(T)$  est le filtre noté  $Cl(E)$  engendré par les parties closes de  $A(T)$  contenant  $E$ .*

Remarques:

- Avec cette définition,  $Cl(\emptyset) = \emptyset$ .
- La définition présente de partie close est plus restrictive que celle de [GR08], elle conduit donc à des enclos plus grand. En effet, dans [GR08], on autorise des demi-appartements dirigés par des racines imaginaires, et une intersection infinie de demi-appartements est close, pourvu que ces demi-appartements soient dirigés par des racines deux à deux non colinéaires.

Si  $\Omega$  est une partie de  $A$ , on notera  $\vec{\Omega}$  la réunion des directions des façades rencontrées par  $\Omega$ . Lorsque  $\Omega$  est un filtre,  $\vec{\Omega}$  sera la réunion des directions des façades rencontrées par tous les éléments de  $\Omega$ .

Exemples 3.1.6.

1. Soit  $\vec{C}$  une chambre de  $\vec{A}$  et  $\Omega = A_{\vec{C}}$ . Alors  $\text{Cl}(\Omega)$  est le filtre des voisinages de  $\Omega$ ,  $\vec{\Omega} = \vec{C}$ , et  $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)} = \overrightarrow{\text{Cl}(\vec{\Omega})} = \vec{C}$ .  
Tout élément du filtre  $\text{Cl}(\Omega)$  contient des points de chaque façade dirigée par une facette de  $\vec{C}$ , mais pourtant,  $\text{Cl}(\Omega)$  ne contient aucun point d'aucune façade  $A_{\vec{f}}$  pour  $\vec{f} \subset \partial\vec{C}$ .
2. Soit  $\vec{m}$  une cloison de  $\vec{A}$ , prenons  $\Omega = A_{\vec{m}} \cup A_{-\vec{m}}$ . Alors  $\vec{\Omega} = \vec{m} \cup -\vec{m}$ , et  $\text{Cl}(\vec{\Omega})$  est l'hyperplan contenant  $\vec{m}$ . Mais  $\text{Cl}(\Omega) = A$ , donc  $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)} = \vec{A} \neq \text{Cl}(\vec{\Omega})$ . (Il suffit même de prendre  $\Omega = A_{\vec{m}} \cup \{x\}$  avec  $x$  un point de  $A_{-\vec{m}}$ .)
3. Avec encore  $\vec{m}$  une cloison de  $\vec{A}$ , en prenant  $\Omega = A_{\vec{m}}$ , on obtient  $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)} = \vec{m}^* \neq \text{Cl}(\vec{\Omega}) = \vec{m}$ . Ainsi même en restant dans  $A^+$  ou  $A^-$  on n'a pas  $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)} = \text{Cl}(\vec{\Omega})$ .

**Proposition 3.1.7.** Pour toute partie  $\Omega$  de  $A$ ,  $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)}$  est close. En conséquence,  $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)} \supset \text{Cl}(\vec{\Omega})$ .

*Démonstration:*

Soit  $\vec{f} \subset \text{Cl}(\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)})$ , montrons que  $\vec{f} \subset \overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)}$ . Il s'agit de prouver que tout élément du filtre  $\text{Cl}(\Omega)$  contient un point de  $A_{\vec{f}}$ . Soit donc  $D_1 \cap \dots \cap D_k \in \text{Cl}(\Omega)$  une intersection finie de demi-appartements contenant  $\Omega$ . Pour tout  $i$ ,  $\text{Cl}(\Omega) \subset D_i$  donc  $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)} \subset \vec{D}_i$ , donc  $\vec{f} \subset \vec{D}_i$ . Ainsi,  $D_1 \cap \dots \cap D_k$  est stable par  $\vec{f}$ , et contient donc  $\langle \Omega, \text{Vect}(\vec{f}) \rangle_A$ . Or ceci contient bien des points de  $A_{\vec{f}}$ , si  $\Omega \neq \emptyset$ . Le cas  $\Omega = \emptyset$  est trivial.  $\square$

Le résultat suivant fournit une description plus ou moins constructive de la trace de l'enclos d'une partie  $\Omega$  dans une façade  $A_{\vec{f}_0}$ . C'est la description qui servira pour prouver que dans l'objet immobilier que nous allons construire, l'intersection de deux appartements est une partie close, ou que deux appartements diffèrent d'un isomorphisme fixant leur intersection, dans certains cas au moins. Voir 3.8.

**Proposition 3.1.8.** Soit  $\Omega$  une partie de  $A$ . Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des facettes de  $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)}$ . On effectue les opérations suivantes sur  $\Omega$  :

1. Pour chaque couple  $(a, \vec{g})$  tel que  $a \in \Omega$ ,  $\vec{g} \in \mathcal{D}$  et  $a$  est dans la façade  $A_{\vec{f}}$  avec  $\vec{f} \subset \text{Vect}(\vec{g})$ , on rajoute  $\text{pr}_{\vec{g}}(a)$  à  $\Omega$ .
2. Pour chaque couple  $(b, \vec{f})$ , avec  $b \in \Omega$ ,  $\vec{f} \in \mathcal{D}$ , tels que  $b$  est dans la façade  $A_{\vec{g}}$  avec  $\vec{f} \subset \text{Vect}(\vec{g})$ , on choisit  $a \in \text{pr}_{\vec{g}}^{-1}(b) \cap A_{\vec{f}}$  et on rajoute  $a + \vec{g}$  à  $\Omega$ .

Appelons  $\Omega^1(C_1)$  l'ensemble ainsi obtenu, où  $C_1$  représente les choix effectués à chaque opération 2. Si de nouveaux couples  $(a, \vec{g})$  ou  $(b, \vec{f})$  vérifiant les conditions ci-dessus sont apparus, on effectue à nouveau les opérations 1 et 2, et on note  $\Omega^2(C_2)$  l'ensemble obtenu. On obtient ainsi par récurrence un ensemble  $\Omega^n(C_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\Omega^\infty(C)$  la réunion de tous ces ensembles, il dépend de la suite  $C$  de tous les choix effectués à chaque opération 2. Notons  $\mathcal{c}$  l'ensemble de toutes les suites de choix possibles. Alors pour tout  $\vec{f}_0 \in \mathcal{F}(\vec{A}(T))$  :

$$\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}_0} = \bigcap_{C \in \mathcal{c}} \text{Cl}(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}_0})$$

Ou plutôt,  $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}_0}$  est le filtre engendré par les  $\text{Cl}(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}_0})$ , pour  $C \in \mathcal{c}$ .

*Remarque:* Ceci signifie grosso modo que  $\text{Cl}(\Omega)$  est la clôture de  $\Omega$  sous les opérations 1, 2, et "prendre la clôture dans chaque façade". La difficulté de rédaction vient du fait que l'opération 2 n'est pas bien définie puisqu'elle dépend d'un choix.

*Démonstration:*

Pour montrer l'inclusion " $\supset$ ", il suffit de vérifier que pour tout demi-appartement  $D$  contenant  $\Omega$ , il existe un choix

$C \in \mathcal{C}$  tel que  $D \supset \Omega^\infty(C)$ . Ceci revient à vérifier que si  $D$  contient une partie  $\Theta$ , alors il contient toute partie obtenue à partir de  $\Theta$  par une opération 1, et que pour chaque couple  $(b, \vec{f})$  vérifiant les conditions de 2, il existe un choix de  $a \in pr_{\vec{g}}^{-1}(b)$  tel que la partie obtenue par l'opération 2 à partir de  $\Theta$  est encore incluse dans  $D$ . Ces vérifications sont immédiates.

Pour montrer l'autre inclusion, il faut prouver que si  $D$  est un demi-appartement, dirigé par une racine  $\alpha \in \phi^m(\vec{f}_0)$ , contenant un  $\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}_0}$ , pour un  $C \in \mathcal{C}$ , alors  $D \supset \Omega$ . Soit donc  $D$  un tel demi-appartement, et supposons par l'absurde qu'il existe  $\omega \in \Omega \setminus D$ . Soit  $\vec{g}$  la direction de la façade contenant  $\omega$ . Soit  $\vec{h} = pr_{\vec{f}_0}(\vec{g})$ , en appliquant l'opération 1 à  $\Omega$  avec le couple  $(\omega, \vec{h})$ , on voit que  $pr_{\vec{h}}(\omega) \in \Omega^\infty(C)$ . Ensuite, en appliquant l'opération 2 avec le couple  $(pr_{\vec{h}}(\omega), \vec{f}_0)$ , on voit que  $\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}_0}$ , et donc en particulier  $D$ , contient un cône de la forme  $a + \vec{h}$ . Ceci entraîne que  $\alpha(\vec{h}) \geq 0$ , d'où  $\alpha(\vec{g}) \geq 0$ . D'autre part,  $\alpha(\vec{g}) \leq 0$  sans quoi on aurait  $\omega \in A_{\vec{g}} \subset D$ . Ainsi,  $\alpha(\vec{g}) = 0$  :  $\vec{g}, \vec{f}_0$  et donc aussi  $\vec{h}$  sont dans  $\ker(\alpha)$ . Donc  $\alpha(\omega) = \alpha(pr_{\vec{h}}(\omega)) = \alpha(a)$ . Mais ceci contredit le fait que  $\omega \notin D$  alors que  $a \in D$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.9.** Soient  $\vec{f}, \vec{g}$  deux facettes incluses dans  $\overline{Cl(\Omega)}$ , telles que  $\vec{f} \subset \text{Vect}(\vec{g})$ . On note  $\Omega_{\vec{g}} = Cl(\Omega) \cap A_{\vec{g}}$ ,  $\Omega_{\vec{f}} = Cl(\Omega) \cap A_{\vec{f}}$ . Alors  $\Omega_{\vec{g}} = pr_{\vec{g}}(\Omega_{\vec{f}})$ .

Si de plus  $\vec{f} \subset \vec{g}$ , alors  $\Omega_{\vec{f}}$  contient un voisinage de  $\Omega_{\vec{g}}$  dans  $A_{\vec{f}} \cap \text{Aff}(Cl(\Omega))$ .

Pour utiliser le résultat de la proposition 3.1.8 lorsqu'on ne connaît pas précisément les directions des façades rencontrées par  $Cl(\Omega)$ , on pourra utiliser le lemme suivant :

**Lemme 3.1.10.** On se place à nouveau dans les conditions de la proposition 3.1.8. On suppose en outre que  $\vec{f}_0 \subset Cl(\vec{\Omega})$ . Alors le résultat de la proposition 3.1.8 est encore valable si on définit les  $\Omega^\infty(C)$  de la même manière, mais en n'effectuant les opérations 1 et 2 que lorsque les facettes  $\vec{f}$  ou  $\vec{g}$  concernées sont dans  $Cl(\vec{\Omega})$ .

*Preuve du lemme:*

Les ensembles  $\Omega^\infty(C)$  obtenus ici sont plus petits que ceux obtenus en 3.1.8, donc l'inclusion  $Cl(\Omega) \cap A_{\vec{f}_0} \supset \bigcap_{C \in \mathcal{C}} Cl(\Omega^\infty(C)) \cap A_{\vec{f}_0}$  est encore vraie.

Pour l'inclusion réciproque, la preuve de 3.1.8 est encore vraie puisqu'elle ne passe que par des facettes  $\vec{g} \subset \vec{\Omega}$  et  $\vec{h} = pr_{\vec{f}_0}(\vec{g}) \subset Cl(\vec{\Omega})$ .  $\square$

### 3.1.6 Facettes

**Définition 3.1.11.** Soit  $x \in A$ , soit  $\vec{f}$  la direction de la façade contenant  $x$ . On note  $\vec{A}_x$  l'espace vectoriel  $\vec{A}_{\vec{f}}$ , muni des directions des murs contenant  $x$ . C'est donc un complexe de Coxeter, a priori non essentiel, de groupe  $W(\vec{A}_x) = \{\vec{w} \in W(\vec{A}) \mid w.x = x\} \subset \text{Fix}_{W(\vec{A})}(\vec{f})$ . On y pense comme à l'espace tangent de  $A$  en  $x$ .

Soit  $x \in A(T)$ , soit  $A(T)_{\vec{f}}$  la façade contenant  $x$ . Soit  $\vec{F} \subset \overline{A(T)_{\vec{f}}}$  une facette de  $\vec{A}_x$ . On note  $\mathcal{F}il(x, \vec{F})$  le filtre engendré par les parties closes de  $A(T)$  contenant un voisinage de  $x$  dans  $x + \vec{F}$  (pour la topologie induite). Insistons sur le fait que  $\mathcal{F}il(x, \vec{F})$  est engendré uniquement par des parties closes.

L'ensemble de ces filtres est l'ensemble des facettes de  $A(T)$ . Si  $F = \mathcal{F}il(x, \vec{F})$  est une facette de  $A(T)$ , la facette vectorielle  $\vec{F}$  est uniquement déterminée par  $F$ , c'est la direction de  $F$ . Le point  $x$  par contre n'est uniquement déterminé que lorsque  $\Lambda$  est non discret.

Dans le cas où  $\Lambda$  est discret, et où  $\phi(T)$  est fini, les facettes sont en fait les filtres associés à des ensembles, et ces ensembles sont les facettes affines fermées habituelles. *Remarque:* Cette définition est identique à celle de [Rou06], bien que non présentée de la même manière, elle diffère cependant de celle de [GR08].

### 3.1.7 Action de $N(T)$

Le normalisateur  $N(T)$  d'un tore  $T$  agit sur l'appartement vectoriel  $\vec{A}(T)$ , et même sur l'espace  $\vec{Y}(T)$ . On peut définir une action affine de  $N(T)$  sur  $Y(T)$ , dont la partie vectorielle coïncide avec celle-ci (voir [Rou06]). L'élément  $n_\alpha(k) = u_\alpha(k).u_{-\alpha}(k^{-1}).u_\alpha(k)$  agit par la réflexion selon le mur  $M(\alpha, \omega(k))$ . Le tore  $T$  agit par translation, puisqu'il fixe l'appartement vectoriel. Précisément, l'élément  $t \in T$  agit par translation selon le vecteur  $\vec{v}_t$ , défini par :

$$\forall \chi \in T^* \subset \vec{Y}^*, \quad \chi(\vec{v}_t) = -\omega(\chi(t))$$

Cette action se fait par automorphismes d'appartements, elle s'étend donc à  $A(T)$ . On note  $H(T) := \text{Fix}_{N(T)}(A(T)) = \{t \in T \mid \omega(\chi(t)) = 0, \forall \chi \in T^*\}$ .

Le fixateur dans  $N(T)$  d'un point ou d'une partie  $a$  de  $A(T)$  ou de  $\vec{A}(T)$  sera noté  $N(T)_a$  ou  $N(T)(a)$ . D'ici la finalisation de ce texte, on essaiera de s'en tenir à une seule notation.

*Exemple 3.1.12.* Remarquons tout de suite que pour une partie  $\Omega \subset A$ ,  $N(\Omega) \not\subset N(\text{Cl}(\Omega))$ . Il suffit de choisir deux chambres  $\vec{c}$  et  $\vec{d}$  de  $\vec{A}(T)$ , séparées par une cloison  $\vec{m}$ , et de trouver  $n \in T$  qui induit une translation dont la direction n'est pas incluse dans  $\vec{m}$ . Alors  $n$  fixe  $A_{\vec{c}} \cup A_{\vec{d}}$  mais pas  $A_{\vec{m}}$ , alors que  $\text{Cl}(A_{\vec{c}} \cup A_{\vec{d}}) = A_{\vec{c}} \cup A_{\vec{d}} \cup A_{\vec{m}}$ .

Il est par contre clair qu'un  $n \in N(\Omega)$  agit comme une translation sur chaque sous-espace  $\langle \omega, \text{Vect}(\text{Cl}(\Omega)) \rangle_A$ . La proposition suivante améliore un peu ce résultat, en permettant de remplacer  $\text{Cl}(\vec{\Omega})$  par  $\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)}$ . Notons que les différentes translations induites sur chaque  $\omega + \text{Vect}(\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)})$  ne sont a priori pas selon le même vecteur.

**Proposition 3.1.13.** *Soit  $\Omega$  une partie de  $A(T)$ , alors  $N(T)(\Omega) \subset N(T)(\overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)})$ .*

*Démonstration:*

Pour simplifier les notations pendant la preuve, on ne note pas les  $(T)$ .

Soit  $n \in N(\Omega)$ , soit  $\vec{E} = \text{Fix}_{\vec{A}}(n)$ , c'est une partie close de  $\vec{A}$  contenant  $\text{Cl}(\vec{\Omega})$ . Supposons  $\vec{E} \neq \overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)}$ . Alors il existe  $\alpha \in \phi$  tel que  $\vec{E} \subset \vec{D}(\alpha)$  et un point  $a \in \text{Cl}(\Omega)$  tel que  $\alpha(a) = -\infty$ . Ce point  $a$  n'est donc dans aucun demi-appartement dirigé par  $\alpha$ , et pourtant il est dans  $\text{Cl}(\Omega)$  : il n'existe donc pas de demi-appartement dirigé par  $\alpha$  qui contienne  $\Omega$ . Il existe donc  $(\omega) \in \Omega^{\mathbb{N}}$  tel que  $\alpha(\omega_i) \in \mathbb{R} \forall i \in \mathbb{N}$  et  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(\omega_i) = -\infty$ .

L'ensemble  $\vec{E} \cap \ker \alpha \subset \vec{A}$  est clos et non vide puisqu'il contient les directions des façades contenant les  $\omega_n$ . Soit  $\vec{f}$  une facette maximale de  $\vec{E} \cap \ker \alpha$ , alors tous les  $\omega_n$  se projettent sur  $A_{\vec{f}}$ , et ces projetés sont fixes par  $n$ . Soit  $(\omega'_n)_n \in (A_{\vec{f}})^{\mathbb{N}}$

la suite ainsi obtenue. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\alpha(\omega'_0, \omega'_n) < 0$ . Alors  $n$  fixe la droite contenant  $\{\omega'_0, \omega'_n\}$ , donc sa direction  $\overrightarrow{\omega'_0, \omega'_n}$ , puis la facette  $\vec{g}$  contenant cette direction. Donc  $\vec{g} \subset \vec{E}$ , mais  $\alpha(\vec{g}) = \mathbb{R}^*$  donc  $\vec{g} \not\subset \vec{D}(\alpha)$ , ce qui est impossible.

Donc  $\vec{E} = \overrightarrow{\text{Cl}(\Omega)}$ . □

**Définition 3.1.14.** *On notera  $\vec{v} : N(T) \rightarrow \text{Aut}(\vec{A}(T))$  et  $v : N(T) \rightarrow \text{Aut}(A(T))$  les morphismes correspondant à ces actions de  $N(T)$ .*

*Remarque:* La définition des façades  $A_{\vec{f}} \simeq A/\text{Vect}(\vec{f})$  revient à essentialiser  $\vec{A}$  pour le groupe de Coxeter  $\text{Fix}_{W(\vec{A})}(f)$ . Cette construction est semblable à la compactification polyédrale, ou de Satake, d'un appartement d'un immeuble affine. Elle permet d'avoir sur  $A$  une topologie séparée, et telle que l'adhérence d'une façade sphérique est compacte.

Elle a cependant le défaut de perdre une partie de l'action du tore. En effet, si  $t$  induit une translation de direction incluse dans  $\text{Vect}(\vec{f})$  sur  $Y(T)$ , alors  $t$  agit trivialement sur  $A_{\vec{f}}$ . Par exemple les éléments de  $\bigcap_{\alpha \in \phi \subset T^*} \ker(\alpha)$  fixent  $A$ , mais pas forcément  $Y(T)$ , si  $\phi$  n'engendre pas  $T^*$ . Dans la première réalisation d'un appartement microaffine dans [Rou06] par exemple, les façades sont toutes isomorphes comme espaces affines à  $Y(T)$ , ce qui évite ce soucis.

### 3.1.8 Opposition

**Définition 3.1.15.** Si  $a = [x + \vec{f}] \in A(T)$ , le point opposé à  $a$  dans  $A(T)$  est  $op_{A(T)}(a) = [x - \vec{f}]$ .

L'application  $op_{A(T)}$  est une involution qui permute les façades de  $A(T)$ , préserve l'ensemble des murs et commute à l'action de  $W(T)$ . Plus généralement, elle commute à tout isomorphisme d'appartements. Cependant, ce n'est pas un automorphisme d'appartement car l'action sur le bord d'une façade n'est pas induite par l'action sur cette façade ( $op_{A(T)}$  n'est pas continue). En fait,  $op_{A(T)}$  fixe la façade principale, et le seul automorphisme d'appartement de  $A(T)$  fixant la façade principale est  $id_{A(T)}$ .

## 3.2 Familles de sous-groupes parahoriques

Maintenant que nous disposons des appartements  $A(T)$ , il faut, pour définir un immeuble selon la méthode usuelle, déterminer quels seront les fixateurs des points de  $A(T)$ . Ces fixateurs seront appelés des sous-groupes parahoriques de  $G$ .

Dans cette sous-section, on étudie quelles sont en général les propriétés qu'on peut demander à une famille de sous-groupes parahoriques, et quelles sont les conséquences de ces propriétés sur l'immeuble obtenu. Ensuite, nous prouverons quelques unes de ces propriétés pour la famille minimale de parahoriques.

On fixe un tore maximal  $T$ , et on note  $A = A(T)$ ,  $N = N(T)$ .

### 3.2.1 Définition

**Définition 3.2.1.** Soit  $\mathcal{Q} = (Q(a))_{a \in A}$  une famille de sous-groupes de  $G$ . Si  $\Omega$  est une partie de  $A$ , on note  $Q(\Omega) = \bigcap_{\omega \in \Omega} Q(\omega)$ . Si  $\Omega$  est un filtre de  $A$ , on note  $Q(\Omega) = \bigcup_{\Omega' \in \Omega} Q(\Omega')$ .

On dit que  $\mathcal{Q}$  est une famille de sous-groupes parahoriques pour  $\mathcal{D}$  si elle vérifie :

- (para 0.1) : Si  $a \in A_{\vec{f}}$ , alors  $Q(a) \subset P(\vec{f})$ . (compatibilité avec l'immeuble vectoriel)
- (para 0.2) :  $\forall a \in A(T)$ ,  $N(T)_a \subset Q(a)$ . (compatibilité de l'action de  $N(T)$ )
- (para 0.3) :  $\forall a \in A(T)$ ,  $\forall (\alpha, \lambda) \in \phi(T) \times \Lambda$  tel que  $a \in \mathcal{D}(\alpha, \lambda)$ ,  $U_{\alpha, \lambda} \subset Q(a)$ . (points fixes des groupes radiciels)
- (para 0.4) :  $\forall n \in N(T)$ ,  $\forall a \in A(T)$ ,  $nQ(a)n^{-1} = Q(na)$ .

La plus petite famille de parahoriques pour  $\mathcal{D}$  sera notée  $\mathcal{P}$ . On définit encore les condition suivantes sur  $\mathcal{Q}$ , certaine dépendent d'une facette  $\vec{g} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T))$  ou d'une partie  $\Omega \subset A$  :

- (para inj) :  $\forall a \in A(T)$ ,  $N(T)_a = Q(a) \cap N(T)$ . (inclusion des appartements dans l'immeuble)
- (para2.2) ( $\vec{g}$ ) :  $\forall \vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{g})$ ,  $\forall a \in A_{\vec{f}}$ ,  $N(T)Q(a) \cap N(T)P(\vec{g}) = N(T)Q(\{a, pr_{\vec{g}}(a)\})$ . (lien entre une façade et son bord)
- (para2.1) ( $\vec{g}$ ) :  $\forall \vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{g})$ ,  $\forall a \in A_{\vec{f}}$ ,  $Q(a) \cap P(\vec{g}) = Q(\{a, pr_{\vec{g}}(a)\})$ . (lien entre une façade et son bord, affaibli)
- (para2.2<sup>+</sup>) ( $\vec{g}$ ) :  $\forall \vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{g})$ ,  $\forall a \in A_{\vec{f}}$ ,  $N(T)Q(a) \cap N(T)P(\vec{g}) = N(T)\overline{Q(a + \vec{g})}$ . (lien entre une façade et son bord, renforcé)
- (para2.1<sup>+</sup>) ( $\vec{g}$ ) :  $\forall \vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{g})$ ,  $\forall a \in A_{\vec{f}}$ ,  $N(T)Q(a) \cap N(T)P(\vec{g}) = N(T)\overline{Q(a + \vec{g})}$ . (lien entre une façade et son bord, renforcé)

- (para dec) (a) : Pour toute chambre  $\vec{C} \subset \vec{A}$ ,  $Q(a) = (Q(a) \cap U(\vec{C})) \cdot (Q(a) \cap U(-\vec{C})) \cdot N(a)$ .
- (para6) ( $\Omega$ ) :  $Q(\Omega) = N_\Omega \cdot Q(Cl(\Omega))$ . (intersections d'appartements)
- (para5) ( $\Omega$ ) :  $\bigcap_{a \in \Omega} (N(T) \cdot Q(a)) = N(T) \cdot Q(\Omega)$ . (isomorphismes entre appartements)
- (para sph) : Pour tout  $a \in A_{sph}$ ,  $Q(a) = P(a)$ . (valeur sur les points sphériques)

Lorsque  $Q$  vérifie (para2.1) ( $\vec{f}$ ) (ou une de ses variantes) pour toute facette  $\vec{f}$ , on dira juste que  $Q$  vérifie (para2.1).  
 . Lorsqu'elle vérifie (para2.1) ( $\vec{f}$ ) pour toute facette sphérique  $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A})$ , on dira qu'elle vérifie (para2.1) (sph),  
 lorsqu'elle vérifie (para2.1) ( $\vec{m}$ ) pour toute cloison  $\vec{m}$  de  $\vec{A}$ , on dira qu'elle vérifie (para2.1) (cloison), etc...

*Remarque:*

- Dans (para 3) et (para 4), les inclusions  $Q(\Omega) \supset Q(Cl(\Omega))$  et  $\bigcap_{a \in \Omega} (N(T) \cdot Q(a)) \supset N(T) \cdot Q(\Omega)$  sont évidemment toujours vérifiées.
- Le but est de trouver une famille de parahoriques vérifiant les conditions ci-dessus, qui soit "la plus petite possible" pour que l'immeuble obtenu soit "le plus gros possible". Bien sûr, les compromis sont envisagés, on peut considérer des familles de parahoriques vérifiant (para 3 et 4) pour seulement certaines parties  $\Omega$ . C'est déjà ce qui arrive dans [GR08], où on construit une "mesure" (ce qui correspond à la façade principale de l'immeuble considéré ici) pour un groupe de Kac-Moody sur un corps local dont le corps résiduel contient  $\mathbb{C}$ , et où on définit un ensemble des parties  $\Omega$ , appelées "parties qui ont un bon fixateur", sur lesquelles (para 3 et 4) sont vérifiées.

Toute la suite de cette partie est destinée à étudier divers exemples de famille de parahoriques, et diverses implications ou conditions suffisantes pour les conditions (para x). Le lecteur pressé pourra la sauter, quitte à y revenir lorsque nécessaire.

### 3.2.2 La famille minimale de parahoriques

Dans ce paragraphe, on étudie le premier exemple de famille de parahoriques disponible : la famille minimale  $\mathcal{P}$ .

Pour tout  $a \in A$ ,  $P(a)$  doit contenir, à cause de (para 0.2 et 0.3), le groupe  $\langle N(a), \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi\} \rangle$ . Mais ce groupe vérifie (para 0.1 et 0.4), d'où :

$$\mathcal{P} = (P(a))_{a \in A} = (\langle N(a), \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi\} \rangle)_{a \in A}$$

Soit  $a \in A$ , et  $\vec{f}$  la direction de la façade de  $a$ . Pour tout  $\alpha \in \phi^u(\vec{f})$ , on a  $U_\alpha(a) = U_\alpha$ , et pour  $\alpha \in \phi \setminus \phi(\vec{f})$ ,  $U_\alpha(a) = \{e\}$ . Sachant que  $P(a) \subset P(\vec{f}) = U(\vec{f}) \rtimes M_{\vec{A}}(\vec{f})$ , le groupe  $\langle N(a), \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f})\} \rangle$ , qui est inclus dans  $M_{\vec{A}}(\vec{f})$ , normalise  $U(\vec{f}) \cap P(a)$ , et on prouve :

$$P(a) = (U(\vec{f}) \cap P(a)) \rtimes \langle N(a), \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f})\} \rangle$$

Comme  $N(a)$  normalise à la fois  $U(\vec{f}) \cap P(a)$  et  $\langle \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f})\} \rangle$ , on a aussi les décompositions :

$$\begin{aligned} P(a) &= (U(\vec{f}) \cap P(a)) \rtimes (N(a) \cdot \langle \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f})\} \rangle) \\ &= N(a) \cdot (U(\vec{f}) \cap P(a)) \cdot \langle \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f})\} \rangle \end{aligned}$$

Le groupe  $N(a) \cdot \langle \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f})\} \rangle = M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(a)$  est le sous-groupe parahorique au point  $a$  de l'appartement  $\overline{A_{\vec{f}}}$ , pour la famille minimale de parahoriques dans le groupe  $M_{\vec{A}}(\vec{f})$  muni de la donnée radicielle valuée  $(M_{\vec{A}}(\vec{f}), (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi^m(\vec{f})})$ .

