



**HAL**  
open science

## Etude du choix des conditions d'interface pour des stratégies non linéaire de décomposition de domaine

Julien Pebrel, Pierre Gosselet, Christian Rey

► **To cite this version:**

Julien Pebrel, Pierre Gosselet, Christian Rey. Etude du choix des conditions d'interface pour des stratégies non linéaire de décomposition de domaine. Neuvième colloque national en calcul des structures, May 2009, Giens (Var), France. pp.393-398. hal-00437253

**HAL Id: hal-00437253**

**<https://hal.science/hal-00437253>**

Submitted on 30 Nov 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Etude du choix des conditions d'interface pour des stratégies non linéaire de décomposition de domaine

J. Pebrel<sup>1</sup>, P. Gosselet<sup>1</sup>, C. Rey<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMT-Cachan (ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris)  
61 av. du Président Wilson, F-94230 Cachan, France  
{pebrel,gosselet,rey}@lmt.ens-cachan.fr

---

**Résumé** — Une comparaison entre trois approches de décomposition de domaine (DDM) dédiées aux problèmes non-linéaires est présentée. Basées sur la condensation du problème non linéaire, ces stratégies mènent à la résolution d'un problème tangent d'interface et de problèmes locaux non linéaires. Le problème d'interface rentre dans le cadre usuel des DDM linéaires (FETI, BDD, etc) ; les problèmes locaux non-linéaires peuvent être résolus avec différents types de conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, Robin), dont le rôle est évalué dans cette étude.

**Mots clés** — Décomposition de domaine sans recouvrement, problèmes non-linéaires

---

## 1 Introduction

Les décompositions de domaine ont jouées un rôle prépondérant dans le développement du calcul intensif en offrant la possibilité d'exploiter au maximum les propriétés des calculateurs parallèles modernes. Introduites le plus souvent dans un contexte algébrique, elles offrent la possibilité de transformer la résolution d'un problème linéaire en un ensemble de résolutions de problèmes linéaires définis sur les sous-structures couplés sur l'interface. Ce cadre recoupe de nombreuses méthodes [5] dont l'efficacité a été validée sur des problèmes d'origines diverses, et qui sont à présent considérée comme matures. Parmi les points à développer, on note :

- les interfaces non parfaites (interfaces de contact, interfaces cohésives), récemment traitées dans le cadre de l'approche LaTin [6, 7] mais peu envisagées dans le cadre des approches de type Schur [3],
- les problèmes non linéaires, où l'approche classique consistant à linéariser le problème global et à résoudre les problèmes tangents par une approche parallèle, parce qu'elle traite la non-linéarité monolithiquement, peut se révéler peu efficace. [1] s'intéresse à ce problème dans le cadre de l'extension des méthodes de Schwarz aux problèmes non linéaires et [2] dans le cadre de l'approche LaTin.

Dans cet article nous abordons ce second point en présentant une approche pour la résolution des problèmes de minimisation du type :

$$E(u) = \min_{v \in \mathcal{U}} E(v) \quad \text{with} \quad E(v) = \int_{\Omega} e(\nabla^s v) d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} g \cdot v d\Gamma \quad (1)$$

où la fonction  $e$  n'est pas une fonction quadratique (le cadre pourrait être étendu à de nombreuses autres non-linéarités comme les problèmes avec variables internes). Philosophiquement notre démarche se rapproche des approches de Schur dans le cas linéaire (FETI, BDD,...) mais la prise en compte de la non-linéarité est ramenée autant que possible au niveau des sous-structures. Ainsi,

on condense le problème non linéaire aux interfaces de la décomposition avant de résoudre le problème d'interface (non linéaire) par une approche de Newton Raphson, donnant ainsi lieu à chaque itération de cette algorithmme à deux types d'opérations : la résolution d'un problème tangent d'interface – à la structure similaire à une DDM linéaire – et la résolution de problèmes locaux non linéaires. Ce cadre permet de décliner une extension de l'approche FETI aux problèmes non linéaires [8] et une version non linéaire de l'approche BDD [9]. Une étude plus fine montre que le choix des conditions aux limites sur les problèmes locaux (Dirichlet, Neumann, Robin) peut être rendu indépendant de la formulation (primale, duale, mixte). Aussi nous proposons une approche où les problèmes locaux non-linéaires sont soumis à des conditions d'interface de Robin (dont le choix de l'impédance doit permettre de rendre la méthode très efficace), et où le problème global d'interface est résolu en primal.

