



**HAL**  
open science

## Il Problema di Platone

Marco Panza, Andrea Sereni

► **To cite this version:**

Marco Panza, Andrea Sereni. Il Problema di Platone: UNA STORIA DELLA FILOSOFIA DELLA MATEMATICA E UN'INTRODUZIONE AL DIBATTITO CONTEMPORANEO. 2009. hal-00433002

**HAL Id: hal-00433002**

**<https://hal.science/hal-00433002>**

Preprint submitted on 18 Nov 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MARCO PANZA & ANDREA SERENI

# IL PROBLEMA DI PLATONE.

UNA STORIA DELLA FILOSOFIA DELLA MATEMATICA  
E UN'INTRODUZIONE AL DIBATTITO CONTEMPORANEO

CAROCCHI, ROMA

2009

L'intero libro è frutto di un intenso lavoro comune. Ogni sua parte è stata oggetto di numerose discussioni, e è il frutto di commenti, suggerimenti e revisioni reciproche. Le responsabilità finali vanno tuttavia distinte come segue: quella della Prefazione è comune; quella dell'Introduzione, dei capitoli I, II, e III, dei §§ IV.1 e IV.4, del capitolo V, e del §VII.5 è di Marco Panza; quella dei §§ IV.2 e IV.3, e dei capitoli VI e VII (escluso il §VII.5) è di Andrea Sereni.

## INDICE

### **PREFAZIONE**

### **INTRODUZIONE**

1. Il platonismo in filosofia della matematica
  - 1.1. Esistenza di oggetti astratti
  - 1.2. Che cos'è un oggetto astratto?
  - 1.3. Che cos'è un oggetto matematico?
  - 1.4. Il platonismo aritmetico
  - 1.5. Che cos'è un oggetto ?
  - 1.6. Le virtù del platonismo
  - 1.7. Platonismo, realismo, oggettività
  - 1.8. Alcune difficoltà del platonismo
2. Il nominalismo in filosofia della matematica
  - 2.1. Parafrasi
  - 2.2. Asserti senza contenuto
  - 2.3. Empirismo in filosofia della matematica
  - 2.4. Gli asserti matematici sono veri solo se lo sono vacuamente
  - 2.5. Finzionalismo
3. L'argomento di indispensabilità

### **I. IL PROBLEMA DI PLATONE**

1. Il problema di Platone
2. Aristotele fra platonismo e anti-platonismo
3. Proclo: l'interpretazione neo-platonista della geometria di Euclide
4. Kant: la reinterpretazione trascendentale dell'aritmetica e della geometria classiche

### **II. DA FREGE A GÖDEL (PASSANDO PER HILBERT)**

1. Il platonismo logicista di Frege
  - 1.1. L'evoluzione dell'analisi fra sette e ottocento: il contesto storico del programma di Frege
  - 1.2. Il sistema formale di Frege
  - 1.3. Le definizioni dei numeri naturali
  - 1.4. Le linee guida per una definizione dei numeri reali
  - 1.5. La contraddizione del sistema formale di Frege
2. Russell e la scissione fra logicismo e platonismo.
3. La teoria degli insiemi
4. Il problema dei fondamenti
  - 4.1. Carnap fra logicismo e empirismo logico
  - 4.2. Hilbert e la fondazione assiomatica delle geometria
  - 4.3 Hilbert, il programma formalista e l'emergenza della metamatemática
  - 4.4 I teoremi di Gödel

#### 4.5 La strategia intuizionista

#### 5. Il platonismo di Gödel e l'avvento dell'intuizione matematica

### III. IL DILEMMA DI BENACERRAF

1. Ciò che i numeri naturali non possono essere (secondo Benacerraf)
2. Il dilemma di Benacerraf
3. Una mappa delle risposte al dilemma di Benacerraf: le soluzioni contemporanee del problema di Platone

### IV. RISPOSTE NON CONSERVATIVE AL DILEMMA DI BENACERRAF

1. Il nominalismo di Field: matematica senza verità e scienza senza numeri
2. Matematica come finzione: Field e Yablo
3. Lo strutturalismo eliminativo e la sua versione modale
4. Maddy e le origini cognitive della teoria degli insiemi

### V. RISPOSTE CONSERVATIVE AL DILEMMA DI BENACERRAF

1. Il neologicismo: una versione aggiornata del programma di Frege
2. Linsky e Zalta: matematica e logica (o metafisica) degli oggetti astratti
3. Una prima versione dello strutturalismo non-eliminativo: lo strutturalismo *ante rem*
4. Una seconda versione dello strutturalismo non-eliminativo: Parsons e il ruolo dell'intuizione

### VI. L'ARGOMENTO DI INDISPENSABILITÀ: STRUTTURA E NOZIONI FONDAMENTALI

1. La struttura dell'argomento e le sue diverse versioni possibili
2. L'argomento Quine-Putnam e quello di Colyvan
  - 2.1. L'argomento Quine-Putnam
  - 2.2. L'argomento di Colyvan
3. (In)dispensabilità
  - 3.1. Che cosa è indispensabile e per che cosa ?
  - 3.2. Che cosa significa essere (in)dispensabile?
    - 3.2.1. Il metodo delle parafrasi
    - 3.2.2. Equivalenza osservativa
    - 3.2.3. (In)dispensabilità e spiegazione
    - 3.2.4. Una chiarificazione generale della nozione di (in)dispensabilità
4. Il criterio di impegno ontologico di Quine
  - 4.1. Il criterio di Quine
  - 4.2. Una generalizzazione del criterio di Quine
5. Naturalismo

7. Olismo della conferma

## **VII. L'ARGOMENTO DI INDISPENSABILITÀ: IL DIBATTITO**

1. Contro l'indispensabilità

2. Contro il criterio di impegno ontologico

2.1 Esistenza e ontologia: la critica di Carnap

2.2 Oggettività senza oggetti: Putnam sulle descrizioni equivalenti

2.3 La "strada facile" per rigettare AI

2.4 Il finzionalismo come risposta a AI

3. Contro il naturalismo e contro il realismo scientifico

3.1 Il naturalismo di Maddy

3.2 Contro il realismo scientifico

4. Contro l'olismo della conferma

4.1 Le critiche al modello ipotetico-deduttivo della conferma

4.2 L'empirismo contrastivo di Sober

4.3 Maddy e l'obiezione della pratica scientifica

4.4 Resnik e AI pragmatico

5. Conclusioni

## PREFAZIONE

Lo scopo di questo libro è fornire un'introduzione alla filosofia della matematica rivolta a tutti coloro che sono attratti dall'idea di familiarizzare con l'argomento, anche senza possederne una conoscenza specifica.

Abbiamo cercato di strutturare la presentazione e di esprimerci nel corso dell'esposizione in modo da ridurre al minimo le conoscenze preliminari richieste per seguire il discorso. Ma un'introduzione non può introdurre a tutto, e la filosofia della matematica è un dominio di ricerca strettamente connesso con molti altri: la matematica stessa e la sua storia, la logica, la filosofia del linguaggio, la storia della filosofia, per non fare che gli esempi più ovvi. È quindi inevitabile che il lettore si imbatta, nelle pagine che seguono, in molte considerazioni che possono venire comprese appieno solo da chi possieda certe conoscenze, sia pure elementari, relative a discipline diverse, in un qualche senso più fondamentali.

Numerose altre introduzioni alla filosofia della matematica sono disponibili in commercio o nelle biblioteche, molte in lingua inglese, alcune in italiano. Fra queste il lettore interessato potrà consultare: Borga e Palladino (1997), Brown (1999), Piazza (2000), Shapiro (2000a), Giaquinto (2002), Lolli (2002), Cellucci (2007), Mancosu (2008a). Il nostro libro non potrà evitare di tornare su molti degli argomenti presentati e discussi in questi e in altri libri simili, ma si propone di perseguire il proprio scopo in modo diverso.

Le introduzioni alla filosofia della matematica cercano spesso di fornire un panorama più o meno esauriente della discussione filosofica sulla matematica intercorsa almeno a partire dalla fine del XIX secolo. Altre volte, la ricognizione storica viene ridotta al minimo per lasciare spazio all'esposizione critica delle principali opzioni su cui verte il dibattito più o meno contemporaneo. Qui abbiamo invece seguito una strategia diversa: abbiamo considerato un solo problema e una sola opzione filosofica volta a risolverlo; abbiamo ripercorso le tappe storiche principali di quest'ultima (capitoli I-II); abbiamo ricostruito a grandi linee il dibattito che si è sviluppato su di essa dagli anni sessanta del XX secolo, e che è tuttora in corso (capitoli III-V); e abbiamo infine condotto un'analisi dettagliata di un noto argomento avanzato in quel dibattito, e tuttora molto discusso (capitoli VI-VII).

Il problema sul quale ci siamo concentrati è quello dell'ontologia della matematica, quello che nel titolo del nostro libro chiamiamo 'il problema di Platone' (risulterà chiaro il perché nel §I.1). Un modo molto semplificato di presentarlo è il seguente. Posto che gli asserti della matematica (chiariremo fra poco ciò che intendiamo esattamente con 'asserti della matematica') parlino di qualcosa, di che cosa parlano? E, in caso contrario, a che cosa devono la loro intelligibilità? L'opzione che considereremo è quella nota con il nome di 'platonismo'. Essa asserisce, in modo molto generale, che tali asserti parlano di un dominio di oggetti astratti, che essi descrivono. L'argomento specifico in favore di tale opzione che

tratteremo nei capitoli VI-VII è il cosiddetto argomento di indispensabilità.

Siamo naturalmente consapevoli del fatto che, procedendo in questo modo, non forniamo che uno spaccato parziale della filosofia della matematica passata e presente, che si è invece concentrata su molti altri problemi, ha presentato e presenta molte altre opzioni, e ha preso in considerazione molti altri argomenti. Invece di dare un resoconto necessariamente superficiale di quest'ampissima gamma di questioni, ci è parso tuttavia utile limitare l'ampiezza della ricostruzione in modo da avere lo spazio necessario per entrare in un numero maggiore di dettagli e poter mostrare, per così dire, la filosofia della matematica all'opera, alle prese con un problema che è tuttora oggetto di molte discussioni. La nostra speranza è che la considerazione di un esempio specifico possa servire a familiarizzare il lettore con un frammento della filosofia matematica dei nostri giorni, sperando che ciò possa, almeno per qualcuno, aprire la strada a studi ulteriori. Per pervenire a questo scopo, abbiamo considerato utile redigere i capitoli del nostro libro in tre stili diversi.

I capitoli I e II presentano una ricostruzione storica (necessariamente sommaria) e procedono in modo cronologico, sia pure cercando di insistere sui legami intrinseci fra le diverse posizioni discusse. Il loro scopo è fornire un *background* storico che riteniamo necessario per comprendere la rilevanza del dibattito contemporaneo. La filosofia, anche nelle sue manifestazioni più tecniche e particolari, è in gran parte motivata dal legame che essa intrattiene con la propria tradizione, e nessuna discussione filosofica può davvero essere completamente compresa se non sullo sfondo di quest'ultima.

I capitoli III, IV e V presentano una ricostruzione sincronica di diverse opzioni, alcune in favore del platonismo, altre critiche verso di esso. Abbiamo scelto di ordinarle in base alla risposta che esse suggeriscono al dilemma avanzato da Paul Benacerraf all'inizio degli anni '70, che costituisce, a nostro parere, una riformulazione moderna del problema di Platone, o almeno di un suo aspetto cruciale. Lo scopo di questi capitoli è fornire un panorama articolato e introduttivo della discussione attuale su questo problema, che la filosofia contemporanea della matematica, come il primo capitolo dovrebbe mostrare, eredita dalla sua tradizione.

I capitoli VI e VII presentano una ricostruzione sistematica di un argomento particolare cercando di mettere in luce, oltre ai suoi presupposti, le sue motivazioni, e le sue difficoltà, anche certe condizioni necessarie e/o sufficienti per una sua appropriata formulazione. Qui lo scopo è dare uno spaccato molto più circostanziato della discussione in corso, facendo emergere non solo e non tanto un confronto fra diverse opzioni filosofiche generali presentate in una forma più o meno compiuta, ma un lavoro di dettaglio, spesso compiuto senza avere la certezza di pervenire a un esito davvero soddisfacente. Si tratta, per così dire, della filosofia all'opera su una problematica particolare, che, come vedremo, è stata suggerita, verso la metà del secolo, da uno dei maggiori interpreti recenti della tradizione empirista; Willard van Orman Quine. Il contrasto fra questa tradizione e quella platonica che si congiungono nell'argomento di indispensabilità è una delle ragioni principali del suo



interesse.

La scelta di dedicare due capitoli a tale argomento è motivata dal fatto che esso coinvolge molte questioni cruciali per la filosofia della matematica contemporanea. Ciò non significa, ci teniamo a chiarirlo, che la nostra intenzione sia quella di appellarci a tale argomento (una volta opportunamente formulato) per convincere il lettore della bontà dell'opzione platonista nella versione che esso supporta. Anzi, riteniamo che questo argomento abbia molte lacune e presenti molte difficoltà, alcune delle quali saranno oggetto di discussione. Il nostro unico scopo è mostrare un esempio specifico del dibattito contemporaneo, e dare così al lettore la possibilità di familiarizzarsi con la filosofia della matematica contemporanea e di orientarsi nei suoi numerosi labirinti.

Anche la scelta di trattare il problema di Platone è parziale. Altri problemi tipici della filosofia della matematica ne differiscono non solo per il loro contenuto specifico, ma anche per la loro stessa natura. Possiamo, a grandi linee, distinguere quattro tipi di problemi propri alla filosofia della matematica, per come essa si è sviluppata nel corso dei secoli.

Vi sono innanzitutto problemi fondazionali: problemi che riguardano il modo migliore di fondare, giustificare, organizzare l'edificio della matematica o di una sua parte.

Vi sono poi problemi interpretativi generali relativi alla natura della matematica stessa, quali appunto quello di Platone, e altri variamente connessi, per esempio quello della natura della conoscenza matematica (vi è conoscenza in matematica, e, se sì, di che tipo?), o quello del carattere logico delle verità matematiche o dei teoremi della matematica (se in matematica vi sono verità, qual è la loro fonte? Sono analitiche o sintetiche? *A priori* o empiriche? E se non ve ne sono, che cosa legittima i suoi teoremi? Per fare solo un esempio semplice, se  $'3+5=8'$  non è un asserto vero, in che cosa si distingue da  $'3+5=9'?$ ).

Vi sono ancora problemi interpretativi più specifici, relativi a particolari teorie matematiche, o meglio alla pratica matematica, così come essa ha preso corpo nel corso della storia. Mancosu (2008a) fornisce una panoramica di alcuni di questi problemi, quali quello della disponibilità di un criterio per riconoscere argomenti dotati di un potere esplicativo, o quello del ruolo della visualizzazione o più in particolare del ragionamento diagrammatico in matematica, o ancora quello della possibilità di avanzare un principio di purezza che permetta di favorire certe dimostrazioni o teorie rispetto a altre.

Vi sono infine problemi relativi all'applicabilità della matematica, a ciò che giustifica tale applicabilità o al modo in cui essa prende corpo, al ruolo che la matematica ha nelle scienze empiriche e nella nostra vita quotidiana.

Molti filosofi della matematica hanno anche creduto e continuano a credere che il loro compito principale consista nel celebrare la grandezza o perfino la bellezza della matematica, nel riconoscere e rendere omaggio all'onore che essa fornisce al nostro spirito, secondo la nota affermazione di Carl Jacobi, matematico della prima metà del XIX secolo, che sostenne, in polemica con Joseph Fourier, che l'unico scopo della matematica è appunto "l'onore dello spirito umano". Pur riconoscendo senza mezzi termini tale grandezza, sentendo il fascino irresistibile esercitato da molte teorie matematiche e ammettendo che

una celebrazione di questa grandezza e di questo fascino sia doverosa, pensiamo che questo compito non sia proprio alla filosofia della matematica.

Rimangono quindi i problemi filosofici dei quattro tipi indicati. Essi non sono certo separati fra loro, e anzi molti, anche se cadono sotto diverse tipologie tra quelle indicate, sono fra loro così strettamente connessi che è difficile capire come se ne possa affrontare uno senza affrontare anche gli altri almeno in parte. Una delle caratteristiche tipiche di un modo assai diffuso di fare filosofia, quello contraddistinto dal termine 'filosofia analitica', è tuttavia proprio quella di distinguere in modo minuzioso fra problemi diversi, in modo da essere in grado di affrontare ognuno di essi con la dovuta precisione e finezza, senza perdersi in considerazioni eccessivamente generali. Si tratta di un buon modo di fare filosofia, anche se non riteniamo che sia l'unico che meriti rispetto. Una grande parte dei filosofi e degli argomenti di cui tratteremo devono certamente essere considerati alla luce di questo modo di fare filosofia. E noi stessi ci siamo sforzati di operare distinzioni le più fini possibili, almeno compatibilmente con il grado di approfondimento che è appropriato in questa sede. Non riteniamo tuttavia che la nostra debba essere considerata come un'introduzione alla filosofia analitica della matematica.

Ciò dipende in gran parte dal fatto che, contrariamente a quanto avviene in altri settori della filosofia contemporanea, in filosofia della matematica la distinzione fra un orientamento propriamente analitico e altri orientamenti non è netta. Una ragione di questo è che la filosofia della matematica è necessariamente assai sensibile alle caratteristiche della matematica stessa e alle preoccupazioni metodologiche dei matematici, cosa che impone certe direzioni di ricerca e porta a scartarne altre, indipendentemente dall'orientamento filosofico preferito. Un'altra ragione è che la matematica presenta un'evoluzione tecnica costante e anzi possiede una vera e propria dimensione storica che non può venire apertamente negata senza aprire il campo a concezioni implausibili, cosa che rende difficile un approccio che faccia completa astrazione dalla pratica matematica reale e da considerazioni storiche di un qualche genere, come invece avviene in altri campi dell'orientamento strettamente analitico. Una terza ragione è che la scena del dibattito filosofico a proposito della matematica è stata, fra gli ultimi vent'anni del XIX secolo e i primi settant'anni del ventesimo, largamente dominata dal problema dei fondamenti della matematica, cosa che ha indotto un confronto inevitabile e non marginale fra autori come Gottlob Frege, Bertrand Russell, Rudolf Carnap, che la tradizione analitica riconosce apertamente come propri antenati, e altri, come Henri Poincaré, David Hilbert, Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Hermann Weyl, Kurt Gödel, che difficilmente si possono ricondurre a questa tradizione.