Le groupe  $U(\vec{f}) \cap P(a)$  est le sous-groupe distingué de  $P(a)$  engendré par  $G(\phi^u(\vec{f}))$ , et plus précisément le plus petit sous-groupe de  $P(a)$  contenant  $G(\phi^u(\vec{f}))$  et normalisé par  $\langle \{U_\alpha(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f})\} \rangle$ .

Lorsque  $\Omega$  est une partie de  $A_{\vec{f}}$ , par l'unicité dans la décomposition de Bruhat  $P(\vec{f}) = U(\vec{f}) \rtimes M_{\vec{A}}(\vec{f})$ , on obtient :

$$P(\Omega) = \left( U(\vec{f}) \cap P(\Omega) \right) \rtimes \left( M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(\Omega) \right).$$

Lorsque  $\vec{f}$  est sphérique, la théorie de Bruhat-Tits décrit bien les facteurs  $M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(a)$ , permettant de prouver la proposition suivante (qui est la raison d'être de la condition (para sph) ) :

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $\vec{f}$  une facette sphérique, et  $\Omega \subset A_{\vec{f}}$ .*

1.  $P(\Omega) = \left( U(\vec{f}) \cap P(\Omega) \right) \rtimes \left( N(\Omega) \cdot \left\langle \left\{ U_{\alpha}(\Omega) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f}) \right\} \right\rangle \right)$ .
2. *Pour tout  $p \in P(\Omega)$ , il existe une partie  $\Omega_0 \subset \mathring{A}$  et  $n \in N(\Omega)$  tels que pour tout  $\omega \in \Omega_0$ ,  $np$  fixe  $\overline{\omega + \vec{f}}$ . En particulier,  $\mathcal{P}$  vérifie ((para 2.2))( $\vec{f}$ ).*
3.  $P(\Omega) = P(\text{Cl}_{A_{\vec{f}}}(\Omega))$ .
4. *Pour tout  $a \in A_{\vec{f}}$   $U(\vec{f}) \cap P(a) = U(\vec{f})$ .*
5.  $\bigcap_{\omega \in \Omega} N.P(\omega) = N.P(\Omega)$ .
6. *Pour tout  $a \in A_{\vec{f}}$  et  $\vec{g} \in \vec{f}^* \cap \vec{A}$ ,  $P(a) \cap P(\vec{g}) = P(a + \vec{g})$ .*

*Remarque:* Dans le point 2,  $np$  fixe une partie  $\Omega' \subset A$  telle que  $\Omega_0 + \vec{f} \subset \Omega' \subset \overline{\Omega_0 + \vec{f}}$ . Sans aucune propriété topologique sur  $\Omega_0$  on ne peut savoir si  $\Omega' = \Omega_0 + \vec{f}$ .

*Démonstration:*

1. Par [BT72],  $M_{\vec{A}}(\vec{f}) \cap P(\Omega) = N(\Omega) \cdot \left\langle \left\{ U_{\alpha}(\Omega) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f}) \right\} \right\rangle$ . Le résultat découle alors de la décomposition de  $P(\Omega)$  écrite plus haut.
2. Comme  $N(\Omega)$  normalise  $U(\vec{f}) \cap P(\Omega)$ , le point précédent entraîne  $P(\Omega) = N(\Omega) \cdot (U(\vec{f}) \cap P(\Omega)) \cdot \left\langle \left\{ U_{\alpha}(\Omega) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f}) \right\} \right\rangle$ . Le groupe  $\left\langle \left\{ U_{\alpha}(\Omega) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f}) \right\} \right\rangle$  fixe  $\langle \Omega, \vec{f} \rangle_{\vec{A}}$ , il reste juste à étudier  $U(\vec{f}) \cap P(\Omega)$ . La description de  $U(\vec{f}) \cap P(a)$  comme le plus petit groupe contenant  $G(\phi^m(\vec{f}))$  et normalisé par  $\left\langle \left\{ U_{\alpha}(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f}) \right\} \right\rangle$  prouve que  $U(\vec{f}) \cap P(a)$  fixe un cône de la forme  $\overline{\omega + \vec{f}}$  pour un  $\omega \in \mathring{A}$ . D'où le résultat.
3. Le groupe  $P(\Omega)$  agit sur l'immeuble de Bruhat-Tits  $\mathcal{I}_{\vec{f}}$  par automorphisme, et il fixe  $\Omega$ . Il fixe donc  $\text{Cl}_{A_{\vec{f}}}(\Omega)$ , d'où  $P(\Omega) = P(\text{Cl}_{A_{\vec{f}}}(\Omega))$ .
4. Le groupe  $U(\vec{f})$  fixe un cône de la forme  $\overline{x + \vec{C}}$  avec  $x \in \mathring{A}$  pour toute chambre  $\vec{C}$  de  $\vec{f}^* \cap \vec{A}$ . L'intersection avec  $A_{\vec{f}}$  de la réunion de ces cônes contient une partie dont l'enclos dans  $A_{\vec{f}}$  est  $A_{\vec{f}}$ , d'où le résultat.
5. On calcule :

$$\begin{aligned} \bigcap_{\omega \in \Omega} N.P(\omega) &= N \cdot \bigcap_{\omega \in \Omega} N(\vec{f}).P(\omega) \\ &= N \cdot \bigcap_{\omega \in \Omega} U(\vec{f}) \cdot N(\vec{f}) \cdot \left\langle \left\{ U_{\alpha}(a) \mid \alpha \in \phi^m(\vec{f}) \right\} \right\rangle \\ &= N.U(\vec{f}) \cdot \bigcap_{\omega \in \Omega} N(\vec{f}) \cdot (M(\vec{f}) \cap P(a)) \\ &= N.U(\vec{f}) \cdot N(\vec{f}) \cdot (M(\vec{f}) \cap P(\Omega)) \\ &= N.P(\Omega) \end{aligned}$$

La première égalité est vraie car pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $P(\omega) \subset P(\vec{f})$ . La troisième vient de l'unicité de la décomposition de Lévi de  $P(\vec{f})$ , et la quatrième est le résultat classique dans les immeubles, voir [BT72].



□

**Corollaire 3.2.3.** *Les résultats de la proposition précédente sont vrais pour n'importe quelle famille  $\mathcal{Q}$  de parahoriques vérifiant (para sph).*

Dans le cas où  $\mathcal{D}$  vient d'un groupe de Kac-Moody déployé, Guy Rousseau a prouvé que  $\mathcal{P}$  vérifie (para dec) :

**Proposition 3.2.4.** *Si  $\mathcal{D}$  est la donnée radicielle valuée issue d'un groupe de Kac-Moody déployé  $G$ , alors la famille minimale de parahorique attachée à  $\mathcal{D}$  vérifie (para dec).*

### 3.2.3 La condition (fonc)

**Définition 3.2.5.** *La donnée radicielle valuée  $\mathcal{D} = (G, \Lambda, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi})$  vérifie la condition (fonc) si pour tout groupe  $\Delta$  tel que  $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{R}$ , il existe une donnée radicielle valuée notée  $\mathcal{D}^\Delta = (G^\Delta, \Delta, (U_\alpha^\Delta, \varphi_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \phi})$  telle que, avec les notations évidentes :*

1.  $G \subset G^\Delta$ .
2. Pour tout  $\alpha \in \phi$ ,  $U_\alpha = U_\alpha^\Delta \cap G$ .
3. Pour tout  $\alpha \in \phi$ ,  $\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha|_{U_\alpha}}^\Delta$ .

*Lorsqu'une donnée radicielle  $\mathcal{D} = (G, \Lambda, (U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha)$  vérifie (fonc), et lorsque  $\Delta$  est un groupe tel que  $\Lambda \subset \Delta$ , on notera  $\mathcal{D}^\Delta, G^\Delta, U_\alpha^\Delta, N^\Delta, T^\Delta, \mathcal{P}^\Delta = (P^\Delta(a))_{a \in A}, A^\Delta, \dots$  tous les objets obtenus grâce à la donnée radicielle valuée  $\mathcal{D}^\Delta$ .*

**Proposition 3.2.6.** *Un groupe de Kac-Moody  $G$  déployé sur un corps local  $\mathbb{K}$  vérifie toujours la condition (fonc).*

*Démonstration:* Lorsque  $G$  est un groupe de Kac-Moody déployé sur un corps  $\mathbb{K}$ , il s'agit en fait de la valeur en  $\mathbb{K}$  d'un foncteur  $\mathcal{G}$  des  $\mathbb{K}$ -algèbres vers les groupes munis d'une donnée radicielle de système de racine fixé, et pour toute  $\mathbb{K}$ -algèbre  $\mathbb{K}'$ , les sous-groupes radiciels de  $\mathcal{G}(\mathbb{K}')$  sont isomorphes à  $(\mathbb{K}', +)$ . Étant donné  $\Delta$ , il suffit donc de choisir une extension  $\mathbb{K}^\Delta$  de  $\mathbb{K}$  ramifiée de sorte que  $\varpi(\mathbb{K}^\Delta) = \Delta$ , puis de prendre  $G^\Delta = \mathcal{G}(\mathbb{K}^\Delta)$ . Le lemme 8.4.4 de [Ré02] prouve que  $G^\Delta$  est muni d'une donnée radicielle vérifiant le point 2 ci-dessus, les points 1 et 3 sont clairs. □

*Remarque:* Lorsque  $G$  n'est que presque déployé, il s'agit encore d'un foncteur des  $\mathbb{K}$ -algèbres vers les groupes munis d'une donnée radicielle, mais le système de racine varie, et les groupes radiciels ne sont plus isomorphes au groupe additif du corps. La condition (fonc) devrait cependant pouvoir être prouvée par descente, mais nous n'en aurons pas besoin.

**Proposition 3.2.7.** *Soit  $\mathcal{D}$  une donnée radicielle vérifiant (fonc), soit  $\Delta$  tel que  $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{R}$ . Alors :*

1.  $T = T^\Delta \cap G$ , et  $N^\Delta \cap G = N$ .
2. Pour tout  $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A})$ ,  $P\Delta(\vec{f}) \cap G = P(\vec{f})$ , puis  $U(\vec{f}) = U^\Delta(\vec{f}) \cap G$ ,  $M(\vec{f}) = M^\Delta(\vec{f}) \cap G$ , et  $N^\Delta \cdot P^\Delta(\vec{f}) \cap G = N \cdot P(\vec{f})$ .
3. L'immeuble  $\vec{T} = \vec{T}(\mathcal{D})$  s'injecte dans  $\vec{T}^\Delta = \vec{T}(\mathcal{D}^\Delta)$ , les appartements de ces deux immeubles sont isomorphes.
4. Pour tout  $a \in A_{sph}$ ,  $P(a) = P^\Delta(a) \cap G$ .
5.  $\vec{v} = \vec{v}_{|N}^\Delta$  et  $v = v_{|N}^\Delta$ , à condition bien sûr de choisir le même point de base  $o$  dans  $Y$  pour définir  $v$  et  $v^\Delta$ . En particulier, pour tout  $a \in A$ ,  $N(a) = N^\Delta(a) \cap G$ .
6. Lorsque  $\Delta = \mathbb{R}$ , tout point de  $A$  est un sommet spécial dans  $T^\Delta$ .

*Démonstration:*

1. On utilise la description suivante de  $T$  ([Ré02] corollaire 1.5.3) :  $T = \bigcap_{\alpha \in \phi} N_G(U_\alpha)$ , où  $N_G(U_\alpha)$  est le normalisateur de  $U_\alpha$ . Soit  $g \in G \cap T^\Delta$ , alors pour tout  $\alpha \in \phi$ ,  $gU_\alpha g^{-1} \subset G \cap U_\alpha^\Delta = U_\alpha$ . Donc  $g \in T$ . Ensuite, soit  $n \in N^\Delta \cap G = N_G(T^\Delta)$ . Ainsi,  $n \cdot T^\Delta \cdot n^{-1} = T^\Delta$ , d'où  $n \cdot (T^\Delta \cap G) \cdot n^{-1} = T^\Delta \cap G$ , donc par le point précédent,  $n \cdot T \cdot n^{-1} = T$ , donc  $n \in N_G(T) = N$ .

2. L'inclusion  $P(\vec{f}) \subset G \cap P\Delta(\vec{f})$  est claire. Pour la réciproque, sachant que  $P(\vec{f})$  est l'intersection des  $P(\vec{C})$  pour  $\vec{C}$  une chambre de  $\vec{f}^* \cap \vec{A}$ , et grâce à la relation analogue pour  $P\Delta(\vec{f})$ , il suffit d'étudier le cas d'une chambre : soit  $\vec{C}$  une chambre de  $\vec{A}$ , soit  $g \in G \cap P\Delta(\vec{C})$ , montrons que  $g \in P(\vec{C})$ .

On utilise l'unicité dans la décomposition de Bruhat de  $G$  et  $G^\Delta$ . Pour commencer,  $G = \bigsqcup_{n \in N} U(\vec{C}).n. (U(\vec{C}) \cap n^{-1}U(\vec{C})n)$  avec écriture unique ([Ré02] 1.2.3). Soit  $g = u_1 n u_2$  l'écriture correspondante de  $g$ . Comme  $U(\vec{C}) \subset U^\Delta(\vec{C})$  et comme  $N = T. \langle \{n(u) \mid u \in U_\alpha, \alpha \in \phi\} \rangle \subset T^\Delta. \langle \{n(u) \mid u \in U_\alpha^\Delta, \alpha \in \phi\} \rangle = N^\Delta$ , cette écriture est également celle de  $G$  dans la décomposition de Bruhat de  $G^\Delta$ .

Par ailleurs, soit  $g = t.u$  l'écriture de  $g$  dans la décomposition de Lévi de  $P^\Delta(\vec{C}) : P^\Delta(\vec{C}) = T^\Delta \cdot U^\Delta(\vec{C})$ . Cette écriture est encore celle de  $g$  dans la décomposition de Bruhat de  $G^\Delta$ . Donc  $u_1 = e, n = t \in N \cap T^\Delta$  et  $u_2 = u \in U(\vec{C})$ . Enfin,  $N \cap T^\Delta = T$  par le point précédent, d'où  $g \in T.U(\vec{C}) = P(\vec{C})$ .

Ensuite, l'unicité de l'écriture dans la décomposition de Lévi  $P^\Delta(\vec{f}) = U^\Delta(\vec{f}) \rtimes M^\Delta(\vec{f})$ , et les inclusions  $U(\vec{f}) \subset U^\Delta(\vec{f})$  et  $M(\vec{f}) \subset M^\Delta(\vec{f})$  entraînent les deux égalités  $U(\vec{f}) = U^\Delta(\vec{f}) \cap G, M(\vec{f}) = M^\Delta(\vec{f}) \cap G$ .

Soit enfin  $g \in G \cap N^\Delta.P^\Delta(\vec{f})$ . Comme  $N$  et  $N^\Delta$  induisent le même groupe de transformations sur  $\vec{A}$  (c'est juste le groupe de Weyl associé au système de racines  $\phi$ ), il existe  $n \in N$  tel que  $ng \in P^\Delta(\vec{f})$ . Alors  $ng \in P^\Delta(\vec{f}) \cap G = P(\vec{f})$ .

3. Découle du point précédent, et du fait que les deux données radicielles ont le même système de racines.
4. Soit  $\vec{f}$  une facette sphérique,  $a \in A_{\vec{f}}$  et  $p \in P^\Delta(a) \cap G$ . Alors  $p \in U\Delta(\vec{f}) \rtimes M^\Delta(a) \cap G = (U^\Delta(\vec{f}) \cap G) \rtimes (M^\Delta(a) \cap G)$ . Le groupe  $M^\Delta(a) \cap G$  est le fixateur dans  $G$  de l'immeuble de Bruhat-Tits de la donnée radicielle  $(M^\Delta(\vec{f}), (U_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \phi^m(\vec{f})})$ . D'après [BT72] proposition 9.1.17, il s'agit de  $M(a)$ . D'autre part, il a déjà été vu que  $U^\Delta(\vec{f}) \cap G = U(\vec{f})$ .
5. La relation  $\vec{v} = \vec{v}_{|N}^\Delta$  est claire par définition de  $\vec{v}$ . Il suffit alors de vérifier que  $v$  et  $v^\Delta$  coïncident sur  $T$ . Rappelons que pour  $t \in T, v(t)$  est par définition la translation de  $Y$  de vecteur  $\vec{v}_t$  tel que  $\chi(\vec{v}_t) = -\varpi(\chi(t))$  pour tout  $\chi \in Q(\mathcal{D})$ . Mais  $Q(\mathcal{D}) = Q(\mathcal{D}^\Delta)$ , donc  $v(t) = v^\Delta(t)$ .
6. Clair.

□

*Remarque:* C'est le dernier point qui justifie l'étude de cette condition (*fonc*). Par exemple, lorsque  $x$  est un sommet spécial dans  $A^\Delta$ , alors  $N^\Delta.Q^\Delta(x) = T^\Delta.Q^\Delta(x)$  pour toute famille de parahoriques  $Q^\Delta$  pour  $\mathcal{D}^\Delta$ .

Lorsqu'une donnée radicielle valuée  $\mathcal{D}$  vérifie (*fonc*), il sera utile, étant donnée une famille de parahoriques  $Q$  pour  $\mathcal{D}$  de savoir si  $Q$  se comporte bien vis-à-vis des extensions  $\mathcal{D}^\Delta$  données par (*fonc*). Ceci justifie d'introduire encore une définition :

**Définitions 3.2.8.** Soit  $Q$  une famille de parahoriques pour une donnée radicielle valuée  $\mathcal{D}$ .

- Pour toute partie  $\Omega$  de  $A$ , on dira que  $Q$  vérifie la condition (*fonc*) ( $\Omega$ ) si  $\mathcal{D}$  vérifie (*fonc*) et si pour tout  $\Delta$  tel que  $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{R}$ , il existe une famille de parahoriques  $Q^\Delta$  pour  $\mathcal{D}^\Delta$  telle que  $\forall a \in \Omega, Q^\Delta(a) \cap G = Q(a)$ .
- On dira que  $Q$  vérifie un ensemble de conditions (para  $x_1, \dots, x_k$ ) "fonctoriellement" si  $\mathcal{D}$  vérifie (*fonc*) et si pour tout groupe  $\Delta$  avec  $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{R}$ , il existe une famille de parahoriques  $Q^\Delta$  pour  $\mathcal{D}^\Delta$ , contenant  $Q$ , et vérifiant (para  $x_1, \dots, x_k$ ).
- On dira que  $Q$  vérifie (*fonc*) ( $\Omega$ ) et un ensemble de conditions (para  $x_1, \dots, x_k$ ) "fonctoriellement" si  $\mathcal{D}$  vérifie (*fonc*) et si pour tout groupe  $\Delta$  avec  $\Lambda \subset \Delta \subset \mathbb{R}$ , il existe une famille de parahoriques  $Q^\Delta$  pour  $\mathcal{D}^\Delta$ , vérifiant (para  $x_1, \dots, x_k$ ), et telle que  $\forall a \in \Omega, Q^\Delta(a) \cap G = Q(a)$ .
- Les notations (*fonc*) et (*fonc*) (sph) désigneront respectivement (*fonc*) ( $A^\Delta$ ) et (*fonc*) ( $A_{sph}$ ).

Nous avons vu par exemple que dès que  $\mathcal{D}$  vérifie (*fonc*), alors la famille minimale de parahoriques associée vérifie (*fonc*) (sph). De plus, toutes les propriétés que nous prouveront être vérifiées par la famille minimale de parahorique  $\mathcal{P}$  le seront en fait fonctoriellement. En particulier :

**Proposition 3.2.9.** Si  $\mathcal{D}$  est la donnée radicielle valuée attachée à un groupe de KAc-Moody  $G$ , alors la famille minimale de parahoriques  $\mathcal{P}$  vérifie (para dec) fonctoriellement.

### 3.2.4 Relations entre les conditions (para x)

Nous étudions les relations les plus directes entre les différentes conditions introduites en 3.2.1 et 3.2.3. La philosophie est la suivante : les conditions (para inj) , (para sph) et les variantes de (para2.1) sont celles qui seront utilisées pour construire l'immeuble. Elle entraînent notamment certains cas de (para5) et (para6) , qui elles sont équivalentes aux propriétés d'incidences classiques attendues d'un immeuble. Mais surtout, elles ont déjà une interprétation géométrique, et ceci permettra de les descendre d'un groupe de Kac-Moody déployé à un groupe presque déployé.

Les conditions (para dec) et (fonc) sont plutôt des intermédiaires techniques, vérifiés par les groupes de Kac-Moody déployés et qui entraînent les condition précédentes. On ne s'en préoccupera a priori plus lors de l'étude d'un groupe presque déployé.

On étudiera les relations un peu moins directes entre ces conditions après avoir défini la mesure  $\mathcal{I}(\mathcal{D}, \mathcal{Q})$ , car certaines implication sont plus facilement prouvées grâce à cet outil géométrique.

**Proposition 3.2.10.** Soit  $\mathcal{Q}$  une famille de parahoriques vérifiant (para dec) ( décomposition de  $Q(a)$  ) fonctoriellement. Alors pour tout point  $a$  et toute facette sphérique  $\vec{f}$ ,  $Q(a) \cap P(\vec{f}) = Q(a) \cap P(pr_{\vec{f}}(a))$ .

En particulier,  $\mathcal{Q}$  vérifie fonctoriellement (para sph) et (para2.1) (sph).

*Démonstration:* Comme  $\vec{f}$  est sphérique, on a la décomposition de Bruhat de  $M_{\vec{A}}(\vec{f})$  :

$$\begin{aligned} P(\vec{f}) &= U(\vec{f}) \rtimes M_{\vec{A}}(\vec{f}) \\ &= U(\vec{f}) \rtimes (G(\phi^m(\vec{f}), a) \cdot N_{\vec{f}} \cdot G(\phi^m(\vec{f}), a)) \\ &= G(\phi^m(\vec{f}), a) \cdot U(\vec{f}) \cdot N_{\vec{f}} \cdot G(\phi^m(\vec{f}), a) \\ &\subset P(\langle a, \vec{f} \rangle_A) \cdot U(\vec{f}) \cdot N_{\vec{f}} \cdot P(\langle a, \vec{f} \rangle_A) \end{aligned}$$

Soit  $g \in Q(a) \cap P(\vec{f})$ , nous pouvons donc supposer  $g \in Q(a) \cap (U(\vec{f}) \rtimes N_{\vec{f}})$ .

Dans un premier temps, supposons que  $a$  est un sommet spécial. Alors quitte à multiplier par un élément de  $N(a + \vec{f})$ , on peut supposer  $g \in Q(a) \cap (U(\vec{f}) \rtimes T)$ . Soit  $u \in U(\vec{f})$ ,  $t \in T$  tels que  $g = u.t$ . Par ailleurs, soit  $\vec{C}$  une chambre de  $\vec{f}^* \cap \vec{A}$ , et soient  $u^+ \in U(\vec{C}) \cap Q(a)$ ,  $u^- \in U(-\vec{C}) \cap Q(a)$  et  $n \in N_a$  tels que  $g = u^+ u^- n$ . Alors  $g = u^+ n n^{-1} u^- n = u t$ , et par l'unicité modulo  $T$  du facteur dans  $N$  dans la décomposition de Birkoff pour les chambres  $\vec{C}$  et  $-n^{-1}\vec{C}$ , on obtient que  $n.T = T$ , donc  $g$  est dans la double classe  $U^+ T U^-$ . Enfin, par unicité d'écriture dans cette double classe, on obtient  $u^+ = u \in U(\vec{f}) \cap Q(a)$ ,  $n = t \in T$  et  $n^{-1} u^- n = e$  d'où  $u^- = e$ . Ainsi,  $g \in Q(a) \cap (U(\vec{f}) \cap Q(a)) \cdot t$ . Alors  $a = g^{-1}.a = t^{-1}.a$  d'où  $t \in T \cap Q(a)$ . Donc  $t$  fixe la façade contenant  $a$ , et son adhérence, et en particulier  $t \in P(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$ . Enfin,  $U(\vec{f})$  fixe la façade  $A_{\vec{f}}$  entière (3.2.2), d'où  $g \in Q(a) \cap P(pr_{\vec{f}}(a))$ .

Lorsque  $a$  n'est pas un sommet spécial de  $A$ , il l'est dans un certain  $A^\Delta$  grâce à (fonc) . Le paragraphe précédent entraîne alors que  $Q(a) \cap P(\vec{f}) \subset Q(a) \cap P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a))$ . Mais  $G \cap P^\delta(pr_{\vec{f}}(a)) = P(pr_{\vec{f}}(a))$  d'après 3.2.7.  $\square$

**Proposition 3.2.11.** Toute famille  $\mathcal{Q}$  de parahoriques vérifiant fonctoriellement (para sph) et (para2.1) ( $\vec{m}$ ) pour toute cloison  $\vec{m}$  de  $\vec{A}$  vérifie (para inj) .

*Démonstration:*

Soit  $a \in A$  et  $g \in N \cap Q(a)$ . Soit  $\Delta$  tel que  $a$  est un sommet spécial dans  $A^\Delta$ , soient  $\mathcal{D}^\Delta = (G^\Delta, (U_\alpha^\Delta)), N^\Delta, T^\Delta \dots$  les groupes donnés par la condition (*fonc*).

Il existe  $n \in N^\Delta(a)$  tel que  $ng \in T^\Delta \cap n.Q(a) \subset T^\Delta \cap Q^\Delta(a)$ . Pour toute cloison  $\vec{m}$  de  $\vec{A}$ ,  $Q^\Delta$  vérifie (*para2.1*) ( $\vec{m}$ ) d'où  $ng \in T^\Delta \cap P(pr_{\vec{m}}(a))$ . Comme  $\vec{m}$  est sphérique, par (*para sph*) on obtient  $ng \in T^\Delta \cap P^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$  ce qui vaut  $T^\Delta \cap U^\Delta(\vec{m}) \rtimes M^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$  par la proposition 3.2.2. Ici,  $M^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$  est le sous-groupe parahorique au sens de Bruhat-Tits du groupe réductif  $M\Delta(\vec{m})$  pour la donnée radicielle finie  $(M^\Delta(\vec{m}), (U_\alpha^\Delta, \varphi_\alpha^\Delta)_{\alpha \in \phi^m(\vec{m})})$ . Comme  $T^\Delta \subset M^\Delta(\vec{m})$  on obtient  $ng \in T^\Delta \cap M^\Delta(pr_{\vec{m}}(a))$  et par [BT72], ceci est le fixateur dans  $M^\Delta(\vec{m})$  de  $A_{\vec{m}}$ , donc l'ensemble des  $t \in T$  induisant une translation de vecteur  $\vec{v}_t \in \text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{m})$ .

Ceci étant pour chaque cloison  $\vec{m}$  de  $\vec{A}$ , et comme l'intersection des murs contenant ces cloisons est triviale car  $\vec{A}$  est essentiel, on voit que  $ng$  induit une translation triviale, autrement dit,  $ng \in H^\Delta$  puis  $g \in N^\Delta(a) \cap G$ . Or ceci vaut  $N(a)$  par 3.2.7.  $\square$

*Remarque:* L'hypothèse la plus précise pour ce théorème serait en fait " $Q$  vérifie fonctoriellement (*para sph*) et (*para2.1*) ( $\vec{f}$ ) pour  $\vec{f}$  dans une famille  $\mathcal{F}$  de facette de  $\vec{A}$  telle que  $\bigcap_{\vec{f} \in \mathcal{F}} \text{Vect}(\vec{f}) = \{0\}$ . Mais en général, nous appliquerons ce résultat à des familles vérifiant (*para2.1*) (*sph*), ce qui entraîne bien (*para2.1*) ( $\vec{m}$ ) pour toute cloison  $\vec{m}$ .

En assemblant les deux propositions précédentes, on trouve :

**Corollaire 3.2.12.** *Toute famille vérifiant fonctoriellement (*para dec*) vérifie fonctoriellement (*para inj*), (*para dec*) et (*para2.1*) (*sph*).*

*C'est en particulier le cas, lorsque  $\mathcal{D}$  est la donnée radicielle valuée issue d'un groupe de Kac-Moody  $G$  déployé, pour la famille minimale de parahoriques  $\mathcal{P}$ .*

### 3.3 La définition de l'immeuble

#### 3.3.1 La relation d'équivalence

Soit  $Q$  une famille de sous groupes de  $G$  vérifiant (*para 0.1,0.2 et 0.3*).

**Définition 3.3.1.** *Soit  $\sim_Q$  la relation sur  $G \times A$  définie par :*

$$(g, a) \sim_Q (h, b) \Leftrightarrow \exists n \in N(T) \text{ tq } b = na \text{ et } g^{-1}hn \in Q(a)$$

**Proposition 3.3.2.** *La relation  $\sim_Q$  est une relation d'équivalence si et seulement si  $Q$  vérifie (*para 0.4*), c'est-à-dire si et seulement si  $Q$  est une famille de parahoriques.*

*Démonstration:*

Déjà,  $\sim_Q$  est toujours réflexive.