Ce papier donne une première évaluation comparée de ces trois méthodes. Dans la section 2 la méthode est exposée, pour des raisons de concision et de clarté, la méthode duale est détaillée et les autres ne sont que positionnées par rapport à celle-ci. Dans la section 3 les trois méthodes sont évaluées sur le même cas-test.

## 2 Formulation et algorithme

### 2.1 Principe commun à toutes les approches

On introduit une partition sans recouvrement du domaine  $\Omega$  en  $n$  sous-structures notées  $\Omega_i$ .  $\Gamma_i$  est l'interface du sous-domaine  $\Omega_i$  avec ses voisins et  $\Gamma$  est l'interface globale ;  $t_i$  est l'opérateur de trace défini de  $\Omega_i$  vers  $\Gamma_i$ . On note  $\hat{u} = (u_i)$  les champs de déplacement liés à chaque sous-structure. On a donc à minimiser la somme des énergies de chaque sous-structure – notées  $(E_i)$  – par rapport à l'ensemble des champs de déplacement locaux sous contrainte d'égalité à l'interface. La différence entre les trois approches présentées réside dans l'écriture des conditions d'interface, on distingue deux cas :

**Raccord direct entre les sous-domaines :** on introduit un prolongement signé de  $\Gamma_i$  vers  $\Gamma$  noté  $A_i$ . Ainsi on peut écrire une condition d'interface globale et l'imposer directement par un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  :

$$\text{Trouver } (\hat{u}, \lambda) \in \hat{\mathcal{U}} \times \mathcal{W}^* \text{ tel que } \mathcal{L}(\hat{u}, \lambda) = \inf_{\hat{w}} \sup_{\mu} \mathcal{L}(\hat{w}, \mu)$$

$$\text{avec } \mathcal{L}(\hat{u}, \lambda) = \sum_{i=1}^n E_i(u_i) + \left\langle \sum_{i=1}^n A_i t_i u_i, \lambda \right\rangle \quad (2)$$

Cette approche est à la base de l'extension de la méthode duale.

**Raccord indirect entre les sous-domaines :** on introduit un champ d'interface  $v$  et un ensemble de multiplicateurs de Lagrange  $(\lambda_i)$  recollant chaque sous-domaine à l'interface, un terme d'augmentation [4] peut également être introduit :

$$\text{Trouver } (\hat{u}, v, \hat{\lambda}) \in \hat{\mathcal{U}} \times \mathcal{W}^* \text{ tel que } \mathcal{L}(\hat{u}, v, \hat{\lambda}) = \inf_{\hat{w}} \inf_z \sup_{\hat{\mu}} \mathcal{L}(\hat{w}, z, \hat{\mu})$$

$$\text{avec } \mathcal{L}(\hat{u}, v, \hat{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \left( E_i(u_i) + \left\langle t_i u_i - v|_i, \lambda_i \right\rangle + \frac{1}{2} \|t_i u_i - v|_i\|_i^2 \right) \quad (3)$$

où  $|_i$  désigne la restriction sur  $\Gamma_i$  d'un champ défini sur  $\Gamma$  et  $\|\cdot\|_i$  désigne une norme définie par  $\|u_i\|_i^2 = \langle u_i, Q_i u_i \rangle_i$ . La prise en compte du terme d'augmentation permet de passer d'une approche primale à une approche mixte.

La démarche menée dans les trois cas est la même : l'écriture du problème issu du point-selle fait apparaître un *problème local* qui permet de définir un opérateur non linéaire d'interface (analogue d'un complément de Schur) et une *équation globale d'interface*. La condensation implicite des équations locales fait alors apparaître un problème non linéaire d'interface. La résolution de ce dernier par une approche Newton-Raphson consiste à enchaîner calcul du résidu, qui dans notre cas nécessite la résolution de problèmes non linéaires indépendamment sur chaque sous-structure et une étape d'assemblage, et résolution du problème tangent, qui a la structure d'une approche de décomposition de domaine classique.