Questi sono in fondo tre modi diversi di articolare la stessa ragione, la quale ha prodotto una grande mescolanza di sensibilità, stili, competenze, formazioni e punti di vista. Per esempio, i problemi del terzo tipo indicato sono oggi affrontati da molti filosofi che non si direbbero certo risolutamente analitici, ma che guardano a essi con un bagaglio intellettuale e una competenza tecnica che sono invece tipici del mondo analitico. Ciò non impedisce

loro di basare buona parte delle loro riflessioni su considerazioni di carattere storico o su indagini approfondite delle componenti più tecniche di certe teorie matematiche. Forse la filosofia della matematica è un terreno privilegiato per sperimentare collaborazioni e orientamenti eterogenei che in altri contesti parrebbero difficili.

### **Convenzioni terminologiche**

Indichiamo di seguito alcune convenzioni terminologiche che rispetteremo in tutto il corso del libro. Come tutte le convenzioni, anche queste sono, almeno parzialmente, arbitrarie. In particolare esse sono spesso motivate da ragioni di comodità espositiva e di uniformità, non certo dalla pretesa di fissare un lessico stabile o di negare la legittimità di altri usi. Lo sottolineiamo perché le espressioni cui esse si riferiscono, e le rispettive traduzioni, sono spesso impiegate con significati non completamente precisati, e talvolta anche leggermente diversi fra loro. La possibilità di adattare le nostre traduzioni, in particolare dal tedesco e dall'inglese, alle nostre convenzioni ci permetterà di evitare tuttavia noiose precisazioni per segnalare usi di volta in volta discordi. Oltre alle seguenti, adotteremo anche altre convenzioni terminologiche che non ci è sembrato necessario segnalare, dal momento che l'uso che faremo delle parole rilevanti (che abbiamo cercato di rendere il più possibile stabile) ci sembra sufficiente a rendere manifesto il significato che intendiamo attribuire loro. Altre convenzioni ancora, relative a parole che useremo meno frequentemente, saranno introdotte nel corso dell'esposizione.

Una formula di un dato linguaggio intesa come tale, in quanto mera successione di simboli o parole rispondente a certe regole di composizione, è un enunciato di tale linguaggio. Un enunciato può tuttavia anche essere inteso per la funzione che esso svolge (eventualmente a fronte di un'appropriata interpretazione dei simboli o delle parole che lo compongono). Se tale funzione è quella di asserire qualcosa, ovvero di dire che certe cose stanno in un certo modo, allora esso esprime un asserto, del quale si dirà che è formulato nel linguaggio di questo enunciato. Se sugli enunciati di un certo linguaggio è definita un'opportuna relazione di equivalenza, allora un solo asserto può essere espresso da diversi enunciati di tale linguaggio, ognuno dei quali ne fornirà dunque una diversa formulazione. Data una di queste formulazioni, si dice spesso che le altre sono delle riformulazioni dell'asserto espresso dalla prima. Qualche volta la relazione di equivalenza che lega fra loro enunciati che esprimono lo stesso asserto può anche essere definita su enunciati di linguaggi diversi. Si dirà allora che un certo asserto, in quanto espresso sotto forma di un enunciato di uno di questi linguaggi, possiede una riformulazione negli altri linguaggi o è riformulabile in essi. Un asserto può quindi essere inteso come una classe di equivalenza di enunciati di uno stesso linguaggio o di linguaggi diversi, anche se esso non può manifestarsi, esserci dato, che tramite uno o l'altro fra tali enunciati. Inteso come un rappresentante della classe in questione, un enunciato, sarà così, per ovvie ragioni di comodità, chiamato direttamente 'asserto'.

Teniamo distinto l'asserto, in quanto oggetto linguistico, dall'atto linguistico di asserire

qualcosa (atto generalmente detto ‘asserzione’), che uno o più soggetti possono compiere. Distinguiamo inoltre l’asserto da ciò che esso asserisce, cioè dal suo contenuto, che è generalmente chiamato ‘proposizione’ (anche se quest’ultimo termine è a volta impiegato da certi autori come sinonimo di ‘asserto’).

Intendiamo l’espressione italiana ‘asserire un asserto’ in due sensi. In un primo senso, che potremmo chiamare proposizionale, tale espressione indica l’atto di asserire che qualcosa abbia luogo o si dia, che le cose stanno come l’asserto (inteso in un certo modo) ci dice che stanno. In un secondo senso, essa indica l’atto di compiere un proferimento con forza assertoria: si asserisce un asserto nel senso che si pronuncia o si scrive ciò che lo esprime. Lasciamo che il senso in cui tale espressione è di volta in volta impiegata emerga dal contesto.

Nel nostro libro tratteremo per lo più di asserti (tratteremo di enunciati e proposizioni solo in qualche caso sporadico). Ciò dipende dal fatto che tanto in matematica che nelle scienze empiriche, gli enunciati non sono generalmente studiati come tali — cosa che avviene piuttosto in certe branche della logica o della linguistica —, ma considerati piuttosto per gli asserti che essi esprimono.

Useremo il termine ‘teoria’ per riferirci a un insieme di asserti che, nella maggior parte dei casi, supponiamo essere accettati o essere stati accettati da qualcuno, in generale da un’intera comunità scientifica (cosa che significa semplicemente che i membri di tale comunità asseriscono o hanno asserito tali asserti o hanno reso manifesta la loro disponibilità a farlo). Per sottolineare le connessioni che spesso si suppone esistano fra tali asserti e/o per rispettare gli usi linguistici degli autori di cui tratteremo, parleremo a volte di sistemi o corpi di asserti, sempre ritenendo comunque che essi formino delle teorie più o meno organizzate. In generale, ma non necessariamente, supporremo d’altra parte che una teoria sia un insieme di asserti deduttivamente chiuso sotto appropriate regole deduttive (ovvero che se la teoria include certi asserti allora include anche tutti quelli — generalmente infiniti in numero — che da essi seguono in base a regole deduttive opportunamente specificate). In certi casi parleremo di parti o porzioni di una teoria, o di sotto-teorie, intendendo con ciò sottoinsiemi opportunamente selezionati degli insiemi di asserti che formano una data teoria (e che sono ovviamente, a loro volta, delle teorie). Diremo ‘matematiche’ le teorie generalmente considerate tali, senza cercare di specificare in generale ciò che tale aggettivo significa esattamente. In accordo con un uso diffuso soprattutto nei testi di lingua inglese, chiameremo invece ‘scientifiche’ le teorie generalmente assegnate alle scienze empiriche, in quanto distinte non solo dalle teorie matematiche, ma anche da quelle logiche, metafisiche, etc.

Un asserto di una certa teoria sarà quindi un asserto che appartiene a questa teoria. Più in generale, parleremo di asserto della matematica, dell’aritmetica o della geometria per riferirci rispettivamente a asserti che appartengono a una qualche teoria matematica, una qualche versione dell’aritmetica o una qualche teoria geometrica. Tali asserti sono qualche volta anche detti ‘teoremi’ o ‘conseguenze [di questa teoria]’. Ciò avverrà, in generale,

quando si vorrà sottolineare che le teorie in questione sono tali che alcuni dei loro asserti seguono (in base a delle regole deduttive accettate) da certi altri loro asserti che sono allora detti ‘assiomi’. Questo avviene generalmente nel caso delle teorie matematiche o logiche, e avviene comunque ogni volta che le teorie in questione sono deduttivamente chiuse. In qualche caso distingueremo fra teorie matematiche pure e impure. Le prime sono intese includere solo asserti formulati in un linguaggio specificatamente matematico; le seconde sono invece intese includere anche asserti in cui, a fianco di elementi di un linguaggio specificatamente matematico, intervengono elementi di un linguaggio non matematico, generalmente scientifico. Ne segue che una teoria matematica impura può essere, e generalmente è intesa essere, una teoria scientifica, anche se non tutte le teorie scientifiche sono ovviamente teorie matematiche impure: spesso quelle che lo sono sono dette ‘matematizzate’.

Con ‘asserto matematico’ ci riferiamo, più genericamente, a un asserto formulato nel linguaggio di una qualche teoria matematica (generalmente pura, ma eventualmente anche impura, a condizione che tale asserto presenti comunque elementi di un linguaggio specificatamente matematico: in questi casi parleremo anche di ‘asserti matematici impuri’). Con ‘asserto nominalista’ ci riferiamo invece a un asserto formulato in un linguaggio puramente nominalista (nel §IV.1 si chiarirà che cosa si intende con ‘linguaggio nominalista’; sommariamente, si tratta di un linguaggio che concerne unicamente oggetti concreti). Parleremo di riformulazione nominalista di un asserto matematico quando l’asserto matematico in questione è riformulato in un linguaggio nominalista. Una tale riformulazione è spesso detta ‘parafrasi’. Parleremo di ‘parafrasi’, più in generale, anche per indicare altre riformulazioni di certi asserti dati, non necessariamente formulate in un linguaggio nominalista.

In base a queste convenzioni, l’asserto ‘ $5+8=12$ ’ è tanto un asserto matematico (in particolare aritmetico) che un asserto della matematica (in particolare dell’aritmetica, o di ogni versione di essa), mentre l’asserto ‘ $5+8=13$ ’ è un asserto matematico (aritmetico), ma non un asserto della matematica (dell’aritmetica). L’asserto ‘l’accelerazione di gravità ai poli terrestri è uguale a  $9,823 \text{ m/s}^2$ ’ è un asserto di una teoria matematica impura che è anche una teoria scientifica, in particolare una qualche versione della teoria della gravitazione. L’asserto ‘i poli terrestri subiscono una migrazione nel tempo’ è un asserto non matematico (a meno che non si voglia considerare ‘poli’ un termine di un linguaggio geometrico) proprio di una teoria scientifica, in particolare della geologia. Così come gli asserti ‘i poli terrestri sono sempre ghiacciati’ e ‘i poli terrestri sono sempre fioriti’ esso è anche un asserto nominalista.

Una teoria sarà detta ‘vera’ se e solo se tutti i suoi asserti sono veri (secondo una qualche concezione della verità).

Useremo le virgolette singole per i casi di menzione (per esempio diremo che ‘3’ è un termine singolare), e le virgolette doppie per le citazioni (di cui indicheremo ogni volta la fonte). Useremo invece le virgolette uncinato per delimitare espressioni che designano

proprietà, relazioni o concetti (per esempio, diremo che sotto il concetto  $\neg$  (essere) identico a  $0 \neg$  cade un solo oggetto).

### **Ringraziamenti**

Molte persone hanno, in forma diversa, reso possibile o favorito la scrittura e la pubblicazione del nostro libro, anche se solo noi siamo responsabili di ogni eventuale errore, imprecisione e omissione. Le ringraziamo tutte. Fra esse, ricordiamo: Andrew Arana, Mark van Atten, Michael Beaney, Jean-Pierre Belna, Andrea Bianchi, Claudia Bianchi, Francesca Bocconi, Jacob Busch, Roberto Casati, Annalisa Coliva, Giovanna Corsi, Francesco Berto, Pierre Cassou-Nogues, Karine Chemla, Michael Detlefsen, Michele Di Francesco, Jacques Dubucs, Matti Eklund, José Feirrerós, Paolo Freguglia, Maria Carla Galavotti, Massimo Galuzzi, Sébastien Gandon, Valeria Giardino, Maria Elinda Giusti, Pierluigi Graziani, Bob Hale, Brice Halimi, Geoffrey Hellman, Paolo Leonardi, David Liggins, Rossella Lupacchini, Paolo Mancosu, Kennet Manders, Daniele Molinini, Gian Luca Mori, Sebastiano Moruzzi, Alberto Naibo, Fabrice Pataut, Eva Picardi, Matteo Plebani, David Rabouin, Ferruccio Repellini, Jean-Michel Salanskis, Marco Santambrogio, François Schmitz, Stewart Shapiro, Ivahn Smadja, Mark Steiner, Jean-Jacques Szczeciniarz, Paolo Togni, Alfredo Tomasetta, Stephen Yablo, Edward Zalta. Molti dei temi affrontati in questo libro sono stati oggetto di discussione e presentazione in diversi seminari e convegni, a tutti gli organizzatori e i partecipanti dei quali vanno i nostri ringraziamenti. In particolare ci piace citare: i seminari del gruppo *Cogito* delle Università di Bologna e di Modena e Reggio Emilia, il *Seminario di Filosofia Analitica* dell'Università di Bologna, il *Seminario del Venerdì* dell'Università di Parma, il *Seminario di Logica e Filosofia del Linguaggio* dell'Università di Padova, il *Seminario di Filosofia della Matematica* dell'Università di Paris-Diderot e i numerosi workshop organizzati nel suo ambito, i seminari del progetto *Ideals of Proofs*, il seminario *PhilMath* dell'IHSPT di Parigi, l'*Arché-Paris Workshop on Abstract Entities* (Parigi, febbraio-marzo 2008), l'*Eigth National Conference of the Italian Society for Analytical Philosophy*, (Bergamo, settembre 2008), la *Trends in Logic 2009 Conference* (Francoforte, 1-4 settembre 2009). La ricerca di Andrea Sereni è stata resa possibile da un assegno di ricerca presso la Facoltà di Filosofia dell'Università Vita-Salute San Raffaele di Milano.

Marco Panza & Andrea Sereni

Bologna, Modena, Parigi, maggio-ottobre 2009.

## INTRODUZIONE

### 1. Il platonismo in filosofia della matematica

In filosofia della matematica, il platonismo è la tesi che asserisce che gli asserti matematici, in particolare i teoremi delle teorie matematiche, parlano di oggetti astratti che formano un dominio che questi teoremi descrivono.

Il termine 'platonismo' rimanda ovviamente a Platone, ma non vuole denotare la sua filosofia della matematica. Come vedremo nel capitolo I, Platone può certo annoverarsi fra i platonisti in filosofia della matematica (anche se non tutti concordano con questo) e il platonismo può intendersi come una risposta a un problema posto da Platone stesso, anzi al problema di Platone, secondo l'espressione che abbiamo scelto per il titolo del nostro libro. Ma il platonismo può anche essere sostenuto a partire da concezioni filosofiche molto diverse da quelle di Platone. Tale termine deve quindi essere inteso come un termine specifico del lessico filosofico contemporaneo.

#### 1.1. *Esistenza di oggetti astratti*

Un modo usuale di formulare la tesi platonista in filosofia della matematica consiste nell'asserire l'esistenza di certi particolari oggetti astratti, generalmente detti 'oggetti matematici', e nel sostenere che le teorie matematiche vertono su di essi, ovvero ci dicono come essi si comportano, quali proprietà possiedono, in quali relazioni stanno fra di loro.

Il ricorso alla nozione di esistenza non rende tuttavia, di per sé, le cose più chiare. In particolare, non serve a chiarire cosa il platonista intenda quando parla di oggetti astratti. Al contrario, è spesso attraverso il chiarimento della natura di certi oggetti astratti che si perviene a capire che cosa possa voler dire che essi esistono.

Prendiamo un semplice esempio. La nazionale italiana di calcio sembra dover essere intesa come un oggetto: essa è denotata da un nome proprio che sembra possedere un riferimento preciso; compie certe azioni, come quella di vincere il campionato del mondo; si distingue da altre nazionali, come quella francese di calcio o quella italiana di pallacanestro. Lo statuto di questo oggetto appare tuttavia ben diverso da quello dei singoli giocatori che, in una data occasione, scendono in campo con la maglia azzurra. Questi li possiamo incontrare, vedere, toccare. È difficile fare lo stesso con la nazionale per cui essi giocano. Un modo di rendere conto di questa differenza è proprio quello di riconoscere che i primi sono oggetti concreti, mentre la seconda è un oggetto astratto. Ora, vi è certamente un senso abbastanza chiaro in cui si può dire che la nazionale di calcio italiana esiste. Così come si può dire, al contrario, che non esiste la nazionale italiana di automobilismo. Ma in questo caso è la nostra comprensione della natura di quel particolare oggetto astratto che è la nazionale italiana di calcio che ci fa capire in che senso si possa dire che tale oggetto

astratto esiste, non viceversa.

Allo stesso modo, sembra che solo l'eventuale comprensione della natura degli oggetti matematici possa farci capire in che senso si possa dire che essi esistono. Il compito principale di un filosofo platonista sarebbe allora quello di spiegare in che senso si possa plausibilmente parlare di oggetti matematici, come essi si possano identificare e, quindi, in che senso si possa dire che esistono, e se vi sono buone ragioni per dirlo. Tuttavia, vi sono anche argomenti per il platonismo che non presuppongono necessariamente una chiarificazione del concetto di oggetto astratto. Uno di questi argomenti, — il cosiddetto argomento di indispensabilità — conduce semplicemente a concludere che esistono oggetti matematici, lasciando che siano altre considerazioni a stabilire qual è la natura precisa di tali entità.

Nel seguito, manterremo ferma la caratterizzazione del platonismo in filosofia della matematica come la tesi che asserisce l'esistenza di certi oggetti astratti su cui vertono le teorie matematiche, ma manterremo nel contempo aperto il problema di comprendere il senso più corretto da assegnare a una simile affermazione di esistenza.

Questa prima osservazione ci fa già capire che il platonismo è tutt'altro che una tesi scontata. Non solo la sua giustificazione è difficile. Lo è anche la sua formulazione.

## 1.2. *Che cos'è un oggetto astratto ?*

Una difficoltà simile a quella relativa al senso da assegnare all'affermazione di esistenza nel caso di oggetti astratti, e in particolare matematici, appare anche in relazione al senso da assegnare all'affermazione che certi oggetti sono astratti, e in particolare matematici.