Supposons que  $Q$  vérifie (*para 0.4*).

Commençons par montrer que  $\sim_Q$  est symétrique. Soient  $(g, a)$  et  $(h, b)$  tels que  $(g, a) \sim_Q (h, b)$ . Soit  $n \in N(T)$  tel que  $b = na$  et  $g^{-1}hn \in Q(a)$ . Alors  $a = n^{-1}b$  et  $h^{-1}gn^{-1} = n(g^{-1}hn)^{-1}n^{-1} \in nQ(a)n^{-1} = Q(b)$ .

Pour la transitivité, soient  $(g, a)$ ,  $(h, b)$  et  $(k, c)$  tels que  $(g, a) \sim_Q (h, b) \sim_Q (k, c)$ . Soit  $n \in N(T)$  tel que  $b = na$  et  $g^{-1}hn \in Q(a)$ , et soit  $m \in N(T)$  tel que  $c = mb$  et  $h^{-1}km \in Q(b)$ .

Alors  $c = mna$  et  $g^{-1}kmn = (g^{-1}hn)n^{-1}(h^{-1}km)n \in Q(a).n^{-1}Q(b)n = Q(a)$ .

Réciproquement, supposons  $\sim_Q$  une relation d'équivalence. Soit  $n \in N(T)$  et  $a \in A(T)$ . soit  $q \in Q(na)$ , alors  $(1, na) \sim_Q (q^{-1}n, a)$ . D'où par symétrie,  $(q^{-1}n, a) \sim_Q (1, na)$ , donc il existe  $n' \in N(T)$  tel que  $na = n'a$  et  $n^{-1}qn' \in Q(a)$ . Alors  $n^{-1}n' \in \text{Fix}_{N(T)}(a) \subset Q(a)$  par (*para 0.2*). D'où  $n^{-1}qn \in Q(a)$ . Nous avons montré que  $n^{-1}Q(na)n \subset Q(a)$ . L'inclusion inverse s'obtient en appliquant ce résultat à  $n^{-1}$ .  $\square$

### 3.3.2 Définition

On fixe un tore maximal  $T_0$ , et une famille de parahoriques  $Q$  sur  $A(T_0)$ . On va construire l'objet immobilier  $I(Q)$  en se basant sur l'appartement  $A(T_0)$ , on vérifiera en 3.10 que la construction est indépendante du choix de  $T_0$ .

**Définition 3.3.3.** Soit  $I_Q = G \times A(T_0) / \sim_Q$ . C'est l'immeuble (microaffine) de  $G$  pour la donnée parahorique  $Q$ . Lorsque le contexte sera clair, on notera juste  $ga$  pour la classe de  $(g, a)$  dans  $I_Q$ . Sinon on la notera  $[g, a]_Q$ . On définit une action de  $G$  sur  $I$  par  $g' \cdot [g, a] = [g'g, a]$ .

Soit  $\iota_{T_0, Q} : \begin{array}{ccc} A(T_0) & \rightarrow & I_Q \\ a & \mapsto & [1, a]_Q \end{array}$ . C'est l'injection canonique de  $A(T_0)$  dans  $I_Q$ . Son image est l'appartement de  $I(Q)$  associé à  $T_0$ . Les images de ce dernier par les éléments de  $G$  sont les appartements de  $I(Q)$ .

*Remarque:* Lorsque  $G$  est un groupe réductif, et  $Q = \varphi$ ,  $I$  est le compactifié polyédral maximal de l'immeuble de Bruhat-Tits de  $G$ , la partie  $G \cdot \check{A}(T_0)$  étant l'immeuble (essentiel) de Bruhat-Tits lui-même. En particulier, c'est un immeuble affine.

**Proposition 3.3.4.** La fonction  $\iota_{T_0, Q}$  est injective si et seulement si  $Q$  vérifie (para 1).

Dans ce cas, on identifie  $A(T_0)$  à  $\iota_{T_0, Q}(A(T_0))$ .

*Démonstration:*

Si  $Q$  vérifie (para 1), soient  $a, b \in A(T_0)$  tels que  $(1, a) \sim_Q (1, b)$ . Alors il existe  $n \in N(T_0)$  tel que  $b = na$  et  $n \in Q(a)$ . Donc  $n \in Q(a) \cap N(T_0) = \text{Fix}_{N(T_0)}(a)$ , donc  $a = b$ .

Réciproquement, supposons  $\iota_Q$  injective. L'inclusion  $\text{Fix}_{N(T_0)}(a) \subset Q(a) \cap N(T_0)$  est vraie par (para 0). Pour l'autre inclusion, soit  $q \in Q(a) \cap N(T_0)$ . Alors  $qa \in A(T_0)$  et  $(1, a) \sim_Q (1, qa)$  d'où par injectivité de  $\iota_Q$ ,  $a = qa$  et  $q \in \text{Fix}(a)$ .  $\square$

On suppose désormais que  $Q$  vérifie (para 1).

**Proposition 3.3.5.** Le stabilisateur de  $A(T_0)$  dans  $G$  est  $N(T_0)$ .

*Démonstration:* L'inclusion  $N(T_0) \subset \text{Stab}_G(A(T_0))$  est vraie par la condition (para 0). Réciproquement, soit  $g \in G$  tel que  $g \cdot A(T_0) = A(T_0)$ . Soit  $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T_0))$ , soit  $a \in A_{\vec{f}}$ . Alors  $g \cdot a \in A(T)$  et par la définition de  $\sim_Q$ , il existe  $n \in N(T_0)$  tel que  $g \cdot a = n \cdot a$ . Donc  $g \in n \cdot P(a) \subset N(T_0) \cdot P(\vec{f})$ . Ceci étant valable pour toute facette  $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T_0))$ , on obtient  $g \in \bigcap_{\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}(T_0))} N(T_0) \cdot P(\vec{f}) = N(T_0) \cdot P(\vec{A}(T_0)) = N(T_0) \cdot T_0 = N(T_0)$ .  $\square$

Les deux propositions précédentes permettent de définir la structure des appartements de  $I(Q)$  :

**Définition 3.3.6.** La structure d'appartement sur  $A(T_0)$  (c'est-à-dire les façades, les murs, les facettes, et la structure affine sur chaque façade) est celle qui fait de  $\iota_{T_0, Q}$  un isomorphisme d'appartements. On munit  $A(T_0)$  de l'action de  $N(T_0)$  qui fait de  $\iota_{T_0, Q}$  un isomorphisme  $N(T_0)$ -équivariant.

Pour tout autre appartement  $g \cdot A(T_0)$ , la structure d'appartement sur  $g \cdot A(T_0)$  est celle qui fait de  $g|_{A_0}$  un isomorphisme d'appartements. On munit  $g \cdot A(T_0)$  de l'action de  $N(gT_0g^{-1}) = gN(T_0)g^{-1}$  définie par  $n \cdot (g \cdot a) = g \cdot ((g^{-1}ng) \cdot a)$  pour  $n \in N(gT_0g^{-1})$  et  $a \in A(T_0)$ . Ces deux définitions sont indépendantes du choix de  $g$  d'après la proposition précédente. L'appartement  $g \cdot A(T_0)$  sera noté  $A(gT_0g^{-1})$ .

Remarques:

- On a ainsi défini  $A(T)$ , pour tout tore maximal  $T$  de  $G$ , comme un appartement inclus dans  $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ . Mais cet appartement est isomorphe à l'appartement  $A(T)$  défini dans la partie précédente, via  $g|_{A(T_0)} \circ \iota_{T_0, \mathcal{Q}}$  pour tout  $g \in G$  tel que  $T = gT_0g^{-1}$ .
- Si  $A$  est un appartement, si  $a \in A$  et  $\vec{v} \in \vec{A}$ , alors le point  $a +_A \vec{v} \in A$  est bien défini par la formule  $a +_A \vec{v} = g(g^{-1}(a) +_{A(T_0)} g^{-1}(\vec{v}))$ , où  $g \in G$  est tel que  $g.A(T_0) = A$ . Mais ceci dépend a priori de l'appartement  $A$  contenant  $a$  et tel que  $\vec{v} \in \vec{A}$  considéré. On ne peut donc pas noter ce point  $a + \vec{v}$ . En terme de condition sur la famille  $\mathcal{Q}$ , le point  $a + \vec{v}$  est bien défini si  $N.Q(a) \cap N.P(\vec{v}) \subset N.Q(\{a, a + \vec{v}\})$  (où l'addition est faite dans  $A(T_0)$ ). Ceci est une conséquence de (para2.1<sup>+</sup>).
- Il en va de même pour les projections : si  $a \in A$  et  $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A})$ , on peut noter  $pr_{A, \vec{f}}(a)$  la projection de  $a$  sur la façade  $A_{\vec{f}}$  dans l'appartement  $A$ . Le projeté  $pr_{\vec{f}}(a)$  est bien défini si  $N.Q(a) \cap N.P(\vec{f}) \subset N.Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$ , en particulier si  $\mathcal{Q}$  vérifie (para2.2) ( $\vec{f}$ ).
- Pour l'enclos enfin, si  $\Omega$  est une partie d'un appartement  $A$ , on notera  $Cl_A(\Omega)$  l'enclos de  $\Omega$  dans  $A$ . Ceci sera indépendant de  $A$  si  $\mathcal{Q}$  vérifie (para 3 et 4)( $\Omega$ ).

Voici quelques propriétés immédiates de  $\mathcal{I}$  :

**Proposition 3.3.7.**

1. Le fixateur d'un point  $x \in A(T_0)$  est  $Q(x)$ . Plus généralement, pour un appartement  $B = g.A(T_0) = A(gT_0g^{-1})$ , le fixateur d'un point  $x \in B$  est  $gQ(g^{-1}x)g^{-1}$ .
2. Soit  $T$  un tore maximal,  $a \in A(T)$ ,  $g \in G$ . Si  $g.a \in A(T)$ , alors il existe  $n \in N(T)$  tel que  $g.a = n.a$ .
3. Pour tout  $x \in \mathcal{I}$ , le groupe  $\text{Fix}_G(x)$  est transitif sur les appartements contenant  $x$ .

*Démonstration:*

1. Si  $(g, x) \sim_{\mathcal{Q}} x$ , alors il existe  $n \in N(T_0)$  tel que  $nx = x$  et  $g^{-1}n \in Q(x)$ . Alors  $n \in \text{Fix}_{N(T_0)}(x) \subset Q(x)$  par (para 1.1), et donc  $g \in Q(x)$ . La réciproque est claire, le cas général aussi.
2. Dans  $A(T_0)$ , c'est la définition de  $\sim_{\mathcal{Q}}$ . Le cas plus général s'y ramène car  $hN(T_0)h^{-1} = N(hT_0h^{-1})$ .
3. Soient  $A$  et  $g.A$  deux appartements contenant  $x$ . On peut supposer  $A = A(T_0)$ . Alors  $g^{-1}x \in A(T_0)$ , et par le point précédent, il existe  $n \in N(T_0)$  tel que  $g^{-1}x = nx$ . Alors  $gn \in \text{Fix}_G(x)$ , et  $g.A(T_0) = gnA(T_0)$ .

□

On prolonge naturellement la définition des sous-groupes parahoriques, de manière cohérente avec les notations  $Q(x)$ ,  $Q(\Omega)$  déjà introduites :

**Définition 3.3.8.** Pour tout  $x \in \mathcal{I}$ , on note  $Q(x) = \text{Fix}_G(x)$ . Pour toute partie  $\Omega$  de  $\mathcal{I}$ , on note  $Q(\Omega) = \text{Fix}_G(\Omega)$ .

Enfin, on montre une caractérisation géométrique des sous-groupes radiciels valués  $U_{\alpha, k}$ .

**Proposition 3.3.9.** Soit  $T$  un tore maximal,  $\alpha \in \phi(T)$ ,  $k \in \Lambda$ , soit  $u \in U_{\alpha, k}$ . Alors l'ensemble des points fixes de  $u$  dans  $A(T)$  est précisément  $\mathcal{D}(\alpha, k)$ .

*Démonstration:*

On sait déjà que  $U_{\alpha, k}$  fixe  $\mathcal{D}(\alpha, k)$ .

Supposons que  $u$  fixe un point  $x \in \mathcal{D}(-\alpha, -k) \setminus M(\alpha, k)$ . Alors  $u \in Q(x)$ , mais d'autre part  $u_{-\alpha}(\lambda^{-1}) \in Q(x)$ , d'où  $n_{\alpha}(\lambda) \in Q(x)$ . Mais  $n_{\alpha}(\lambda)$  induit la réflexion selon le mur  $M(\alpha, k)$  qui ne contient pas  $x$ . Donc  $n_{\alpha}(\lambda) \in (Q(x) \cap N) \setminus N_x$ , ceci contredit (para in j) .

□

**Définition 3.3.10.** Soit  $T$  un tore maximal,  $\alpha \in \phi(T)$ ,  $\Omega$  une partie de  $A(T)$ . On note  $U_\alpha(\Omega) = \{u_\alpha(k) \mid k \in \mathbb{K} \text{ et } \Omega \subset \mathcal{D}(\alpha, \omega(k))\}$ . Autrement dit,  $U_\alpha(\Omega) = U_{\alpha, f_\alpha(\Omega)}$  où  $f_\alpha(\Omega) = \inf \{\alpha(x) \mid x \in \Omega\}$ . Remarquons que  $f_\alpha(\Omega)$  peut être  $\infty$  ou  $-\infty$ . Dans le premier cas,  $U_\alpha(\Omega) = U_\alpha$  et dans le second,  $U_\alpha(\Omega) = \{1\}$ .

**Corollaire 3.3.11.** Pour  $\alpha \in \phi(T)$  et  $x \in A(T)$ ,  $U_\alpha(x) = \{u \in U_\alpha \mid u \text{ fixe } x\}$ .

**Corollaire 3.3.12.** Soit  $\alpha \in \phi(T)$ ,  $x \in A(T)$ , et  $g \in G$ . Alors  $gU_\alpha(x)g^{-1} = U_{g\alpha}(g.x)$ .

**Proposition 3.3.13.** Soient  $Q$  et  $Q'$  deux familles de parahoriques telles que pour tout  $a \in A(T_0)$ ,  $Q(a) \subset Q'(a)$ . Alors il existe une projection naturelle  $I(Q) \twoheadrightarrow I(Q')$ ,  $[g, a]_Q \mapsto [g, a]_{Q'}$ . En particulier, l'immeuble  $I(\mathcal{P})$  correspondant à la famille minimale de parahoriques se projette sur tous les autres immeubles de  $G$ .

### 3.3.3 Façades d'immeuble

Rappelons que, par définition, les façades d'appartements dans  $I$  sont toutes les parties de la forme  $g.(A_{0\vec{f}})$ , avec  $g \in G$  et  $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}_0)$ .

**Lemme 3.3.14.** Soient  $\mathfrak{f} = (hA_0)_{h\vec{f}}$  et  $\mathfrak{e} = (gA_0)_{g\vec{e}}$  deux façades d'appartements. Si  $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{e} \neq \emptyset$ , alors  $h\vec{f} = g\vec{e}$ .

*Preuve du lemme:* On peut supposer  $h = e$ . Soit  $a \in A_{0\vec{f}} \cap (gA_0)_{g\vec{e}}$ . Alors  $g^{-1}a \in A_{0\vec{e}}$  donc il existe  $n \in N$  tel que  $gn \in Q(a)$ . En particulier,  $gn^{-1}P(\vec{f})$  donc  $g^{-1}\vec{f} = n\vec{f}$ , et d'autre part  $g^{-1}a = na$  d'où  $n.\vec{f} = \vec{e}$ . Au final,  $g^{-1}\vec{f} = \vec{e}$ .  $\square$

En conséquence de ceci, la direction d'une façade d'appartement dans  $I$  est bien définie :

**Définition 3.3.15.** Soit  $\mathfrak{f} = g.(A_{0\vec{f}})$  une façade d'appartement, alors la facette vectorielle  $g.\vec{f}$  est appelée la direction de  $\mathfrak{f}$ .

La réunion de toutes les façades d'appartement dirigé par une facette vectorielle  $\vec{f}$  est appelée la façade de  $I$  de direction  $\vec{f}$ . On la note  $I_{\vec{f}}$ .

**Proposition 3.3.16.** Les façades de  $I$  forment une partition de  $I$ . De plus, l'application  $\vec{f} \mapsto I_{\vec{f}}$  est une bijection  $G$ -équivariante entre les facettes de  $\vec{I}$  et les façades de  $I$ . En conséquence, le stabilisateur dans  $G$  de la façade  $A_{\vec{f}}$  est  $P(\vec{f})$ .

*Démonstration:* Le lemme prouve que deux façades sont disjointes ou égales. De plus,  $A_0$  est la réunion de ses façades, donc  $I = G.A_0$  est la réunion de ses façades d'appartement, et donc de ses façades d'immeuble.

L'application  $\vec{f} \mapsto I_{\vec{f}}$  est clairement surjective et  $G$ -équivariante. Si  $I_{\vec{f}} = I_{\vec{g}}$ , soit  $\mathfrak{f}$  une façade d'appartement de direction  $\vec{f}$  et  $a \in \mathfrak{f}$ . Par hypothèse, il existe  $g$  de direction  $\vec{g}$  contenant  $a$ . Le lemme entraîne alors  $\vec{f} = \vec{g}$ .  $\square$

**Proposition 3.3.17.** Si  $\vec{f}$  est une facette sphériques de  $\vec{I}$ , pour peu que  $Q$  vérifie (para in.j), la façade  $I_{\vec{f}}$  est l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe  $M_{\vec{A}}(\vec{f})$ , pour tout appartement  $\vec{A}$  contenant  $\vec{f}$ .

Pour une facette  $\vec{f}$  générale, la façade fermée  $\overline{I_{\vec{f}}} := \bigcup_{\vec{g} \in \vec{f}^*} I_{\vec{g}}$  est la mesure bordée pour la donnée radicielle valuée  $(P(\vec{f}), (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \phi^m(\vec{f})})$  avec la famille de parahorique  $Q$  restreinte à  $\overline{A_{\vec{f}}}$ .

*Remarque:* Dans le cas sphérique, le groupe  $P(\vec{f}) = U(\vec{f}) \rtimes M(\vec{f})$  agit sur  $I_{\vec{f}}$ , et pas seulement  $M(\vec{f})$ . Mais le facteur  $U(\vec{f})$  agit trivialement, d'après 3.2.2. Dans le cas général,  $U(\vec{f})$  agit trivialement sur  $A_{\vec{f}}$  au moins si  $Q$  vérifie (para2.1<sup>+</sup>) ( $\vec{C}$ ) pour toute chambre  $\vec{C}$ .

### 3.4 Décomposition d'Iwasawa

On prouve ici la décomposition d'Iwasawa  $G = P(\vec{C}) \cdot N(T) \cdot G(F)$ , valable pour toute chambre  $\vec{C}$  de  $\vec{A}(T)$  et pour toute facette  $F \subset A$ . Rappelons que selon nos notations, le groupe  $G(F)$  est défini par  $G(F) = \langle \{U_\alpha(F) \mid \alpha \in \phi(T)\} \rangle$ , avec  $U_\alpha(F) := \{u_\alpha(k) \mid k \in \mathbb{K} \text{ et } F \subset \mathcal{D}(\alpha, \omega(k))\}$ . Pour toute famille de parahorique  $\mathcal{Q}$ , on a  $G(F) \subset \mathcal{Q}(F)$ , donc la décomposition d'Iwasawa implique  $G = P(\vec{f}) \cdot N(T) \cdot \mathcal{Q}(F)$ , pour toute facette  $\vec{f}$  de  $\vec{A}(T)$  et  $F$  de  $A(T)$ .

#### 3.4.1 Préliminaires

**Lemme 3.4.1.** *Soit  $\vec{\Omega} \subset \vec{A}(T)$  une partie égale à l'adhérence d'une réunion de chambre. Alors tout élément de  $G(\vec{\Omega})$  fixe toutes les chambres dont une cloison est dans l'intérieur de  $\vec{\Omega}$ .*

Rappelons que  $G(\vec{\Omega}) = \langle \{U_\alpha \mid \alpha \in \phi(\vec{\Omega})\} \rangle$ .

*Exemple 3.4.2.* Si  $\Omega = \vec{C} \cup \vec{D}$  avec  $\vec{C}$  et  $\vec{D}$  deux chambres adjacentes selon une cloison  $\vec{m}$ , alors le lemme entraîne  $G(\vec{\Omega}) \subset P(\vec{m}^*)$ .

*Preuve du lemme:*

Soit  $\alpha \in \phi(\vec{\Omega})$  et  $\vec{m}$  une cloison intérieure à  $\vec{\Omega}$ . Les deux chambres  $\vec{C}$  et  $\vec{D}$  de  $\vec{A}(T)$  bordées par  $\vec{m}$  sont donc incluses dans  $\vec{\Omega}$ . Par conséquent,  $U_\alpha$  fixe  $\vec{C}$  et  $\vec{D}$ .

Pour toute racine  $\beta$  indivisible telle que  $\beta(\vec{m}) = 0$ , les autres chambres de  $\vec{I}$  bordant  $\vec{m}$  sont les images de  $\vec{C}$  ou de  $\vec{D}$  par  $U_\beta$ . Ces racines sont en fait au nombre de deux, l'une opposée de l'autre, et l'une des deux forme avec  $\alpha$  une paire prénilpotente. Soit  $\beta$  cette racine, supposons que  $\beta(\vec{C}) > 0$ , alors l'ensemble des chambres adjacentes à  $\vec{m}$  est  $U_\beta \cdot \vec{D}$ . La relation de commutateur  $[U_\alpha, U_\beta] \subset \langle \{U_\gamma \mid \exists p, q \in \mathbb{N} \text{ tq } \gamma = p\alpha + q\beta \in \phi\} \rangle$  permet de manière classique de prouver que  $U_\alpha$  fixe chaque  $u_\beta(k) \cdot \vec{D}$ .  $\square$

**Lemme 3.4.3.** *Soit  $\vec{C}$  une chambre de  $\vec{A}(T)$ , soit  $\alpha \in \phi(T)$  qui s'annule sur une cloison  $\vec{m}$  de  $\vec{C}$ . Autrement dit,  $\alpha$  est une racine simple de  $\phi(\vec{C})$ . Alors :*

$$U(\vec{C}) \subset P(\vec{m}^*) \rtimes U_\alpha \subset P(\vec{C})$$

*Remarque:* Pour une chambre  $\vec{C}$ ,  $U(\vec{C}) = G(\vec{C})$ .

*Preuve du lemme:*

Comme  $U_\alpha$  fixe  $\vec{m}$ , il stabilise  $\vec{m}^*$  et donc normalise  $P(\vec{m}^*)$ . De plus, la trivialité de l'intersection  $P(\vec{m}^*) \cap U_\alpha$  est bien connue.

Par ailleurs, l'inclusion  $P(\vec{m}^*) \rtimes U_\alpha \subset P(\vec{C})$  est claire. Il reste donc à montrer que  $U(\vec{C}) \subset \langle P(\vec{m}^*), U_\alpha \rangle$ . On sait que  $U(\vec{C}) = \langle \{U_\gamma \mid \gamma \in \phi(\vec{C})\} \rangle$ . Or pour tout  $\gamma \in \phi(\vec{C})$ , on a soit  $\gamma = \alpha$ , soit  $\gamma(\vec{m}) > 0$ . Dans ce cas, le lemme précédent entraîne que  $U_\gamma \subset P(\vec{m}^*)$ .  $\square$

#### 3.4.2 Démonstration

**Proposition 3.4.4.** *(Décomposition d'Iwasawa) Soit  $\vec{C}$  une chambre de  $\vec{A}(T)$  et  $F$  une facette de  $A(T)$ . Alors :*

$$G = U(\vec{C}) \cdot N(T) \cdot G(F).$$

*Démonstration:*

La preuve est classique. Il suffit de prouver que l'ensemble  $Z := U(\vec{C}) \cdot N(T) \cdot G(F)$  est stable par multiplication à gauche par n'importe quel élément de  $G$ . Or  $G$  est engendré par  $T$ , par les  $U_\alpha$  avec  $\alpha \in \phi(\vec{C})$  et par les  $U_\beta$  avec  $\beta$  une



racine simple de  $\phi(-\vec{C})$ . Or  $Z$  est clairement stable par multiplication à gauche par  $T$  et les  $U_\alpha$ . Soit donc  $\beta = -\alpha$  une racine simple de  $\phi(-\vec{C})$ , montrons que  $Z$  est stable par multiplication à gauche par  $U_\beta$ .

Par le lemme précédent,  $U(\vec{C}) \subset P(\vec{m}^*) \rtimes U_\alpha$ , avec  $\vec{m}$  la cloison de  $\vec{C}$  qui est incluse dans le noyau de  $\beta$ . Le groupe  $P(\vec{m}^*)$  est donc normalisé par  $U_\beta$ , et  $U_\beta.Z \subset P(\vec{m}^*).U_\beta.U_\alpha.N(T).G(F)$ . L'ensemble  $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, -\alpha\}$  est un système de racine fini, donc par [BT72],  $U_\beta.U_\alpha \subset \langle U_\beta, U_\alpha, T \rangle = U_\alpha.T\{e, r_\alpha\}U_\alpha = U_\alpha.T \sqcup U_{-\alpha}r_\alpha$ , où  $r_\alpha = n(u_\alpha(k))$  est la réflexion générée par un élément quelconque de  $U_\alpha$ .

Ainsi,  $U_\beta.Z \subset P(\vec{m}^*) \cdot (U_\alpha \cup U_{-\alpha}) \cdot N(T) \cdot G(F)$ .

Étudions maintenant le produit  $U_{-\alpha}.N(T).G(F)$ . Pour tout  $n \in N(T)$ ,  $U_{-\alpha}.n = nn^{-1}U_{-\alpha}n = nU_{-n^{-1}\alpha}$ . En utilisant la décomposition d'Iwasawa du groupe  $\langle U_{-n^{-1}\alpha}, U_{n^{-1}\alpha}, T \rangle$ , il vient  $U_{-n^{-1}\alpha} \subset U_{n^{-1}\alpha}.N(T).G(F)$ . D'où  $U_{-\alpha}.N(T).G(F) \subset U_\alpha.N(T).G(F)$ .

On a alors obtenu :  $U_\beta.Z \subset P(\vec{m}^*).U_\alpha \cdot N(T) \cdot G(F) \subset P(\vec{C}) \cdot N(T) \cdot G(F)$ . Mais  $P(\vec{C}) = U(\vec{C}).T$ , d'où  $U_\beta.Z \subset Z$ , et ceci conclut la preuve.  $\square$

**Corollaire 3.4.5.** *Pour toutes facettes  $\vec{f} \subset \vec{A}(T)$  et  $F \subset A(T)$ , pour toute famille  $Q$  de parahoriques sur  $A(T)$ , on a*

$$G = P(\vec{f}).N(T).Q(F)$$

**Corollaire 3.4.6.** *Pour toutes facettes  $\vec{f}$  de  $\vec{I}$  et  $F$  de  $I(Q)$ , il existe un appartement  $A$  tel que  $F \subset A$  et  $\vec{f} \subset \vec{A}$ . De plus, entre deux tels appartements, il existe un isomorphisme induit par un élément  $q \in Q(F)$  qui fixe  $F$ .*

*Démonstration:* On peut supposer  $\vec{f} \subset \vec{A}(T)$ . Soit  $g \in G$  tel que  $F \subset G.A(T)$ . Par le corollaire précédent,  $g \in P(\vec{f}).N(T).Q(g^{-1}F)$ . Soit  $g = pnq$  une écriture de  $g$  correspondante. Alors  $p.A(T) = gq^{-1}n^{-1}.A(T)$  contient  $F$  et  $p.\vec{A}(T)$  contient  $\vec{f}$ .  $\square$

### 3.4.3 Unicité

Lorsque  $Q$  vérifie (para dec) pour une facette  $F$ , on prouve un résultat d'unicité pour le facteur dans  $N$  pour toute décomposition d'Iwasawa faisant intervenir  $F$ .