## 2.2 Approche duale

Dans le cas d'un raccord direct entre les sous-domaines, on introduit l'opérateur noté  $\mathbb{D}_i$  (après avoir noté  $c_i = (f_i, g_i, u_i^d)$ ) qui résout les problèmes locaux, le problème à résoudre s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\hat{u}, \lambda) \in \hat{\mathcal{U}} \times \mathcal{W}^* \text{ tel que } \forall (\hat{u}^*, \lambda^*) \in \hat{\mathcal{U}} \times \mathcal{W}^* \text{ on ait :} \\ \forall i, \quad a_i(u_i, u_i^*) = l_i(u_i^*) - \langle \lambda, A_i t_i u_i^* \rangle_i \Leftrightarrow t_i u_i = \mathbb{D}_i(\lambda_i; c_i) + t_i R_i \\ \left\langle \sum_{i=1}^n A_i t_i u_i, \lambda^* \right\rangle = 0 \end{array} \right.$$

L'existence de solutions des problèmes locaux est associée à la condition suivante :

$$l_i(\rho_i) - \langle t_i \rho_i, \lambda_i \rangle_i = 0 \quad \forall \rho_i \in \mathbf{R}_i = \text{Ker}(\nabla^s) \cap \mathcal{U}_i^0 \quad (4)$$

Si on injecte la définition de l'opérateur  $\mathbb{D}_i$  dans l'équation d'interface, on obtient le problème condensé sur l'interface posé sous la contrainte d'autoéquilibre des sous-structures :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \sum_{i=1}^n A_i \mathbb{D}_i(\lambda_i; c_i), \lambda^* \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n A_i t_i \rho_i, \lambda^* \right\rangle = 0 \\ \forall i, \quad \langle t_i R_i, \lambda_i \rangle_i = l_i(\rho_i) \end{array} \right.$$

qui donne, après discrétisation, le problème d'interface :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{D}(\lambda; c) + \mathbb{G} \alpha = 0 \\ \mathbb{G}^t \lambda = e \end{array} \right. \quad (5)$$

où  $\mathbb{G}$  est défini à partir de l'assemblage des traces des mouvements de solide rigide admissibles de chaque sous-structures. L'application de l'algorithme de Newton Raphson au problème précédent conduit donc aux itérations suivantes :

$$\forall n > 0 \quad \lambda^{n+1} = \lambda^n + \delta \lambda^n, \quad \alpha^{n+1} = \alpha^n + \delta \alpha^n,$$

$$\begin{pmatrix} D_\lambda \mathbb{D}(\lambda^n; c) & \mathbb{G} \\ \mathbb{G}^t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \lambda^n \\ \delta \alpha^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{D}(\lambda_n; c) + \mathbb{G} \alpha_n \\ \mathbb{G}^t \lambda_n \end{pmatrix}$$

La résolution de ce problème implique :

**Initialisation :** afin d'assurer la vérification de la contrainte par le multiplicateur initial, on peut utiliser le problème grossier de l'approche FETI associé à la prédiction élastique, voire mener quelque itérations de cet algorithme.

**Problèmes locaux non linéaires :** le calcul du résidu non linéaire nécessite la résolution de problèmes locaux non linéaires à efforts imposés sur l'interface qui peuvent être traités par un algorithme de résolution quelconque. La version la plus simple à mettre en oeuvre utilise un algorithme de Newton tangent, du même type que celui du problème d'interface, initialisé par le champ de déplacement issu de la résolution du problème tangent précédent. La condition d'existence de solutions du problème non linéaire est automatiquement satisfaite par le champ d'effort d'interface.

**Résolution du problème tangent :** le problème à résoudre a exactement la structure d'une approche FETI classique, on réutilise donc les outils existants pour le traitement de ce type de problème (préconditionneur, *scaling*, etc).