Fra i filosofi contemporanei non vi è accordo sul modo di tracciare la distinzione fra oggetti astratti e oggetti concreti. Questo può sembrare strano, visto che si tratta di una distinzione comunemente accettata e considerata di cruciale importanza. Sono spesso esempi particolari, come quello della nazionale italiana di calcio, del *Gattopardo* (in quanto distinto dalle sue singole copie), delle proposizioni, degli insiemi, o dei numeri naturali — i numeri interi (finiti) non negativi: zero, uno, due, tre, ... — che spingono questo o quel filosofo a pensare che si debba ammettere questa distinzione per rendere conto di certi fenomeni. Ma quando da questi esempi si cerca di passare al caso generale e ci si chiede, appunto, come la nozione generale di oggetto astratto debba essere compresa, intervengono molti dubbi e si manifestano molte differenze.

Anche in questo caso è la comprensione della natura particolare di certi oggetti che ci fa spesso comprendere in che senso si possa dire che essi sono astratti, piuttosto che viceversa. Ovviamente non mancano tentativi di chiarire la nozione di oggetto astratto in generale, fra i quali segnaliamo Michael Dummett (1973, cap. 14), Edward Zalta (1983), e di Bob Hale (1987)<sup>1</sup>.

Piuttosto che adottare una fra le diverse proposte di chiarimento, tuttavia, ci pare più opportuno, in un testo introduttivo, ammettere che spetti al singolo filosofo platonista l'onere di articolare la propria concezione degli oggetti astratti, e di quelli matematici in

---

<sup>1</sup>Per una panoramica, cf. Rosen (2001).



particolare. Concezioni diverse, alcune delle quali verranno discusse nel seguito, possono così emergere in base a diversi modi di articolare e difendere il platonismo.

### 1.3. *Che cos'è un oggetto matematico ?*

Le difficoltà relative alla formulazione del platonismo non finiscono qui. È infatti naturale domandarsi che cosa faccia di un oggetto, in particolare di un oggetto astratto, un oggetto matematico. Ancora una volta è difficile fornire una risposta generale.

Si può evitare la difficoltà sostenendo che il compito di un filosofo della matematica non è quello di stabilire in generale che cosa debba essere la matematica, o quindi quale debba essere la natura dei suoi oggetti, ma piuttosto quello di render conto di teorie matematiche accettate e cercare eventualmente di capire se esse possano o meno essere intese come descrizioni di determinati domini di oggetti. Una risposta positiva farebbe *ipso facto* annoverare il filosofo in questione tra i platonisti. Tale risposta includerebbe una caratterizzazione degli oggetti rilevanti, che sarebbero allora detti 'matematici' non perché soddisfino qualcosa un qualche criterio generale di matematicità, ma semplicemente in quanto si sarà stabilito che una certa teoria, generalmente considerata matematica, verte su di essi.

Ragionare in questo modo significa considerare la matematica come una realtà, o un fenomeno, che precede la filosofia della matematica, come un dato di cui questa cerca di rendere conto in qualche modo. Anche se un filosofo platonista che ragiona così pensasse che gli oggetti in questione preesistano alle teorie che vertono su di essi (così come un albero preesiste alla descrizione che di esso può dare la botanica), lascerebbe al matematico il compito di identificare gli oggetti da studiare e ai quali dedicare una teoria. Un tale modo di pensare sembra assai naturale e di fatto è così che la filosofia della matematica si è quasi sempre presentata: come una riflessione su porzioni di matematica già costituite come tali. Anche i filosofi che hanno cercato di fondare la matematica e hanno creduto di poter adempiere a tal compito suggerendo modi nuovi di definire certi oggetti matematici o di formulare certe teorie, hanno pur sempre ammesso che le nuove definizioni e formulazioni dovessero ricondurre agli stessi risultati già ottenuti entro teorie precedentemente accettate.

### 1.4. *Il platonismo aritmetico*

Ma se le cose stanno così, possiamo facilmente concepire la possibilità di prendere una posizione platonista solo limitatamente a una determinata teoria matematica, negando questa posizione per altre teorie, o semplicemente non pronunciandosi a questo riguardo di esse.

Un caso rilevante riguarda l'aritmetica<sup>2</sup>. Il platonismo aritmetico è la tesi che asserisce che gli asserti aritmetici parlano di un certo dominio di oggetti astratti identificati con i numeri naturali. Si tratta di una forma molto diffusa di platonismo. Essa è inoltre particolarmente rilevante sia per la centralità dell'aritmetica entro l'edificio matematico che

---

<sup>2</sup>In tutto il libro usiamo il termine 'aritmetica' senza ulteriori specificazioni per riferirci alla teoria dei numeri naturali.

per le sue ampie applicazioni. È molto diffusa perché, per ragioni che dovrebbero diventare chiare in seguito, l'aritmetica si presta bene a essere intesa come una teoria di certi oggetti astratti. È quindi difficile trovare filosofi che abbiano sostenuto il platonismo relativamente a qualche teoria matematica ma lo abbiano negato per l'aritmetica dei numeri naturali o abbiano anche solo evitato di prendere posizione su di essa. Tutti i platonisti in filosofia della matematica sembrano essere anche platonisti aritmetici, anche se molti platonisti aritmetici tacciono su quello che avviene per altre teorie matematiche o, come Gottlob Frege (cf. §II.1), hanno opinioni diverse su alcune di esse (le teorie geometriche, nel caso di Frege). Il platonismo aritmetico può quindi essere considerato come un caso paradigmatico.

### 1.5. *Che cos'è un oggetto ?*

Un'altra osservazione relativa alla formulazione della tesi platonista riguarda la nozione di oggetto, divenuta cruciale per la filosofia, non solo quella della matematica, almeno a partire dalla fine del XIX secolo. Come si deve precisare questa nozione, al di là delle generalità o delle approssimazioni di cui ci si può accontentare nel discorso quotidiano, se si vuole farne il fulcro di una discussione filosofica? Per fare un esempio (che tratteremo più a fondo nel §I.4), Immanuel Kant parla spesso di oggetti ma come mostra anche il solo fatto che usi, in modo apparentemente indifferenziato (Eisler, 1930, p. 391), i due termini 'Gegenstand' e 'Objekt', non possiede un'esplicita teoria degli oggetti. Le cose stanno diversamente, per esempio, per Frege e Edmund Husserl: le loro teorie degli oggetti possono essere considerate poco chiare o incomplete, ma sono presentate in maniera esplicita.

Molti dei filosofi cui tratteremo seguono oggi Frege su un punto fondamentale: è un oggetto tutto e solo ciò che cade sotto un concetto sortale. La nozione di concetto sortale è in generale chiarita stabilendo che  $P$  è un concetto sortale se e solo se  $P$  è un concetto tale che se  $x$  e  $y$  cadono sotto  $P$ , allora è possibile stabilire se  $x$  è o no identico a  $y$ . Un oggetto sarebbe dunque qualcosa di cui si può dire che cade sotto un certo concetto e per il quale sia possibile stabilire ciò che lo identifica e lo distingue da ogni altra cosa che cade sotto tale concetto. Le stelle sarebbero per esempio degli oggetti: se osserviamo una stella (per esempio la prima che scorgiamo al tramonto) possiamo, almeno in linea di principio, stabilire se essa è no la stessa stella che osserviamo in un'altra occasione (per esempio l'ultima che vediamo sparire all'alba). Le cose sembrano stare diversamente per le emozioni: non è chiaro se vi siano criteri per stabilire se l'emozione che proviamo vedendo apparire la nostra stella al tramonto sia o no la stessa che proviamo vedendola sparire all'alba. Sembrerebbe quindi che le emozioni non siano oggetti.

Questa maniera di vedere le cose non è condivisa da tutti e certo non risolve ogni difficoltà: fra quelle che rimangono aperte vi è certo il problema di comprendere bene che cosa si voglia intendere quando si parla di concetti (cf. Coliva, 2004). Se si accetta questa idea fregeana, si ha tuttavia una base per sostenere che l'identificazione di un dominio di oggetti dipenda dalla definizione di un concetto sortale appropriato. Per stabilire che gli oggetti che popolano tale dominio esistono, si dovranno poi avanzare argomenti per

mostrare che sotto tale concetto cade qualcosa, ovvero che esso non è vuoto, come per esempio è il concetto di unicorno.

Da una simile concezione degli oggetti segue anche che, parlando di oggetti, si fa riferimento a entità squisitamente individuali che popolano mondi in cui esse convivono con altri individui del medesimo tipo. Ovviamente, nulla vieta di immaginare concetti sortali sotto cui cade un solo oggetto, come il concetto di nazionale di calcio che ha vinto cinque campionati del mondo, e perfino concetti sortali sotto cui cade necessariamente un solo oggetto (posto che ne cada uno), come il concetto di estremo superiore (o *supremum*) di un certo sotto-insieme di un dato insieme totalmente ordinato. Ma solitamente (anche se non sempre: si pensi al concetto di Presidente della Repubblica, o al concetto di Dio), questi casi riguardano concetti che sorgono dalla restrizione di altri concetti più generali, come il concetto delle nazionali di calcio o quello degli elementi di un dato insieme. Che sotto di essi cada un solo oggetto dipende dal fatto che tra gli oggetti che cadono sotto questi altri concetti più generali ve ne è uno solo con certe particolari proprietà. Quando si parla di oggetti matematici, tuttavia, ci si vuole in generale riferire a individui che popolano domini composti da numerosi individui dello stesso tipo, e, in quasi tutti i casi interessanti, a individui che popolano domini infiniti. È il caso dei numeri naturali, degli insiemi, dei punti di  $\mathbb{R}^2$ , ecc.. Qualcuno potrebbe trovare appropriato, per esempio in contesti storici, parlare dell'oggetto triangolo o dell'oggetto integrale di Riemann. Ma lo farebbe in un senso molto diverso da quello in cui noi vorremmo parlarne di oggetti matematici, a meno che non voglia riferirsi a un certo tipo di figura geometrica appartenente al dominio dei tipi delle figure geometriche (e distinto, per esempio, dal quadrato o dal cerchio), o a un certo particolare operatore appartenente al dominio degli operatori funzionali (e distinto, per esempio, dall'integrale di Lebesgue, da quello di Stieltjes, o da quello di Radon).

### 1.6. *Le virtù del platonismo*

Ci possono essere molte ragioni per dubitare che il platonismo sia una tesi corretta: si può ritenere per esempio che abbia conseguenze inaccettabili o che non sia possibile darne una giustificazione soddisfacente. È però difficile negare che sia una tesi attraente, dal momento che offre risposte molto semplici a domande particolarmente complesse sulla natura della matematica. Infatti, anche senza aver chiarito bene che cosa sia un oggetto astratto, o in che senso si possa dire che esiste, è facile capire che l'idea che una teoria matematica verta su oggetti astratti conferisce a tale teoria una similarità strutturale con altre forme del discorso che vertono invece su oggetti concreti.

Quando diciamo, per esempio, che Modena è più piccola di Bologna stiamo affermando che un certo oggetto concreto, la città di Modena, sta in una determinata relazione, la relazione di essere più piccolo (poniamo relativamente alla popolazione) con un altro oggetto concreto dello stesso genere, la città di Bologna. Questo potrebbe essere vero anche se non fossimo in grado di saperlo (per esempio per la perdita degli archivi delle anagrafi comunali). L'asserto 'Modena è più piccola di Bologna' possiede quindi una struttura grammaticale (la struttura dell'enunciato che lo esprime nella formulazione in cui tale

asserto ci è dato) che rispecchia fedelmente la struttura semantica che gli attribuiamo se l'intendiamo come usualmente facciamo: esso è vero se i due oggetti cui i due nomi propri 'Modena' e 'Bologna' si riferiscono stanno tra loro nella relazione  $\ulcorner$ (essere) più piccolo di  $\urcorner$ . La sua verità non dipende quindi in alcun modo da noi o, in particolare, dalla nostra capacità di giustificarlo: dipende piuttosto da come stanno le cose nel mondo. Se potessimo poi fornire una giustificazione appropriata dell'asserto, come sembra essere di fatto il caso, essa ne stabilirebbe la verità e potremmo quindi tacciare chi lo negasse di essere in errore.

Se accettassimo il platonismo aritmetico potremmo applicare una simile interpretazione, con ovvi vantaggi di semplicità, anche all'aritmetica. Potremmo per esempio sostenere che quando diciamo che 2 è minore di 3 stiamo affermando che un certo oggetto astratto, il numero 2, sta in una determinata relazione, la relazione  $\ulcorner$ (essere) minore di  $\urcorner$ , con un altro oggetto astratto dello stesso genere, il numero 3. L'asserto ' $2 < 3$ ' sarebbe allora inteso in modo che la sua struttura grammaticale rispecchi fedelmente la sua struttura semantica. Esso non significherebbe, per esempio, che nell'atto di contare si perviene a contare due unità prima di pervenire a contarne tre, bensì, più semplicemente, che l'oggetto 2 è minore dell'oggetto 3. Inoltre potremmo ritenere che tale asserto sia vero o falso indipendentemente da ciò che possiamo fare per giustificarlo, cioè dalla nostra capacità (e *a fortiori* dal nostro modo) di provarlo. Ma se potessimo fornirne una prova, come di fatto avviene, essa ne stabilirebbe la verità e potremmo tacciare chi lo negasse di essere in errore.

L'attrazione esercitata dal platonismo aritmetico deriva dalla semplicità di questa interpretazione e dal fatto che essa rende conto in modo immediato di quel sentimento di inderogabilità che proviamo di fronte alla matematica e ai suoi teoremi, che ci è naturale pensare come delle verità.

### 1.7. *Platonismo, realismo, oggettività*

È però necessario essere più precisi. La descrizione precedente dell'interpretazione che il platonismo aritmetico permette per l'asserto ' $2 < 3$ ' compie a un certo punto un salto che, anche se alcuni potrebbero non aver scorto, non può essere passato sotto silenzio. Un conto è infatti sostenere che questo asserto parla di certi oggetti astratti, 2 e 3, il che, con le dovute cautele, come quelle introdotte più sopra, si potrebbe pensare come equivalente a sostenere che tali oggetti esistono. Un'altra cosa è sostenere che tale asserto è vero. E sostenere questo non richiede di sostenere anche che la sua verità è indipendente dalla nostra capacità di fornirne una prova.

Secondo la terminologia che adottiamo (che è la più diffusa), la tesi che afferma che gli asserti matematici parlano di oggetti astratti — ovvero che esistono oggetti astratti di cui tali asserti parlano — è la tesi platonista. Qualche volta essa è anche designata dal termine 'realismo ontologico'. Questa tesi non deve confondersi con un'altra, spesso chiamata 'realismo semantico', secondo cui gli asserti (teoremi) della matematica sono veri. Questa seconda tesi potrebbe infatti essere sostenuta anche senza sostenere che tali asserti sono veri in quanto esistono certi oggetti di cui essi parlano. A sua volta quest'ultima tesi deve

essere tenuta distinta anche da una terza tesi, resa nota in particolare dai lavori di Dummett<sup>3</sup>, secondo la quale certi asserti — nel caso per noi rilevante, quelli matematici — posseggono un valore di verità determinato indipendentemente dalle nostre capacità di determinarlo. Anche questa terza tesi costituisce una versione di quella posizione filosofica abitualmente detta, senza specificazioni ulteriori, ‘realismo’. Malgrado la rilevanza di questa tesi per molte discussioni filosofiche sulla matematica, nel nostro libro non ne tratteremo specificatamente. Il termine ‘realismo’ è spesso utilizzato in filosofia della scienza anche per indicare una quarta tesi, detta ‘realismo scientifico’, di cui tratteremo nei §§ IV.3.2 e IV.4.2 in connessione all’argomento di indispensabilità. Per evitare confusioni fra queste quattro tesi, fra loro molto diverse, useremo sempre il termine ‘realismo’ accompagnandolo con gli aggettivi ‘ontologico’, ‘semantico’, o ‘scientifico’, per specificare se ci riferiamo alla prima, alla seconda o alla quarta fra le quattro tesi precedenti.

### 1.8. *Alcune difficoltà del platonismo*

Siamo ora pronti per capire alcuni dei punti deboli del platonismo.

Uno si deve alla difficoltà di trovare argomenti convincenti a favore di tali tesi che siano indipendenti dai vantaggi esplicativi che derivano dalla sua adozione e non si basino su assunzioni almeno altrettanto forti quanto il platonismo stesso. Spesso l’adesione al platonismo si presenta infatti sotto forma di un argomento negativo: non c’è modo di rendere conto di certi fenomeni propri alla matematica se non adottando una posizione platonista. È però legittimo sentirsi insoddisfatti da un argomento di questo tipo. In fondo anche l’assunzione dell’esistenza di un Dio creatore permette di rispondere in modo assai semplice a molte domande relative all’origine dell’universo. Tuttavia, sono in molti a ritenere che questa non sia di per sé una ragione sufficiente per affermarne l’esistenza.

Ma vi è di più. Anche il modo in cui il platonista rende talvolta conto dell’accesso al mondo di oggetti astratti su cui a suo dire verte la matematica ricorda spesso un atteggiamento religioso. Per chi crede, la fede fornisce un modo per mettersi in contatto con Dio e dare così un contenuto alle proprie preghiere. Ma sembra inappropriato pensare che vi sia un mezzo analogo per entrare in contatto con gli oggetti matematici e ottenere informazioni su di essi. E allora come possiamo farlo? La difficoltà di rispondere chiaramente a questa domanda è un secondo punto debole del platonismo.

## **2. Il nominalismo in filosofia della matematica**

Vi sono naturalmente molti filosofi della matematica che respingono l’opzione platonista, sia per le difficoltà precedenti, sia per ragioni indipendenti. La tesi alternativa che essi adottano, detta ‘nominalismo’, nega l’esistenza di oggetti astratti su cui vertano le teorie matematiche.