**Proposition 3.4.7.** *Soient  $\vec{C}$  une chambre de  $\vec{A}$  et  $F$  une facette de  $A$ . On suppose que la famille  $Q$  vérifie  $Q(F) = (U(\vec{D}) \cap Q(F)).(U(-\vec{D}) \cap Q(F)).N(F)$  pour toute chambre  $\vec{D}$  de  $\vec{A}(T)$ . Soit  $\vec{f}$  la direction de la façade de  $F$ . Alors :*

$$G = \bigsqcup_{n.N(F) \in N/N(F)} U(\vec{C}) \cdot n \cdot Q(F)$$

*Autrement dit, le facteur  $n \in N$  dans la décomposition d'Iwasawa par rapport à  $\vec{C}$  et à  $F$  est unique modulo  $N(F) = \text{Fix}_N(F)$ .*

*Démonstration:*

On sait déjà par la proposition 3.4.4 que  $G = \bigcup_{n \in N} U(\vec{C}) \cdot n \cdot Q(F)$ . Étudions l'unicité de  $n$ . Supposons qu'il existe  $n, n' \in N$  tels que  $U(\vec{C}).n.Q(F) \cap U(\vec{C}).n'.Q(F) \neq \emptyset$ . Alors  $n' \in U(\vec{C}).n.Q(F)$  et  $n^{-1}n' \in U(n^{-1}\vec{C}) \cdot Q(F)$ , ce qui vaut  $U(n^{-1}\vec{C}) \cdot (U(-n^{-1}\vec{C}) \cap Q(F)) \cdot N(F)$  par hypothèse. Donc il existe  $n_F \in N(F)$  tel que  $n^{-1}n'n_F \in U(n^{-1}\vec{C}) \cdot U(-n^{-1}\vec{C})$ . Par unicité du facteur de  $N$  dans la décomposition de Birkhoff vectorielle, on obtient  $n^{-1}n'n_F = e$ .  $\square$

**Corollaire 3.4.8.** Soit  $Q$  une famille de parahoriques vérifiant (para dec) fonctoriellement. Alors pour tout  $\Delta$  tel que  $\Lambda \leq \Delta \leq \mathbb{R}$ , pour tout  $a \in A$ ,  $G \cap N^\Delta \cdot Q^\Delta(a) = N \cdot (G \cap Q^\Delta(a))$ .

Et donc si  $Q$  vérifie en outre (fonc) ( $a$ ), alors  $G \cap N^\Delta \cdot Q^\Delta(a) = N \cdot Q(a)$ .

*Démonstration:* Soit  $g = u.n.p$  une écriture de  $g$  dans la décomposition d'Iwasawa  $G = U(\vec{C}) \cdot N \cdot Q(a)$ , pour  $\vec{C}$  une chambre quelconque de  $\vec{A}$ . Comme  $P(a) \subset P^\Delta(a)$ ,  $N \subset N^\Delta$ , et  $U(\vec{C}) \subset U^\Delta(\vec{C})$ , c'est aussi une écriture de  $g$  dans  $G^\Delta = U^\Delta(\vec{C}) \cdot N^\Delta \cdot Q^\Delta(a)$ .

Par ailleurs, soit  $g = n^\Delta \cdot q^\Delta$  une écriture venant de l'hypothèse  $g \in N^\Delta \cdot Q^\Delta(a)$ . Par la proposition précédente,  $n \cdot N^\Delta(a) = n^\Delta \cdot N^\Delta(a)$ . Donc  $g \in n \cdot Q^\Delta(a)$ , puis  $g \in n \cdot (Q^\Delta(a) \cap G)$ , ce qui vaut  $n \cdot P(a)$  si (fonc) ( $a$ ) est vrai.  $\square$

*Remarque:* Le même raisonnement permettra la même conclusion lorsqu'on étudiera un groupe presque déployé par descente galoisienne.

**Corollaire 3.4.9.** Si  $\mathcal{P}$  est la famille minimale de parahoriques pour un groupe de Kac-Moody déployé, l'immeuble microaffine  $\mathcal{I}_{sph}(\mathcal{P})$  s'injecte dans  $\mathcal{I}_{sph}(\mathcal{P}^\Delta)$ .

### 3.5 Lien entre les façades

#### 3.5.1 Conséquence de (para2.2)

La première conséquence de (para2.2) ( $\vec{f}$ ) est que la projection  $pr_{\vec{f}}(a)$  est bien définie dans  $\mathcal{I}$ , indépendamment de l'appartement contenant  $a$  et  $\vec{f}$  considéré :

**Proposition 3.5.1.** Si  $Q$  vérifie (para2.2) ( $\vec{f}$ ), alors la projection  $pr_{\vec{f}}$  est bien définie sur la réunion des  $A(T)_{\vec{g}}$  tels que  $\vec{f} \cup \vec{g} \subset \vec{A}(T)$  et  $\vec{g} \subset \text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{f})$ . Pour tout  $p \in P(\vec{f})$ , on a  $p \cdot pr_{\vec{f}}(a) = pr_{\vec{f}}(p \cdot a)$ .

*Démonstration:*

Soit  $a$  dans une façade  $A(T)_{\vec{g}}$  telle que  $\vec{f} \cup \vec{g} \subset \vec{A}(T)$  et  $\vec{g} \subset \text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{f})$ . Soit  $T_0$  un tore maximal de référence, soit  $g \in G$  tel que  $G \cdot A(T) = A(T_0)$ . Alors  $g \cdot \vec{f}$  et  $g \cdot \vec{g}$  sont deux facettes de  $\vec{A}(T_0)$  telles que  $g \cdot \vec{g} \subset \text{Vect}_{\vec{A}(T_0)}(g \cdot \vec{f})$  donc la projection  $pr_{g \cdot \vec{f}}(ga)$  est bien définie dans  $A(T_0)$ . On veut poser  $pr_{\vec{f}}(a) = g^{-1}(pr_{g \cdot \vec{f}}(ga))$ , il s'agit de vérifier que ceci est indépendant de  $T$  et de  $g$ .

Soient donc  $T'$  et  $g'$  d'autres choix possibles. Alors  $g'g^{-1}$  envoie  $ga$  et  $g \cdot \vec{f}$  sur un autre point de  $A(T_0)$  et une autre facette de  $\vec{A}(T_0)$ . Donc  $g'g^{-1} \in N(T_0)Q(ga) \cap N(T_0)P(g \cdot \vec{f})$ . Ceci vaut  $N(T_0)Q(\{ga, pr_{g \cdot \vec{f}}(ga)\})$  par (para2.2) ( $\vec{f}$ ). Soit  $n \in N(T_0)$  tel que  $g'g^{-1} \in n \cdot Q(\{ga, pr_{g \cdot \vec{f}}(ga)\})$ . Alors  $g'g^{-1}(pr_{g \cdot \vec{f}}(ga)) = n(pr_{g \cdot \vec{f}}(ga)) = pr_{ng \cdot \vec{f}}(nga) = pr_{g' \cdot \vec{f}}(g'a)$ . Ceci prouve que  $g^{-1}(pr_{g \cdot \vec{f}}(ga)) = (g')^{-1}(pr_{g' \cdot \vec{f}}(g'a))$ .  $\square$

On peut alors dans une certaine mesure caractériser un point de  $\mathcal{I}$  par ses projetés dans diverses façades. Par exemple, on prouve le :

**Lemme 3.5.2.** Supposons que  $Q$  vérifie (para2.2) ( $\vec{m}$ ) pour toute cloison  $\vec{m}$ . Soit  $\vec{f}$  une facette d'un appartement  $\vec{A}$ , soit  $u \in U(\vec{f})$ . Alors pour tout  $a \in A$ , soit  $u \cdot a = a$ , soit  $u \cdot a \notin A$ .

*Preuve du lemme:* Soit  $a \in A$ , supposons  $u \cdot a \in A$ . Soit  $\vec{m}$  une cloison de  $\vec{f}^*$ , alors  $u \in P(\vec{m})$ , donc  $u \cdot pr_{\vec{m}}(a) = pr_{\vec{m}}(u \cdot a) \in A_{\vec{m}}$ . Ainsi  $u$  envoie le point  $pr_{\vec{m}}(a)$  sur un autre point de l'appartement  $A_{\vec{m}}$ . Sachant que  $u$  fixe par ailleurs un cône ouvert de  $A_{\vec{m}}$  (c'est-à-dire une demi-droite, puisque  $\dim(A_{\vec{m}}) = 1$ ), et que  $\mathcal{I}_{\vec{m}}$  est un immeuble affine (en fait un arbre), ceci entraîne que  $u \cdot pr_{\vec{m}}(a) = pr_{\vec{m}}(a)$ , d'où  $pr_{\vec{m}}(u \cdot a) = pr_{\vec{m}}(a)$ .

Donc  $a$  et  $u \cdot a$  sont deux points de  $A$  dont les projetés sur tous les  $A_{\vec{m}}$ , pour  $\vec{m}$  une cloison de  $\vec{f}^*$  coïncident. Ceci entraîne que  $\overrightarrow{au(a)}$  est dans l'intersection de ces  $\vec{m}$ . Mais celle-ci est triviale.  $\square$

**Proposition 3.5.3.** *On suppose que  $Q$  vérifie (para2.1) ( $\vec{m}$ ) pour toute cloison  $\vec{m}$ . Soit  $\vec{C}$  une chambre de  $\vec{A}$ , Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  des racines de  $\phi^u(\vec{C})$  deux à deux non colinéaires, soit  $u = u_1 \dots u_k$  avec  $u_i \in U_{\alpha_i}$ . Alors :*

$$\text{Fix}_A(u) = \bigcap_i \text{Fix}(u_i) = \bigcap_i \mathcal{D}(\alpha_i, \varphi_{\alpha_i}(u_i))$$

*Démonstration:* La seconde égalité vient de 3.3.9. Pour la première, l'inclusion " $\supset$ " est claire.

Soit  $a \in \text{Fix}_A(u)$ . Soit  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , soit  $\vec{m}_i$  la cloison de  $\vec{C}$  dirigée par  $\alpha_i$ . Alors  $u$  agit sur la façade  $\mathcal{I}_{\vec{m}_i}$  par  $u_i$  et fixe le point  $pr_{\vec{m}_i}(a)$  par 3.5.1. Par conséquent,  $u_i \in U_{\alpha_i}(pr_{\vec{m}_i}(a)) = U_{\alpha_i}(a)$ , donc  $u_i$  fixe  $a$ .  $\square$

### 3.5.2 Conséquences de (para2.2<sup>+</sup>)

**Proposition 3.5.4.** *Soit  $\vec{f}$  une facette de  $\vec{A}$ . Si  $Q$  vérifie (para2.2<sup>+</sup>) ( $\vec{f}$ ), alors pour tout  $\vec{v} \in \vec{f}$  et  $a \in A$ , pour tout appartement  $B$  contenant  $a$  et  $\vec{f}$ , on a  $a +_A \vec{v} = a +_B \vec{v}$ . Autrement dit, l'opération  $a + \vec{v}$  est bien définie, et indépendante de l'appartement contenant  $a$  et  $\vec{f}$  considéré.*

*De plus, tout appartement contenant  $a$  et  $\vec{f}$  contient alors  $a + \vec{f}$ , et cet ensemble est indépendant de  $A$ . On pourra donc le noter juste  $a + \vec{f}$ .*

*Démonstration:*

Soit  $g \in G$  tel que  $g.B = A$ . Alors  $g \in N.Q(a) \cap N.P(\vec{f}) = N.Q(a + \vec{f})$  (adhérence dans  $A$ ). On peut supposer  $g \in Q(a + \vec{f})$ , en particulier,  $g$  fixe  $a +_A \vec{v}$ , donc  $g^{-1}(a +_A \vec{v}) = a +_A \vec{v}$ . Mais par définition de la structure affine sur les appartements,  $g^{-1}(a +_A \vec{v}) = g^{-1}(a) +_{g^{-1}A} g^{-1}(\vec{v}) = a +_B \vec{v}$ . D'où  $a +_A \vec{v} = a +_B \vec{v}$ .

Ensuite, le fait que  $B = g^{-1}A$ , avec  $g^{-1} \in Q(a + \vec{f})$  entraîne que  $a + \vec{f} \subset A \cap B$ . Or de manière générale,  $g^{-1}.a + \vec{f} = g^{-1}.a + g^{-1}.f$ , on obtient donc ici que  $a + \vec{f} = a + \vec{f}$ .  $\square$

La condition (para2.2<sup>+</sup>) permet surtout de prouver que la condition d'isomorphismes entre appartements ( (para5) ) est vérifiée sur les parties de  $A$  contenant au moins un point sphérique :

**Proposition 3.5.5.** *Soit  $Q$  une famille de parahoriques vérifiant (para2.2<sup>+</sup>) et (para sph) . Alors pour toute partie  $\Omega \subset A$  contenant au moins un point sphérique, on a*

$$\bigcap_{\omega \in \Omega} N.Q(\omega) = N.Q(\Omega)$$

*Démonstration:*

Soit  $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega} N.Q(\omega)$ . En particulier,  $g \in \bigcap_{\vec{f} \in \vec{\Omega}} N.P(\vec{f}) = N.P(\vec{\Omega}) = N.P(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$ , on peut donc supposer  $g \in P(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$ , d'où  $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega} N(\vec{f}_\omega).Q(\omega)$ .

Soit  $\vec{f}$  une facette maximale de  $\text{Cl}(\vec{\Omega})$ , elle est donc sphérique. Par (para2.2<sup>+</sup>) ( $\vec{f}$ ) et (para sph) , on obtient  $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega} N.P(pr_{\vec{f}}(\omega))$ , et sachant que  $g \in P(\vec{f})$  ceci devient  $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega} N(\vec{f}).P(pr_{\vec{f}}(\omega))$ . Alors par 3.2.2, on arrive à  $g \in N(\vec{f}).P(pr_{\vec{f}}(\Omega))$ . On peut supposer  $g \in P(pr_{\vec{f}}(\Omega))$ , sans perdre l'hypothèse  $g \in P(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$  car  $N(\vec{f}) = N(\vec{\Omega})$ . On peut même supposer, toujours grâce à 3.2.2 qu'il existe une partie  $\Omega_0$  de  $\vec{A}$  telle que  $pr_{\vec{f}}(\Omega_0) = pr_{\vec{f}}(\Omega)$ , que  $g$  fixe  $\Omega_0$  et que tous les  $\omega_0 + \vec{f}$  pour  $\omega_0 \in \Omega_0$ .

Soit  $\omega \in \Omega$ , et  $\omega_0 \in \Omega_0$  tel que  $pr_{\vec{f}}(\omega) = pr_{\vec{f}}(\omega_0)$ . Alors  $g \in N(\vec{f}).Q(\omega) \cap P(\vec{f})$ , donc par (para2.2<sup>+</sup>) ,  $g \in N(\vec{f}).Q(\omega + \vec{f})$ . Mais par ailleurs,  $g$  fixe  $\omega_0 + \vec{f}$  qui contient un scp  $C$  de  $\omega + \vec{f}$ . Soit  $g = n.q$  une écriture de  $g$  venant

de  $g \in N(\vec{f}_\omega) \cdot \overline{Q(\omega + \vec{f})}$ , alors  $q$  et  $g$  fixent  $C$ , donc  $n$  aussi. Comme  $n$  agit de manière affine sur  $A_{\vec{f}_\omega}$ , ceci entraîne  $n \in Q(\omega + \vec{f})$ , en particulier,  $g \in Q(\omega)$ .

On a donc prouvé que  $g \in Q(\Omega)$ . □

**Corollaire 3.5.6.** *Si  $Q$  vérifie (para2.2<sup>+</sup>) et (para sph), si  $A$  et  $B$  sont deux appartements de  $I(Q)$  dont l'intersection contient un point sphérique, alors il existe  $g \in G$  tel que  $g.A = B$  et  $g$  induit de  $A$  sur  $B$  un isomorphisme fixant  $A \cap B$ . Autrement dit, si  $\Omega$  est une partie d'appartement contenant au moins un pint sphérique, alors  $Q(\Omega)$  est transitif sur les appartements contenant  $\Omega$ .*

### 3.5.3 Implications entre ces conditions

Il n'est pas la peine d'insister sur le fait que (para2.1<sup>+</sup>) ( $\vec{f}$ ) implique (para2.1) ( $\vec{f}$ ) et que (para2.2<sup>+</sup>) ( $\vec{f}$ ) implique (para2.2) ( $\vec{f}$ ), pour toute facette  $\vec{f}$ . Par contre, nous prendrons quelques instants pour étudier les relations entre (para2.1) et (para2.2) d'une part, et (para2.1<sup>+</sup>) et (para2.2<sup>+</sup>) d'autre part.

#### Proposition 3.5.7.

1. Soit  $\vec{f}$  une facette sphérique telle que  $Q$  vérifie (para dec) et (para2.1) ( $\vec{f}$ ) fonctoriellement. Alors  $Q$  vérifie (para2.2) ( $\vec{f}$ ) (fonctoriellement).
2. Soit  $\vec{f}$  une facette telle que  $Q$  vérifie (para2.2) ( $\vec{f}$ ). On suppose de plus que  $Q$  vérifie (para in j). Alors  $Q$  vérifie (para2.1) ( $\vec{f}$ ).

*Remarque:* Les conditions du deuxième point sont plus faibles que celles du premier point, au sens où elles ne demandent pas que la donnée radicielle vérifie (fonc). On peut donc considérer (para2.1) comme une version affaiblie de (para2.2).

*Démonstration:*

1. Rappelons que (para dec) fonctoriel implique (para sph) (proposition 3.2.10). Soit  $g \in N.Q(a) \cap N.P(\vec{f})$ , on peut supposer  $g \in Q(a) \cap N.P(\vec{f})$ . Grâce à (fonc), soit  $\Delta$  tel que  $a$  est spécial dans  $A^\Delta$ , puis soit  $n \in N^\Delta$  tel que  $ng \in P^\Delta(\vec{f})$ . Comme  $Q$  vérifie fonctoriellement (para2.1) ( $\vec{f}$ ) puis (para sph), on a  $ng \in Q^\Delta(a) \cap P^\Delta(\vec{f}) \subset Q^\Delta(pr_{\vec{f}}(a)) = P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a))$ . D'où  $g \in N^\Delta.P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a)) \cap G$ . On conclut par le corollaire 3.4.8.
2. Soit  $q \in Q(a) \cap P(\vec{f})$ . D'après (para2.2) ( $\vec{f}$ ), on a alors  $q \in N.Q(\{a, pr_{\vec{f}}(a)\})$ . Soit  $g = nq$  l'écriture correspondante, on a  $a = g.a = n.a$ , d'où  $n \in Q(a) \cap N = N(a)$  grâce à (para in j). De même,  $\vec{f} = q.\vec{f} = n.\vec{f}$  d'où  $n \in N(\vec{f})$ . Mais comme  $N$  agit de manière affine sur  $A$ ,  $N(a) \cap N(\vec{f}) = N(a + \vec{f})$ . □

**Corollaire 3.5.8.** *Toute famille de parahoriques  $Q$  vérifiant fonctoriellement (para dec) vérifie fonctoriellement (para in j), (para2.1) (sph) et (para2.2) (sph).*

*C'est en particulier le cas pour la famille minimale de parahoriques dans un groupe de Kac-Moody déployé.*

*Démonstration:* C'est une conséquence du corollaire 3.2.12 et de la proposition ci-dessus. □

Passons à (para2.1<sup>+</sup>) et (para2.2<sup>+</sup>) :

#### Proposition 3.5.9.

1. Soit  $\vec{f}$  une facette sphérique telle que  $Q$  vérifie (fonc), (para inj), (para sph) et (para2.1<sup>+</sup>) ( $\vec{f}$ ) fonctoriellement. Alors  $Q$  vérifie (para2.2<sup>+</sup>) ( $\vec{f}$ ) (fonctoriellement).
2. Soit  $\vec{f}$  une facette telle que  $Q$  vérifie (para2.2<sup>+</sup>) ( $\vec{f}$ ). On suppose de plus que  $Q$  vérifie (para inj). Alors  $Q$  vérifie (para2.1<sup>+</sup>) ( $\vec{f}$ ).

*Démonstration:*

Soit  $a \in A$ , avec  $\vec{f}_a \subset \vec{f}$ , soit  $g \in \underline{N.Q(a)} \cap N.P(\vec{f})$ . On peut supposer  $g \in Q(a) \cap N.P(\vec{f})$ , et il existe  $\Delta, n \in N^\Delta$  tels que  $ng \in Q^\Delta(a) \cap P^\Delta(\vec{f}) = Q^\Delta(a + \vec{f})$ . Donc  $g \in N^\Delta.Q^\Delta(a + \vec{f}) \cap G$ . En particulier,  $g \in N^\Delta.Q^\Delta(pr_{\vec{f}}(a)) \cap G = N^\Delta.P^\Delta(pr_{\vec{f}}(a)) \cap G = N.P(pr_{\vec{f}}(a))$  par 3.4.8 (en un point sphérique  $x$ , on a toujours  $P(x) = (U(\vec{C}) \cap P(x)) \cdot (U(-\vec{C}) \cap P(x)) \cdot N(x)$  donc le corollaire est encore vrai). On peut donc supposer  $g \in P(pr_{\vec{f}}(a))$ . Alors il existe  $a_0 \in \vec{A}$  tel que  $pr_{\vec{f}}(a_0) = pr_{\vec{f}}(a)$  et  $g \in \overline{P(a_0 + \vec{f})}$  (proposition 3.2.2). Le cône  $C := a_0 + \vec{f} \cap a + \vec{f}$  est un scp de  $a + \vec{f}$ , et on a  $n \in Q^\Delta(C) \cap N^\Delta = N^\Delta(C)$  par (para inj). Comme  $n$  agit  $A_{\vec{f}_a}$  de manière affine, ceci entraîne que  $n$  fixe en fait  $\text{Aff}_{A_{\vec{f}_a}}(a + \vec{f})$ , donc  $n \in Q^\Delta(a + \vec{f})$ . On arrive ainsi à  $g \in Q^\Delta(a + \vec{f}) \cap G$ . On peut conclure par (fonc).

Le second point se prouve facilement, exactement comme son homologue dans la proposition précédente.  $\square$

### 3.6 Complétion d'une famille de parahoriques

**Définition 3.6.1.** Soit  $Q$  une famille de parahoriques vérifiant (para2.1) (sph) et (para sph). On définit la famille  $\bar{Q}$  par :

$$\bar{Q}(a) = \{g \in P(\vec{f}_a) \mid \forall \vec{f} \in (\vec{f}_a^*)_{\text{sph}}, g \cdot pr_{\vec{f}}(a) = pr_{g \cdot \vec{f}}(a)\}$$

Ainsi,  $\bar{Q}(a)$  est l'ensemble des éléments de  $G$  qui permutent les projetés de  $a$  dans les façades de  $\mathcal{I}(Q)_{\text{sph}}$ .

**Lemme 3.6.2.** Pour tout signe  $\epsilon$ , pour tout  $a \in A$  et  $g \in G$ ,  $g$  est dans  $\bar{Q}(a)$  si et seulement si pour toute facette  $\vec{h} \in (\vec{f}_a^*)_{\text{sph}} \cap \vec{I}^\epsilon$ ,  $g \cdot pr_{\vec{h}}(a) = pr_{g \cdot \vec{h}}(a)$ .

*Preuve du lemme:* Ce lemme est non trivial seulement si  $\vec{f}_a \subset \vec{I}^+ \cap \vec{I}^-$ , assertion que nous supposons donc. Quitte à remplacer  $\mathcal{I}(Q)$  par  $\overline{\mathcal{I}(Q)}_{\vec{f}_a}$  et  $\vec{I}$  par (l'essentialisé de)  $\vec{f}_a^*$ , on supposera même  $\vec{f}_a = \{0\}$ , autrement dit,  $a$  est dans la façade principale de  $\mathcal{I}$ . Supposons aussi par exemple  $\epsilon = +$ .

Soit  $g \in G$  tel que  $\forall \vec{h} \in \vec{I}_{\text{sph}}^+$ ,  $g \cdot pr_{\vec{h}}(a) = pr_{g \cdot \vec{h}}(a)$ . Il s'agit de montrer que cette égalité reste vraie pour  $\vec{h} \in \vec{I}_{\text{sph}}^-$ . Soit donc  $\vec{h}$  une telle facette. Soit  $A$  un appartement contenant  $a$  et  $\vec{h}$  (un tel appartement existe par le corollaire de la décomposition d'Iwasawa 3.4.6). Alors  $pr_{\vec{h}}(a) = \text{op}_A(pr_{\text{op}_A(\vec{h})}(a))$ , donc  $g \cdot pr_{\vec{h}}(a) = \text{op}_{gA}(g \cdot pr_{\text{op}_A(\vec{h})}(a))$ , et par hypothèse, puisque  $\text{op}_A(\vec{h}) \in \vec{I}_{\text{sph}}^+$ ,  $g \cdot pr_{\text{op}_A(\vec{h})}(a) = pr_{g \cdot \text{op}_A(\vec{h})}(a)$ . Au final,  $g \cdot pr_{\vec{h}}(a) = \text{op}_{gA}(pr_{\text{op}_{gA}(g\vec{h})}(a)) = pr_{g \cdot \vec{h}}(a)$ .  $\square$

**Proposition 3.6.3.** Si  $Q$  est une famille de parahoriques vérifiant fonctoriellement (para2.1) (sph) et (para sph), alors  $\bar{Q}$  est une famille de parahoriques vérifiant (para sph), (para inj), et (para2.1). Elle satisfait de plus (para2.1<sup>+</sup>).

Il est clair que chaque  $\bar{Q}(a)$  est un sous-groupe de  $P(\vec{f}_a)$ , et qu'il contient  $Q(a)$  (car  $Q$  vérifie (para2.1) (sph)). Donc  $\bar{Q}$  est une famille de parahoriques.

Soient  $a \in A_{\text{sph}}$  et  $q \in \bar{Q}(a)$ . Alors  $\vec{f}_a \in (\vec{f}_a^*)_{\text{sph}}$ , donc par définition de  $\bar{Q}(a)$ ,  $q \cdot pr_{\vec{f}_a}(a) = pr_{q \cdot \vec{f}_a}(a)$ , autrement dit  $q \cdot a = a$ , donc  $q \in Q(a)$  puis  $q \in P(a)$  par (para sph) pour  $Q$ . Donc  $\bar{Q}$  vérifie (para sph).

Soient  $a \in A$  et  $q \in \bar{Q}(a) \cap N$ . Soit  $\Delta$  tel que  $a$  est spécial dans  $A^\Delta$ , soit  $n \in N^\Delta(a)$  tel que  $nq \in T$ . Alors pour tout  $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}_{\text{sph}})$ ,  $q \cdot pr_{\vec{f}}(a) = pr_{\vec{f}}(a)$  et ceci entraîne  $q \in N(a)$ . On donc prouvé (para inj).

Enfin pour (para2.1), soit  $a \in A$ ,  $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A})$  et  $q \in \bar{Q}(a) \cap P(\vec{f})$ . Pour montrer que  $q \in \bar{Q}(pr_{\vec{f}}(a))$ , il suffit de montrer que pour toute facette  $\vec{h} \in (\vec{f}^*)_{\text{sph}}$ ,  $q \cdot pr_{\vec{h}}(pr_{\vec{f}}(a)) = pr_{q \cdot \vec{h}}(pr_{\vec{f}}(a))$ . Mais  $pr_{\vec{h}}(pr_{\vec{f}}(a)) = pr_{\vec{h}}(a)$ , et  $pr_{q \cdot \vec{h}}(pr_{\vec{f}}(a)) = pr_{q \cdot \vec{h}}(a)$ , le résultat en découle.

Étudions (para2.1<sup>+</sup>) : soient  $a \in A$ ,  $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A})$  et  $g \in \bar{Q}(a) \cap P(\vec{f})$ . Soit  $b \in \overline{a + \vec{f}}$ , montrons que  $g \in \bar{Q}(b)$ , c'est-à-dire que pour tout  $\vec{h} \in \mathcal{F}(\vec{f}^*)$ ,  $g \cdot pr_{\vec{h}}(b) = pr_{g \cdot \vec{h}}(b)$ . On peut noter que le résultat est déjà clair pour  $\vec{h} \subset \vec{f}^*$ , car dans ce cas,  $pr_{\vec{h}}(b) = pr_{\vec{h}}(a)$  et  $pr_{g \cdot \vec{h}}(b) = pr_{g \cdot \vec{h}}(a)$ .

Dans le cas général, comme  $g$  fixe  $pr_{\vec{f}}(a)$ , il existe  $m \in G(\phi^m(\vec{f}), a)$  tel que  $m \cdot g$  fixe  $A_{\vec{f}}$  et donc  $\overline{A_{\vec{f}}}$ . En particulier,  $m \cdot g \in P(\vec{f}^* \cap \vec{A})$ , de plus  $m \in G(\phi^m(\vec{f}), a) \subset Q(\langle a, \text{Vect}(\vec{f}) \rangle) \subset Q(\{a, b\})$  donc  $m \cdot g \in \bar{Q}(a)$ .