### 2.3 Approche primale

Dans le cas d'un raccord indirect entre les sous-structures sans utilisation du terme d'augmentation, on peut mener une démarche similaire qui mène à l'approche primale :

**Initialisation :** une initialisation particulière n'est *a priori* pas requise. Cependant, compte tenu de l'importance de l'initialisation pour une bonne convergence des approches Newton-Raphson, on peut mener quelques itérations du solveur linéaire d'interface associé à la prédiction élastique.

**Problèmes locaux non linéaires :** les calculs non linéaires locaux sont pilotés par le déplacement d'interface. Là encore on peut choisir un solveur indépendant du solveur global, mais le choix le plus simple correspond à un Newton tangent initialisé par le champ de déplacement local issu du problème tangent d'interface précédent.

**Résolution du problème tangent :** Le problème tangent ayant la structure d'un problème primal de base, on peut utiliser une approche BDD.

### 2.4 Approche primale-mixte

La résolution de problèmes locaux non linéaire fait apparaître deux risques.

- L'apparition d'instabilités purement locales, qui ne seraient pas liées à une instabilité globale physique. Par exemple, lors de la simulation d'un problème de flambage, une sous-structure élançée pourrait avoir tendance à converger vers des modes trop élevés.
- Le déclenchement local de phénomènes irréversibles qui n'auraient pas de raison d'être dans la solution du problème. Par exemple, une sur-estimation de la condition aux limites peut conduire à endommager ou plastifier la sous-structure au delà de la solution globale lors des itérations locales.

On peut estimer que ces deux défauts sont liés à une mauvaise représentation par les conditions d'interface du reste de la structure. C'est à partir de cette observation que nous décidons de mettre en place une approche mixte qui permet de jouer sur l'opérateur d'impédance afin de représenter correctement le voisinage d'une sous-structure. Dans le cadre de l'utilisation du lagrangien augmenté, on arrive tout naturellement à une extension non linéaire de l'approche FETI 2LM. A noter qu'il est possible par un changement de variable de transformer la résolution du problème tangent mixte en un problème primal et de profiter des performances de l'approche BDD, on a alors la stratégie primale-mixte suivante :

**Initialisation :** une initialisation particulière n'est pas *a priori* requise, néanmoins il est possible de mener quelques itérations du solveur primal correspondant à la prédiction élastique.

**Problèmes locaux non linéaires :** les calculs non linéaires locaux sont pilotés par une variable mixte à l'interface. Le choix du solveur non linéaire local se fait de la façon identique aux stratégies précédentes.

**Résolution du problème tangent :** après transformation du problème tangent, on se ramène à un problème primal type BDD.

### 3 Résultats

Les trois approches ont été implantées dans le code de calcul éléments finis Zebulon. Nous proposons de les valider sur un cas académique, celui d'un poutre 3D en traction dont le comportement est régi par une loi élastique endommageable. Les stratégies ont été introduites dans le cas d'une formulation hyperélastique mais les idées se généralisent aux matériaux avec variables internes, les idées restant les mêmes mais l'écriture théorique de la stratégie est plus complexe. Le tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit à l'aide d'une variable d'endommagement –scalaire–  $d(u(t))$  :

$$\sigma(u(t)) = (1 - d(u(t))) \mathcal{K} : \nabla^s(u(t)) \quad \text{avec} \quad d(u(t)) = \frac{\sqrt{Y_m(u(t))} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}}$$

$Y_m$  désignant le maximum de la force thermodynamique  $Y$  sur l'histoire de la résolution.

$$Y_m(u(t)) = \sup_{\tau \leq t} Y(u(\tau)) \quad \text{with} \quad Y(u(t)) = \frac{1}{2} \varepsilon(u(t)) : \mathcal{K} : \varepsilon(u(t))$$

Pour une étude détaillée de ce type de comportement, on pourra se référer à [10]. On résume les performances de la stratégie dans le tableau 1 pour les trois conditions d'interface présentées et dans le cas d'une décomposition de domaine linéaire (donc utilisée comme solveur du problème tangent) ou non linéaire (directement utilisée pour résoudre le problème non linéaire). Dans le cas non linéaire, les problèmes locaux sont tous résolus avec la même précision et le critère d'erreur se fait sur la norme du résidu d'interface.