### 2.1. *Parafrasi*

---

<sup>3</sup>Cf. per esempio Dummett, 1978b.

Alcuni adottano una forma radicale o globale, di nominalismo: pensano che non esistano oggetti astratti di alcun tipo e che non sia in nessun senso plausibile sostenere che esistono oggetti astratti. Ma, si potrebbe obiettare: che dire di certe presunte entità apparentemente innocue, come la nazionale italiana di calcio? Davvero non vi è nessun senso plausibile in cui dire che la nazionale italiana di calcio esiste, mentre quella di automobilismo non esiste? Per difendere la sua tesi, il nominalista radicale deve trovare un modo di spiegare l'innocua intelligibilità di asserti come 'la nazionale italiana di calcio ha vinto il campionato del mondo' o, appunto, 'esiste la nazionale italiana di calcio, ma non quella di automobilismo'.

Una strategia comune consiste nel sostenere che gli asserti in questione altro non sono in realtà che riformulazioni abbreviate di asserti più lunghi che vertono unicamente su oggetti concreti e che costituiscono un'appropriata parafrasi dei primi.

Quando diciamo che nel 2006 la nazionale italiana di calcio ha vinto il campionato del mondo, ciò che veramente affermiamo è che certe persone concrete — accomunate dall'aver sottoscritto un contratto che le lega fra loro e a altre persone e che è riconosciuto da una più larga comunità di persone, in accordo a certe regole — hanno agito in un certo modo, in certe opportune occasioni nei confronti di altre persone — anch'esse accomunate dall'aver sottoscritto un contratto simile, le quali hanno agito in un modo simile — e, in base a regole che codificano tale modo di agire, sono state riconosciute come vincitrici. In questo e in molti altri casi la parafrasi è lunga, noiosa e scomoda da utilizzare, ma è difficile negare che essa esprima ciò che davvero vogliamo dire proferendo gli asserti originali. L'idea di base è chiara: anche se in superficie, ovvero intesi in accordo alla loro struttura grammaticale, certi asserti sembrano vertere su certi oggetti astratti (per esempio squadre di calcio), il modo corretto di leggerli è di ammettere che essi vertono in realtà su altri oggetti, più innocui da un punto di vista ontologico.

Si potrebbe pensare che questo valga anche per il caso degli asserti matematici, che nella forma in cui si presentano abitualmente non sarebbero altro che riformulazioni abbreviate di asserti più lunghi e complessi che parlano unicamente di oggetti concreti. Parafrasare è un modo di reinterpretare. I nominalisti che adottano la strategia della parafrasi suggeriscono quindi di interpretare il linguaggio della matematica in maniera tale che esso non riguardi più entità matematiche astratte. Continuare a esprimersi nel modo usuale, per esempio in termini di numeri, classi, funzioni, sarà ancora possibile, ma lo si potrà fare solo a patto che lo si riconosca come un semplice espediente, una comoda *façon de parler*.

Torneremo su questa strategia nei capitoli IV e VII. Qui vale la pena di domandarci quali alternative potrebbe avere chi, pur essendo un nominalista sulla matematica, fosse convinto che questa strategia non è percorribile. Un tale nominalista dovrebbe seguire il platonista nel ritenere che gli asserti matematici siano perfettamente intellegibili se presi alla lettera e anzi debbano essere intesi in accordo alla loro struttura grammaticale. Ma non potrebbe concedere che essi vertano su oggetti astratti, anche se superficialmente sembrano

farlo.

## 2.2. *Asserti senza contenuto*

Una prima opzione per il nostro nominalista sarebbe sostenere che tali asserti, pur perfettamente intelligibili, non posseggono alcun contenuto: non parlano propriamente di nulla e quindi non descrivono alcun oggetto. Essi sarebbero semplici modi di stipulare delle convenzioni linguistiche, o dei risultati di tali convenzioni, oppure sarebbero da intendere come verità logiche come l'asserto 'o il sole è coperto dalle nuvole oppure non è coperto dalle nuvole', che certamente non parla del tempo di oggi, e, malgrado le apparenze, neppure del sole o delle nuvole. Questa opzione è stata per esempio difesa dai neo-positivisti più ortodossi, in particolare da Rudolf Carnap. Vi torneremo nel §II.4.1.

## 2.3. *Empirismo in filosofia della matematica*

In alternativa, il nostro nominalista potrebbe sostenere che, malgrado le apparenze, gli asserti matematici, anche presi alla lettera, parlano propriamente e soltanto di oggetti concreti: '2 < 3' parla degli oggetti 2 e 3, ma questi sono oggetti concreti, come le stelle o le sedie.

Questa posizione differisce dal platonismo solo in quanto assegna a oggetti concreti il ruolo che il platonista assegna a oggetti astratti. Qualcuno potrebbe suggerire che non si tratti di altro che di una versione del platonismo: una sorta di platonismo empirista.

Che sia o meno platonismo, resta che una tesi simile è stata più volte sostenuta: da John Stuart Mill (1843), secondo il quale i numeri non sono che agglomerati di oggetti concreti, e gli asserti matematici esprimono generalizzazioni empiriche; da Penelope Maddy (1990a, 1990b), che chiama 'platonismo fisikista' una sua posizione sugli insiemi (cf. §IV.4), simile nello spirito a quella di Mill; e da Hartry Field (1980), che sembra suggerire che la geometria sintetica elementare (ovvero la geometria degli *Elementi* di Euclide fatta senza l'ausilio di numeri reali o insiemi) verta su punti nello spazio-tempo, intensi come oggetti concreti.

Al di là delle loro motivazioni e plausibilità, queste posizioni mostrano la possibilità di distinguere, almeno in linea di principio, due tesi che normalmente vengono fatte coincidere: *i*) che gli asserti matematici vertono su un dominio di oggetti; *ii*) che essi vertono su oggetti astratti. Alcuni argomenti a favore del platonismo — fra cui l'argomento di indispensabilità, cf. i capitoli VI e VII — sono argomenti a favore di *(i)* senza essere con ciò stesso argomenti a favore di *(ii)*.

Le posizioni empiriste in filosofia della matematica non sono tuttavia tutte rivolte a sostenere che, parafrasati o no, gli asserti matematici parlano di oggetti concreti (o empirici, che dir si voglia). Vi è anche chi, pur rigettando questa tesi, sostiene una forma di empirismo limitatamente alla loro giustificazione. Questo si può fare per esempio sostenendo, come Charles Parsons (1979-80; 2008, cap. 5), che per studiare i propri oggetti astratti, un matematico si debba servire di certi oggetti concreti che intrattengono determinate relazioni complesse e rilevanti con i primi. Torneremo su questa tesi nel §V.4.

Qui ci limitiamo a osservare che altre versioni dell'empirismo della giustificazione dipendono dall'idea che la giustificazione che abbiamo per credere all'esistenza di oggetti matematici astratti sia, o debba almeno essere, dello stesso tipo di quella che abbiamo per credere nell'esistenza di oggetti concreti. Questa idea è stata per esempio sostenuta da Imre Lakatos (1976), e oggi è difesa, sia pure con modalità differenti, da tutti coloro che adottano l'argomento di indispensabilità.

#### 2.4. *Gli asserti matematici sono veri solo se lo sono vacuamente*

Il nostro nominalista potrebbe anche sostenere che, posto che non esistono oggetti astratti, gli asserti matematici, che devono comunque essere presi alla lettera, non sono veri o lo sono solo vacuamente. Si tratta di una tesi sostenuta ancora da Field (1980; 1982) a proposito degli asserti dell'aritmetica e dell'analisi (cf. §IV.1). Limitiamo per ora a qualche rapido chiarimento.

Consideriamo i due asserti:

- (a) 'Vi è un numero primo pari';
- (b) 'Tutti i numeri primi sono dispari'.

Ammettiamo che: *i*) gli asserti matematici debbano essere presi alla lettera; *ii*) il solo senso in cui si possa dire che tali asserti sono veri è quello in cui lo si dice abitualmente per gli asserti del linguaggio ordinario, per cui, per esempio, gli asserti 'Vi è un uomo politico onesto' e 'Tutti gli uomini politici sono disonesti' sono veri o meno in base all'esistenza di uomini che svolgano funzioni politiche e siano onesti o meno; *iii*) se i numeri naturali esistessero sarebbero oggetti astratti, ma non esistono oggetti astratti identificabili con essi. Ammettiamo anche, come sembra naturale fare, che la struttura grammaticale dei nostri asserti sia conservata dalle loro riformulazioni seguenti nel linguaggio della logica predicativa:

- (a') 'Esiste un  $x$  che è un numero primo e che è pari';
- (b') 'Per ogni  $x$ , se  $x$  è un numero primo, allora  $x$  è dispari'.

Da *(i)* segue che l'interpretazione semantica appropriata di *(a)* e *(b)* è quella che è rispecchiata la struttura grammaticale di *(a')* e *(b')*. Ne dovremmo allora concludere che *(a)* non è vero, mentre *(b)* lo è. È facile capire perché *(a)* non sarebbe vero: in base alla condizione *(iii)* non esistono numeri né primi né pari, e quindi, *a fortiori*, non esiste alcun  $x$  che sia un numero primo pari. Le condizioni *(i)* e *(ii)* impongono quindi di negare che il primo asserto sia vero. Per quanto riguarda *(b)*, la cosa può apparire più ostica. Basta però osservare che, posto che in base alla condizione *(iii)* non esiste alcun  $x$  che sia un numero primo, dalla *(ii)* segue che l'antecedente ' $x$  è un numero primo' è falso, quale che sia  $x$ . La condizione *(i)* impone quindi di concludere che l'intero asserto è vero: in base alle leggi della logica, un asserto condizionale il cui antecedente è falso è vero quale che sia il valore di verità del suo conseguente. Se la *(iii)* è ammessa, *(i)* e *(ii)* — che impediscono di ricorrere a scappatoie *ad hoc* — impongono quindi di concludere che la verità del nostro secondo asserto non dipende dal suo contenuto, ma solo dalla sua struttura grammaticale: si



dice in questo caso che esso è vacuamente vero<sup>4</sup>.

I due asserti  $(a)$  e  $(b)$  sono asserti quantificati in cui non compare alcuna costante individuale che sia supposta denotare oggetti matematici, come '2', 'l'insieme vuoto', etc. Se la condizione  $(iii)$  è ammessa, e con essa si ammettono anche  $(i)$  e  $(ii)$ , si deve concludere che tutti gli asserti matematici del tipo di quelli menzionati si comportano allo stesso modo, ovvero sono veri solo se lo sono vacuamente. Le cose potrebbero cambiare per asserti in cui intervengono termini singolari che sono supposti denotare degli oggetti matematici, per esempio per asserti come: '2 è un numero primo pari', 'Tutti i numeri primi maggiori di 2 sono dispari', '2+3=5'. Se si ammette la condizione  $(iii)$ , l'eventuale verità di questi asserti dipende infatti dal modo in cui vogliamo trattare asserti in cui intervengono termini singolari vuoti, come 'Pegaso' o '2', che non denotano alcun oggetto. Vi sono varie possibili opzioni per trattare asserti simili. Dovrebbe tuttavia essere chiaro che, quali che siano tali opzioni, le condizioni  $(i)$ - $(iii)$  impongono di concludere che asserti matematici di questo tipo possono essere veri solo in base a fatti che riguardano la loro forma sintattica. Diciamo quindi per semplicità anche in questo caso che se  $(i)$ - $(iii)$  sono accettate, allora tali asserti sono veri solo se lo sono vacuamente, intendendo appunto con questo che essi sono veri solo se lo sono in base a fatti che non dipendono dal loro contenuto ma riguardano solo la loro struttura grammaticale.

Consideriamo ora gli asserti:

$(c)$  '2 è un numero primo';

$(d)$  '2 non è numero composto'.

Ammettiamo anche in tal caso che la loro struttura grammaticale sia conservata dalle loro riformulazioni nel linguaggio della logica predicativa. Ora il problema è tuttavia che diverse riformulazioni in tale linguaggio sembrano possibili. In particolare questo è il caso per le seguenti:

$(c')$  'Per ogni  $x$ , se  $x$  è 2, allora  $x$  è un numero primo';

$(d')$  'Per ogni  $x$ , se  $x$  è 2, allora  $x$  è un numero composto';

$(c'')$  'Esiste un  $x$  che è 2 e che è un numero primo';

$(d'')$  'Esiste un  $x$  che è 6 e che è un numero composto'.

Come  $(a)$  e  $(b)$ , gli asserti  $(c)$  e  $(d)$  sembrano contraddirsi, tanto che mentre  $(a)$  e  $(c)$  sono generalmente accettati come conseguenze delle definizioni ammesse,  $(b)$  e  $(d)$  sono generalmente rigettati in quanto in contrasto con tali definizioni. Eppure, il nostro nominalista che accetta le condizioni  $(i)$ - $(iii)$ , non è solo condotto a sostenere che  $(a)$  non è vero, mentre  $(b)$  lo è, ma anche che  $(c)$  e  $(d)$  sono entrambi veri se sono intesi in accordo con le loro riformulazioni  $(c')$  e  $(d')$ , mentre nessuno dei due lo è se sono intesi in accordo con le loro riformulazioni  $(c'')$  e  $(d'')$ .

Il nostro nominalista non potrà quindi concedere, a meno di non contraddire palesemente la pratica matematica più elementare, che l'accettazione degli asserti

---

<sup>4</sup>Nel seguito, tranne se esplicitamente indicato, useremo l'aggettivo 'vero' *tout-court*, e i suoi derivati, assumendo implicitamente che gli asserti considerati come veri non lo siano vacuamente, o non lo siano solo vacuamente (se intesi in modo appropriato).

matematici abbia qualcosa a che fare con la loro verità: non potrà sostenere che le virtù, le applicazioni, e l'utilità della matematica dipendano dalla verità dei suoi teoremi. Dovrà sostenere il contrario, e spiegare da che cosa esse invece dipendano. Vedremo nel §IV.1 che ciò è proprio quello che fa Field.

### 2.5. Finzionalismo

In quarto e ultimo luogo, il nostro filosofo nominalista potrebbe sostenere che, anche ammettendo la condizione (iii) di cui sopra, vi sia un senso in cui poter dire che i teoremi della matematica sono veri (non vacuamente): basterebbe rigettare almeno una delle condizioni (i) o (ii). In particolare, il nostro nominalista potrebbe ritenere che i teoremi matematici sono veri all'interno della matematica, proprio come diciamo alle volte che gli asserti che riguardano i personaggi di un'opera di finzione sono veri all'interno della storia di cui sono protagonisti. Non a caso, questa posizione, su cui torneremo nel §IV.2, viene chiamata 'finzionalismo'. Essa è per esempio sostenuta da Stephen Yablo (1998, 2001, 2005). Si tratta di una posizione che, nonostante le apparenze, non è in contraddizione con la precedente, tanto che lo stesso Field (1980; 1989, Introduzione) l'ha sostenuta.

Il finzionalista nega l'esistenza di oggetti matematici astratti, ma accetta che si possano costruire storie nelle quali tali oggetti fungono per così dire da personaggi. Le teorie matematiche, secondo il finzionalista, altro non sarebbero che storie fittizie, che possono tuttavia essere anche molto precise e codificate, e accordarsi a precise regole di argomentazione in base alle quali poter distinguere tra affermazioni corrette e affermazioni scorrette. In queste storie sarebbe allora perfettamente legittimo parlare della verità degli asserti coinvolti, a patto di tenere a mente che si sta parlando solo di verità in quella storia e non di verità *tout court*. È perfettamente sensato dire che è vero che Sherlock Holmes vive a Londra, mentre è falso che viva in a Glasgow, anche se non ci aspettiamo certo di trovare Sherlock Holmes andando a Londra. Semplicemente, parlando qui di verità e falsità si sottintenderebbe che si vuole parlare di verità e falsità nelle storie raccontate nei romanzi di Conan Doyle. Allo stesso modo, sarebbe perfettamente legittimo dire che ' $5 + 7 = 12$ ' è vero e ' $5 + 7 = 13$ ' falso, anche senza ammettere che i numeri 5, 7, 12, e 13 esistano al di fuori dalla storia dell'aritmetica, ovvero sottintendendo che si sta parlando di verità e falsità nell'aritmetica.

### 3. L'argomento di indispensabilità

Nei capitoli I-V esporremo e discuteremo diversi modi di presentare e difendere la presunta ontologia platonista, mostrando lo sforzo dei platonisti di dare a essa la forma di un'ipotesi più precisa e plausibile. Dedicheremo invece i capitoli VI-VII all'argomento di indispensabilità. Si tratta di un argomento che ha suscitato, e tuttora anima, un vasto dibattito.

Una delle ragioni che lo rende un argomento particolarmente potente è il fatto di basarsi su considerazioni perfettamente accettabili per un nominalista, quali la semplice constatazione che certe teorie matematiche sono impiegate nella formulazione di teorie

scientifiche vere, o che siamo giustificati a ritenere tali. Nonostante l'apparente semplicità, tuttavia, l'argomento nasconde una serie complessa di assunzioni, e chiama in causa tesi filosofiche particolarmente controverse. Anche per questa ragione, le versioni comunemente discusse, pur condividendo alcune idee essenziali, sono spesso molto diverse tra loro. Prima di presentare il dibattito in corso, dunque, cercheremo di chiarire, anche indipendentemente dalle sue formulazioni abituali, quale sia la struttura essenziale dell'argomento, e come debbano precisarsi le nozioni che esso sembra coinvolgere.

Ma un punto è chiaro. Diversamente da molti degli argomenti che vedremo nei capitoli I-V, l'argomento di indispensabilità sembra, almeno in alcune sue versioni, promettere di giustificare l'esistenza di oggetti matematici senza che sia necessario chiarire in precedenza la precisa natura di tali oggetti, né il senso in cui si può parlare della loro esistenza.