Par le lemme, on peut supposer  $\vec{h}$  du même signe que  $\vec{f}$ . Il existe alors une galerie  $\Gamma = \vec{C}_1, \dots, \vec{C}_k$  minimale de  $\vec{f}$  à  $\vec{h}$ . Notons  $\vec{m}_i$  les cloisons traversées par  $\Gamma$ , et  $\alpha_i$  les racines correspondantes, avec la convention  $\alpha_i(\vec{h}) > 0$ . On a  $m \cdot g \in P(\vec{C}_1) \cap \bar{Q}(a) \subset P(\vec{m}_1) \cap \bar{Q}(a)$ , donc par définition de  $\bar{Q}(a)$ ,  $m \cdot g$  fixe le point  $pr_{\vec{m}_1}(a)$  de  $\mathcal{I}(Q)$ . Puis par 3.2.2,  $m \cdot g$  fixe  $pr_{\vec{m}_1}(a) + \vec{C}_1$ , qui est un demi-appartement de  $\overline{\mathcal{I}_{\vec{m}_1}}$ , dirigé par  $\alpha_1$ . Il existe donc  $u_1 \in U_{\alpha_1}(a)$  tel que  $u_1 \cdot m \cdot g$  fixe  $A_{\vec{m}_1}$ . Comme tout élément de  $U_{\alpha_1}$ ,  $u_1$  fixe aussi  $\overline{A_{\vec{f}}}$ , et le fait que  $u_1 \in U_{\alpha_1}(a)$  implique  $u_1 \in Q(b)$ . On construit ainsi  $u_1, \dots, u_{k-1} \in U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_{k-1}}$  tels que  $u_{k-1} \dots u_1 \cdot m \cdot g \in \bar{Q}(a) \cap P(\vec{f}) \cap P(\vec{h})$  et  $u_{k-1} \dots u_1 \cdot m \in Q(\{a, b\})$ . Notons  $q = (u_{k-1} \dots u_1 \cdot m)^{-1}$ . La première relation entraîne  $q^{-1} \cdot g \in P(pr_{\vec{h}}(a))$ , donc  $g \cdot pr_{\vec{h}}(a) = q \cdot pr_{\vec{h}}(a) = pr_{q \cdot \vec{h}}(q \cdot a)$ . Comme  $q$  fixe  $a$  et  $g \cdot \vec{h} = q \cdot \vec{h}$ , on trouve  $g \cdot pr_{\vec{h}}(a) = pr_{g \cdot \vec{h}}(a)$ .  $\square$

Voici enfin la conclusion de ces études sur les familles de groupes parahoriques :

**Proposition 3.6.4.** *Soit  $\mathcal{D}$  une donnée radicielle valuée vérifiant (fonc), et telle que la famille  $\mathcal{P}$  minimale de parahorique associée vérifie (para dec). Alors la famille  $\bar{\mathcal{P}}$ , complétée de  $\mathcal{P}$  est une famille de parahoriques vérifiant (para inj), (para sph), (para2.1<sup>+</sup>), et (para2.2<sup>+</sup>) (sph).*

*C'est en particulier le cas pour la famille minimale de parahoriques d'un groupe de Kac-Moody déployé.*

*Démonstration:* Ce résultat est la concaténation de 3.5.8, 3.6.3, puis 3.5.9.  $\square$

### 3.7 Décomposition de Bruhat/Birkhoff

**Proposition 3.7.1.** *Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux facettes d'un appartement  $A(T)$ . On suppose qu'au moins une des deux est sphérique. Alors  $G = G(F_1)N(T)G(F_2)$ .*

*Remarque:* En fait, l'hypothèse minimale sur les facettes  $F_1$  et  $F_2$  pour que la décomposition soit vraie, et prouvée par la preuve à suivre est : si  $\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$  sont les directions des façades de  $F_1$  et  $F_2$ , alors pour tout  $w \in W(\vec{A}(T))$ ,  $\phi^m(\vec{f}_1 \cup w\vec{f}_2)$  est fini.

*Démonstration:*

Soient  $\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$  les directions des façades de  $F_1$  et  $F_2$ . On fixe  $g \in G$ . Pour cette preuve, l'appartement par défaut est  $A(T)$ , c'est-à-dire qu'on notera  $N$  pour  $N(T)$ ,  $M(f)$  pour  $M_A(f)$ ...

Par la décomposition d'Iwasawa de  $G$ ,  $g \in P(\vec{f}_1) \cdot N \cdot G(F_2) = U(\vec{f}_1) \cdot M(\vec{f}_1) \cdot N \cdot G(F_2)$ . Comme  $U(\vec{f}_1) \subset G(F_1)$ , on peut supposer qu'il existe  $n \in N$  tel que  $g \in M(\vec{f}_1) \cdot n$ .

On utilise alors la décomposition d'Iwasawa dans  $M(\vec{f}_1)$ , avec la facette affine  $F_1$  et la facette vectorielle  $pr_{\vec{f}_1}(n\vec{f}_2)$ . Le sous-groupe unipotent de  $M(\vec{f}_1)$  correspondant à cette facette vectorielle est le groupe engendré par les  $U_\alpha$  avec  $\alpha \in \phi^m(\vec{f}_1) \cap \phi(n\vec{f}_2) = \phi(\vec{\Omega})$ , en notant  $\vec{\Omega} = \text{conv}(\vec{f}_1 - \vec{f}_1 + n\vec{f}_2)$ . Donc  $M(\vec{f}_1) = U_{\min}(F_1) \cdot N(\vec{f}_1) \cdot U_{\phi(\vec{\Omega})}$ . Notons que  $\vec{\Omega}$  est équilibrée, car les deux facettes  $pr_{\vec{f}_1}(n\vec{f}_2)$  et  $pr_{-\vec{f}_1}(n\vec{f}_2)$  sont sphériques, incluses dans  $\vec{\Omega}$ , et de signes opposés. Donc  $U_{\phi(\vec{\Omega})} \subset M(\vec{\Omega}) \times U(\vec{\Omega}) \subset M(\vec{\Omega}) \times U(n\vec{f}_2)$ . Ainsi,

$$g \in G(F_1) \cdot N(\vec{f}_1) \cdot M(\vec{\Omega}) \cdot U(n\vec{f}_2).n = G(F_1) \cdot N(\vec{f}_1) \cdot M(\vec{\Omega}) \cdot n.U(\vec{f}_2)$$

On peut donc supposer qu'il existe  $n_1 \in N(\vec{f}_1)$  tel que :

$$g \in n_1.M(\vec{\Omega}).n$$

Les facettes  $nF_2$  et  $n_1^{-1}F_1$  se projettent sur  $A_{\vec{\Omega}}$ . Et par la décomposition de Bruhat dans le groupe réductif  $M(\vec{\Omega})$ , on a  $M(\vec{\Omega}) = G(\phi^m(\vec{\Omega}), pr_{\vec{\Omega}}(n_1^{-1}F_1)) \cdot N(\vec{\Omega}) \cdot G(\phi^m(\vec{\Omega}), pr_{\vec{\Omega}}(nF_2))$ . Enfin, sachant que pour toute partie  $F$  de  $A_\Omega$ ,  $G(\phi^m(\vec{\Omega}), F) \subset G(\langle F, \text{Vect}(\vec{\Omega}) \rangle_A)$ , on arrive à

$$M(\vec{\Omega}) \subset G(n_1^{-1}F_1) \cdot N(\vec{\Omega}) \cdot G(nF_2)$$

, puis :

$$g \in n_1G(n_1^{-1}F_1) \cdot N(\vec{\Omega}) \cdot G(nF_2)n = G(F_1) \cdot n_1N(\vec{\Omega})n \cdot G(F_2) \subset G(F_1) \cdot N \cdot G(F_2)$$

□

**Corollaire 3.7.2.** *Pour toute famille de parahoriques  $\mathcal{Q}$ , pour toutes facettes  $F_1$  et  $F_2$  d'un appartement  $A(T)$ , si l'une des deux est sphérique, alors :*

$$G = Q(F_1) \cdot N(T) \cdot Q(F_2)$$

**Corollaire 3.7.3.** *Pour toute famille de parahoriques  $\mathcal{Q}$ , pour toutes facettes  $F_1$  et  $F_2$  de  $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ , si l'une des deux est sphérique, alors il existe un appartement contenant  $F_1 \cap F_2$ .*

*Démonstration:* Soit  $A(T)$  un appartement contenant  $F_1$ , soit  $g \in G$  tel que  $F_2 \subset g.A(T)$ . Par la décomposition de Bruhat/Birkhoff,  $G = Q(F_1) \cdot N(T) \cdot Q(g^{-1}F_2)$ . Soit  $g = q_1nq_2$  l'écriture correspondante de  $g$ . Alors  $F_1 \cup F_2 \subset q_1.A(T)$ . □

### 3.8 Isomorphismes entre appartements

On prouve ici que la condition (para 4) est vérifiée pour les parties  $\Omega \subset A_{\text{sph}}$  (dès lors que sont vérifiées (para 1,5,2.2) et (para 2.1)( $\vec{f}$ ) pour toute facette  $\vec{f}$  sphérique).

**Proposition 3.8.1.** *Soit  $\Omega \subset A$ . Notons  $\Omega_{\text{sph}} = \Omega \cap A_{\text{sph}}$  et*

$$\vec{V} = \bigcap_{\vec{g} \in \mathcal{F}(Cl(\vec{\Omega}) \cap \vec{A}_{\text{sph}})} \text{Vect}(\vec{g}).$$

*Alors pour tout  $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega} N.Q(\omega)$ , il existe  $n \in N$  tel que  $n^{-1}g$  fixe  $\Omega_{\text{sph}}$ , et fixe tous les autres éléments de  $\Omega$  modulo une translation dans  $\vec{V}$ .*

*En particulier on a*

$$\bigcap_{\omega \in \Omega} N.Q(\omega) = N.Q(\Omega)$$

dès que  $\Omega \subset A_{sph}$ , ou bien lorsque  $Cl(\vec{\Omega})$  contient suffisamment de facettes sphériques pour que  $\vec{V} = \{0\}$ .

*Remarque:* La condition  $\vec{V} = \{0\}$  est vérifiée dès que  $Cl(\vec{\Omega})$  contient une facette dont les bord de codimension 1 sont sphériques. C'est par exemple le cas d'une chambre de  $\vec{A}$ .

*Démonstration:*

Pour commencer  $\bigcap_{\omega \in \Omega} N.Q(\omega) \subset \bigcap_{\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{\Omega})} NP(\vec{f}) = NP(\vec{\Omega}) = NP(Cl(\vec{\Omega}))$ . Soit  $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega} N.Q(\omega)$ , on peut donc supposer  $g \in P(Cl(\vec{\Omega}))$ . Ceci entraîne que  $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega} N_{\vec{f}_\omega} Q(\omega)$ , où  $\vec{f}_\omega$  est la direction de la façade contenant  $\omega$ .

Soit  $\vec{f}$  une facette maximale de  $Cl(\vec{\Omega})$ ,  $\vec{f}$  est donc sphérique. D'après (para2.1),  $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega} N_{\vec{f}} Q(pr_{\vec{f}}(\omega))$  et ceci vaut  $N_{\vec{f}} Q(Cl(\vec{A}))$ , car  $\vec{f}$  est sphérique. On peut supposer  $g \in Q(pr_{\vec{f}}(\Omega))$ , sans perdre notre hypothèse  $g \in P(Cl(\vec{\Omega}))$  car  $N_{\vec{f}} \subset P(Cl(\vec{\Omega}))$ .

Utilisant maintenant (para 2.2) amélioré, il existe  $\Omega_0 \subset \vec{A}$  tel que  $pr_{\vec{f}}(\Omega_0) = pr_{\vec{f}}(\Omega)$  et  $g \in \overline{Q(\Omega_0 + \vec{f})}$  (modulo un  $n \in N_{\vec{f}}$  qu'on peut supposer égal à l'élément neutre).

Soit  $\omega \in \Omega$ . Supposons dans un premier temps  $\omega$  dans une façade sphérique  $A_{\vec{g}}$ . Il existe  $a_0 \in \Omega_0$  tel que  $pr_{\vec{f}}(a_0) = pr_{\vec{f}}(\omega)$ . Alors  $g \in N(\vec{g}).Q(\omega) \cap Q(pr_{\vec{g}}(a_0))$  par (para 2.1)( $\vec{g}$ ). Soit  $\vec{f}' = pr_{\vec{g}}(\vec{f})$ , on a aussi  $g \in P(\vec{f}')$ , donc  $g$  fixe le cône  $pr_{\vec{g}}(a_0) + \vec{f}'$ . Au total,  $g \in N(\vec{g}).Q(\omega) \cap Q(a_0 + \vec{f}') = N(\vec{g}).Q(\{\omega\} \cup (a_0 + \vec{f}')) \cap Q(a_0 + \vec{f}') = N(a_0 + \vec{f}').Q(\{\omega\} \cup (a_0 + \vec{f}')) \subset Q(\omega)$ . La première égalité car  $\vec{g}$  est sphérique, la dernière car  $\omega \in a_0 + \text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{f}')$ .

Étudions enfin le cas d'un point  $\omega \in \Omega$  non sphérique. Pour toute facette  $\vec{g}$  de  $Cl(\vec{\Omega})$  sphérique,  $g \in N(\vec{g}).Q(pr_{\vec{g}}(\omega))$  par (para2.1), puis  $g \in Q(pr_{\vec{g}}(\omega))$  d'après le paragraphe précédent. Alors  $pr_{\vec{g}}(g.\omega) = g.pr_{\vec{g}}(\omega) = pr_{\vec{g}}(\omega)$ . Et par hypothèse  $g \in N.Q(\omega)$ , donc  $g.\omega \in A$ . Ainsi,

$$\overline{\omega g(\omega)} \in \bigcap_{\vec{g} \in Cl(\vec{\Omega}) \cap \vec{A}_{sph}} \text{Vect}(\vec{g})$$

□

**Corollaire 3.8.2.** *Entre deux appartements  $A$  et  $B$  existe  $g \in G$  induisant un isomorphisme fixant  $A_{sph} \cap B_{sph}$ . De plus, si  $A \cap B$  est tel que  $\bigcap_{\vec{f} \subset \vec{A}_{sph} \cap \vec{B}_{sph}} \text{Vect}(\vec{f}) = \{0\}$ , alors il existe  $g \in G$  induisant un isomorphisme fixant  $A \cap B$ . Autrement dit, si  $\Omega \subset A$  est tel que  $\bigcap \{ \text{Vect}_{\vec{A}}(\vec{f}) \mid \vec{f} \subset \vec{A}_{sph} \cap \vec{B}_{sph} \} = \{0\}$ , ou que  $\Omega \subset A_{sph}$ , alors  $Q(\Omega)$  est transitif sur les appartements contenant  $\Omega$ .*

### 3.9 Intersection d'appartements

On passe maintenant à l'étude de (para 5). Nous allons prouver que cette condition est partiellement vérifiée pour une partie  $\Omega$  composée de points sphériques d'un même signe.

**Proposition 3.9.1.** *Soit  $\Omega \subset A_{sph}$ . Alors :*

$$Q(\Omega) = N_{\Omega}.Q(Cl(\Omega) \cap A_{sph})$$

*De plus, tout  $g \in Q(\Omega)$  fixe modulo  $N$  un voisinage de  $Cl(\Omega) \cap A_{sph}$  dans  $\text{Aff}(Cl(\Omega))$ .*



*Remarque:* Le premier point est en fait la proposition 3.9 de [Rou06], adaptée au contexte présent.

*Démonstration:*

L'inclusion "  $\supset$  " est claire.

Soit  $g \in Q(\Omega)$ . En particulier,  $g \in P(\text{Cl}(\vec{\Omega}))$ . Comme  $g$  vérifie (para 2.2) et (para 2.1) pour les facettes sphériques, il existe un choix  $C \in \mathcal{C}$  tel que défini dans le lemme 3.1.10, tel que  $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega'(C)} N_{\vec{f}_\omega} \cdot Q(\omega)$ , où  $\vec{f}_\omega$  est la direction de la façade contenant  $\omega$ , et où  $\Omega'(C)$  est l'intersection de  $\Omega^\infty(C)$  avec l'union des facettes sphériques de direction incluse dans  $\text{Cl}(\vec{\Omega})$ . Lorsque  $\vec{f}$  est une facette sphérique de  $\text{Cl}(\vec{\Omega})$ , on obtient alors  $g \in N_{\vec{f}} \cdot Q(\text{Cl}(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}}) \cap A_{\vec{f}})$ . Or la partie  $\text{Cl}(\Omega^\infty(C) \cap A_{\vec{f}}) \cap A_{\vec{f}}$  contient  $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}}$ , d'après le lemme 3.1.10, d'où  $g \in N_{\vec{f}} \cdot Q(\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}})$ .

Nous voulons maintenant prouver le résultat similaire lorsque  $\vec{f}$  est une facette sphérique de  $\overrightarrow{\text{Cl}(\vec{\Omega})}$ . Supposons qu'il existe  $\vec{f}$  une telle facette non incluse dans  $\text{Cl}(\vec{\Omega})$ . Quitte à projeter  $\vec{f}$  sur une facette adéquate de  $\text{Cl}(\vec{\Omega})$  de codimension 1, on peut supposer qu'une face  $\vec{m}$  de  $\vec{f}$  de codimension 1 est incluse dans  $\text{Cl}(\vec{\Omega})$ . La facette  $\vec{m}$  est dans l'intérieur de l'enclos de  $\Omega \cup \vec{f}$  (pour la topologie induite), elle est donc sphérique. Le fait que  $\vec{f} \notin \text{Cl}(\vec{\Omega})$  signifie qu'il existe  $\alpha \in \phi(\vec{\Omega})$  telle que  $\alpha(\vec{f}) < 0$ . Tout demi-appartement dirigé par  $\alpha$  ne contient aucun point de  $A_{\vec{f}}$ , or  $\vec{f} \subset \overrightarrow{\text{Cl}(\vec{\Omega})}$ , ceci implique qu'aucun demi-appartement dirigé par  $\alpha$  ne contient  $\Omega$ . Il existe donc  $(\omega) \in \Omega^{\mathbb{N}}$  telle que  $\alpha(\omega_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} -\infty$  et  $\alpha(\omega_n) \in \mathbb{R}$  pour tout  $n$ . La facette  $\vec{m}$  est maximale dans  $\text{Cl}(\vec{\Omega}) \cap \ker(\alpha)$ , donc tous les  $\omega_n$  ont un projeté  $\omega'_n$  dans  $A_{\vec{m}}$ . Comme  $\vec{m}$  est sphérique,  $A_{\vec{m}}$  est compact, et la suite  $(\omega')$  a une valeur d'adhérence  $\omega_\infty$  dans  $A_{\vec{m}}$ . Comme  $\alpha(\omega_\infty) = -\infty$ ,  $\omega_\infty$  est dans une facette  $\vec{g} \subset \text{Cl}(\vec{\Omega})$ , sphérique. Or, par (para 2.1),  $g$  fixe tous les  $\omega'_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , puis comme  $\vec{g}$  est sphérique,  $g$  fixe  $\text{Cl}(\omega'_n | n \in \mathbb{N})$ . Donc  $g$  fixe un cône  $c \subset A_{\vec{m}}$  tel que  $\omega_\infty = [c]_{A_{\vec{m}}}$ .

$g \in Q(\omega_\infty) \subset P(\vec{g})$ , on peut donc rajouter  $\omega_\infty$  à  $\Omega$ , et  $\vec{g}$  à  $\vec{\Omega}$ . On arrive ainsi à prouver que  $g \in P(\overrightarrow{\text{Cl}(\vec{\Omega})})$ .

Alors par (para 2), il existe un choix  $C \in \mathcal{C}$  et  $\Omega^\infty(C)$ , comme définis cette fois à la proposition 3.1.8, tels que  $g \in \bigcap_{\omega \in \Omega^\infty(C)} N_{\vec{f}_\omega} \cdot Q(\omega)$ . Donc pour chaque facette sphérique de  $\overrightarrow{\text{Cl}(\vec{\Omega})}$ ,  $g \in N_{\vec{f}} \cdot Q(A_{\vec{f}} \cap \text{Cl}(A_{\vec{f}} \cap \Omega^\infty(C)))$ , or  $A_{\vec{f}} \cap \text{Cl}(A_{\vec{f}} \cap \Omega^\infty(C))$  contient  $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\vec{f}}$ , d'après la proposition 3.1.8. On conclut alors grâce à la proposition 3.8.1 que  $g \in N_{\vec{\Omega}} \cdot Q(\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\text{sph}})$ .

Ensuite, par (para 2.2) et la proposition 3.1.8, on obtient que  $g$  fixe modulo un  $n \in N_{\vec{\Omega}}$ , une partie  $V$  contenant  $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\text{sph}}$  ainsi qu'un voisinage de  $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\text{sph}}$  dans chaque  $\text{Aff}_A(\text{Cl}(\Omega)) \cap A_{\vec{f}}$  pour  $\vec{f} \subset \overrightarrow{\text{Cl}(\vec{\Omega})} \setminus \vec{A}_{\text{sph}}$ .  $\square$

### Corollaire 3.9.2.

- Si  $B$  est un appartement tel que  $A \cap B$  contient une partie  $\Omega \subset A_{\text{sph}}$ , alors  $A \cap B$  contient aussi une partie  $V$  contenant  $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\text{sph}}$  et un voisinage de  $\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\text{sph}}$  dans  $\text{Aff}_A(\text{Cl}(\Omega)) \cap A_{\vec{f}}$  pour toute facette  $\vec{f} \in \overrightarrow{\text{Cl}(\vec{\Omega})} \setminus \vec{A}_{\text{sph}}$ .
- Si  $A \cap B$  contient une partie équilibrée, alors  $A \cap B$  est une partie close de  $A$  (et de  $B$ ).
- Si  $\Omega$  est une partie équilibrée d'un appartement, alors son enclos est indépendant de l'appartement contenant  $\Omega$  considéré. On pourra le noter  $\text{Cl}(\Omega)$ .
- Si  $\Omega$  est une partie équilibrée d'un appartement, alors  $Q(\Omega) \subset \text{Stab}_G(\text{Cl}(\Omega))$ , et si  $\Omega$  est une partie d'un  $A_{\text{sph}}$  alors  $Q(\Omega) \subset \text{Stab}_G(\text{Cl}(\Omega) \cap A_{\text{sph}})$ .

## 3.10 Indépendance par rapport au tore maximal

Pour construire les mesures pour  $G$ , on est parti d'un tore maximal  $T_0$  et d'une famille de parahoriques sur  $A(T_0)$ . Le but de cette partie est de vérifier qu'on obtient bien les mêmes mesures quel que soit le tore maximal choisi au départ.

Plus précisément, si  $T' = gT_0g^{-1}$  est un autre tore maximal de  $G$ , alors l'application  $\alpha \mapsto (t \mapsto \alpha(g^{-1}tg))$  est un isomorphisme de  $T_0^*$  sur  $T'^*$  qui envoie  $\phi(T_0)$  sur  $\phi(T')$ , et l'application  $c \mapsto (k \mapsto gc(t)g^{-1})$  est un isomorphisme de  $T_{0*}$  sur  $T'_{*}$ , qui induit un isomorphisme d'appartements vectoriels entre  $\vec{A}(T_0)$  et  $\vec{A}(T')$ . Comme on a fixé des origines  $o \in A(T_0)$  et  $o' \in A(T')$ , cet isomorphisme définit ensuite un unique isomorphisme d'appartements entre  $A(T_0)$  et  $A(T')$ .

On note encore  $g$  ces applications. Rappelons que pour  $\chi \in T_0^*$  et  $\phi \in T_{0*}$ , on a  $(g.\chi)(\phi) = \chi(g^{-1}\phi)$ .

Pour  $\alpha \in \phi(T_0)$ , on a  $gU_\alpha g^{-1} = U_{g\alpha}$ . Notons  $u_{g\alpha} : \begin{matrix} \mathbb{K} & \rightarrow & U_{g\alpha} \\ k & \mapsto & gu_\alpha(k)g^{-1} \end{matrix}$ , c'est un choix possible d'isomorphisme entre  $(\mathbb{K}, +)$  et  $U_{g\alpha}$ . Il entraîne que  $gU_{\alpha,\lambda}g^{-1} = U_{g\alpha,\lambda}$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .

**Lemme 3.10.1.** *Avec ce choix pour  $u_{g\alpha}$ , pour tout  $a \in A(T')$ ,  $gN(T_0)_{g^{-1}a}g^{-1} = N(T')_a$ . De plus, pour tout  $\alpha \in \phi(T_0)$  et  $\lambda \in \Lambda$ ,  $g.\mathcal{D}(\alpha, \lambda) = \mathcal{D}(g\alpha, \lambda)$ .*

*Preuve du lemme:*

Pour le premier point, il suffit de montrer que  $(gng^{-1}).(gb) = g.(nb)$  pour tout  $n \in N(T_0)$  et  $b \in A(T_0)$ . A  $n$  fixé, les deux applications  $b \mapsto (gng^{-1}).(gb)$  et  $b \mapsto g.(nb)$  sont des isomorphismes d'appartements. Il est déjà connu que leurs parties vectorielles coïncident, il suffit donc de prouver le résultat pour  $b = o$  l'origine fixée dans  $A(T_0)$ .

Le groupe  $N(T_0)$  se décompose en un produit  $N(T_0) = T_0.N(T_0)_o$  où  $N(T_0)_o$  est le groupe engendré par les  $n_\alpha(\pm 1)$ ,  $\alpha \in \phi(T_0)$ , et ce groupe fixe  $o$ , par définition de l'action de  $N(T_0)$  sur  $A(T_0)$  (voir [Rou06], 2.8 et 2.9). Soit  $n = tn_o$  une écriture de  $n$  dans ce produit, alors  $g.(n.o) = g.(t.o)$  et  $(gng^{-1}).(go) = (gtg^{-1}gn_o g^{-1}).o'$ . Avec le choix pris pour l'isomorphisme  $u_{g\alpha}$ , on voit que  $gN(T_0)_o g^{-1} = N(T')_{o'}$ , et par conséquent  $gn_o g^{-1}.o' = o'$ . Il ne reste plus qu'à montrer que  $gtg^{-1}.o' = g.(t.o)$ .

Par définition,  $to = o + \vec{v}_t$  où  $\vec{v}_t \in T_{0*} \otimes \mathbb{R}$  est défini par  $\chi(\vec{v}_t) = -\omega(\chi(t))$ , pour tout  $\chi \in T_0^*$ . De même,  $gtg^{-1}.o' = o' + \vec{v}_{gtg^{-1}}$ , et  $\vec{v}_{gtg^{-1}}$  est défini par  $\chi(\vec{v}_t) = -\omega(\chi(gtg^{-1}))$ , pour tout  $\chi \in T'^*$ . Comme  $g.o = o'$ , nous voulons juste vérifier que  $g.\vec{v}_t = \vec{v}_{gtg^{-1}}$ . Or pour  $\chi \in T'^*$ ,  $\chi(g.\vec{v}_t) = (g^{-1}\chi)(\vec{v}_t) = -\omega((g^{-1}\chi)(t)) = -\omega(\chi(gtg^{-1}))$ . D'où  $g.\vec{v}_t = \vec{v}_{gtg^{-1}}$ .

Passons au deuxième point. Il suffit en fait de prouver que  $(g.\alpha)(g.a) = \alpha(a)$ , pour tout  $a \in A(T_0)$ . Ecrivons  $a$  sous la forme  $a = o + \vec{v}$ , avec  $\vec{v} \in T_{0*} \otimes \mathbb{R}$ . Alors  $(g.\alpha)(g(o + \vec{v})) = (g.\alpha)(o' + g.\vec{v}) = (g.\alpha)(g.\vec{v}) = \alpha(\vec{v}) = \alpha(o + \vec{v})$ .  $\square$

**Proposition 3.10.2.** *Si  $Q = (Q(a)_{a \in A(T_0)})$  est une famille de parahoriques sur  $A(T_0)$ , alors  $g.Q := (gQ(g^{-1}b)g^{-1})_{b \in A(T')}$  est une famille de parahoriques sur  $A(T')$ . De plus, pour  $n \in \llbracket 2, 7 \rrbracket$ , elle vérifie la condition (para  $n$ ) si et seulement si  $Q$  la vérifie.*

*Les immeubles  $I_Q$  et  $I_{g.Q}$  sont isomorphes, par l'application induite par*

$$\begin{aligned} G \times A(T_0) &\rightarrow G \times A(T') \\ (h, a) &\mapsto (hg^{-1}, ga) \end{aligned}$$

*Démonstration:*

Pour tout  $n \in \llbracket 0, 7 \rrbracket$ , il s'agit de voir que si  $Q$  vérifie (para  $n$ ), alors  $g.Q$  aussi.

Pour (para 0) : Soit  $a \in A(T')_{\vec{f}}$ , alors  $g^{-1}.a \in A(T_0)_{g^{-1}\vec{f}}$ . Par (para 0) pour  $Q$ ,  $U(g^{-1}\vec{f}) \subset Q(g^{-1}a) \subset P(\vec{f})$ , puis  $U(\vec{f}) \subset gQ(g^{-1}a)g^{-1} \subset P(\vec{f})$ .