Conditions d'interface	Solveur d'interface	Iterations globales	Iterations locales
primale	linéaire	5	–
	non linéaire	1 + ini	4
duale	linéaire	5	–
	non linéaire	1 + ini	5
mixte	linéaire	5	–
	non linéaire	1 + ini	2

Tableau 1 – Comparaison entre les différentes approches

Il est difficile sur cet exemple de tirer des conclusions sur les spécificités de chaque méthode. A noter cependant plusieurs choses : l'utilisation de conditions en efforts peut amener à une propagation des dégradations instables dans les sous-structures. L'utilisation de conditions mixtes permet de régler ce problème et le choix d'un bon opérateur d'augmentation permet d'améliorer la convergence des problèmes locaux.

## 4 Conclusion

Dans ce papier, trois méthodes de décompositions de domaine non linéaire sont présentées. Introduites dans un état d'esprit similaire aux méthodes de décomposition de domaine linéaire, elles proposent de condenser le problème non linéaire sur les interfaces de la décomposition de domaine par l'introduction d'un opérateur d'interface non linéaire (version non linéaire du complément de Schur classique) et de résoudre cette équation d'interface par un algorithme de Newton Raphson. On notera au passage qu'il est envisageable d'utiliser d'autres algorithmes pour résoudre le problème condensé. Le calcul du résidu du problème non linéaire condensé nécessite la résolution de problèmes locaux non linéaires indépendants par sous-structures, donc résolubles en parallèles par un algorithme non linéaire quelconque adapté. Des conditions aux limites mixtes lors des relocalisations peuvent également être utilisées pour contrôler les itérations non linéaires locales. Des résultats sont présentés afin d'illustrer le comportement des 3 méthodes. Sur cet exemple simple, peu de conclusions peuvent être tirées sur les particularités de chaque méthode, aussi la première perspective sera de définir un futur cas test pertinent vis à vis de ce besoin. A noter cependant que concernant la méthode duale, des résultats quantitatifs ont déjà été présentés dans [8].

## Références

- [1] L. Badaea. On the Schwarz alternating method with more than two subdomains for nonlinear monotone problems. *SIAM Journal Numerical Analysis*, Volume 28, Issue 1, pp. 179-204, 1991.
- [2] P. Cresta, O. Allix, C. Rey, S. Guinard. Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : application to post-buckling analyses. *Computer Methods in Applied Mechanical and Engrineering*, Volume 196, Issue 8, pp. 1436-1446, 2007.
- [3] Z. Dostal, A. Friedlander et S.A. Santos. Solution of contact problems of elasticity by FETI domain decomposition. *Contemporary Mathematics*, vol. 218, pp. 82-93, 1998.
- [4] M. Fortin, R. Glowinski. Méthodes de Lagrangien augmenté : Applications à la résolution numérique de problèmes aux limites. *Dunod-méthodes mathématiques de l'informatique*, 1982
- [5] P. Gosselet, C. Rey. Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Volume 13, Issue 4, pp. 515-572, 2007.
- [6] P. Kerfriden, O. Allix, P. Gosselet. A three-scale domain decomposition method for the 3D analysis of debonding in laminates. *Computational Mechanics*, submitted.
- [7] P. Ladevèze, A. Nouy, O. loiseau. A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanical and Engrineering*, Volume 191, pp. 4869-4891, 2002.
- [8] J. Pebre, C. Rey, P. Gosselet. A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *International Journal for Multiscale Computational Engrineering* Volume 6, Issue 3, pp. 251-262, 2008.
- [9] C. Rey, J. Pebre, P. Gosselet. Non-overlapping domain decomposition for nonlinear elasticity problems : DD with nonlinear localisation. *18th International Conference on Domain Decomposition*, Jerusalem - Israël, 2008.
- [10] J. Besson, G. Cailletaud, J. L. Chaboche, S. Forest. Mécanique non linéaire des matériaux. *Hermès - Lavoisier*.