Ciò potrebbe essere visto come un vantaggio. L'argomento fornirebbe al filosofo della matematica un saldo punto di partenza per le sue riflessioni: una volta stabilito che esistono oggetti su cui vertono certe teorie matematiche, si potrà interrogare queste teorie per comprendere la natura di quegli oggetti e il senso in cui si possa parlare della loro esistenza. Ma certo è anche possibile vedere in questa situazione il sintomo di una difficoltà: come possiamo stabilire con certezza che certi oggetti esistono se non abbiamo chiarito in precedenza quale sia la loro natura e in che senso si possa parlare della loro esistenza?

La differenza fra questi due atteggiamenti è una cartina al tornasole della secolare discussione che, con livelli diversi di approfondimento, vorremo ricostruire nel nostro libro.

## I

### IL PROBLEMA DI PLATONE

In una lettera a Thomas J. Stieltjes, del 13 maggio 1894 (Hermite e Stieltjes, Corr, vol. II, p. 398), Charles Hermite, uno dei maggiori analisti del XIX secolo, esprime così la sua opinione sull'oggetto della propria ricerca:

[...] credo che i numeri e le funzioni dell'analisi non siano il prodotto arbitrario della nostra mente; penso che esistano al di fuori di noi, con lo stesso carattere di necessità delle cose della realtà oggettiva, e che noi li incontriamo o li scopriamo, e li studiamo come fanno i fisici, i chimici, gli zoologi, etc.

In *Apologia di un matematico* (1940), il libro autobiografico di un grande studioso di teoria dei numeri vissuto nella prima metà del Novecento, Godfrey H. Hardy, troviamo espressa un'opinione simile (p. 89):

Per me, e penso per la maggior parte dei matematici, esiste un'altra realtà che chiamerò 'realtà matematica', sulla cui natura né i matematici né i filosofi sono assolutamente d'accordo [...] Credo che la realtà matematica sia fuori di noi, e che il nostro compito sia di scoprirla o di osservarla, e che i teoremi che noi dimostriamo, qualificandoli pomposamente come nostre "creazioni" siano semplicemente annotazioni delle nostre osservazioni.

È difficile dire se davvero questa sia l'opinione della "maggioranza dei matematici". Ma si tratta certamente di un punto di vista assai diffuso fra i matematici di ogni tempo. Anche recentemente Alain Connes, medaglia Field nel 1982, lo ha proclamato senza reticenza (Changeux e Connes, 1989, p. 28):

Per me, la successione dei numeri primi [...] ha una realtà più stabile della realtà materiale che ci circonda. Possiamo paragonare il matematico al lavoro a un esploratore alla scoperta del mondo.

Hardy aggiunge, poco oltre la citazione precedente, che "questa opinione in una forma o nell'altra, è stata sostenuta da molti grandi filosofi, da Platone in poi" (*ib.*). E non vi è dubbio che sia così.

A cominciare dallo stesso Platone, tutti coloro che hanno condiviso questa opinione si sono dovuti scontrare con un problema che inevitabilmente la accompagna: se gli esseri umani posseggono cinque sensi per osservare la realtà materiale che li circonda, con che mezzo essi osservano la realtà matematica? Se fosse possibile risolvere facilmente questo problema, oggi detto 'problema dell'accesso', il platonismo in filosofia della matematica sarebbe probabilmente un tesi scontata. Ma così non è. È per questo che, pur essendo un'opzione ontologica, il platonismo porta con sé un problema epistemologico che potremmo, in generale, formulare così: se la matematica parla di oggetti astratti, come possiamo conoscere ciò di cui parla? Cominciamo dunque considerando la maniera in cui lo affronta Platone.

#### 1. Il problema di Platone

Nel *Teeteto*, Platone si domanda che cosa sia la conoscenza (*epistēmē*). Ma non fornisce una risposta che ritiene soddisfacente: ne presenta tre, scartandole tutte. Come Socrate

riassume alla fine del dialogo (210a-b): “né sensazione, né opinione vera, né ragione accoppiata con vera opinione, potranno mai essere conoscenza”. Per quanto Platone la confuti, la terza opzione è stata e è accettata da molti. Secondo l’interpretazione più comune, essa identifica la conoscenza con l’opinione vera e giustificata. Edmund Gettier (1963) ha avanzato un noto argomento contro questa definizione: un’opinione vera potrebbe sì essere giustificata, ma in base a ragioni che nulla hanno a che fare con ciò che la rende vera, e ciò renderebbe implausibile considerarla come una conoscenza. L’argomento di Platone è non molto diverso, ma più radicale.

Per Platone, la conoscenza è conoscenza di qualcosa. Questo qualcosa non è però uno stato di cose, ma un oggetto: non si viene a conoscere che le cose stanno così e così, si conoscono le cose stesse. L’opinione vera è quindi l’identificazione di un oggetto con ciò che esso è veramente. Nei termini della teoria platonica delle idee (che non è tuttavia esplicitamente richiamata nel *Teeteto*), è la sua sussunzione sotto l’idea di cui esso è una copia. Quindi, dice Platone (208e-209a), se la conoscenza fosse opinione vera giustificata, essa non potrebbe essere altro che opinione vera accompagnata dall’“interpretazione” (*ermēneia*) di ciò che caratterizza l’oggetto rilevante, ovvero della “differenza che lo contraddistingue”. Per avere conoscenza non sarebbe però sufficiente avere un’opinione vera sul fatto che una certa differenza contraddistingue un certo oggetto. Dovremmo avere conoscenza di tale differenza, avere di essa un’opinione vera giustificata. Ma se è così, la definizione risulta circolare o conduce a un regresso all’infinito.

In un linguaggio oggi più usuale, il punto di Platone è il seguente: se anche potessimo identificare un oggetto per ciò che esso è, non potremmo essere certi di averlo fatto, e quindi avere una ragione appropriata per trasformare la nostra opinione vera in una conoscenza. Platone sembra quindi concedere che si possa pervenire all’opinione vera, ma nega che ciò possa bastare a produrre conoscenza. Per questo scopo si richiederebbe una ragione che garantisca che l’opinione a cui siamo pervenuti sia proprio quella vera, e questa ragione non può venire fornita. Possiamo rigettare questo argomento sostenendo che non dovrebbe essere necessario che la ragione che, in una conoscenza, si dovrebbe accompagnare all’opinione vera fornisca la garanzia che Platone richiede: Ammettendo che la conoscenza possa essere tanto conoscenza di qualcosa (conoscenza non proposizionale), che conoscenza che qualcosa sia in un certo modo (conoscenza proposizionale), potremmo cioè sostenere che si possa avere conoscenza di  $p$  senza avere conoscenza che si ha conoscenza di  $p$ . In tal modo non avremmo però ancora colmato lo iato denunciato da Platone. Se un’opinione è vera solo se riproduce la realtà delle idee (e le differenze ce la caratterizzano), allora non può esserci epistemologia senza ontologia; la prima non può essere sufficiente a se stessa. Da qui il fallimento che il *Teeteto* denuncia.

Ma Platone non è sempre radicale come nel *Teeteto*. Il *Menone* delinea una posizione diversa. Dopo aver riconosciuto che “l’opinione vera non è meno utile della conoscenza” (97c), Socrate deve rispondere alla domanda di Menone: perché distinguiamo allora fra le due? Ecco la risposta (97e-98a):

[...] le opinioni vere, fino a che restano sono cose belle, capaci di realizzare tutto il bene possibile; solo che non acconsentono a rimanere per lungo tempo, e fuggono via dall'anima umana, per cui non sono di grande pregio, a meno che non s'incatenino con un ragionamento fondato sulla causalità. [...] Se collegate, esse dapprima divengono conoscenza e, inoltre, diventano stabili. Ecco perché la conoscenza vale più della retta opinione: la differenza tra conoscenza e retta opinione sta, appunto, nel collegamento.

Vi è di più (85d-86a): le opinioni vere sono apprese in un tempo che precede la vita terrena; la reminiscenza le risveglia, e proprio in quanto "ridestate dalle interrogazioni, divengono conoscenze". L'esempio di Platone riguarda la geometria: Socrate interroga abilmente un servitore di Menone, fino a fargli (ri)scoprire come raddoppiare un quadrato. La geometria risulta dalla reminiscenza che fa riaffiorare nell'anima le opinioni vere che questa aveva acquisito prima di unirsi al corpo, e lo fa collegandole fra loro tramite un sistema di conseguenze che le rende stabili, trasformandole così in conoscenza. Pur essendo un fatto terreno, la geometria manifesta quindi conoscenza, o, se si preferisce, è conoscenza. Lo iato denunciato nel *Teeteto* sembra colmato dal sistema di premesse e conseguenze che collegano le opinioni vere fra loro. Questo sistema è la giustificazione che si aggiunge all'opinione vera e la trasforma in conoscenza.

Se nel *Teeteto* la giustificazione è un criterio per riconoscere la verità, nel *Menone* è un mezzo per fissarla. Il *Menone* ammette quindi la possibilità di una distinzione fra ontologia e epistemologia che il *Teeteto* nega: l'ontologia riguarda ciò su cui vertono le opinioni vere, ciò che le rende vere; l'epistemologia riguarda la loro organizzazione in un sistema. Per chiarire la natura di ciò che rende vera un'opinione, dobbiamo però lasciare il *Menone*, e rivolgerci per esempio al *Fedro*. Qui (246a-249d) Platone descrive le anime come aurighi che guidano bighe alate e le conducono al seguito degli dei, lungo un sentiero scosceso, fino alla sommità del cielo e poi fuori da esso, cosicché, "si librano sopra il dorso del cielo" e contemplan l'iperuranio (*hyperouranios*; letteralmente: 'oltre i cieli'). Ecco come Platone descrive ciò che vedono (247c-d):

In questo sito dimora questa essenza incolore, informe e intangibile, contemplabile solo dall'intelligenza, pilota dell'anima, quella essenza che è scaturigine della vera conoscenza. Ora il pensiero divino è nutrito di intelligenza e di pura conoscenza, così anche il pensiero di ogni altra anima cui preme di attingere ciò che le è proprio; gioisce alla vista della realtà [to on] per un certo tempo, e trae nutrimento e beneficio dalla contemplazione della verità, fino a che la rivoluzione circolare non riconduca l'anima al medesimo punto.

Le anime che hanno saputo seguire gli dei possono quindi contemplare la realtà autentica nel tempo in cui il cielo compie una delle sue rivoluzioni. E ne mantengono il ricordo fino a quando cadono sulla terra e si uniscono al corpo. Questo ricordo è la conoscenza autentica che solo gli dei e le anime non appesantite dal corpo possono possedere.

Qui le immagini del *Menone* e del *Fedro* sembrano incontrarsi. La reminiscenza risveglia il ricordo della realtà autentica, ma non ristabilisce la conoscenza autentica. I ricordi che essa fa riaffiorare non sono altro che opinioni vere. In assenza, ormai, di ogni possibilità di tornare a contemplare la realtà autentica, solo l'organizzazione di tali opinioni in un sistema può stabilizzarle. Si produce così un'altra sorta di conoscenza, che è copia o traccia di quella autentica. E allora anche il pessimismo del *Teeteto* e l'ottimismo del *Menone* possono essere riconciliati. Nessuna giustificazione terrena può ristabilire la

conoscenza autentica che, come la realtà di cui essa è contemplazione, resta per noi inaccessibile: questo è il pessimismo del *Teeteto*. Ma l'organizzazione delle opinioni vere in un sistema può stabilizzarle e produrne un'altra conoscenza: questo è l'ottimismo del *Menone*.

Possiamo capire ciò che Platone dice della matematica nella *Repubblica* e nella *Settima Lettera*, che sono in generale considerate come le fonti principali per la filosofia della matematica di Platone.

Cominciamo dalla *Repubblica*, in particolare dalla fine del VI libro (509d-511e), quando Socrate chiede a Glaucone di immaginare un segmento diviso in due parti diseguali simboleggianti rispettivamente il regno del visibile e quello dell'intelligibile. Per semplicità usiamo dei simboli, anche se Platone non lo fa: sia  $\mathcal{V}$  la prima parte di tale segmento e  $\mathcal{I}$  la seconda. Nel regno del visibile vi sono i corpi fisici, le loro immagini riflesse e le loro ombre. Così Socrate suggerisce di dividere anche  $\mathcal{V}$  in due parti: una,  $\mathcal{V}_a$ , che simboleggia le immagini riflesse e le ombre dei corpi fisici; l'altra,  $\mathcal{V}_b$ , che simboleggia questi corpi. E aggiunge che  $\mathcal{V}_a$  deve stare a  $\mathcal{V}_b$  come  $\mathcal{V}$  a  $\mathcal{I}$ , perché l'intelligibile è al visibile come i corpi fisici sono alle loro immagini riflesse o alle loro ombre. Fino a qui, nessuna sorpresa. La chiave della metafora consiste nell'ulteriore suggerimento di Socrate, che propone di dividere anche  $\mathcal{I}$  nella stessa proporzione, richiedendo che le sue due parti non rappresentino più oggetti, ma modi della conoscenza<sup>1</sup>. La prima parte,  $\mathcal{I}_a$ , simboleggia una sorta di conoscenza che si serve di ipotesi e impiega come immagini ciò che nella prima divisione è oggetto di imitazione, ovvero i corpi fisici simboleggiati da  $\mathcal{V}_b$ . La seconda parte,  $\mathcal{I}_b$ , simboleggia una sorta di conoscenza che procede senza ipotesi, richiamandosi direttamente alle idee. Glaucone non comprende bene. Socrate ricorre quindi a un esempio che è proprio quello della matematica (510c-511a):

[...] coloro che praticano la geometria, la logistica<sup>2</sup> e cose simili, ammettono in via d'ipotesi il pari e il dispari, le figure, tre specie di angoli e altre cose analoghe a queste, secondo il loro particolare campo d'indagine; e, come se ne avessero piena coscienza, le riducono a ipotesi e pensano che non meritino più renderne conto né a se stessi né ad altri, come cose a ognuno evidenti. E partendo da queste, eccoli svolgere i restanti punti dell'argomentazione e finire, in piena coerenza, a quel risultato che si erano mossi a cercare. [...] essi si servono e discorrono di figure visibili, ma non pensando a queste, si invece a quelle di cui sono copia: discorrono del quadrato in sé, e della diagonale in sé, ma non di quella che tracciano, e così via; e di quelle stesse figure che modellano e tracciano, figure che danno luogo a ombre e riflessi in acqua, si servono a loro volta come di immagini, per cercare di vedere [le][...] cose [...] Ecco dunque che cosa intendevo per specie intellegibile, e dicevo che, ricercandola, l'anima è costretta a ricorrere a ipotesi, senza arrivare ai principi, perché non può trascendere le ipotesi [...]

La geometria e la logistica attengono quindi alla conoscenza ipotetica, costituita da opinioni, certo vere, ma giustificate solo dalla loro organizzazione in un sistema di ipotesi, siano esse assiomi, postulati, definizioni, teoremi, soluzioni di problemi. Pur nella loro inevitabile limitazione, tali discipline sono comunque un mezzo per parlare della realtà

<sup>1</sup>Questo slittamento è tutt'altro che esplicito. Non ci pare tuttavia poter interpretate diversamente la sua metafora, anche alla luce di quanto detto sopra a proposito del *Teeteto*, del *Menone* e del *Fedro*.

<sup>2</sup>La logistica [ $\tilde{\epsilon}$  *logistikē* (*technē*)] era l'arte di calcolare coi numeri e si distingueva dalla vera e propria scienza su di essi. Torneremo più avanti su questo.

ultima, delle cose stesse, di un regno di oggetti ideali a cui non possiamo accedere direttamente, ma che i geometri rappresentano tramite oggetti fisici che hanno con questi oggetti ideali la stessa relazione che le immagini riflesse o le ombre dei corpi fisici hanno con questi corpi.

Socrate suggerisce poi (511d-e) di associare alle quattro parti del suo segmento quattro condizioni dell'anima: la *eikasia* a  $\mathcal{V}a$ ; la *pistis* a  $\mathcal{V}b$ ; la *dianoia* a  $\mathcal{I}a$ ; e infine la *noēsis* a  $\mathcal{I}b$ . La traduzione di questi termini ha posto e pone non pochi problemi agli interpreti. Per questo preferiamo usare i termini greci. Le difficoltà crescono se consideriamo quello che Platone scrive poche righe più sopra (511d) a proposito della geometria:

E, a mio avviso, tu chiami 'dianoia' e non 'nous' la condizione degli studiosi di geometria e di coloro che sono loro simili, come se la *dianoia* venisse a essere qualcosa di intermedio tra la *doxa* e il *nous*.

Il termine '*doxa*' è quello che abbiamo finora tradotto con 'opinione'. Sembra che '*doxa*' e '*pistis*' siano quasi sinonimi, o rinvino almeno a registri simili. D'altra parte '*noēsis*' e '*nous*' hanno la stessa radice, e è naturale considerarli come sinonimi. Lo slittamento categoriale legato alla divisione del segmento si rispecchia nella nuova distinzione: mentre la *eikasia* (che potremmo rendere con 'congettura') e la *doxa* o *pistis* sono condizioni dell'anima (o stati mentali), la *dianoia* e la *nous* o *noēsis* sono facoltà. Anche se non vi è accordo né sulla traduzione dei termini relativi né sull'interpretazione dell'intero passaggio, vi è consenso sulla caratterizzazione di tali facoltà: la *dianoia* è la facoltà di articolare un discorso, produrre argomentazioni; il *nous* è la facoltà di contemplare le idee<sup>3</sup>. Platone ci dice allora che le opinioni di cui è fatta la geometria sono non solo vere (cosa che tuttavia noi possiamo solo supporre, non avendo accesso diretto alle idee), ma anche giustificate tramite l'esercizio di una speciale facoltà argomentativa, la *dianoia*, appunto. Aggiunge poi che questa facoltà è intermedia fra quella che produce semplici opinioni e il *nous* che permette di contemplare le idee. La geometria, o più in generale la matematica, è quindi quanto di più prossimo alla conoscenza autentica l'uomo possa raggiungere.