Les autres vérifications sont tout aussi simples, en se servant du lemme pour (para 1).  $\square$

## 4 Masure complète pour un groupe de Kac-Moody presque déployé

### 4.1 Rappels et notations pour les groupes de Kac-Moody

Nous nous référons pour les groupes de Kac-Moody à [Ré02]. Soit  $G$  un groupe de Kac-Moody sur  $\mathbb{K}$ , presque déployé, déployé sur  $\mathbb{K}_s$ . Il s'agit donc d'un foncteur des  $\mathbb{K}$ -algèbres vers les groupes, qui coïncide avec le foncteur constructif de Tits sur les  $\mathbb{K}_s$ -algèbres. Le groupe de Galois  $\Gamma$  agit sur  $G(\mathbb{K}_s)$  et sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , en vérifiant  $Ad(\sigma g) = \sigma \circ Ad(g) \circ \sigma^{-1}$  pour  $\sigma \in \Gamma$  et  $g \in G$ . On a de plus  $G(\mathbb{K}) = G(\mathbb{K}_s)^\Gamma$ .

Pour chaque tore maximal  $T = T(\mathbb{K}_s)$ , on note  $T^*$  son groupe de caractères et  $T_*$  son groupe de cocaractères. Il existe une forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : T^* \times T_* \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $\langle \chi, h \rangle = n$  si  $\chi \circ h(k) = k^n$  pour tout  $k \in \mathbb{K}_s$ .

A chaque tore maximal  $T$  correspond un système de racines  $\phi^c(T) \subset T^*$ . Une racine est soit réelle, soit imaginaire, on note  $\phi(T)$  l'ensemble des racines réelles, et  $\phi^{im}(T)$  celui des racines imaginaires. L'ensemble  $\phi^c(T)$  est appelé le système complet de racines. Dans la suite, ce sera le plus souvent  $\phi(T)$  qui interviendra, ce qui explique qu'on ait choisi la notation la plus courte pour le désigner.

A chaque racine réelle  $\alpha \in \phi(T)$  correspond un sous-groupe  $U_\alpha$  de  $G$ , isomorphe à  $(\mathbb{K}_s, +)$ . Il existe une action de  $G$  sur l'algèbre de Kac-Moody  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\mathbb{K}_s)$ , appelée action adjointe et notée  $Ad$ , ainsi qu'un choix des isomorphismes  $(u_\alpha)_{\alpha \in \phi}$  entre les  $U_\alpha$  et  $(\mathbb{K}_s, +)$  tels que pour  $\alpha \in \phi$ ,  $Ad(u_\alpha(k)) = \exp(ad(ke_\alpha)) \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ , où  $(e_\alpha)_{\alpha \in \phi}$  est une partie d'une base de Chevalley de  $\mathfrak{g}$ . Le tore  $T$  agit diagonalement, par  $Ad(t).e_\alpha = \alpha(t).e_\alpha$ .

Le groupe  $U_\alpha$  est normalisé par  $T$ , plus précisément, la formule suivante est vérifiée pour  $t \in T$  et  $u \in U_\alpha$  :

$$tu_\alpha(k)t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t).k)$$

On note  $N(T)$  le normalisateur de  $T$ , il est engendré par  $T$  et les éléments  $n_\alpha(k) := u_{-\alpha}(k^{-1})u_\alpha(k)u_{-\alpha}(k^{-1})$  pour  $\alpha \in \phi$  et  $k \in \mathbb{K}_s$ . On note également  $W(T) = N(T)/T$  le groupe de Weyl vectoriel relatif à  $T$ . La paire  $(W(T), (n_\alpha(1).T)_{\alpha \in \pi})$  forme un système de Coxeter pour toute base  $\Pi$  de  $\phi$ .

Tout ceci entraîne que la famille  $(T, (U_\alpha)_{\alpha \in \phi(T)})$  est une donnée radicielle pour  $G$  au sens de [Rou06] (ou "donnée radicielle jumelée entière" au sens de [Ré02]).

### 4.2 Le cas déployé

Comme nous l'avons déjà dit, la famille minimale de parahorique  $\mathcal{P} = (P(a))_{a \in A}$  pour une donnée radicielles valuée venant d'un groupe de Kac-Moody déployé vérifie les conditions  $(para\ dec)$ ,  $(para\ inj)$ ,  $(para2.1)$  (sph), et  $(para2.2)$  (sph). Son complété  $\tilde{\mathcal{P}}$  vérifie en outre  $(para2.1^+)$  et  $(para2.2^+)$  (sph). Sauf mention du contraire, on notera  $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\tilde{\mathcal{P}})$ .

Remarquons que lorsque  $x \in A(T)_{sph}$ , le groupe  $P(x)$  coïncide avec le groupe  $\hat{P}(x)$  défini par Guy Rousseau dans [Rou06]. Par ailleurs, le groupe  $P(\Omega)$  est présentement par définition  $\bigcap_{\omega \in \Omega} P(\omega)$  alors que dans [GR08], c'est le groupe engendré par les  $U_\alpha(\Omega)$  et les  $n_\alpha(k)$  tels que  $\Omega \subset M(\alpha, \omega(k))$ .

### 4.3 L'immeuble vectoriel rationnel

Le groupe de Galois  $\Gamma$  agit par définition d'un groupe presque déployé sur  $G$  et sur son algèbre de lie  $\mathfrak{g}$ , en vérifiant  $\sigma(Ad(g).x) = Ad(\sigma g).\sigma x$  pour  $g \in G$  et  $x \in \mathfrak{g}$ . Ceci définit une action de  $\Gamma$  sur  $\vec{\mathcal{I}}$ , par automorphismes d'immeubles,

qui préserve les immeubles positif et négatif, mais qui ne préserve pas le type des facettes.

Les appartements de l'immeuble  $\vec{I}(\mathbb{K})$ , qu'on appelle des  $\mathbb{K}$ -appartements vectoriels, sont les parties maximales de  $\vec{I}(\mathbb{K})$  de la forme  $\vec{V} \cap \vec{A}(T)$  avec  $\vec{V}$  un sous-espace vectoriel de  $\vec{Y}(T)$  rencontrant l'intérieur de  $\vec{A}(T)$ . Ils sont en bijection avec l'ensemble des tores  $\mathbb{K}$ -déployés maximaux de  $G(\mathbb{K})$ . Comme  $\Gamma$  ne respecte pas les types, un  $\mathbb{K}$ -appartement n'est généralement pas une réunion de facettes de  $\vec{I}$ . Un appartement de  $\vec{I}(\mathbb{K})$  est toujours inclus dans un appartement de  $\vec{I}$  qui est  $\Gamma$ -stable, ceci correspond à l'inclusion d'un tore  $\mathbb{K}$ -déployé maximal dans un tore maximal défini sur  $\mathbb{K}$ . Réciproquement, si  $T_d \subset T$  est l'inclusion d'un tore déployé maximal dans un tore maximal défini sur  $\mathbb{K}$ , alors  $\vec{A}(T)$  est un appartement  $\Gamma$ -stable, dont le lieu des points fixes sous  $\Gamma$  est  $\vec{A}_{\mathbb{K}}(T_d)$ . Le fixateur du  $\mathbb{K}$ -appartement  $\vec{A}_{\mathbb{K}}(T_d)$  est le centralisateur de  $T_d$ , noté  $Z(T_d)$ . Le fixateur de  $\vec{A}_{\mathbb{K}}(T_d)$  dans  $G(\mathbb{K})$  est donc  $G(\mathbb{K}) \cap Z(T_d) = Z(T_d)^\Gamma$  qu'on notera  $Z_{\mathbb{K}}(T_d)$ .

Soit  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$  un  $\mathbb{K}$ -appartement vectoriel inclus dans un appartement vectoriel  $\vec{A}$ . Les  $\mathbb{K}$ -facettes de  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$  sont les  $f^\Gamma = \vec{f} \cap \vec{A}_{\mathbb{K}}$  pour  $\vec{f}$  une facette coupant  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ . Lorsque  $\vec{f}$  est sphérique, la  $\mathbb{K}$ -facette  $f^\Gamma$  est dite sphérique. Les  $\mathbb{K}$ -murs de  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$  sont les  $\vec{M} \cap \vec{A}_{\mathbb{K}}$  pour  $\vec{M}$  un mur de  $\vec{A}$  ne contenant pas  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ . Un  $\mathbb{K}$ -mur est réel s'il contient une  $\mathbb{K}$ -facette sphérique, autrement dit s'il coupe l'intérieur de  $\vec{A}(T)$ . Les  $\mathbb{K}$ -racines relativement à  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$  sont les restrictions à  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$  des racines relatives à  $\vec{A}$ . Les  $\mathbb{K}$ -racines géométriques sont les intersections non triviales d'un demi-appartement de  $A$  et de  $A_{\mathbb{K}}$ . Une  $\mathbb{K}$ -racine est dite réelle si elle induit un  $\mathbb{K}$ -mur réel. L'ensemble des  $\mathbb{K}$ -racines réelles par rapport à un tore  $T_d$  forme un système de racines, noté  $\phi_{\mathbb{K}}(T_d)$  qui n'est plus nécessairement réduit. Son groupe de Weyl est  $N_{\mathbb{K}}(T_d)/Z_{\mathbb{K}}(T_d)$ . L'ensemble des  $\mathbb{K}$ -racines géométriques, noté  $\phi_{\text{géo}\mathbb{K}}(T_d)$  est un système de racines au sens large (au sens des demi-complexes de Coxeter, où la notion de réduction n'a plus de sens). A chaque  $\mathbb{K}$ -racine réelle  $\alpha_{\mathbb{K}}$  est associé un sous-groupe radiciel  $U_{\alpha_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K})$  de  $G(\mathbb{K})$ , et la famille  $(Z(T_d)(\mathbb{K}), (U_{\alpha_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}))_{\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}(T_d)})$  est une donnée radicielle pour  $G(\mathbb{K})$ . L'immeuble obtenu à partir de cette donnée radicielle n'est pas toujours exactement  $\vec{I}^\Gamma$  : il peut y avoir dans  $\vec{I}^\Gamma$  des facettes non sphériques en plus (voir [Ré02] 12.4.4 et 13.4.2).

#### 4.4 Topologie de $\Gamma$

On suppose désormais  $\mathbb{K}$  muni d'une valuation non triviale  $\omega : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ . Soit  $\mathbb{K}_s \subset \bar{\mathbb{K}}$  la clôture séparable de  $\mathbb{K}$ , et  $\Gamma = \text{gal}(\mathbb{K}_s, \mathbb{K})$ . On suppose  $\mathbb{K}$  complet, ce qui entraîne en particulier que  $\omega$  se prolonge de manière unique à  $\mathbb{K}_s$ , la valuation obtenue est alors nécessairement  $\Gamma$ -stable. On note  $\Lambda = \omega(\mathbb{K}_s)$  et  $\Lambda_{\mathbb{K}} = \omega(\mathbb{K})$ .

On a  $\Gamma = \varprojlim \{ \text{gal}(\mathbb{E}|\mathbb{K}) \mid \mathbb{E} \text{ extension galoisienne finie de } \mathbb{K} \}$ , et la topologie de  $\Gamma$  est induite par la topologie produit sur  $\prod \{ \text{gal}(\mathbb{E}|\mathbb{K}) \mid \mathbb{E} \text{ extension galoisienne finie de } \mathbb{K} \}$ . Une base d'ouverts est donc l'ensemble des  $\{ \sigma \in \Gamma \mid \sigma|_{\mathbb{E}} = \sigma_0 \}$  pour  $\mathbb{E}$  une extension galoisienne finie de  $\mathbb{K}$  et  $\sigma_0 \in \text{gal}(\mathbb{E}|\mathbb{K})$ . Les sous-groupes ouverts de  $\Gamma$  sont donc d'indice fini, et lorsque  $\Gamma$  agit continuellement sur un ensemble discret, les orbites sont finies.

#### 4.5 L'appartement rationnel

On veut maintenant définir une mesure pour un groupe de Kac-Moody presque déployé  $G(\mathbb{K})$ . Pour utiliser la partie 3, il nous suffit de montrer que  $G(\mathbb{K})$  admet une donnée radicielle valuée, puis de trouver une famille de parahoriques adéquate. En fait, nous allons définir directement une (supposée) mesure  $\mathcal{I}(\mathcal{Q})_{\mathbb{K}}$  à l'intérieur de  $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ , la mesure du groupe de Kac-Moody déployé  $G(\mathbb{K}_s)$  pour une famille de parahoriques  $\mathcal{Q}$ . On sait déjà que  $G(\mathbb{K})$  dispose d'une donnée radicielle, sa valuation sera construite géométriquement, exactement comme dans le cas classique. La famille de parahoriques sur un appartement  $A_{\mathbb{K}}(T_d)$  sera simplement la famille  $\mathcal{Q}_{\mathbb{K}} = (\mathcal{Q}(a)^\Gamma)_{a \in A_{\mathbb{K}}(T_d)}$ , où  $(\mathcal{Q}(a)_{a \in \mathcal{I}(\mathbb{K}_s)})$  est la famille de parahoriques de  $\mathcal{I}(\mathbb{K}_s)$ . On vérifiera alors que la définition abstraite de  $\mathcal{I}(\mathcal{Q}_{\mathbb{K}})$  coïncide avec celle de  $\mathcal{I}(\mathcal{Q})_{\mathbb{K}}$ . Tous les résultats de la partie 3 pourront alors s'appliquer.

#### 4.5.1 Action de $\Gamma$ sur $A$

On choisit  $T_d \leq T_0$  un tore  $\mathbb{K}$ -dépouillé maximal dans un tore  $\mathbb{K}$ -défini. On note  $\vec{Y}_0 = \vec{Y}(T_0)$  et  $Y_0 = Y(T_0)$ . Le fait que  $T_0$  est défini sur  $\mathbb{K}$  implique que  $\vec{Y}_0$  est  $\Gamma$ -stable, et que  $\Gamma$  permute les racines et les sous-groupes radiciels relatifs à  $T_0$ , de manière compatible à son action sur l'algèbre de Lie. On a précisément, pour  $\sigma \in \Gamma$  et  $\alpha \in \phi(T_0)$  :

$$\sigma u_\alpha(k) = u_{\sigma\alpha}(\sigma(k).k_\alpha^\sigma)$$

où  $k_\alpha^\sigma$  est défini par  $\sigma.e_\alpha = k_\alpha^\sigma.e_{\sigma\alpha}$ .

D'où

$$\sigma U(\alpha, \lambda) = U(\sigma(\alpha), \lambda + \omega_\alpha^\sigma)$$

où  $\omega_\alpha^\sigma \in \Lambda$  vaut  $\omega(k_\alpha^\sigma)$ .

Par conséquent, on veut définir une action de  $\Gamma$  sur  $A_0$  telle que  $\sigma$  envoie  $\mathcal{D}(\alpha, \lambda)$  sur  $\mathcal{D}(\sigma(\alpha), \lambda + \omega_\alpha^\sigma)$ . Cette action doit être compatible avec l'action vectorielle de  $\Gamma$  sur  $\vec{Y}_0$ , il ne reste donc qu'à déterminer l'image du point  $o$ . Voici en quelques mots la justification de la définition qui va suivre :

Nous voulons  $\sigma M(\alpha, \lambda) = M(\sigma\alpha, \lambda + \omega_\alpha^\sigma)$ , c'est-à-dire

$$\{\sigma x \in Y_0 \mid \alpha(x) + \lambda = 0\} = \{x \in Y_0 \mid \sigma\alpha(x) + \lambda + \omega_\alpha^\sigma = 0\}$$

Il faut donc que  $\alpha(\sigma^{-1}(x)) = (\sigma\alpha)(x) + \omega_\alpha^\sigma$ , et ce pour tout  $\alpha \in \phi$ . Soit  $\vec{u} \in \vec{Y}_0$  tel que  $x = o + \vec{u}$ , alors  $(\sigma\alpha)(x) = (\sigma\alpha)(\vec{u}) = \alpha(\sigma^{-1}(\vec{u}))$ . D'autre part, si nous définissons une action affine de  $\sigma$  sur  $Y$ , dont la partie vectorielle coïncide avec l'action déjà connue de  $\sigma$  sur  $\vec{Y}_0$ , nous aurons  $\sigma^{-1}(x) = o + \overrightarrow{o\sigma^{-1}(o)} + \sigma^{-1}(\vec{u})$ , puis  $\alpha(\sigma^{-1}(x)) = \alpha(\overrightarrow{o\sigma^{-1}(o)}) + \alpha(\sigma^{-1}(\vec{u}))$ . Finalement, il nous faut faire en sorte que  $\alpha(\overrightarrow{o\sigma^{-1}(o)}) = \omega_\alpha^\sigma$ .

**Lemme 4.5.1.** Soit  $\sigma \in \Gamma$ , on note  $\omega_\alpha = \omega_\alpha^\sigma$  pour  $\alpha \in \phi(T_0)$ . Soient  $\alpha, \beta \in \phi$ ,  $s \in S$  tels que  $\alpha = s.\beta = \beta - \langle \beta, h_s \rangle \alpha$ . Alors  $\omega_\alpha = \omega_{\beta - \langle \beta, h_s \rangle \alpha}$ .

*Preuve du lemme:* On note pour  $\gamma \in \phi(T_0)$ ,  $k_\gamma = k_\gamma^\sigma$ , donc  $\omega_\gamma = \omega(k_\gamma)$ . On note également  $k_s = k_s^\sigma$ . Puisque  $\alpha = s.\beta$ , on a  $e_\alpha = \pm s^* e_\beta = \pm Ad(n_{\alpha_s}(1)).e_\beta$ . (La notation  $s^*$  désigne l'automorphisme de  $\mathfrak{g}$  qui relève l'élément du groupe de Weyl  $s \in W(\phi)$ , c'est-à-dire  $s^* = \exp(ad_{f_s}) \exp(ad_{e_s}) \exp(ad_{f_s})$ ). Appliquant  $\sigma$  à cette égalité, on trouve :

$$\begin{aligned} k_\alpha e_{\sigma\alpha} &= \pm Ad(\sigma(n_{\alpha_s}(1))).\sigma(e_\beta) \\ &= \pm k_\beta Ad(n_{\sigma\alpha_s}(k_s))e_{\sigma\beta} \\ &= \pm k_\beta Ad(n_{\sigma\alpha_s}(1).k_s^{-h_{\sigma s}})e_{\sigma\beta} \\ &= \pm k_\beta k_s^{-\langle b, h_s \rangle} Ad(n_{\sigma\alpha_s}(1)).e_{\sigma\beta} \\ &= \pm \pm k_\beta k_s^{-\langle b, h_s \rangle} e_{\sigma(s).\sigma(\beta)} \\ &= \pm \pm k_\beta k_s^{-\langle b, h_s \rangle} e_{\sigma\alpha} \end{aligned}$$

D'où  $\omega_\alpha = \omega_{\beta - \langle b, h_s \rangle \alpha}$ . □

On suppose que la famille  $(\alpha_s)_{s \in S} \subset T_0^* \subset \vec{Y}_0^*$  des racines simples est libre.

Alors pour tout  $\sigma \in \Gamma$ , il existe  $\vec{v}_\sigma \in \vec{Y}_0$  tel que  $\alpha_s(\vec{v}_\sigma) = \omega_{\alpha_s}^{\sigma^{-1}}$ . Alors d'après le lemme, on a aussi  $\alpha(\vec{v}_\sigma) = \omega_\alpha^{\sigma^{-1}}$  pour toute racine réelle  $\alpha$ .

Si la famille  $(\alpha_s)_{s \in S}$  n'est pas génératrice,  $\vec{v}_\sigma$  n'est pas unique. On choisit dans ce cas un supplémentaire  $\vec{Y}_1$  au sous-espace  $\bigcap_{s \in S} \ker(\alpha_s) = \bigcap_{\alpha \in \phi} \ker(\alpha)$ , et on prend  $\vec{v}_\sigma$  dans  $\vec{Y}_1$  pour tout  $\sigma \in \Gamma$ . Le choix est alors unique. Comme  $\bigcap_{\alpha \in \phi} \ker(\alpha)$  est  $\Gamma$ -stable, on peut choisir  $\vec{Y}_1$   $\Gamma$ -stable.

Comme dans la définition de l'appartenance  $A(T_0)$  on quotiente par  $\bigcap_{\alpha \in \phi} \ker(\alpha)$ , le choix de  $\vec{Y}_1$  n'importe pas.

**Définition 4.5.2.** Pour  $\sigma \in \Gamma$  et  $\vec{u} \in \vec{Y}_0$ , on pose

$$\sigma(o + \vec{u}) = o + \vec{v}_\sigma + \sigma(\vec{u})$$

**Proposition 4.5.3.** La formule ci-avant définit une action de groupe de  $\Gamma$  sur  $Y_0$ , par isomorphismes d'appartements, compatible avec celle de  $N(T_0) = \text{Stab}_G(Y_0)$  au sens où  $(\sigma n).x = \sigma(n(\sigma^{-1}.x))$ , et compatible avec l'action de  $\Gamma$  sur les sous-groupes radiciels au sens où  $\sigma.\mathcal{D}(\alpha, \lambda) = \mathcal{D}(\sigma\alpha, \mu)$  si  $\sigma.U_{\alpha,\lambda} = U_{\sigma\alpha,\mu}$ . L'ensemble de ses points fixes est un espace affine dirigé par  $\vec{Y}_0^\Gamma$ .

*Démonstration.*

Pour vérifier qu'il s'agit d'une action de groupe, on vérifie la condition de cocycle attendue sur les  $\omega_\alpha^\sigma$ . Soient  $\alpha \in \phi(T_0)$ ,  $\sigma, \gamma \in \Gamma$ , on calcule dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  :

$$\gamma\sigma.e_\alpha = \gamma(k_\alpha^\sigma e_{\sigma\alpha}) = \gamma(k_\alpha^\sigma)k_{\sigma\alpha}^\gamma e_{\gamma\sigma\alpha}$$

et d'autre part :

$$\gamma\sigma.e_\alpha = k_\alpha^{\gamma\sigma} e_{\gamma\sigma\alpha}$$

D'où la relation  $\omega_\alpha^{\gamma\sigma} = \omega(\gamma(k_\alpha^\sigma)) + \omega_{\sigma\alpha}^\gamma = \omega_\alpha^\sigma + \omega_{\sigma\alpha}^\gamma$ , la deuxième égalité car  $\Gamma$  préserve la valuation  $\omega$ .

Par construction,  $\Gamma$  agit par automorphismes affines et préserve l'ensemble des murs, il agit donc bien par isomorphismes d'appartements.

Maintenant, si  $\gamma, \sigma \in \Gamma$ , on a pour  $\vec{u} \in \vec{Y}_0$ ,  $\gamma(\sigma(o + \vec{u})) = o + \vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma) + \gamma\sigma(\vec{u})$ . Par conséquent, il faut vérifier que  $\vec{v}_{\gamma\sigma} = \vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma)$ .

Soit  $\alpha \in \Delta^{re}$ , alors  $\alpha(\vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma)) = \omega_\alpha^{\gamma^{-1}} + (\gamma^{-1}\alpha)(\vec{v}_\sigma) = \omega_\alpha^{\gamma^{-1}} + \omega_{\gamma^{-1}\alpha}^{\sigma^{-1}}$ . Par le calcul précédent, ceci vaut  $\omega_\alpha^{\sigma^{-1}\gamma^{-1}} = \omega_\alpha^{(\gamma\sigma)^{-1}} = \alpha(\vec{v}_{\gamma\sigma})$ . Comme  $\vec{v}_{\gamma\sigma}$  est l'unique vecteur de  $\vec{Y}_1$  vérifiant cette relation pour tout  $\alpha \in \phi^{re}(T_0)$ , et comme  $\vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma) \in \vec{Y}_1$  car  $\vec{Y}_1$  est  $\Gamma$ -stable, on obtient bien  $\vec{v}_{\gamma\sigma} = \vec{v}_\gamma + \gamma(\vec{v}_\sigma)$ , et l'action de  $\Gamma$  sur  $Y_0$  est bien une action de groupe.

Montrons la compatibilité avec l'action de  $N(T_0)$ . Pour commencer, un élément de la forme  $n_\alpha(r)$  induit sur  $Y_0$  la réflexion  $r$  selon le mur  $M(\alpha, \omega(r))$ . L'élément  $\sigma(n_\alpha(r)) = n_{\sigma\alpha}(\sigma(r)k_\alpha^\sigma)$  induit alors la réflexion selon le mur  $M(\sigma\alpha, \omega(r) + \omega_\alpha^\sigma) = \sigma.M(\alpha, \omega(r))$ . C'est la bien la conjugaison par l'action de  $\sigma$  de la réflexion  $r$ . Comme  $N(T_0)$  est engendré par les  $n_\alpha(r)$  et  $T_0$ , il reste à vérifier que  $(\sigma t).x = \sigma(t(\sigma^{-1}.x))$  pour  $t \in T_0$ . Soit  $t \in T_0$ ,  $t$  agit sur  $\Gamma$  par translation selon le vecteur  $\vec{v}_t$  défini par

$$\xi(\vec{v}_t) = -\omega(\xi(t)), \quad \forall \xi \in T_0^* \subset \vec{Y}_0^*$$

Or pour  $\xi \in T_0^*$ ,  $\xi \circ \sigma$  est encore dans  $T_0^*$  d'où

$$\xi(\sigma\vec{v}_t) = -\omega(\xi(\sigma t)), \quad \forall \xi \in T_0^* \subset \vec{Y}_0^*$$

Ce qui entraîne  $\vec{v}_{\sigma t} = \sigma(\vec{v}_t)$  d'où la relation de compatibilité entre les actions de  $t$  et de  $\sigma$ .

Enfin, l'action de  $\Gamma$  est continue sur  $\mathfrak{g}$ , ceci implique que l'orbite sous  $\Gamma$  de chaque  $e_\alpha$  est finie, donc l'ensemble des  $\omega_\alpha^\sigma$ , pour  $\sigma$  dans  $\Gamma$  et  $\alpha$  une racine simple est fini. Donc l'ensemble des  $\vec{v}_\sigma$ ,  $\sigma \in \Gamma$  est fini, ainsi que l'orbite  $\Gamma.o$ . Ceci entraîne que l'action de  $\Gamma$  sur  $Y_0$  fixe un point, disons  $o'$ . Dès lors,  $Y_0^\Gamma = o' + \vec{Y}_0^\Gamma$ .  $\square$

L'action de  $\Gamma$  sur  $Y_0$  ainsi définie préserve la décomposition en facettes de  $\vec{Y}$ , par conséquent elle s'étend à une action de  $\Gamma$  sur  $A_0$  par isomorphismes d'appartements.

**Définition 4.5.4.** On note  $\vec{Y}(T_d)(\mathbb{K}) = \vec{Y}_0^\Gamma$  et  $Y_0(\mathbb{K}) = Y_0^\Gamma$ .

**Proposition 4.5.5.** L'espace  $\vec{Y}(T_d)(\mathbb{K})$  ne dépend effectivement que de  $T_d$  et pas de  $T_0$ . Il s'agit de  $(T_d)_* \otimes \mathbb{R}$ .

#### 4.5.2 Action de $\Gamma$ sur $\mathcal{I}$

Par définition,  $\mathcal{I} = G \times A_0 / \sim$ , où  $\sim$  est la relation d'équivalence définie par  $(g, x) \sim (h, y) \Leftrightarrow \exists n \in N(T)$  tq  $y = nx$  et  $g^{-1}hn \in P(x)$ .

Le groupe  $N(T)$  est défini sur  $\mathbb{K}$ , et d'après la proposition 4.5.3, les groupes  $P(x)$ , pour  $x \in A_0$  vérifient  $\sigma P(x) = P(\sigma x)$ . Par conséquent, l'action de  $\Gamma$  sur  $G \times A_0$  par  $\sigma.(g, x) = (\sigma g, \sigma x)$  passe au quotient et définit une action sur  $\mathcal{I}$ , cette action stabilise  $A_0$  et prolonge l'action définie précédemment.

**Lemme 4.5.6.** *Soit  $\sigma \in \Gamma$  et  $Z$  un appartement. Alors  $\sigma Z$  est un appartement,  $(\sigma \vec{Z}) = \sigma(\vec{Z})$  et  $\sigma$  induit un isomorphisme d'appartements entre  $Z$  et  $\sigma Z$ .*

*Preuve du lemme:*

Soit  $g \in G$  tel que  $Z = g.A_0$ . Alors  $\sigma Z = \sigma(g).A_0$ , c'est donc un appartement, l'appartement vectoriel lui correspondant est  $\sigma(g).\vec{A}_0 = \sigma(g).\vec{A}_0 = \sigma(\vec{Z})$ . De plus, en notant  $\sigma_Z$  la restriction de l'action de  $\sigma$  à  $Z$ , et  $\sigma_{A_0}$  sa restriction à  $A_0$ , on a  $\sigma_Z = \sigma(g) \circ \sigma_{A_0} \circ g^{-1}$ . Comme  $g^{-1}$ ,  $\sigma(g)$  et  $\sigma_{A_0}$  induisent des isomorphismes entre les appartements concernés,  $\sigma_Z$  est bien un isomorphisme d'appartements.  $\square$

En particulier, si  $y = x + \vec{v}$  dans un certain appartement  $Z$ , alors  $\sigma(y) = \sigma(x) + \sigma(\vec{v})$  dans  $\sigma Z$ . Ceci entraîne également que  $\sigma(A(T)) = A(\sigma(T))$ , et que tout  $A(T)$  avec  $T$  un tore maximal  $\mathbb{K}$  défini est  $\Gamma$ -stable.