Ma non è conoscenza autentica. Platone lo conferma nel VII libro (527a-b):

[...] tutti coloro che s'intendono anche un poco soltanto di geometria non verranno a negarci che questa scienza è in piena contraddizione con il linguaggio che impiegano coloro che la praticano. [...] Essi parlano in modo molto comico e forzato, comportandosi da persone pratiche, come se i loro discorsi fossero rivolti all'azione. Parlano di tracciare quadrati, prolungare, applicare e usano ogni sorta di espressioni simili. Invece tutta questa disciplina è esercitata in vista della conoscenza [...] di ciò che eternamente è, e non di ciò che in un dato momento si genera e in un altro momento perisce.

In questo passo è stata spesso ravvisata una tesi sull'ontologia della geometria: questa tratterebbe di idee, ovvero, in un linguaggio moderno, di oggetti astratti, eterni, immutabili e esistenti indipendentemente da noi. Ma il brano ci dice poco sulla natura di questi oggetti. Myles F. Burnyeat (1987) l'ha interpretato piuttosto come l'enunciazione di un problema: quello di render conto di tale natura in modo più preciso.

La differenza di interpretazione dipende, almeno in parte, dalla traduzione di '*mala geloiōs te kai anankaiōs*' che abbiamo reso con 'in modo molto comico e forzato'.

<sup>3</sup>I termini '*dianoia*' e '*nous*' compaiono anche altrove, nei dialoghi di Platone, in sensi diversi. Per esempio nel passaggio del Fedro citato qui sopra (247c-d), dove sono resi rispettivamente con 'pensiero' e 'intelligenza'.



Burnyeat (1987, p. 219) ritiene che *'anankaiōs'* indichi l'inevitabilità del ricorso a un linguaggio di ordine pratico e propende verso un'interpretazione di *'geloīōs'* secondo la quale questo avverbio indica la natura metaforica, ma non il carattere risibile di tale linguaggio. Platone ci direbbe allora che gli uomini possono parlare dei veri oggetti della geometria, eterni, immutabili e puramente intelligibili, solo impiegando dei termini che si riferiscono apparentemente a altri oggetti, temporanei, mutevoli e sensibili. Ma non intenderebbe chiudere così il problema, quanto piuttosto porlo. Platone non starebbe quindi criticando il linguaggio della geometria contrapponendolo alla cristallina chiarezza della sua ontologia. Al contrario, considererebbe questo linguaggio inevitabile, al pari delle pratiche costruttive a cui esso rinvia; e si starebbe invece chiedendo come tale ontologia debba essere concepita.

I vantaggi di questa interpretazione sono ovvi. Innanzitutto, essa si accorda con la distinzione fra due modi della conoscenza: quello della conoscenza autentica ma inaccessibile all'uomo di cui tratta il *Teeteto*, e quello della conoscenza terrena di cui tratta il *Menone*. Questa interpretazione renderebbe inoltre la filosofia della geometria di Platone compatibile con quella pratica matematica che, pochi anni dopo la morte dello stesso Platone, Euclide fisserà negli *Elementi*, una pratica in cui non solo si usano diagrammi e ci si riferisce a essi come se fossero i veri oggetti del discorso, ma soprattutto si considerano gli oggetti geometrici non come delle forme pure (la retta, il cerchio, il triangolo, etc.), ma come degli individui particolari (delle rette, dei cerchi, dei triangoli, etc.) che hanno queste forme, risultano da appropriate costruzioni e vengono rappresentati da particolari diagrammi.

Il punto è che questa pratica non suggerisce direttamente un'ontologia chiara. Da qui il problema posto da Platone. Secondo Burnyeat (1987, pp. 221-222), Platone ammetterebbe l'argomento seguente:

P.1) I teoremi della matematica sono veri;

P.2) Essi non sono veri di oggetti fisici;

[P] -----

P.3) Quindi, essi sono veri di altri oggetti, distinti da quelli fisici.

La premessa (P.1) sarebbe irrinunciabile per Platone per il quale non vi è dubbio che le opinioni di cui è costituita la conoscenza terrena siano vere. La premessa (P.2) dipenderebbe d'altra parte da una semplice constatazione: nessun oggetto fisico può verificare i teoremi della geometria. La conclusione (P.3) si imporrebbe quindi come inevitabile. Ne seguirebbe un altro argomento, anch'esso ammesso da Platone:

P'.1) La matematica parla di oggetti;

P'.2) Questi sono distinti dagli oggetti fisici.

[P'] -----

P'.3) Quindi, gli oggetti di cui parla la matematica sono distinti dagli oggetti fisici.

Anche la conclusione (P'.3) si imporrebbe come inevitabile. Il problema sollevato da

Platone è dunque quello di chiarire le inevitabili conclusioni (P.3) e (P'.3).

Questi due argomenti si inquadrano in un contesto dominato dalla duplicità fra due modi della conoscenza e, di conseguenza, fra due aspetti della geometria: da una parte la sua pratica, il suo linguaggio costruttivo, il sistema deduttivo che collega fra loro le sue ipotesi; dall'altra la collezione delle sue verità che, nella loro purezza, ci parlano dell'iperuranio. Il primo aspetto è quello di un fare umano; il secondo quello di una contemplazione divina.

Gli argomenti [P] e [P'] offrono una motivazione per questa duplicità. Un'altra motivazione, forse perfino più forte, è fornita da un passaggio della *Settima Lettera* (342a-d):

Ciascuna delle cose che sono ha tre elementi attraverso i quali si perviene a conoscerla; quarto è la conoscenza; come quinto si deve porre l'oggetto conoscibile e veramente reale. Questi sono gli elementi: primo è il nome, secondo la definizione, terzo l'immagine, quarto la conoscenza. [...] Cerchio è una cosa che ha un nome, appunto questo nome che abbiamo ora pronunciato. In secondo luogo vi è la sua definizione, formata di nomi e di verbi. [...] Terzo è ciò che si disegna e si cancella, che si traccia con un compasso e che perisce; nulla di tutto questo subisce il cerchio in sé [...] Quarto è la conoscenza, l'intelligenza e l'opinione vera intorno a queste cose [...]. Di queste cose, l'intelligenza è la più vicina alla quinta in genere e somiglianza: le altre ne distano di più.

L'ammissione del quinto elemento, che trascende la sfera della pratica geometrica, è qui motivata da una richiesta di unità, dal bisogno di spiegare che cosa faccia sì che il nome, la definizione, l'immagine (o diagramma) e le proposizioni della geometria abbiano fra loro quell'intima connessione che attribuiamo loro. La risposta di Platone è semplice: essi attingono tutti a un unico oggetto di cui ci permettono di parlare<sup>4</sup>. D'altra parte, il quarto elemento, sia esso inteso come conoscenza, intelligenza<sup>5</sup>, o opinione vera, coincide con la conoscenza terrena del *Menone*, e concerne quindi i primi tre elementi. La verità propria della geometria non può però riguardare questi elementi, ma dipende dalla conformità al quinto: l'oggetto stesso, l'idea.

Verità e unità: ecco le due esigenze, relative alla conoscenza terrena, alla pratica geometrica, che spingono Platone a supporre una realtà superiore e a porre il problema della sua natura.

Così come lo abbiamo formulato, questo problema sembra riguardare solo la geometria. Ma esso sorge anche per l'altra grande branca della matematica greca, l'aritmetica. Riguardo a essa, Platone suggerisce una doppia distinzione. In primo luogo, egli distingue, per esempio nel *Filebo* (56d-e) o nel *Teeteto*, (195e-196a), fra l'aritmetica praticata dai più, che riguarda delle unità che differiscono fra loro, quali lo sono due eserciti o due buoi, e l'aritmetica praticata dai filosofi, per cui tutte le unità non differiscono fra loro. Si tratta della distinzione fra l'arte di contare oggetti particolari e calcolare con essi e l'aritmetica pura che si occupa dei numeri concepiti come moltitudini di unità indistinte<sup>6</sup>. La seconda distinzione riguarda l'aritmetica pura. Ecco come Platone la presenta nel *Gorgia* (451a-c):

Se [...] mi si domandasse: 'Socrate, che arte è l'aritmetica?', risponderi [...] che essa è una di quelle che

<sup>4</sup>Anche qui Platone insiste sull'indispensabilità della conoscenza terrena (342d-e): "se non si sono colte in un modo o nell'altro le prime quattro realtà non si potrà mai avere completa conoscenza della quinta".

<sup>5</sup>Qui Platone usa 'nous', ma in un senso diverso da quello che questo termine ha nella metafora del segmento diviso in quattro parti vista sopra. Cf. anche *Timeo*, 51d-52a.

<sup>6</sup>Questa concezione sarà codificata dalle definizioni VII.1 e VII.2 degli *Elementi* di Euclide.

operano mediante la parola. E se mi si domandasse ancora: 'Che cosa riguarda?', risponderei: 'Il pari e il dispari, quali che siano le quantità di ciascuno di essi'. E se di nuovo mi si chiedesse: 'Che arte è la logistica?', risponderei che anch'essa è tra le arti che particolarmente operano mediante la parola. E se di nuovo mi si domandasse: 'Che cosa riguarda?', risponderei: [...] 'La stessa cosa, il pari e il dispari, ma con la differenza che la logistica considera il pari e il dispari nella loro moltitudine sia in se stessi sia rispetto l'uno all'altro.

Platone sembra distinguere qui l'aritmetica (pura) propriamente detta dalla logistica (anch'essa pura): prendendo quello che dice alla lettera (nella traduzione che ci pare più fedele) sembrerebbe sostenere che la prima si limita alla contemplazione dei numeri in sé stessi considerandoli per la loro intrinseca proprietà di essere pari o dispari, mentre la seconda studia i numeri in quanto diverse moltitudine di unità (si veda la definizione VII.2 degli *Elementi* di Euclide) che stanno fra loro in certe relazioni (tanto di ordine, che additive e moltiplicative). Un'altra interpretazione potrebbe essere che<sup>7</sup>, parlando di pari e dispari, Platone intendesse riferirsi ai numeri in quanto formano una successione in cui a ogni pari succede un dispari, sostenendo che l'aritmetica propriamente detta studia questa successione indipendentemente dal fatto che ogni numero è, in sé, una certa moltitudine di unità piuttosto che un'altra; in termini moderni diremmo che essa considera i numeri naturali in quanto formano una progressione<sup>8</sup>, mentre la logistica ne studia le relazioni che dipendono dalle operazioni definite su di essi.

Se valesse la prima interpretazione, la distinzione del *Gorgia* equivarrebbe a quella fra i due aspetti della geometria di cui abbiamo parlato sopra. L'aritmetica propriamente detta sarebbe un'espressione della conoscenza autentica, puramente contemplativa e inaccessibile all'uomo; la logistica pura (distinta dal calcolo su oggetti particolari) sarebbe un'espressione della conoscenza terrena, e sarebbe ciò che gli uomini praticano quando fanno aritmetica. La verità delle opinioni che formano tale conoscenza terrena dipenderebbe dalla loro conformità all'oggetto contemplato nella conoscenza autentica, ovvero dalle proprietà intrinseche dei numeri. La loro giustificazione dipenderebbe invece da un sistema di ipotesi che concernono le loro relazioni e che verrebbero formulate considerando delle moltitudini di oggetti particolari, perfino fisici (per esempio dei segni opportuni impressi nella cera o incisi nell'argilla), pure immagini delle unità indifferenziate che compongono i numeri come tali. L'argomento [P] potrebbe allora adattarsi bene al caso dei numeri: i teoremi che li riguardano sono veri, ma non lo sono in quanto si perviene a dimostrarli tramite argomenti fondati sulle relazioni di cui tratta la logistica; essi sono veri di oggetti ideali, distinti dalle moltitudini particolari che la logistica considera. E l'esigenza di unità avanzata nella *Settima Lettera* si manifesterebbe anche qui: i termini numerali, le definizioni e le rappresentazioni particolari associate a questi, così come le proposizioni dell'aritmetica, potrebbero trovare la loro intima connessione nel fatto di riguardare oggetti di natura differente, che trascendono i limiti intrinseci di una pratica umana. Il problema

---

<sup>7</sup>Questa seconda interpretazione si avvicina a quella classica di Jakob Klein (1934-36, pp. 17-25), che però traduce diversamente il passo in questione: "with reference to *how much* either happens to be", per il passaggio che noi rendiamo con "il pari e il dispari, quali che siano le quantità di, ognuno di essi".

<sup>8</sup>Tecnicamente una progressione è la struttura comune a ogni sistema di elementi che ammettono un ordine, includono un primo elemento relativamente a tale ordine, e si susseguono poi linearmente in modo che si possa passare da ognuno di essi a ogni altro progredendo secondo tale ordine.

sarebbe allora lo stesso che Platone sembra porre per la geometria: quello di capire la natura di tali oggetti.

Generalizzato all'insieme della matematica, questo è quello che chiamiamo 'problema di Platone'.

## 2. Aristotele fra platonismo e anti-platonismo

Aristotele non è abitualmente annoverato fra i platonisti in filosofia della matematica. Anzi, le sue concezioni al riguardo sono spesso intese come una forma di nominalismo. Tuttavia, esse dipendono da una soluzione del problema di Platone. E sembra perfino possibile considerare questa soluzione come compatibile con il platonismo, almeno sotto certi aspetti. Vale quindi la pena di considerarla.

Prima di tutto è opportuno osservare che Aristotele attribuisce a Platone una possibile soluzione al suo stesso problema, soluzione che nei dialoghi platonici non emerge invece con la medesima chiarezza. In *Metafisica*, I 6, 987b, 15-18, Aristotele sostiene che per Platone gli oggetti matematici<sup>9</sup> occupano una posizione intermedia fra gli oggetti fisici e le idee. Al contrario dei primi, essi sono eterni e immutabili. Ma, dice Aristotele, di essi "ve ne sono molti simili, mentre ciascuna idea in se stessa è, unica". Aristotele sembra voler dire che a ogni idea corrispondono molteplici oggetti intermedi. Si noti che, per quanto riguarda l'aritmetica, tale concezione sembra plausibilmente attribuibile a Platone solo a patto di sostenere che per quest'ultimo le sole idee rilevanti per l'aritmetica siano quelle di unità e numero, o al più quelle dell'unità, del pari e del dispari, e che la pluralità dei vari numeri si manifesti solo fra gli intermedi. Essa potrebbe invece applicarsi più facilmente al caso della geometria: questa, per esempio, si occupa di una pluralità di triangoli, mentre nel regno delle idee vi sarebbe una singola idea di triangolo. Come vedremo nel prossimo §3, questa concezione sarà sistematizzata da Proclo.

Secondo Julia Annas (1976, p. 53), Aristotele attribuisce tuttavia questa tesi a Platone proprio come possibile soluzione di un problema che riguarda l'aritmetica: quello che Annas chiama il 'problema dell'unicità'. Consideriamo l'asserto ' $2+2=4$ ' e chiediamoci quale genere di verità esso esprima. Certamente per Platone non si tratta di una verità che riguarda il mondo fisico. Si tratterebbe allora di una verità a proposito delle idee? Anche questo sembra dubbio, perché ogni numero sarebbe una singola idea e quindi non vi sarebbero due 2 che potrebbero essere sommati l'uno all'altro. Si potrebbe dire allora che si tratta, appunto, di una verità a proposito di intermedi fra le idee e gli oggetti fisici, sostenendo che vi sia una sola idea dell'unità, una sola idea del 2, una sola idea del 3, e così via, ma che a ognuna di queste idee corrispondono molti intermedi: molte unità, molti 2, molti 3, etc. Resta però che tale soluzione sembra comportare un problema più grave di quelli che potrebbe risolvere, perché se così fosse, o l'asserto ' $2+2=4$ ' riguarderebbe solo tre particolari intermedi — due 2 e un 4 particolari — e allora non sarebbe universale,

---

<sup>9</sup>Aristotele usa qui un neutro plurale: '*ta mathēmatika*'. Scartando la traduzione letterale 'le cose matematiche', che risulterebbe poco ortodossa, fra le altre traduzioni abituali — 'gli oggetti matematici' e 'gli enti matematici' — scegliamo la prima che si adatta di più alla terminologia oggi corrente.

oppure esso dovrebbe essere inteso in accordo con una sua riformulazione sotto forma di asserto quantificato come ‘per ogni coppia di 2 e per ogni 4,  $2+2=4$ ’: una concezione che non sembra plausibilmente attribuibile a Platone.

In *Metafisica*, XIII-XIV, Aristotele porta diversi argomenti contro la concezione che attribuisce a Platone, e in generale contro la tesi secondo la quale la matematica (sia essa aritmetica o geometria) tratterebbe di idee o di altre entità di un qualche tipo separate dagli oggetti sensibili, e in qualche modo connesse con le idee.

Prima di vedere la concezione che Aristotele contrappone a questa, vediamo come egli formula (*Metafisica*, XIII 1, 1076a, 22-37), il problema a cui tale concezione dovrebbe fornire una risposta, che non è altro che il problema di Platone:

In primo luogo, dovremmo svolgere la ricerca intorno agli oggetti matematici, senza attribuire a essi alcun'altra natura, vale a dir senza porre il problema se siano o no idee, e se siano o no principi e sostanze degli esseri: dovremo, cioè, unicamente ricercare se, considerati come oggetti matematici, esistano o non esistano, e, se esistono, in quale modo esistano. [...] Se gli oggetti matematici esistono, essi, necessariamente, o dovranno esistere nelle cose sensibili [...], oppure dovranno esistere separati dalle medesime [...]; e, se non esistono in nessuno di questi due modi, o non esistono affatto o esistono in un modo ancora diverso. Pertanto la nostra discussione verterà non sulla loro esistenza ma sul loro modo di esistere.

Aristotele presenta qui quattro possibili opzioni: gli oggetti matematici *i*) esistono negli oggetti sensibili; *ii*) esistono separatamente da questi; *iii*) non esistono affatto; *iv*) esistono in un altro modo. Gli interpreti concordano nel ritenere che (*ii*) è l'opzione che Aristotele ascrive a Platone, ovvero corrisponde alla tesi che gli oggetti matematici sono intermedi fra le idee e gli oggetti fisici (ne segue che Aristotele non considererebbe neppure la possibilità che gli oggetti matematici siano idee e che di queste tratti in ultima istanza la matematica, sia pure servendosi di oggetti fisici intesi come loro copie). L'atteggiamento di Aristotele nei confronti delle opzioni (*i*), (*iii*) e (*iv*) è invece oggetto di discussione fra gli interpreti.

Cominciamo con l'interpretazione più prudente di Annas (1976, pp. 61-65). Secondo tale interpretazione, il modo in cui Aristotele affronta il problema non sarebbe affatto una concessione a Platone: per quanto egli distingua vari sensi in cui gli oggetti matematici possono esistere, la conclusione sarebbe che in nessun senso è letteralmente vero che esistono. Egli non direbbe però chiaramente se si vi sia un senso non letterale in cui si possa dire plausibilmente che essi esistono. Il terzo capitolo del libro XIII, in cui Aristotele presenta la sua posizione circa l'esistenza degli oggetti matematici, sarebbe infatti solo abbozzato e vago. Aristotele non chiarirebbe quindi se l'opzione (*iv*) possa essere precisata in modo da renderla accettabile. Le sole cose chiare sarebbero: *a*) che Aristotele rigetta le opzioni (*i*) e (*ii*)<sup>10</sup>; *b*) che per lui gli oggetti matematici hanno qualcosa in comune con il tempo, il luogo e l'infinito: essi non esistono come tali, ma dipendono per la loro eventuale esistenza dall'esistenza degli oggetti fisici. L'attitudine di Aristotele sarebbe allora riduzionista: così come quello che si dice, per esempio, del tempo può essere compreso solo in quanto riferito, in ultima analisi, a eventi temporali<sup>11</sup>, quello che si dice degli oggetti

<sup>10</sup>La sua confutazione dell'opzione (*i*) dipende da vari argomenti avanzati all'inizio del capitolo 2 del libro XIII, che riprendono quelli avanzati alla fine del capitolo 2 del libro III (o B).

<sup>11</sup>Nella *Fisica*, Aristotele è chiarissimo a proposito del fatto che il tempo — definito come “il numero del

matematici può essere compreso solo in quanto riferito, in ultima analisi, a oggetti fisici. In termini moderni, quest'attitudine corrisponde a sostenere che gli asserti matematici non devono essere presi alla lettera, e che, nella forma in cui essi si presentano abitualmente, essi non sono altro che riformulazioni abbreviate di asserti più lunghi e complessi. Così i termini singolari che intervengono in essi e sembrano denotare oggetti matematici non hanno, come tali, alcun riferimento, essendo solo parti di abbreviazioni usate al posto di espressioni più complesse in cui non interviene alcun termine di questo genere: un punto di vista che, come abbiamo visto nell'Introduzione, è tipicamente nominalista.

Questa interpretazione non spiega però la relazione che, secondo Aristotele, legerebbe la matematica agli oggetti fisici. Sia in *Metafisica*, XIII 3, che in *Fisica*, II 2, egli dice che la matematica prende origine da un certo modo di considerare gli oggetti fisici e le loro proprietà, e si distingue dalla fisica proprio in base a questo modo in cui lo considera. Un termine che, per quanto assente in quei capitoli, è stato spesso usato e continua a esserlo per indicare questo modo è 'astrazione'. Si tratta di capire come intenderlo. Questo è il problema affrontato da interpretazioni meno prudenti di quella di Annas.

Secondo Burnyeat (1987, p. 222), l'accettazione degli argomenti [P] e [P'] (cf. §1) costituisce il discrimine fra le posizioni di Platone e Aristotele: se il problema del primo è di chiarire le conclusioni (P.3) e (P'.3), quello del secondo è di resistere a tali conclusioni rigettando le premesse (P.2) e (P'.2). Secondo Burnyeat, Aristotele accetta infatti le premesse (P.1) e (P'.1) — e quindi scarta l'opzione (iii) vista sopra — e in *Metafisica*, XIII 3, presenta argomenti per sostenere che i teoremi della matematica sono veri di oggetti fisici. Gli oggetti matematici non sarebbero allora, per Aristotele, che gli stessi oggetti fisici considerati diversamente. Anche Lear (1982) sostiene questa tesi, precisando che per Aristotele la geometria tratterebbe degli oggetti fisici in quanto essi posseggono certe proprietà: i suoi teoremi asserirebbero che gli oggetti fisici, considerati per il loro godere di tali proprietà, godono anche di altre proprietà, proprio in quanto godono delle prime. Sia *F* una di tali proprietà, per esempio la proprietà di essere un triangolo. Allora un teorema della geometria direbbe di un oggetto fisico che gode di *F* che, in quanto considerato come un *F*, esso gode di qualche altra proprietà *G* (per esempio quella di avere angoli interni la cui somma è uguale a due angoli retti). Questa interpretazione ha almeno due problemi.

Il primo è che, nel brano citato sopra, Aristotele non sembra contemplare l'opzione che gli oggetti matematici coincidano con quelli fisici, ammettendo solo la possibilità che i primi esistano nei secondi. Si potrebbe pensare che questo sia un altro modo per dire la stessa cosa. Ma gli argomenti già menzionati in *Metafisica*, XIII 2 e III 2, sembrano indicare che non sia così. Essi si propongono infatti di mostrare che sostenere che gli oggetti matematici sono negli oggetti fisici, pur essendo distinti da essi, genera diverse aporie. Il secondo problema è che la tesi che la matematica concerne oggetti fisici considerati diversamente o in quanto possiedono certe proprietà sembra potersi precisare solo dicendo che essa concerne questi oggetti prescindendo dalle loro altre proprietà. Ma

---

movimento secondo il prima e il poi" (219b, 2) — esiste solo in quanto esistono il movimento (218b, 21) e l'anima e che lo numerata (223a, 21-29).

questa tesi va incontro a facili critiche, alcune delle quali sono rese manifeste da argomenti non molto dissimili da quelli appena menzionati dello stesso Aristotele. Stewart Shapiro (2000a, pp. 67-68) ha per esempio richiamato a questo proposito alcuni argomenti di Gottlob Frege, fra cui il seguente (1884, §34):

[...] le proprietà per cui gli oggetti di un certo gruppo si differenziano gli uni dagli altri, sono qualcosa di inessenziale per il numero di questi oggetti [...]. Evidentemente è questo il motivo per cui si vuol prescindere da esse nel concetto di numero. L'affermazione dell'uguaglianza di tutte le unità non riesce però a questo scopo. [...] Se per esempio nel prendere in esame un gatto bianco e uno nero, prescindendo dalle proprietà per cui essi si distinguono, non ottengo il concetto di due, ma quello generale di gatto. Ché se poi subordino entrambi questi individui a questo concetto generale, e attribuisco loro il nome di unità, il gatto bianco non cessa perciò di essere bianco, né quello nero di essere nero. [...] Ciò che non contiene più le particolarità è il concetto generale di gatto [...]; ma proprio per ciò questo concetto è soltanto uno, mentre i gatti considerati erano due.

Possiamo riformulare questo argomento come segue. Se l'aritmetica concernesse i gatti di Frege a prescindere da alcune delle loro proprietà, dovrebbe concernere questi gatti per le loro restanti proprietà. Ma nessuna proprietà dei gatti sembra avere qualcosa a che fare con l'aritmetica. Al più, questa potrebbe concernere la collezione di tali gatti per alcune delle sue proprietà, in particolare quelle proprietà che essa condivide con altre appropriate collezioni, come quella formata da un pappagallo e da una tigre. Ma allora sarebbe difficile sostenere, senza cadere in un circolo vizioso, che tale collezione sia un oggetto fisico, dal momento che, per esempio, queste proprietà sono apparentemente condivise anche dalla collezione formata da un triangolo acuto e un triangolo ottuso. Una difficoltà simile sorgerebbe d'altra parte anche per la geometria, perché sarebbe difficile capire quali proprietà di un appezzamento di terreno potrebbero essere rilevanti per la geometria, che sembra occuparsi di proprietà che nessun oggetto fisico possiede, come quella di avere due sole dimensioni. Qualcuno potrebbe pensare che il nostro appezzamento di terreno abbia, dopo tutto, una tale proprietà. Ma se così fosse, non sarebbe possibile scavarvi un buco. Ciò che ha due sole dimensioni è la superficie dell'appezzamento, che è ben distinta dall'appezzamento stesso, proprio come i due gatti di Frege sono ben distinti dalla loro collezione.

Quest'ultima considerazione suggerisce un'altra opzione che, secondo un'altra interpretazione, sostenuta per esempio da Ian Mueller (1970) e Edward Hussey (1991), sarebbe proprio quella accettata da Aristotele. Secondo una tale interpretazione, Aristotele ammetterebbe tanto le premesse (P.2) e (P'.2) che le conclusioni (P.3) e (P'.3), a patto che esse vengano opportunamente intese. In particolare, egli ammetterebbe che l'astrazione che opera in matematica non consiste semplicemente nella mancata considerazione di alcune proprietà degli oggetti fisici o in una loro diversa considerazione, ma è piuttosto un processo che consente di accedere a altri oggetti che sarebbero distinti ma non separati da quelli fisici, ai quali si potrebbe accedere solo tramite questi ultimi e proprio attraverso questo processo (cosa che implica, a differenza di quanto sostiene Platone, che gli uomini abbiano accesso agli oggetti matematici, per quanto essi siano oggetti astratti).

Se Aristotele la pensasse davvero così, egli sarebbe, in un certo senso, un platonista,

visto che pur negando che gli oggetti della matematica esistano in un mondo separato e indipendente da quello in cui viviamo, ammetterebbe che la matematica parli di oggetti astratti, e che i suoi asserti siano veri di essi. Questa conclusione contraddice l'opposizione usualmente accettata fra Platone e Aristotele. Un modo per evitarla, senza accontentarsi dell'agnosticismo della prima delle tre precedenti interpretazioni e senza cadere nelle difficoltà della seconda, potrebbe essere quello di emendarla opportunamente. Richard Pettigrew (2009) ha proposto una maniera per farlo, suggerendo che per Aristotele gli oggetti della geometria siano oggetti fisici che tuttavia esistono solo in potenza finché appropriate procedure geometriche non permettono di identificarli come tali.

Resta certo da spiegare come gli oggetti in questione possano possedere proprietà geometriche rilevati pur essendo fisici. L'interpretazione di Pettigrew ha comunque almeno il pregio di attirare la nostra attenzione su un aspetto cruciale della geometria greca, almeno per come essa è esposta negli *Elementi* di Euclide, ovvero la sua natura intrinsecamente modale. Tale geometria riguarda oggetti che cadono sotto certi concetti descritti in generale (per esempio il concetto di triangolo). Questi oggetti però non ci sono dati *ipso facto* tramite le stipulazioni che fissano tali concetti, ma possono essere dati tramite certe costruzioni codificate (le cosiddette costruzioni per riga e compasso), le quali possono essere messe in atto in opportune circostanze, ma non sono realizzate per il solo fatto che tali circostanze si verifichino. Non vi è dubbio che tali procedure riguardino oggetti fisici, come diagrammi tracciati su supporti adeguati. Sembra tuttavia appropriato pensare che esse consentano di trarre conseguenze che riguardano oggetti astratti, legati a tali oggetti fisici da una relazione complessa, che si potrebbe pensare solo approssimativamente come una relazione di rappresentazione<sup>12</sup>. Resta però il problema che non vi sono evidenze dirette per sostenere che Aristotele la pensasse a questo modo.

### **3. Proclo: l'interpretazione neo-platonista della geometria di Euclide**

Proclo è uno dei protagonisti del movimento neo-platonico della tarda antichità. Nato a Bisanzio all'inizio del V secolo d. C., studia a Alessandria, poi, giovanissimo, si trasferisce a Atene, alla rinnovata e allora fiorente Scuola di Platone (l'Accademia, fondata da Platone stesso), dove resterà tutta la vita. Fra le sue numerose opere vi è un *Commento al Primo Libro degli Elementi di Euclide*. Nel prologo, egli presenta una riformulazione della filosofia della matematica di Platone che diverrà classica.

Alla sua base vi è l'interpretazione di tale filosofia offerta da Aristotele: gli oggetti matematici sono intermedi fra le idee e gli oggetti fisici. Ciò risulta perfettamente chiaro dalla frase che apre il commento (Parte I, cap. I, 3, 2-8):

L'essere matematico necessariamente non è né dei primi generi dell'essere, né degli ultimi e meno semplici, ma occupa una posizione intermedia tra le realtà senza parti — semplici, non composte, indivisibili — e quelle divisibili caratterizzate da ogni varietà di composizione e differenziazione.

Che le idee platoniche siano, a differenza degli oggetti fisici, indivisibili e semplici non è una novità. Ma è significativo che per indicare il carattere intermedio degli oggetti

---

<sup>12</sup>Questa lettura egli *Elementi* di Euclide è difesa e precisata in Panza (cs).



matematici, Proclo insista non solo sul fatto che a ogni singola idea corrisponda una pluralità di oggetti fisici, ma anche sull'opposizione fra la semplicità e l'indivisibilità delle idee e il carattere composto e divisibile di tali oggetti. Ciò corrisponde a una precisazione cruciale introdotta, questa sì, da Proclo: come le idee, gli oggetti matematici sono astratti, eterni e immutabili, ma si differenziano da quelle non solo perché a ogni singola idea ne corrispondono molti, ma anche perché essi possono essere composti (e sono quindi divisibili) e possono possedere una sorta di estensione.

Per Proclo (*Prologo*, parte I, cap. II), gli oggetti matematici discendono dai due principi che generano ogni cosa a partire dalla causa prima, indescrivibile e incomprensibile, costituita dall'uno (inteso come principio cosmologico, assolutamente primo): il limite e l'illimitato. L'idea di una generazione di ogni cosa dall'uno è tipicamente neo-platonica (si pensi a Plotino, vissuto due secoli prima). Non è ciò che ci interessa qui. Più rilevante è che per Proclo gli oggetti matematici discendono non solo da questi principi come tali, ma anche dai principi secondari che discendono a loro volta da essi e generano tutti gli ordini intermedi delle cose. In altre parole, Proclo ammette un' indefinita generazione di oggetti matematici. Questo presuppone una qualche facoltà generativa. Qui risiede il carattere più tipico della sua filosofia della matematica.

Proclo (*Prologo*, parte I, cap. V) riprende la distinzione platonica fra *nous* e *dianoia*, e riconosce nella seconda la facoltà che si esercita in matematica: la *dianoia*, egli dice (Parte I, cap. V, 11, 4-9), "considera le immagini delle cose intelleggibili" e dà luogo a una forma di conoscenza che "dipende da ipotesi", mentre il *nous* "si eleva verso il principio non ipotetico stesso". Ma egli va oltre Platone quando si domanda come funzionano *nous* e *dianoia* e da dove vengono gli oggetti matematici che quest'ultima studia. La sua risposta ha due parti.

In primo luogo (*Prologo*, parte I, cap. VI), egli rigetta l'idea che tali oggetti provengano dagli oggetti fisici per astrazione o generalizzazione, e sostiene che siano generati dall'anima, che li deriva da se stessa e dal *nous*. Questo punto non è chiaro. Proclo sembra sostenere che l'anima abbia, come incise in essa, le tracce delle idee, ma aggiunge anche che il *nous* non è solo all'origine di tali tracce, in quanto permette all'anima di contemplare le idee; il *nous* agisce anche sull'anima stessa, sia permettendole di accedere a queste tracce che continuando, in qualche modo, a inciderele. È questa continua attività che genera gli oggetti matematici. L'anima di cui parla Proclo non è l'anima individuale di ognuno di noi, ma una sorta di anima universale. Questo non toglie che egli concepisca gli oggetti matematici come generati, anche se la loro esistenza resta precedente al discorso che parla di essi, articolato dalla *dianoia*.

La seconda parte della risposta di Proclo si trova nella seconda parte del prologo, dedicata alla geometria. Il suo nuovo argomento (*Prologo*, parte II, cap. II) sembra quindi riguardare solo quest'ultima, e difficilmente è applicabile all'aritmetica<sup>13</sup>.

Quest'ultima tratta di numeri che, in quanto pluralità di unità indivisibili, non sono

---

<sup>13</sup>Proclo accenna tuttavia, quasi di sfuggita, a tale argomento già nella prima parte: cap. VI, 13, 9-11.

infinitamente divisibili e, pur essendo quantità, non hanno estensione. Al contrario, le grandezze geometriche sono quantità estese e infinitamente divisibili. Ma, secondo Proclo, gli oggetti, anche se puramente intellegibili, possono essere estesi solo “mediante il ricettacolo materiale che li riceve” (Parte II, cap I, 49, 27 – 50, 2). Le grandezze geometriche, quindi, non solo non possono venire generate per semplice ripetizione dell'apparenza di un'idea (come sembrano esserlo i numeri, generati moltiplicando le apparenze dell'idea di unità), ma posseggono anche una sorta di materia. Per rendere conto di esse, Proclo si richiama all'immaginazione (*phantasia*). A differenza che per Aristotele, che l'aveva introdotta (nel *De anima*, libro III, cap. 3) come una sorta di facoltà intermedia fra pensiero<sup>14</sup> e sensibilità<sup>15</sup>, l'immaginazione non è per Proclo separata dal *nous* e dalla *dianoia*; è piuttosto uno strumento di tali facoltà.

Il suo ruolo dipende da un'ulteriore distinzione introdotta da Proclo: quella fra le idee contemplate dal *nous* e altri oggetti puramente intellegibili, che egli chiama '*dianoēta*' ('oggetti della *dianoia*') o '*logoi*' ('discorsi' o 'oggetti del discorso'). Questi non solo sono inestesi, indivisibili e informi come le idee, ma non sono neppure molti per ogni singola idea. Si tratta apparentemente di tipi ideali che non sono però solo contemplati, come le idee, ma anche investiti da un'argomentazione. I *logoi* non sono ancora, tuttavia, gli oggetti della geometria. Per dar luogo a questi, i *logoi* devono moltiplicarsi e integrare estensione e infinita divisibilità, e quindi quantità. È qui che interviene l'immaginazione.