#### 4.5.3 Action de $N(T_d)(\mathbb{K})$ sur $Y(\mathbb{K})$

Nous voulons définir une action de  $N(T_d)(\mathbb{K})$ , le normalisateur du tore déployé maximal  $T_d$ , sur  $Y_0(\mathbb{K})$ . On sait que  $N(T_d)$  est le stabilisateur de  $\vec{Y}(\mathbb{K})$ , par conséquent on dispose déjà de la partie vectorielle de l'action. En fait, nous allons changer d'appartement, pour obtenir un autre espace affine  $Y(\mathbb{K})$ , toujours dirigé par  $\vec{Y}(\mathbb{K})$  qui soit stable par  $N(T_d)(\mathbb{K})$ .

*Remarque:* Comme le groupe  $N(T)$  stabilise  $Y_0$ , son groupe de point rationnels  $N(T)(\mathbb{K})$  stabilise  $Y_0(\mathbb{K})$ , par compatibilité de l'action de  $\Gamma$  sur  $G$  et sur  $Y_0$ . On retrouve que  $N(T)(\mathbb{K}) \subset N(T_d)(\mathbb{K})$ , et ce sous-groupe agit déjà sur  $Y_0(\mathbb{K})$ .

Soit  $\mathcal{J} := \mathcal{I}_{\vec{Y}(\mathbb{K})}$  la façade de  $\mathcal{I}$  de type  $\vec{Y}(\mathbb{K})$ . C'est un immeuble affine, car  $\vec{Y}(\mathbb{K})$  contient des facettes sphériques. En fait, c'est l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe  $M(\vec{Y}(\mathbb{K})) = \text{Fix}_G(\vec{Y}(\mathbb{K})) = Z(T_d)$ . Les groupes  $N(T_d)$  et  $\Gamma$  agissent sur  $\mathcal{J}$ , et  $N(T_d)(\mathbb{K})$  préserve l'ensemble  $\mathcal{J}^\Gamma$ , qui contient le point  $Y_0(\mathbb{K})$ .

**Lemme 4.5.7.** *L'ensemble  $\mathcal{J}^\Gamma$  est borné.*

*Preuve du lemme:* L'immeuble  $\mathcal{J}$  est l'immeuble de Bruhat-Tits de  $Z(T_d)$ , c'est donc aussi l'immeuble du semi-simplifié de  $Z(T_d)$ , c'est-à-dire de  $Z(T_d)/Z(Z(T_d))$ . Comme  $T_d \subset Z(Z(T_d))$ , et  $T_d$  est un tore  $\mathbb{K}$ -déployé maximal, ce semi-simplifié n'a pas de tore  $\mathbb{K}$ -déployé, il est anisotrope.

**Proposition 4.5.8.** *Il existe un sous-espace affine  $Y(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{I}$ , stable par  $N(T_d)(\mathbb{K})$ , fixe par  $\Gamma$ , dirigé par  $\vec{Y}(\mathbb{K})$ .*

*Démonstration:*

Le produit  $N(T_d)(\mathbb{K}) \times \Gamma$  agit sur  $\mathcal{J}$  en stabilisant  $\mathcal{J}^\Gamma$ . Donc par le lemme, il admet au moins une orbite bornée, et donc un point fixe. Ce point fixe a un unique représentant qui est un espace affine  $Y(\mathbb{K})$  de  $\mathcal{I}$ , dirigé par  $\vec{Y}(\mathbb{K})$ , et stable par  $\Gamma$ . Alors  $\Gamma$  agit sur  $Y(\mathbb{K})$  par automorphismes affines, avec des orbites finies, donc  $Y(\mathbb{K})$  admet lui même un point  $\Gamma$ -fixe  $p$ , et comme  $\vec{Y}(\mathbb{K})$  est  $\Gamma$ -fixe, on voit finalement que  $Y(\mathbb{K})$  est  $\Gamma$ -fixe.  $\square$

#### 4.5.4 Façades

Nous voulons à présent rajouter ses façades à  $Y(\mathbb{K})$  pour obtenir un appartement isomorphe à l'appartement abstrait obtenu par la partie 3.1 à partir de la donnée radicielle  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$ .

Soit  $\vec{f}$  une facette de  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ , on définit  $Y_{\mathbb{K},\vec{f}}$  comme l'ensemble des cônes de  $Y_{\mathbb{K}}$  dirigés par  $\vec{f}$  quotienté par la relation  $\sim$ , définie comme dans 3.1.1 :  $f \sim g \Leftrightarrow f \parallel g$  et  $f \cap g \neq \emptyset$ .

On pose ensuite

$$A(\mathbb{K}) = A(T)(\mathbb{K}) = \bigsqcup_{\vec{f} \text{ } \mathbb{K}\text{-facette de } \vec{A}_{\mathbb{K}}} Y(\mathbb{K})_{\vec{f}}$$

**Proposition 4.5.9.** Soit  $\vec{f} \subset \vec{Y}(\mathbb{K})$  une facette de  $\vec{I}(\mathbb{K})$ . Soit  $T$  un tore maximal contenant  $T_d$ , soit  $\vec{f}_1$  la facette de  $\vec{A}(T)$  contenant  $\vec{f}$ , alors l'application  $\iota_{\vec{f},T} : \begin{matrix} Y(\mathbb{K})_{\vec{f}} & \rightarrow & Y(T)(\mathbb{K})_{\vec{f}_1} \\ [x + \vec{f}] & \mapsto & [x + \vec{f}_1] \end{matrix}$  est une application affine bien définie et injective. Si  $T$  est défini sur  $\mathbb{K}$ , elle est de plus surjective.

*Démonstration:*

L'application  $\iota_{\vec{f},T}$  est bien définie car  $\vec{f} \subset \vec{f}_1$ .

Vérifions l'injectivité : soient  $x, y \in A_{\mathbb{K}}$  tels que  $x + \vec{f}_1 \sim y + \vec{f}_1$ . Alors  $\vec{x}\vec{y} \in \text{Vect}(\vec{f}_1) \cap \vec{A}_{\mathbb{K}} = \vec{f}$  donc  $x + \vec{f} \sim y + \vec{f}$ .

Enfin, si  $[x + \vec{f}_1]$  est un point  $\Gamma$ -fixe de  $Y_{\vec{f}_1}$ , et si nous supposons  $Y(T)$   $\Gamma$ -stable, alors pour tout  $\sigma \in \Gamma$ ,  $\sigma(x + \vec{f}_1) = \sigma(x) + \vec{f}_1 \sim x + \vec{f}_1$ . Donc le sous-espace affine  $x + \text{Vect}(\vec{f}_1) \subset Y(T)$  est  $\Gamma$ -stable, il admet un point  $\Gamma$ -fixe  $x'$ . Alors  $[x' + \vec{f}] \in Y_{\mathbb{K},\vec{f}}$  et son image par  $\iota_{\vec{f},T}$  est bien  $[x + \vec{f}_1]$ .  $\square$

En conséquence de ceci, si  $\vec{f}$  est une facette sphérique, la façade  $Y(\mathbb{K})_{\vec{f}}$  est un appartement pour le groupe réductif  $M(\vec{f})(\mathbb{K})$ .

#### 4.5.5 Murs et demi-appartements

**Lemme 4.5.10.** Entre deux appartements contenant  $A_{\mathbb{K}}$  existe un isomorphisme fixant  $A_{\mathbb{K}}$ .

*Preuve du lemme:* L'appartement rationnel  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$  contient un point sphérique, donc la proposition 3.5.5 s'applique.  $\square$

Le lemme permet cette définition :

**Définition 4.5.11.** Soit  $A$  un appartement de  $\mathcal{I}$  contenant  $A_{\mathbb{K}}$ . Les  $\mathbb{K}$ -murs (resp. les  $\mathbb{K}$ -demi-appartements) de  $A_{\mathbb{K}}$  sont les intersections avec  $A_{\mathbb{K}}$  des murs (resp. demi-appartements) de  $A$ .

Lorsqu'un  $\mathbb{K}$ -mur  $M$  est dirigé par un mur réel de  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ , c'est-à-dire lorsque  $\vec{M}$  coupe une facette sphérique de  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ , il est dit réel. Un  $\mathbb{K}$ -demi-appartement bordé par un  $\mathbb{K}$ -mur réel est dit réel.

*Remarque:* Un  $\mathbb{K}$ -mur qui n'est pas réel est appelé imaginaire, il correspond au noyau d'une  $\mathbb{K}$ -racine imaginaire.

#### 4.5.6 Sous-groupes radiciels

Rappelons d'abord la définition des sous groupes radiciels rationnels dans le cadre vectoriel :

Soit  $\vec{\Omega}$  un demi-espace d'un appartement  $\vec{A}(T)$  tel que que  $\partial\vec{\Omega}$  coupe l'intérieur de  $\vec{A}(T)$ , donc  $\vec{\Omega}$  est une partie équilibrée. L'ensemble  $\phi^u(T)(\vec{\Omega})$  est juste l'ensemble des racines  $\alpha$  relatives à  $T$  telles que  $\alpha(\vec{\Omega}) \geq 0$ . C'est une



partie nilpotente de  $\phi(T)$ .

Les  $\mathbb{K}$ -racines géométriques pour  $G(\mathbb{K})$ , relatives à  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$  sont par définition les  $\mathbb{K}$ -demi-appartements réels de  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ , elles entrent donc dans le cadre précédent. On note  $\delta_{\mathbb{K}} = \delta_{\mathbb{K}}(T_d)$  l'ensemble des  $\mathbb{K}$ -racines géométriques, il s'agit d'un système de racines géométrique, c'est-à-dire que les racines sont des demi-complexes de Coxeter.

Si  $\vec{D}$  est une telle racine, le sous-groupe radiciel correspondant est par définition  $U_{\vec{D}}(\mathbb{K}) = U(\vec{D})^{\Gamma}$ , et on sait que  $U(\vec{D}) = \prod_{\alpha \in \phi^u(\vec{D})} U_{\alpha}$  avec écriture unique quelque soit l'ordre sur  $\phi^u(\vec{D})$ . (Comme  $\Gamma$  permute les racines de  $\phi^u(\vec{D})$ , on ne peut en déduire une telle décomposition pour  $U_{\vec{D}}(\mathbb{K})$ .)

Il est prouvé dans [Ré02] que  $(G(\mathbb{K}), Z(T_d), (U_{\vec{D}})_{\vec{D} \in \Delta_{\mathbb{K}}})$  est une donnée radicielle.

Mais  $G(\mathbb{K})$  est également muni d'un système de racines au sens fort, c'est-à-dire vectoriel. Il s'agit de  $\phi_{\mathbb{K}} = \phi_{\mathbb{K}}(T_d) = \{\alpha_{|\vec{A}_{\mathbb{K}}} \mid \alpha \in \phi(T)\}$ . Contrairement à  $\phi$ , ce système de racine n'est pas forcément réduit. Si  $\alpha_{\mathbb{K}}$  est une telle racine, le sous-groupe radiciel associé est  $U_{\alpha_{\mathbb{K}}} = \langle \{U_{\alpha} \mid \alpha_{|\vec{A}_{\mathbb{K}}} = \alpha_{\mathbb{K}}\} \rangle$ , et le  $\mathbb{K}$ -sous-groupe radiciel associé est  $U_{\alpha_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K})$ . Ainsi, si  $\vec{D}$  est un  $\mathbb{K}$ -demi-appartement,  $U_{\vec{D}} = \langle \{U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \mid \alpha_{\mathbb{K}}(\vec{D}) \geq 0\} \rangle$ . En fait, le fait que  $\phi_{\mathbb{K}}$  est un système de racines entraîne qu'il y a au plus deux racines  $\alpha_{\mathbb{K}}$  telles que  $\alpha_{\mathbb{K}}(\vec{D}) \geq 0$ .

On prouve dans [Ré02] que  $\phi_{\mathbb{K}}$  est effectivement un système de racine, et que  $(G(\mathbb{K}), Z(T_d), (U_{\alpha_{\mathbb{K}}}(\mathbb{K}))_{\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}})$  est une donnée radicielle.

**Lemme 4.5.12.** *Soit  $\vec{D}$  un demi-appartement réel de  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ , soit  $u \in U(\vec{D})$ . Alors  $\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(u)$  est un demi-appartement dirigé par  $\vec{D}$ .*

*Preuve du lemme:*

Soit  $T$  un tore maximal tel que  $\vec{D} \subset \vec{A}(T)$ , soit  $\phi^u = \phi^u(T)(\vec{D})$ . C'est un ensemble nilpotent de racines, donc  $U(\vec{D}) = \prod_{\alpha \in \phi^u} U_{\alpha}$ , avec écriture unique, quelque soit l'ordre choisit sur  $\phi^u$ . Soit  $u = u_1 \dots u_n$  l'écriture de  $u$  dans cette décomposition, avec  $u_i \in U_{\alpha_i}$ ,  $\alpha_i \in \phi^u$ . Le système de racines  $\phi(T)$  étant réduit, toutes les racines de  $\phi^u$  sont non colinéaires, et dans ces conditions, on a par la proposition 3.5.3 :

$$\text{Fix}_{A(T)}(u) = \bigcap_{i=1}^n \text{Fix}_{A(T)}(u_i)$$

Or, chaque  $\text{Fix}_{A(T)}(u_i)$  est un demi-appartement dirigé par  $\vec{D}(\alpha_i)$  (par 3.3.9), et son intersection avec  $A_{\mathbb{K}}$  est un demi-appartement dirigé par  $\vec{D}(\alpha_i) \cap \vec{A}_{\mathbb{K}} = \vec{D}$ .  $\square$

**Définition 4.5.13.** *Soit  $D$  un  $\mathbb{K}$ -demi-appartement réel de  $A_{\mathbb{K}}$ , donc  $\vec{D}$  est un demi-appartement réel de  $\vec{A}(T)$ . Le sous-groupe radiciel de  $D$  est :*

$$U(D) = \{x \in U(\vec{D}) \mid x \text{ fixe } D\}$$

*Le  $\mathbb{K}$ -sous-groupe radiciel correspondant est :*

$$U(D)(\mathbb{K}) = U(D)^{\Gamma}$$

**Définition 4.5.14.** *Un  $\mathbb{K}$ -demi-appartement réel  $D$  est dit vrai s'il existe  $u \in U(D)(\mathbb{K})$  tel que  $\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(u) = D$ . Un  $\mathbb{K}$ -mur réel est dit vrai si les appartements qu'il délimite sont vrais.*

**Proposition 4.5.15.** *Lorsqu'un  $\mathbb{K}$ -mur réel  $M$  délimite deux demi-appartements  $D_1$  et  $D_2$ , alors  $D_1$  est vrai si et seulement si  $D_2$  l'est.*

*Remarque:* Un  $\mathbb{K}$ -mur réel non vrai est appelé "fantôme", c'est en fait un mur où l'immeuble  $J_{\mathbb{K}}$  "ne branche pas", c'est-à-dire un mur "mince". Dans le cas déployé, les murs vrais sont ceux de la forme  $\mathcal{D}(\alpha, \lambda)$  pour  $\lambda \in \omega(\mathbb{K}) \subset \Lambda = \omega(\mathbb{K}_s)$ .

#### 4.5.7 Valuation

**Définition 4.5.16.** Soit  $\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}(T_d)$ . Pour tout  $u \in U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \setminus \{e\}$ ,  $\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(u)$  est un demi-appartement dirigé par  $\vec{D}(\alpha_{\mathbb{K}}) := \{x \in \vec{A}_{\mathbb{K}} \mid \alpha_{\mathbb{K}}(x) \geq 0\}$ . On note  $M(u)$  le bord de ce demi-appartement, c'est donc un mur réel dirigé par  $\ker(\alpha_{\mathbb{K}})$ . On définit alors

$$\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}} : \begin{array}{l} U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \rightarrow \Lambda \cup \{\infty\} \\ u \mapsto \begin{cases} \alpha_{\mathbb{K}}(M(u)) \text{ si } u \neq e \\ \infty \text{ si } u = e \end{cases} \end{array}$$

Pour  $\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}$  et  $\lambda \in \Lambda \cup \{\infty\}$ , on note  $U_{\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda} = \phi^{-1}([\lambda, \infty])$ .

**Proposition 4.5.17.** La famille  $(\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}})_{\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}}$  est une valuation de la donnée radicielle  $(Z(T_d), (U_{\alpha_{\mathbb{K}}})_{\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}})$ , au sens de [Rou06] 2.2.

Les axiomes pour une valuation d'une donnée radicielle seront rappelés au cours de la preuve.

*Démonstration:*

(V0) : Pour tout  $\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}$ ,  $\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}$  est une application de  $U_{\alpha_{\mathbb{K}}}$  dans  $\Lambda \cup \{\infty\}$ , où  $\Lambda$  est un groupe abélien totalement ordonné. L'image de  $\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}$  a au moins trois éléments.

Pour s'assurer que l'image de  $\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}$  contient au moins trois éléments, remarquons que pour  $u \in U_{\alpha_{\mathbb{K}}}$  et  $t \in T_d(\mathbb{K})$ ,  $\phi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(tuv^{-1}) = \phi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(u) + \omega(\alpha_{\mathbb{K}}(t))$ . Sachant que  $T_d$  est non trivial, ceci entraîne que l'image de  $\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}$  est stable par  $\Lambda_{\mathbb{K}}$ .

(V1) : Pour tout  $\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}$ , pour tout  $\lambda \in \Lambda \cup \{\infty\}$ ,  $U_{\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda}$  est un sous-groupe de  $U_{\alpha_{\mathbb{K}}}$ , et  $U_{\alpha_{\mathbb{K}}, \infty} = \{e\}$ .

On constate que  $U_{\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda} = \{u \in U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \mid u \text{ fixe le demi-appartement } \mathcal{D}(\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda)\}$ . Il est alors clair que c'est un groupe. Et  $U_{\alpha_{\mathbb{K}}, \infty} = \{e\}$  par définition.

(V2.1) : Pour tout  $\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}$ , pour tout  $u \in U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \setminus \{e\}$ , l'application  $v \mapsto \varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(v) - \varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(n(u)vn(u)^{-1})$  est constante sur  $U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \setminus \{e\}$ .

Pour tout  $v \in U_{-\alpha_{\mathbb{K}}} \setminus \{e\}$ , on a  $\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(n(u)vn(u)^{-1}) = n(u).\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(v)$ . Or  $n(u)$  agit sur  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$  comme la réflexion selon le mur  $\ker(\alpha_{\mathbb{K}})$ , donc  $n(u)$  agit sur  $A_{\mathbb{K}}$  comme une réflexion selon un mur  $M$  de direction  $\ker(\alpha_{\mathbb{K}})$ , et  $\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(v) - \varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(n(u)vn(u)^{-1}) = -2\alpha_{\mathbb{K}}(M)$ , ce qui est indépendant de  $v$ .

(V2.2) : Pour tout  $\alpha \in \phi_{\mathbb{K}}$  et  $t \in Z(T_d)(\mathbb{K})$ , la fonction  $\begin{array}{l} U_{\alpha_{\mathbb{K}}} \setminus \{e\} \rightarrow \Lambda \\ v \mapsto \varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(v) - \varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(tv t^{-1}) \end{array}$  est constante.

L'élément  $t \in Z(T_d)$  induit sur  $A_{\mathbb{K}}$  une translation, soit  $\vec{v}_t \in \vec{A}_{\mathbb{K}}$  son vecteur. Le même raisonnement que pour (V2.1) montre alors que la fonction est constante égale à  $\alpha_{\mathbb{K}}(\vec{v}_t)$ .

(V3) : Pour toute paire prénilpotente de  $\mathbb{K}$ -racines  $\{\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}\}$ , on a :

$$[U_{\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda}, U_{\beta_{\mathbb{K}}, \mu}] \subset \left\langle \left\{ U_{p\alpha_{\mathbb{K}} + q\beta_{\mathbb{K}}, p\lambda + q\mu} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \text{ et } p\alpha_{\mathbb{K}} + q\beta_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}} \right\} \right\rangle.$$

L'ensemble des racines  $\gamma \in \phi_{\mathbb{K}}$  qui s'écrivent sous la forme  $p\alpha_{\mathbb{K}} + q\beta_{\mathbb{K}}$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$  est noté  $] \alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}} [$ . Il s'agit d'un ensemble nilpotent de racines. Le fait que  $(Z(T_d)(\mathbb{K}), (U_{\alpha_{\mathbb{K}}})_{\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}})$  est une donnée radicielle au sens fort ("entière" pour la nomenclature de [Ré02]) entraîne déjà que  $[U_{\alpha_{\mathbb{K}}}, U_{\beta_{\mathbb{K}}}] \subset \left\langle \left\{ U_{\gamma} \mid \gamma \in ] \alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}} [ \right\} \right\rangle = \prod_{\gamma \in ] \alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}} [} U_{\gamma}$ . Ce produit peut s'effectuer dans n'importe quel ordre. Les seules relations de colinéarité possible dans  $\phi_{\mathbb{K}}$  sont du type  $\gamma = 2\delta$ , et dans ce cas on a  $U_{2\delta} \subset U_{\delta}$ , toujours par les axiomes d'une donnée radicielle. Fixons sur  $] \alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}} [$  un ordre pour lequel deux racines colinéaires se suivent. Alors  $[U_{\alpha_{\mathbb{K}}}, U_{\beta_{\mathbb{K}}}] \subset \prod_{\gamma \in ] \alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}} [_{red}} U_{\gamma}$ , où  $] \alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}} [_{red}$  est l'ensemble  $] \alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}} [$  auquel

on a retiré les doubles des racines qu'il contient.

Soit  $u \in [U_{\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda}, U_{\beta_{\mathbb{K}}, \mu}]$ , alors  $u \in \prod_{\gamma \in |\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}|_{red}} U_{\gamma}$  et  $u$  fixe  $\mathcal{D}(\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda) \cap \mathcal{D}(\beta_{\mathbb{K}}, \mu)$ . Soient  $(u_{\gamma})_{\gamma \in |\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}|_{red}}$  tels que  $u = \prod_{\gamma} u_{\gamma}$ . Comme  $|\alpha_{\mathbb{K}}, \beta_{\mathbb{K}}|_{red}$  est un ensemble réduit de racines, on a  $\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(u) = \bigcap_{\gamma} \text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(u_{\gamma})$  (proposition 3.5.3), donc chaque  $u_{\gamma}$  fixe  $\mathcal{D}(\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda) \cap \mathcal{D}(\beta_{\mathbb{K}}, \mu)$ . Ceci entraîne bien que si  $\gamma = p\alpha_{\mathbb{K}} + q\beta_{\mathbb{K}}$ , alors  $u_{\gamma} \in U_{\gamma, p\lambda + q\mu}$ .

(V4) : Si  $\alpha_{\mathbb{K}}$  et  $2\alpha_{\mathbb{K}}$  sont des  $\mathbb{K}$ -racines,  $\varphi_{2\alpha_{\mathbb{K}}}$  est la restriction de  $\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}$  à  $U_{2\alpha_{\mathbb{K}}}$ .

Ce point est clair d'après la définition.

(V5) : Pour tout  $\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}$ , pour tout  $u \in U_{\alpha_{\mathbb{K}}}$ , si  $u', u'' \in U_{-\alpha_{\mathbb{K}}}$  sont tels que  $n(u) = u''uu'$ , alors  $\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u') = \varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u'') = -\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(u)$ .

Sachant que  $U_{\pm\alpha_{\mathbb{K}}} \subset U(\vec{\mathcal{D}}(\pm\alpha_{\mathbb{K}}))$ , on utilise le lemme 3.5.2. L'élément  $n(u)$  agit sur  $A_{\mathbb{K}}$  comme une réflexion selon un mur dirigé par  $\ker(\alpha_{\mathbb{K}})$ , et  $\text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(u) = \mathcal{D}(\alpha_{\mathbb{K}}, \lambda)$  en notant  $\lambda = \varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(u)$ . Supposons par exemple que  $u'$  fixe plus que  $\mathcal{D}(-\alpha_{\mathbb{K}}, -\lambda)$ , c'est-à-dire que  $\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u') = \lambda' > -\lambda$ . Alors la bande  $\{x \in A_{\mathbb{K}} \mid \alpha_{\mathbb{K}}(x) \in [\lambda, \lambda']\}$  est fixe par  $u$  et  $u'$ . Par le lemme 3.5.2, elle est alors soit fixe soit envoyée hors de  $A_{\mathbb{K}}$  par  $u''$  donc par  $n(u)$ . Mais ces deux cas sont incompatibles avec le fait que  $n(u)$  induit une réflexion sur  $A_{\mathbb{K}}$ . De même,  $\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u'') \leq -\lambda$ .

En l'absence d'idée directe pour montrer les autres inégalité, il reste l'argument suivant : après le choix d'un tore maximal  $\mathbb{K}$ -défini  $T$  contenant  $T_d$  les racines concernées sont en nombre fini, puisque leur ensemble est  $\phi(T)(\ker(\alpha_{\mathbb{K}})) = \phi^m(T)(\ker(\alpha_{\mathbb{K}}))$  et  $\ker(\alpha_{\mathbb{K}})$  est une partie équilibrée de  $\vec{A}(T)$ . Ainsi  $(T, (U_{\alpha})_{\alpha \in \phi(\ker(\alpha_{\mathbb{K}}))})$  est une donnée radicielle finie pour le groupe  $M_{A(T)}(\ker(\alpha_{\mathbb{K}}))$ , son immeuble de Bruhat-Tits est  $\mathcal{I}_{\ker(\alpha_{\mathbb{K}})}$ . Elle est de plus  $\Gamma$ -stable, et ses racines forment deux orbites opposées sous  $\Gamma$  : le  $\mathbb{K}$ -système de racines associé est juste  $\{\alpha_{\mathbb{K}}, -\alpha_{\mathbb{K}}\}$ . Donc  $\mathcal{I}_{\ker(\alpha_{\mathbb{K}})}^{\Gamma}$ , s'il n'est pas forcément un immeuble, est au moins un arbre. L'étude de l'action de  $u, u'$  et  $u''$  sur cet arbre permet maintenant de conclure facilement, sachant que  $A_{\mathbb{K}}$  se projette en une droite, que  $u$  et  $u'$  comme  $u$  et  $u''$  en fixent des demi-droites opposées, et que  $n(u) = u''uu'$  y induit une réflexion.

Pour détailler, notons  $p = p_{\ker(\alpha_{\mathbb{K}})}$ . Soit  $s_1 \in p(A_{\mathbb{K}})$  tel que  $\alpha_{\mathbb{K}}(s_1) = -\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u')$ ,  $s_2$  tel que  $\alpha_{\mathbb{K}}(s_2) = \varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(u)$  et  $s_3$  tel que  $\alpha_{\mathbb{K}}(s_3) = -\varphi_{\alpha_{\mathbb{K}}}(u'')$ , soient aussi  $\epsilon$  et  $-\epsilon$  les bouts de  $p(A_{\mathbb{K}})$  dans la direction de  $\alpha_{\mathbb{K}}$  et  $-\alpha_{\mathbb{K}}$ , respectivement. Ainsi,  $\text{Fix}_{p(A_{\mathbb{K}})}(u) = [s_2, \epsilon[$ ,  $\text{Fix}_{p(A_{\mathbb{K}})}(u') = [s_1, -\epsilon[$  et  $\text{Fix}_{p(A_{\mathbb{K}})}(u'') = [s_3, -\epsilon[$ . Supposons que  $\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u') < -\lambda$ , c'est-à-dire que l'intervalle  $]s_1, s_2[$  est non vide, et aucun de ses points n'est fixé par  $u$  ni par  $u'$ . Sachant que  $n(u).p(A_{\mathbb{K}}) = p(A_{\mathbb{K}})$ , on vérifie dans cette situation (avec les notations évidentes) que  $\epsilon < s_1 < s_2 < n(u).s_1 < n(u).s_2 < \epsilon$ . Ceci empêche que  $n(u)$  fixe un point de  $]s_1, s_2[$ . Par des raisonnements semblables,  $n(u)$  ne peut avoir de point fixe dans  $] -\epsilon, s_1[$ ,  $] -\epsilon, s_3[$ , ni  $]s_2, \epsilon[$ . Mais  $n(u)$  doit tout même avoir un point fixe puisqu'il s'agit d'une réflexion : on arrive à une contradiction. Donc  $s_1 = s_2$ . On prouve similairement que  $s_3 = s_2$ , et ceci entraîne bien  $\varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u') = -\lambda = \varphi_{-\alpha_{\mathbb{K}}}(u'')$ .  $\square$

#### 4.5.8 Identification des appartements

Il faut vérifier que l'appartement  $A_{\mathbb{K}}$  est isomorphe à l'appartement obtenu abstraitement à partir de la donnée radicielle valuée  $(Z(T_d)(\mathbb{K}), (U_{\alpha_{\mathbb{K}}})_{\alpha_{\mathbb{K}} \in \phi_{\mathbb{K}}})$ .

### 4.6 L'immeuble rationnel

#### 4.6.1 Définition

On définit la famille de parahorique suivante sur  $A_{\mathbb{K}} : \mathcal{Q}_{\mathbb{K}} = (\mathcal{Q}_{\mathbb{K}}(a))_{a \in A_{\mathbb{K}}}$  avec  $\mathcal{Q}_{\mathbb{K}}(a) = \mathcal{Q}(a)^{\Gamma}$ , où  $\mathcal{Q}$  est la famille de parahorique pour  $G$  sur un appartement  $A(T)$  contenant  $A_{\mathbb{K}}$ . Il est immédiat qu'il s'agit d'une famille de parahoriques. Cette définition est indépendante du tore  $T$  considéré, car  $\mathcal{Q}(a)$  dispose de la définition intrasèque  $\mathcal{Q}(a) = \text{Fix}_G(a)$ ,

mais fixons tout de même un tel tore  $T$ , jusqu'à la fin de ce numéro.

Il y a deux définitions possibles pour l'immeuble de  $G(\mathbb{K})$  : la première  $I(Q(\mathbb{K}))$  est l'immeuble construit selon la partie 3 à partir de l'appartement  $A_{\mathbb{K}}$  et de la famille de parahoriques  $Q_{\mathbb{K}}$ , la seconde est  $I_{\mathbb{K}} = G(\mathbb{K}).A_{\mathbb{K}} \subset I(Q)$ . Par définition, les appartements de  $I_{\mathbb{K}}$  seront les  $g.A_{\mathbb{K}}$  pour  $g \in G(\mathbb{K})$ , les murs d'un appartement  $G.A_{\mathbb{K}}$  seront les murs vrais.

Un de nos premiers buts est bien sûr de montrer que ces deux définitions coïncident. Nous pourrons alors utiliser d'une part les résultats abstraits de 3, et d'autre part certaines propriétés de  $I(Q)$  qui se transmettront à son sous-immeuble  $I_{\mathbb{K}}$ .

*Remarque:* L'immeuble  $I(\mathbb{K})$  est inclus dans l'ensemble des points  $\Gamma$ -fixes de  $I$ , mais n'est généralement pas égal à cet ensemble, comme c'est déjà le cas pour l'immeuble affine  $\mathbb{K}$ -rationnel d'un groupe réductif sur un corps local.

Posons :

$$j : \begin{array}{ccc} I(Q_{\mathbb{K}}) & \rightarrow & I_{\mathbb{K}} \\ [(g, a)]_{Q_{\mathbb{K}}} & \mapsto & g.a = [(g, a)]_Q \in I(Q) \end{array}$$

Il est immédiat de vérifier que  $j$  est une application  $G(\mathbb{K})$ -équivariante, bien définie et surjective. L'injectivité fait l'objet de la proposition suivante.

En attendant, soit  $\iota_Q$  l'injection de  $A(T)$  dans  $I(Q)$ , qui restreinte à  $A_{\mathbb{K}}$  donne une injection de  $A_{\mathbb{K}}$  dans  $I_{\mathbb{K}}$ . Soit aussi  $\iota_{Q_{\mathbb{K}}}$  l'application canonique (injective si et seulement si  $Q_{\mathbb{K}}$  vérifie (para 1)) de  $A_{\mathbb{K}}$  dans  $I(Q_{\mathbb{K}})$ . Alors d'après les définitions,  $\iota_{Q_{\mathbb{K}}} = j \circ \iota_{Q_{\mathbb{K}}}$ . Le membre de gauche étant injectif, ceci prouve que  $\iota_{Q_{\mathbb{K}}}$  est injective, donc que  $Q_{\mathbb{K}}$  vérifie (para 1).

**Proposition 4.6.1.**

1.  $\text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(\iota_Q(A_{\mathbb{K}})) = N(T_d)(\mathbb{K}) = \text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(\iota_{Q_{\mathbb{K}}}(A_{\mathbb{K}}))$
2. Les appartements de  $I_{\mathbb{K}}$  sont en bijection  $G(\mathbb{K})$ -équivariante avec ceux de  $I(Q_{\mathbb{K}})$  et de  $\vec{I}(\mathbb{K})$ , donc avec les tores  $\mathbb{K}$ -déployés maximaux.
3.  $N_{\mathbb{K}} := N(T_d)(\mathbb{K}) = G(\mathbb{K}) \cap ((N(T) \cap N(T_d)) \cdot \text{Fix}_G(A_{\mathbb{K}}))$ .
4.  $G(\mathbb{K})$  vérifie la décomposition d'Iwasawa  $G(\mathbb{K}) = U_{\mathbb{K}}(\vec{C}) \cdot N(T_d)_{\mathbb{K}} \cdot U_{\mathbb{K}\min}(F)$  pour toute  $\mathbb{K}$ -chambre  $\vec{C}$  de  $\vec{A}_{\mathbb{K}}(T_d)$  et toute facette  $F$  de  $A_{\mathbb{K}}(T_d)$ .  
De plus, le facteur de  $N(T_d)(\mathbb{K})$  est unique modulo  $N(T_d)(\mathbb{K})(F) = \text{Fix}_{N(T_d)(\mathbb{K})}(F)$ .
5. Pour tout  $a \in A_{\mathbb{K}}(T_d)$ , pour tout  $T$  tel que  $A_{\mathbb{K}}(T_d) \subset A(T)$ , on a :

$$G(\mathbb{K}) \cap (N(T).Q(a)) = N(T_d)(\mathbb{K}).Q_{\mathbb{K}}(a)$$

*Géométriquement, ceci signifie que si deux points  $a$  et  $b$  de  $A(T)$ , avec  $a \in A_{\mathbb{K}}$ , sont conjugués, pour l'action de  $G$  sur  $I(Q)$ , à la fois par  $G(\mathbb{K})$  et par  $N(T)$ , alors ils sont conjugués par  $N(T_d)(\mathbb{K})$ .*

6.  $j$  induit un isomorphisme d'appartements entre  $\iota_{Q_{\mathbb{K}}}(A_{\mathbb{K}})$  et  $\iota_Q(A_{\mathbb{K}})$ .
7. L'application  $j$  est une bijection entre  $I(Q_{\mathbb{K}})$  et  $I_{\mathbb{K}}$ .
8. La famille de parahoriques  $Q_{\mathbb{K}}$  vérifie (para 5), et pour toute  $\mathbb{K}$ -facette  $\vec{f}$  de  $\vec{I}(\mathbb{K})$ , elle vérifie les conditions (para 2.1)( $\vec{f}$ ) et (para 2.2)( $\vec{f}$ ) dès que  $Q$  les vérifie pour la facette  $\vec{f}$  de  $\vec{I}$  contenant  $\vec{f}$ .

*Remarque:* Le point essentiel est le 5. Il découle de l'unicité du facteur de  $N$  dans la décomposition d'Iwasawa du groupe déployé  $G$  (proposition 3.4.7).

*Démonstration:*

1. Par construction,  $N(T_d)(\mathbb{K})$  est inclus dans les deux stabilisateurs. Ensuite, si  $g \in \text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(\iota_Q(A_{\mathbb{K}}))$ , alors  $g$  permute les façades de  $A_{\mathbb{K}}$ . Plus précisément,  $g$  permute  $\{\vec{f} \mid \vec{f}^{\dagger} \in \mathcal{F}(\vec{A}_{\mathbb{K}})\}$  (voir la proposition 4.5.9). Donc  $g \in \text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(\vec{A}_{\mathbb{K}}) = N(T_d)(\mathbb{K})$ . Enfin, le fait que  $j$  soit  $G(\mathbb{K})$ -équivariante entraîne  $\text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(\iota_{Q_{\mathbb{K}}}(A_{\mathbb{K}})) \subset \text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(\iota_Q(A_{\mathbb{K}}))$ , ce qui permet de conclure.
2. découle du point précédent.
3. Cela vient du fait que  $Q(A_{\mathbb{K}})$  est transitif sur les appartements contenant  $A_{\mathbb{K}}$ , car  $A_{\mathbb{K}}$  contient un point sphérique (3.5.5).
4. Comme  $G(\mathbb{K})$  admet la donnée radicielle valuée  $(Z(T_d)(\mathbb{K}), (U_{\alpha}, \phi_{\alpha})_{\alpha \in \phi_{\mathbb{K}}})$ , la proposition 3.4.4 prouve qu'il admet la décomposition d'Iwasawa  $G(\mathbb{K}) = U_{\mathbb{K}}(\vec{C}) \cdot \text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(A_{\mathbb{K}}(T_d)) \cdot U_{\mathbb{K}min}(F)$ , avec  $U_{\mathbb{K}}(\vec{C}) = \langle \{U_{\alpha} \mid \alpha \in \phi_{\mathbb{K}}(\vec{C})\} \rangle$  et  $U_{\mathbb{K}min}(F) = \langle \{U_{\alpha}(F) \mid \alpha \in \phi_{\mathbb{K}}\} \rangle$ . De plus,  $\text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(A_{\mathbb{K}}(T_d)) = N(T_d)(\mathbb{K})$  par le point 1.

Étudions l'unicité de  $n$  : soient  $g = u_1 n_1 u'_2 = u_2 n_2 u'_2$  deux écritures de  $g \in G(\mathbb{K})$ . Soit  $T$  un tore maximal tel que  $A(T) \supset A_{\mathbb{K}}(T_d)$ , on va se ramener à l'unicité dans la décomposition d'Iwasawa du groupe déployé  $G$  dans l'appartement  $A(T)$ .

Soit  $\vec{C}'$  une chambre de  $\vec{A}(T)$  contenant  $\vec{C}$ , alors  $U_{\mathbb{K}}(\vec{C}) \subset U(\vec{C}')$ . Soit  $x \in A_{\mathbb{K}}(T_d)$  et  $\vec{F} \in \vec{A}(T_d)_x$  tels que  $F = \mathcal{F}il_{\mathbb{K}}(x, \vec{F})$ , soit  $F' = \mathcal{F}il(x, \vec{F}')$  où  $\vec{F}'$  est la facette de  $A(T)_x$  contenant  $\vec{F}$ . Alors  $U_{\mathbb{K}min}(F) \subset U_{min}(F')$ .

Enfin,  $N(T_d) = \text{Stab}_{N(T)}(A_{\mathbb{K}}(T_d)) \cdot \text{Fix}_G(A_{\mathbb{K}}(T_d))$ . Soient  $n_1 = n'_1 z_1$  et  $n_2 = n'_2 z_2$  des décompositions correspondantes. Alors  $g = u_1 \cdot n'_1 \cdot (z_1 u'_1) = u_2 \cdot n'_2 \cdot (z_2 u'_2)$  sont deux écritures de  $g$  dans la décomposition d'Iwasawa du groupe déployé  $G = U(\vec{C}') \cdot N(T) \cdot Q(F')$ . Donc  $n'_1{}^{-1} n'_2 \in N(F')$  par la proposition 3.4.7. Mais  $z_1$  et  $z_2$  fixent  $A_{\mathbb{K}}$  et donc aussi  $F'$ , donc  $n_1{}^{-1} n_2 = z_1{}^{-1} n'_1{}^{-1} n'_2 z_2 \in N(T_d)(\mathbb{K}) \cap \text{Fix}(F') = N(T_d)(\mathbb{K}) \cap \text{Fix}(F)$ .

5. Soit  $g = nq \in G(\mathbb{K}) \cap N(T) \cdot Q(a)$ . Soit  $\vec{C}$  une  $\mathbb{K}$  chambre de  $\vec{A}_{\mathbb{K}}$ , par la décomposition d'Iwasawa de  $G(\mathbb{K})$ , il existe  $n_{\mathbb{K}} \in N(T_d)(\mathbb{K})$  tel que  $g \in U_{\mathbb{K}}(\vec{C}) \cdot n_{\mathbb{K}} \cdot Q_{\mathbb{K}}(a)$ . On va utiliser comme au point précédent l'unicité de la décomposition d'Iwasawa dans  $G$ . On sait que  $N(T_d)(\mathbb{K}) \subset \text{Stab}_G(A_{\mathbb{K}}) = (N(T) \cap N(T_d)) \cdot \text{Fix}_G(A_{\mathbb{K}})$ , car  $\text{Fix}_G(A_{\mathbb{K}})$  est transitif sur les appartements contenant  $A_{\mathbb{K}}$ . Soit donc  $n_{\mathbb{K}} = n'z$  une écriture correspondante, alors  $z \in Q(a)$  d'où  $g \in U(\vec{C}') \cdot n' \cdot Q(a)$ , pour n'importe quelle chambre  $\vec{C}'$  de  $\vec{A}(T)$  contenant  $\vec{C}$ . Par la proposition 3.4.7,  $n = n' \cdot Q(a)$ . Donc  $g \in n'Q(a) = n_{\mathbb{K}} z^{-1} Q(a) = n_{\mathbb{K}} Q(a)$ . Donc  $g \in G(\mathbb{K}) \cap N(T_d)(\mathbb{K}) \cdot Q(a) = N(T_d)(\mathbb{K}) \cdot Q_{\mathbb{K}}(a)$ .
6. Soit  $B_{\mathbb{K}}$  un appartement de  $I(Q_{\mathbb{K}})$ . Le fait que  $Q_{\mathbb{K}}$  vérifie (para 1) entraîne que  $j$  induit une bijection de  $B_{\mathbb{K}}$  sur son image. Ensuite,  $j|_{A_{\mathbb{K}}} = \iota_{Q|A_{\mathbb{K}}}^{-1} \circ \iota_{Q_{\mathbb{K}}}$ , et  $\iota_{Q|A_{\mathbb{K}}}$  comme  $\iota_{Q_{\mathbb{K}}}$  sont des isomorphismes d'appartements par définition de la structure d'appartement de  $A_{\mathbb{K}}$  et de  $\iota_{Q_{\mathbb{K}}}(A_{\mathbb{K}})$ .
7. Montrons que  $j$  est injective : soient  $[(g, a)]$  et  $[(h, b)]$  avec  $g, h \in G(\mathbb{K})$  et  $a, b \in A_{\mathbb{K}}$ , deux points de  $I(Q_{\mathbb{K}})$ , tels que  $[(g, a)]_Q = [(h, b)]_Q$ , montrons que  $[(g, a)]_{Q_{\mathbb{K}}} = [(h, b)]_{Q_{\mathbb{K}}}$ . On peut supposer  $h = e$ . Alors il existe  $n \in N(T)$  tel que  $n.a = b$  et  $g \in nQ(a)$ . Comme  $g \in G(\mathbb{K})$ , le point précédent entraîne  $g \in N(T_d)(\mathbb{K}) \cdot Q_{\mathbb{K}}(a)$ . Soit  $n_{\mathbb{K}} \in N(T_d)(\mathbb{K})$  tel que  $g \in n_{\mathbb{K}} \cdot Q_{\mathbb{K}}(a)$ . Dans  $I(Q)$ , on a  $g.a = b$ , d'où  $n_{\mathbb{K}}.a = b$ . Par définition de cette action, cette égalité reste vraie pour l'action de  $N(T_d)$  sur l'appartement abstrait  $A_{\mathbb{K}}$ . Alors la définition de  $\sim_{Q_{\mathbb{K}}}$  entraîne  $[(g, a)]_{Q_{\mathbb{K}}} = [(e, b)]_{Q_{\mathbb{K}}}$ .
8. Soit  $a \in A_{\mathbb{K}}$  un point d'une façade  $A_{\vec{f}}$  sphérique. Alors  $Q(a) = U(\vec{f}) \rtimes M_A(a) = U(\vec{f}) \rtimes Q(a \cup \text{op}_A(a))$ . Les deux groupes sont  $\mathbb{K}$ -définis, et la trivialité de leur intersection entraîne  $Q(a)^{\Gamma} = U(\vec{f})^{\Gamma} \rtimes M_A(a)^{\Gamma}$ . Nous renvoyons alors à [BT72] pour prouver que  $M_A(a)^{\Gamma}$  est le groupe engendré par  $N_{\mathbb{K}}(a)$  et par les  $U_{\alpha}(a)$ ,  $\alpha \in \phi_{\mathbb{K}}(\vec{f})$ , et à [Ré02] pour prouver que  $U(\vec{f})^{\Gamma}$  est bien le sous-groupe distingué de  $P(\vec{f}^{\dagger})$  engendré par les  $U_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \phi''(\vec{f})$ .

Passons à (para 2.1)( $\vec{f}$ ). Soit  $a$  un point de  $A_{\mathbb{K}}$  dans une façade bordée par  $A_{\mathbb{K}\vec{f}}$ . Soit  $g \in N_{\mathbb{K}} \cdot Q_{\mathbb{K}}(a) \cap N_{\mathbb{K}} \cdot P_{\mathbb{K}}(\vec{f})$ . On a  $N_{\mathbb{K}} \cdot Q_{\mathbb{K}}(a) \subset N \cdot Q(a)$  par le point 3 et  $N_{\mathbb{K}} \cdot P_{\mathbb{K}}(\vec{f}) \subset N \cdot P(\vec{f}) = N \cdot P(\vec{f}^{\dagger})$  par le même raisonnement. Donc par

(para 2.1)( $\vec{f}$ ),  $g \in G(\mathbb{K}) \cap (N.Q(pr_{\vec{f}}(a)))$ , et  $g \in N_{\mathbb{K}}.Q_{\mathbb{K}}(pr_{\vec{f}}(a))$  par le point 5.

Prouvons (para 2.2)( $\vec{f}$ ). Soit  $a \in A_{\mathbb{K}\vec{f}}$  et  $g \in Q(a)$ . Soit  $\vec{g}$  une facette dans le bord de  $\vec{f}$ , et  $\vec{g}'$  la facette de  $\vec{f}$  la contenant. Par (para 2.2)( $\vec{f}$ ), il existe  $b_0 \in pr_{\vec{f}}^{-1}(a) \cap A_{\vec{g}}$  et  $n \in N(a)$  tels que  $ng$  fixe le cône  $b_0 + \vec{f} \subset A_{\vec{g}}$ . Alors il existe  $b \in b_0 + \vec{f} \cap A_{\mathbb{K}}$ . Pour toute racine  $\alpha \in \phi(\vec{f})$ ,  $\alpha(b) = \alpha(a)$ . Et comme  $b \in A_{\mathbb{K}}$ , pour toute racine  $\alpha \in \phi_{\mathbb{K}}(\vec{f})$ ,  $\alpha(b)$  est bien défini, et vaut donc  $\alpha(a)$ . Ceci prouve que  $pr_{\vec{f}}(b) = a$ . Ainsi,  $b \in A_{\mathbb{K}\vec{g}} \cap pr_{\vec{f}}^{-1}(a)$  et  $g \in G(\mathbb{K}) \cap (N.Q(b + \vec{f})) = N_{\mathbb{K}}.Q_{\mathbb{K}}(b + \vec{f})$ .

□

On identifie donc désormais  $I(Q_{\mathbb{K}})$  et  $I_{\mathbb{K}}$ . Comme la famille de parahoriques  $Q_{\mathbb{K}}$  vérifie les conditions (para 1, 5, 2.2) et (para 2.1)( $\vec{f}$ ) pour  $\vec{f}$  sphérique, les résultats de la partie 3 s'appliquent.

#### 4.6.2 Structure des appartements

Soit  $A_{\mathbb{K}}$  un  $\mathbb{K}$ -appartement, nous allons définir les murs, parties closes et facettes de  $A_{\mathbb{K}}$ .

**Définition 4.6.2.** – Un  $\mathbb{K}$ -isomorphisme d'appartements est un isomorphisme affine qui préserve l'ensemble des murs vrais.

– Une partie  $\mathbb{K}$ -close de  $A_{\mathbb{K}}$  est une intersection finie de vrais demi-appartements. Le filtre engendré par les parties  $\mathbb{K}$ -closes contenant une partie  $\Omega$  de  $A_{\mathbb{K}}$  est le  $\mathbb{K}$ -enclos de  $\Omega$ , il est noté  $Cl_{\mathbb{K}}(\Omega)$ .

*Remarque:* Il faudrait en fait noter  $Cl_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$ , car tant qu'on n'a pas (para 5 et 6)( $\mathbb{K}$ ), l'enclos d'une partie d'appartement  $\Omega$  dépend de l'appartement la contenant considéré.

**Proposition 4.6.3.** L'action de  $G(\mathbb{K})$  sur  $A_{\mathbb{K}}$  préserve les ensembles des murs vrais, donc tout  $g \in G(\mathbb{K})$  induit un isomorphisme sur chaque appartement de  $I(\mathbb{K})$ .

*Démonstration:* L'action de  $G(\mathbb{K})$  préserve l'ensemble des murs, et celui des murs réels car elle préserve  $I_{\text{sph}}$ .

Soit  $D = \text{Fix}_{A_{\mathbb{K}}}(U(D)(\mathbb{K}))$  un demi-appartement réel. Soit  $g \in G(\mathbb{K})$ , alors  $g.D = \text{Fix}_{g.A_{\mathbb{K}}}(gU(D)(\mathbb{K})g^{-1}) = \text{Fix}_{g.A_{\mathbb{K}}}(U(gD)(\mathbb{K}))$ , car  $g \in G(\mathbb{K})$ . □

On définit les facettes de  $A_{\mathbb{K}}$  de la même manière que celles de  $A$ .

**Définition 4.6.4.** Pour  $x \in A_{\mathbb{K}}$ ,  $(\vec{A}_{\mathbb{K}})_x$  est l'espace directeur de la façade contenant  $x$ , muni des directions des murs de  $A_{\mathbb{K}}$  contenant  $x$ . Pour  $\vec{F}$  une facette de  $(\vec{A}_{\mathbb{K}})_x$ ,  $\mathcal{F}il(x, \vec{F})$  est le filtre engendré par les parties closes de  $A_{\mathbb{K}}$  qui induisent un voisinage de  $x$  dans  $x + \vec{F}$ . Les facettes de  $A_{\mathbb{K}}$  sont tous les filtres obtenus ainsi, auxquels on rajoute encore la facette vide, qui est le filtre  $\mathcal{P}(A_{\mathbb{K}})$  de toutes les parties de  $A_{\mathbb{K}}$ .

Si  $F = \mathcal{F}il(x, \vec{F})$ , alors  $\vec{F}$  est la direction de  $F$ , et si  $x \in A_{\mathbb{K}, \vec{f}}$ , alors  $A_{\mathbb{K}, \vec{f}}$  ou même  $\vec{f}$  est appelé la façade de  $F$ . De manière générale, étant donnée une facette  $F$ , on notera  $\vec{F}$  sa direction et  $\vec{f}$  sa façade.

Une facette est dite sphérique lorsque sa façade est sphérique.

Comme il y a moins de murs dans  $A_{\mathbb{K}}$  que dans  $A$ , et comme  $A_{\mathbb{K}}$  lui-même n'est pas une partie close de  $A$ , le seul lien entre les facettes de  $A$  et celles de  $A_{\mathbb{K}}$  est ceci :

**Proposition 4.6.5.** Si  $F$  est une facette de  $A$ , alors  $F \cap A_{\mathbb{K}}$  est incluse dans une  $\mathbb{K}$ -facette de  $A_{\mathbb{K}}$ .

### 4.6.3 Décomposition de Lévi

Soit  $\Omega \subset A_{\mathbb{K}}$  telle que  $\text{Cl}(\vec{\Omega})$  est l'adhérence d'une facette ou une partie équilibrée. Alors  $Q(\Omega) = U(\Omega) \rtimes M_A(\Omega)$  pour tout appartement  $A$  contenant  $A_{\mathbb{K}}$ . L'écriture  $M_A(\Omega) = Q(\Omega \cup \text{op}_A(\Omega))$  prouve, puisque  $\text{op}_A(\Omega) = \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega) \subset A_{\mathbb{K}}$  que  $M_A(\Omega)$  est en fait indépendant de  $A$ , on pourra donc noter ce groupe  $M_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$ .

Les trois groupes  $Q(\Omega)$ ,  $U(\Omega)$ , et  $M_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$  sont  $\mathbb{K}$ -définis, et ceci entraîne que la décomposition de Lévi est encore vraie au niveau rationnel :  $Q(\Omega)(\mathbb{K}) = U(\Omega)(\mathbb{K}) \rtimes M_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)(\mathbb{K})$ .

Lorsque  $\text{Cl}(\vec{\Omega}) \cap \mathcal{I}_{\text{sph}}$  est de plus non vide, la simple transitivité de  $U(\Omega)$  sur les parties d'appartement opposées à  $\Omega$  entraîne celle de  $U(\Omega)(\mathbb{K})$  sur les parties d'appartement opposées à  $\Omega$  et  $\Gamma$ -stables.

Par ailleurs,  $M_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$  est alors un groupe réductif, donc  $M_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)(\mathbb{K})$  est transitif sur les  $\mathbb{K}$ -appartements contenant  $\Omega \cup \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$ .

On conclut alors par la décomposition de Lévi que  $Q(\Omega)(\mathbb{K})$  est transitif sur les  $\mathbb{K}$ -appartements contenant  $\Omega$ .

En résumé :

**Proposition 4.6.6.** *Soit  $\Omega \subset A_{\mathbb{K}}$  telle que  $\text{Cl}(\vec{\Omega})$  est équilibrée ou l'adhérence d'une facette sphérique. Alors  $Q(\Omega)(\mathbb{K})$  est transitif sur les  $\mathbb{K}$ -appartements contenant  $\Omega$ ,  $U(\Omega)(\mathbb{K})$  est simplement transitif sur les parties de  $\mathbb{K}$ -appartement opposées à  $\Omega$ , et  $M_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$  est transitif sur les appartements contenant  $\Omega \cup \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(\Omega)$ .*

*Remarque:* Le raisonnement sur  $U(\Omega)(\mathbb{K})$  montre en fait l'équivalence entre "être une partie d'appartement opposée à  $\Omega$  et  $\Gamma$ -stable", "être une partie d'appartement opposée à  $\Omega$  et  $\Gamma$ -fixe", et "être une partie de  $\mathbb{K}$ -appartement opposée à  $\Omega$ ".

### 4.6.4 Lien entre les façades

**Proposition 4.6.7.** *Soit  $A_{\mathbb{K}}$  un  $\mathbb{K}$ -appartement et  $a \in A_{\mathbb{K}}$  un point sphérique. Soit  $\vec{f} \in \mathcal{F}(\vec{A}_{\mathbb{K}})$  telle que  $a \in (A_{\mathbb{K}})_{\vec{f}}$ . Alors pour tout  $q \in Q(a)(\mathbb{K})$ , il existe  $a_0 \in \mathring{A}_{\mathbb{K}}$  et  $n \in N(T_d)(\mathbb{K}) \cap P(a)$  tels que  $nq \in P(a_0 + \vec{f})$ .*

*Démonstration:* Sachant que  $Q(a)(\mathbb{K}) = U(a)(\mathbb{K}) \rtimes M_{A_{\mathbb{K}}}(a)(\mathbb{K})$ , et que tout élément de  $U(a)(\mathbb{K})$  fixe un cône de la forme  $a_0 + \vec{f}$  dans  $\mathring{A}_{\mathbb{K}}$ , on peut supposer  $q \in M_{A_{\mathbb{K}}}(a)(\mathbb{K}) = Q(\{a, \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(a)\})(\mathbb{K})$ . Comme  $a$  est dans une façade sphérique, on a  $Q(\{a, \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(a)\}) \subset \text{Stab}_G(\text{Cl}(\{a, \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(a)\}))$  (corollaire 3.9.2), donc  $A_{\mathbb{K}} \cap q.A_{\mathbb{K}} \supset \text{Cl}(\{a, \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(a)\})$ . D'après la proposition 4.6.6, il existe alors  $m \in Q(\text{Cl}(\{a, \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(a)\}))(\mathbb{K})$  tel que  $mq \in \text{Stab}_{G(\mathbb{K})}(A_{\mathbb{K}}) = N(T_d)(\mathbb{K})$ . Comme  $m$  fixe  $\text{Cl}(\{a, \text{op}_{A_{\mathbb{K}}}(a)\})$  qui contient un cône du type  $a_0 + \vec{f}$ , ceci prouve la proposition.  $\square$

A présent que nous savons que  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$  vérifie (para 0,1,3,4, 2.1 et 7)( $\mathbb{K}$ ), et (para 2.2)( $\mathbb{K}$ ) lorsque la façade de départ est sphérique, on peut appliquer les résultats des parties 3.8 et 3.9.

## Références

- [AB08] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown. *Building, theory and applications*. Springer, 2008.
- [BT72] François Bruhat and Jacques Tits. Groupes réductifs sur un corps local I, données radicielles valuées. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 41 :5–184, 1972.
- [Cha08] Cyril Charignon. Compactification polyédrale d'un immeuble affine. *arXiv ou HAL*, 2008.
- [GR08] Stéphane Gaussent and Guy Rousseau. Kac-moody groups, hovels and littelman paths. *Annales de l'Institut Joseph Fourier*, 58 :2605–2657, 2008.
- [Rou06] Guy Rousseau. Groupes de kac-moody sur un corps local, immeubles microaffines. *Compositio Math.*, 142 :501–528, 2006.
- [Ré02] Bertrand Rémy. *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*, volume 277. Astérisque, 2002.