Il testo di Proclo ammette diverse interpretazioni. Secondo quella che ci convince di più, l'immaginazione è una sorta di ricettacolo passivo, uno schermo costituito da una materia estesa, ma puramente intellegibile — che potremmo identificare con uno spazio ideale —, sul quale i *logoi* vengono proiettati, ognuno una moltitudine di volte, in modo da ottenere diverse proiezioni (*probolai*) dotate appunto di estensione e infinita divisibilità<sup>16</sup>, che possono differire per dimensione e, entro certi limiti, per forma (cosa che rende conto, per esempio, del fatto che non tutti i triangoli sono uguali e neppure simili). La proiezione stessa, ovvero l'attività che, a partire dai *logoi*, genera gli oggetti della geometria, sembra allora esercitata dal *nous*, che, oltre a contemplare le idee, ha il potere di generare entità. Secondo altre interpretazioni, l'immaginazione non è puramente passiva, ma è essa stessa un'attività che genera le proiezioni dei *logoi*. Al di là delle differenze interpretative, ciò che è chiaro è che le grandezze estese e infinitamente divisibili di cui tratta la geometria — le rette, i triangoli, i cerchi, etc., presi nella loro pluralità — sono per Proclo delle proiezioni immaginarie dei *logoi*, che, a loro volta, si distinguono dalle idee contemplate dal *nous*.

Un modo per spiegare la distinzione fra *logoi* e idee è il seguente. Secondo Platone i teoremi della geometria sono veri in base alla loro conformità con un dominio di oggetti inaccessibili, quali le idee. La loro verità è quindi separata dalla loro giustificazione. Si potrebbe pensare che Proclo voglia evitare questa separazione o, almeno, renderla meno netta. Certo, nessuna attività discorsiva e quindi nessuna giustificazione può far accedere

---

<sup>14</sup>Usiamo qui il termine 'pensiero' in modo volutamente vago. Una chiarificazione del modo in cui Aristotele concepisce le facoltà superiori dell'anima ci porterebbe troppo lontano di nostri scopi.

<sup>15</sup>Con 'sensibilità' intendiamo qui e nel seguito la facoltà di avere sensazioni percettive.

<sup>16</sup>Il caso dei punti richiederebbe una considerazione a parte, che non introdurrebbe però difficoltà particolari.

alle idee. La *dianoia* resta quindi separata dall'attività contemplativa del *nous*. Ma le idee si sdoppiano, dando luogo ai *logoi*, che potremmo intendere come i nostri concetti (si ricordi che le idee platoniche sono oggetti, per quanto inaccessibili, e non concetti). Siccome le proprietà di questi dipendono dalla natura delle idee, la verità dei teoremi della geometria dipende dalla loro conformità alle idee, anche se questi teoremi non parlano direttamente delle idee, quanto piuttosto dei *logoi* o delle loro variegata proiezioni. Il passaggio da idee a *logoi* resta inesplicito, ma il quadro finale può sembrare più confortevole della radicale dicotomia platonica.

Quello che Proclo dice a proposito della proiezione dei *logoi* non si applica all'aritmetica. Sembra tuttavia che, nel suo insieme, il sistema delle sue distinzioni possa adattarsi. Si tratterebbe di cominciare con l'idea di numero, o, meglio con quelle di unità, pari e dispari. A queste corrisponderebbero appropriati *logoi* o concetti. Per generare da essi i diversi numeri, il *nous* dovrebbe poi far leva su una diversa forma di immaginazione, capace di dar luogo a un'aggiunta reiterata di diverse proiezioni del *logos* di unità, producendo alternativamente proiezioni del pari e del dispari. La *dianoia* si eserciterebbe sui *logoi* di unità, pari e dispari, conducendo alle definizioni e ai teoremi dell'aritmetica; questi ultimi sono giustificati in base a tali *logoi*, ma parlano delle loro proiezioni e sono veri per la loro conformità alle idee.

In estrema sintesi potremmo allora dire che, per gli aspetti per cui ci interessa, la filosofia della matematica di Proclo include i seguenti ingredienti: *i*) le idee platoniche (che restano degli oggetti inaccessibili), fra cui per esempio, l'idea di triangolo o quella di unità; *ii*) i *logoi*, ovvero i concetti associati a tali idee, per esempio il concetto di triangolo o il concetto di unità; *iii*) il *nous*, che ci permette di contemplare le idee, le rammenta all'anima caduta nel corpo, e proietta i *logoi* sullo spazio esteso (ma immateriale) dell'immaginazione o su qualche altro appropriato ricettacolo, producendo quantità appropriate puramente intelleggibili, come i diversi triangoli o i diversi numeri; *iv*) la *dianoia*, che si esercita sui *logoi*, permettendoci di formulare definizioni, postulati e teoremi a proposito delle loro proiezioni, che sono giustificati in base ai *logoi* stessi, ma sono veri grazie alla loro conformità alle idee. Tanto nel caso della geometria, quanto in quello dell'aritmetica, la *dianoia*, i *logoi* e le loro proiezioni immaginarie, e quindi anche il *nous*, per la sua attività di proiezione dei *logoi*, servono a ottenere i teoremi della matematica e la conoscenza terrena che essi esprimono. Le idee, e ancora il *nous*, per la sua contemplazione delle idee, servono a assegnare a tali teoremi la loro irrinunciabile verità.

#### **4. Kant: la reinterpretazione trascendentale dell'aritmetica e della geometria classiche**

Proclo visse otto secoli dopo Aristotele, e Immanuel Kant tredici secoli dopo Proclo. Non è però per i cinque secoli in più che esso comporta, che il salto da Aristotele a Kant sorprenderà forse più di quello da Aristotele a Proclo. Spesso la scienza e la filosofia antiche sono viste come un insieme omogeneo, mentre il passaggio dall'antichità all'illuminismo è visto come foriero di trasformazioni profondissime. In realtà, entrambi i

salti cancellano grandi differenze, in una vicenda complessa di cui qui ci limitiamo a considerare qualche frammento. Ma vi è anche una ragione intrinseca che giustifica i nostri salti temporali: la matematica sui cui Platone, Aristotele, Proclo e Kant ragionano è essenzialmente la stessa — quella codificata negli *Elementi* di Euclide — e le loro interpretazioni impiegano ingredienti simili.

Non è che la matematica non fosse nel frattempo cambiata. Anche se nel quinto secolo gli *Elementi* costituivano ancora lo scheletro dell'edificio matematico, novità importanti erano nel frattempo apparse grazie a contributi di matematici quali Archimede, Apollonio, Diofanto, Pappo. E nel diciottesimo secolo, questo scheletro aveva subito trasformazioni profonde e si era ampliato in varie direzioni, spesso contrastanti con lo spirito e con la lettera degli *Elementi*. Per non fare che qualche esempio, gli sviluppi dell'algebra araba e rinascimentale, l'avvento della geometria cartesiana, la nascita dell'analisi infinitesimale, l'apparizione della meccanica newtoniana avevano modificato in modo essenziale anche le parti considerate più elementari della matematica, tanto da far spesso parlare di una matematica nuova, contrapposta a quella degli antichi. Per quanto, tuttavia, all'origine della filosofia trascendentale di Kant vi sia proprio lo sforzo di spiegare i successi cui la meccanica newtoniana aveva condotto nella comprensione del cosmo, la sua filosofia della matematica resta ancorata alla matematica euclidea. Ciò si deve in parte al modo in cui Newton aveva scritto i *Principia* (l'opera in cui forniva la sua spiegazione del cosmo), evitando di servirsi tanto dell'analisi infinitesimale quanto dell'algebra cartesiana, e basandosi invece su un'estensione della geometria di Apollonio. Ma un'altra ragione è l'incapacità di Kant di cogliere le profonde differenze fra la matematica del suo tempo e quella di Euclide.

Questa incapacità fa d'altra parte il paio con un fatto storico innegabile: le trasformazioni matematiche nei due millenni che separano Kant da Euclide e le numerose considerazioni filosofiche che le hanno accompagnate non hanno portato con sé alcuna risposta essenzialmente nuova al problema di Platone, né alcun argomento capace di mostrarne l'infondatezza. In pieno illuminismo, la soluzione platonista, riformulata da Proclo, e quella nominalista o perfino empirista suggerita da Aristotele restavano, nella sostanza, le principali opzioni a disposizione.

La filosofia della matematica di Kant introduce invece una novità: non solo riformula il problema in maniera essenzialmente diversa, ma lo lega a altri, almeno parzialmente nuovi — come quello della forma logica di un giudizio —, e ne fornisce una risposta originale. Questa risposta non può certo considerarsi come una versione di platonismo. Vale tuttavia la pena di considerarla, visto che alcuni suoi ingredienti resteranno al centro della discussione successiva e sono ancora oggi largamente impiegati.

La tesi più conosciuta fra quelle di Kant a proposito della matematica è che i giudizi matematici sono sintetici *a priori*. Sarà qui sufficiente limitarsi a essa, esponendo, tra le diverse e spesso incompatibili interpretazioni della filosofia di Kant, quella che ci pare

preferibile<sup>17</sup>

Non è facile stabilire precisamente che cosa Kant intendesse con ‘giudizio’ (cf. Martin, 2006; Anderson, 2008). Per semplificare diremo che un giudizio è per Kant l’affermazione (o la negazione) del sussistere di una certa relazione fra concetti, la cui natura particolare dipende dalla forma del giudizio considerato. Ma per Kant affermare che certi concetti stanno in una certa relazione significa rappresentare uno stato della coscienza in cui essi sono presenti insieme e quindi, in un certo senso, si unificano nella coscienza. Tale rappresentazione richiede un linguaggio, ma l’unificazione dei concetti nella coscienza è resa possibile da una facoltà che permette di operare su di essi ancora prima che sulle loro rappresentazioni linguistiche. Kant la chiama ‘intelletto’. Per quanto essa richiami la *dianoia* di Platone e di Proclo, va osservato che i concetti di Kant non sono assoggettati a oggetti di ordine superiore contemplati grazie a una facoltà diversa, in qualche modo simile al *nous*. Come i *logoi* di Proclo, essi sono d’altra parte generali: la loro funzione è di riunire sotto una sola matrice diversi contenuti di coscienza o rappresentazioni. Un concetto è ciò che permette di pensare tali contenuti sussumendoli sotto la loro matrice comune. Ciò che permette di accedere a essi è invece un’intuizione. Concetti e intuizioni sono quindi necessariamente correlati fra loro: la conoscenza non è possibile se essi non intervengono insieme. L’intelletto può però solo fornire i concetti e operare con essi; non può fornire intuizioni. Deve quindi essere accompagnato da qualche altra facoltà.

A questo punto le cose si complicano. Per Platone, *nous* e *dianoia* si accompagnano alla sensibilità, che permette agli uomini di accedere alle apparenze terrene delle idee. Aristotele suggerisce di introdurre l’immaginazione come una facoltà intermedia, mentre Proclo ne fa uno strumento del *nous* e della *dianoia* che interviene dove non interviene la sensibilità. Per Kant non vi è, come abbiamo detto, nulla che corrisponda al *nous*, ma sensibilità e immaginazione mantengono il loro ruolo, sia pure concepite in modo diverso. La sensibilità fornisce ai concetti un contenuto sotto forma di oggetti. Un oggetto è ciò che agisce su di noi producendo in noi un’intuizione, o meglio ciò a cui assegniamo la funzione di agire su di noi per produrre tale intuizione, che può così essere intesa come l’intuizione di tale oggetto e quindi come l’intuizione che corrisponde al concetto sotto cui esso cade. Ma un oggetto, dice Kant, può cadere sotto un concetto solo in quanto vi è un terzo elemento che li connette: una sorta di istruzione che stabilisce che tale oggetto cade proprio sotto tale concetto. Questo elemento, detto ‘schema’, è fornito dall’immaginazione.

Non è necessario specificare che gli oggetti in questione sono empirici (o fisici), visto che per Kant non vi sono altri oggetti che questi. Non vi sono però solo concetti sotto cui sono supposti cadere oggetti. Il concetto di triangolo, o di numero, e in generale i concetti della matematica non sono di questo genere: sotto di essi non cadono né sono supposti cadere oggetti. Ciò non toglie che abbiano contenuto. Si tratta dunque di comprenderne la natura. Questo è il modo in cui Kant riformula il problema di Platone: trasformandolo nel

---

<sup>17</sup>Per un’esposizione più articolata di alcune delle cose che diremo, cf. Panza (1997). Fra le innumerevoli esposizioni della filosofia di Kant, cf. Cassirer (1918-21), Strawson (1966). Per ciò che concerne la sola filosofia della matematica, cf. Friedman (1992).

problema di comprendere quale sia il contenuto dei concetti matematici.

Cominciamo col vedere la concezione di Kant dell'esperienza, che egli non concepisce come il nostro semplice rapportarci a un disordinato fluire di fenomeni, ma come il risultato di una costruzione complessa, che sfocia nella trasformazione di tali fenomeni in un sistema di oggetti. Come tali, gli oggetti sono quindi costruiti: sono appunto ciò a cui assegniamo la funzione di agire su di noi per produrre un'intuizione. Essi non preesistono quindi all'intuizione che producono; ne sono piuttosto un correlato. E, posto che le intuizioni sono a loro volta correlati dei concetti, gli oggetti che producono certe intuizioni sorgono con esse, in quanto i concetti corrispondenti sono riempiti da queste intuizioni. Avere un'esperienza è quindi proprio questo: possedere certi concetti e riempirli con intuizioni appropriate.

Ora, la prima distinzione introdotta da Kant nella *Critica della Ragione Pura* (Introduzione, sez. I) è quella fra conoscenza *a posteriori* e *a priori*. La prima è quella che possiamo ottenere solo attraverso l'esperienza; la seconda quella che possiamo ottenere indipendentemente da essa. Quanto appena detto a proposito del modo in cui Kant concepisce l'esperienza è allora sufficiente per capire che la conoscenza *a posteriori* richiede quella *a priori*, in quanto richiede concetti e intuizioni che essa non può fornire a se stessa. In generale, diremo che la seconda è una condizione di possibilità della prima. E siccome è indubbio che vi sia la prima, anche la seconda deve esserci.

Dire che vi debba essere conoscenza *a priori* equivale per Kant a dire che vi devono essere giudizi *a priori*. Per capire il perché, occorre osservare che nell'epistemologia di Kant non vi è spazio per l'opinione<sup>18</sup>. L'articolazione di un giudizio non corrisponde infatti alla libera associazione di due concetti e neppure alla loro associazione ipotetica. Se vi sono per Kant dei giudizi problematici — a fianco di quelli assertori e apodittici — questi lo sono non perché associano due concetti in modo congetturale, ma perché affermano (in modo non congetturale) la possibilità di tale associazione. L'articolazione di un giudizio corrisponde quindi a un atto di unificazione fra due concetti che è garantito dalla natura di tali concetti e/o dall'intuizione corrispondente. Essa porta quindi con sé la propria giustificazione. Ne segue che un giudizio è *a posteriori* se la sua articolazione richiede il ricorso a una qualche esperienza, mentre è *a priori* se la sua articolazione non richiede il ricorso a alcuna esperienza.

Per Kant vi sono due generi di giudizi *a priori*: quelli analitici e quelli sintetici. Questa distinzione è introdotta nell'Introduzione alla *Critica*, sez. IV (B 10/A 6-7), e è esplicitamente riferita ai soli giudizi “in cui viene pensato il rapporto di un soggetto con il predicato”, ovvero, come spesso si dice, ai soli giudizi soggetto-predicato. Secondo Kant, “questo rapporto è possibile in due modi”: o il predicato è “contenuto” nel soggetto, oppure “si trova completamente al di fuori” di esso, pur essendo con esso “in connessione”. Nel primo caso il giudizio è analitico, nel secondo sintetico.

Siano *S* e *P* due concetti sotto cui sono supposti cadere degli oggetti. Se *S* è il soggetto e

---

<sup>18</sup>Ne segue che la conoscenza non può essere per Kant opinione vera giustificata. Essa è piuttosto uno stato della coscienza che coinvolge concetti e intuizioni.

$P$  è il predicato, un giudizio soggetto-predicato ci dice che ogni oggetto che cade sotto  $S$  cade anche sotto  $P$ . Due esempi sono i giudizi espressi dagli asserti seguenti: ‘Tutti i mariti sono sposati’ e ‘Tutti gli ex-presidenti degli USA sono bianchi’. Il primo fra tali giudizi è analitico; il secondo sintetico. Perché Kant non dice, più semplicemente, che un giudizio soggetto-predicato è analitico se il dominio degli oggetti che cadono sotto  $S$  è incluso in quello degli oggetti che cadono sotto  $P$ , e sintetico altrimenti? Perché una tale riformulazione si applicherebbe solo al caso in cui  $S$  e  $P$  sono concetti sotto cui sono supposti cadere oggetti. La distinzione fra giudizi analitici e sintetici deve invece essere generale, e deve quindi dipendere da una relazione instaurata direttamente fra i concetti come tali, e non fra i domini degli oggetti che cadono sotto di essi

La definizione di Kant è comunque stata spesso considerata inadeguata, soprattutto quando si è cercato di applicarla in matematica. Molti giudizi della matematica non sembrano infatti essere della forma soggetto-predicato. Inoltre, tale definizione sembra richiamarsi a una concezione inappropriata dei concetti, secondo la quale questi risulterebbero gli uni dagli altri per composizione, e ogni composizione di concetti che dà luogo a un altro concetto avviene una volta per tutte, fissando la struttura di quest’ultimo concetto, e quindi la relazione gerarchica che lo lega ai primi, in modo definitivo. Gli esempi che Kant avanza già nell’*Introduzione*, sez. V, per illustrare la tesi che “i giudizi matematici sono tutti quanti sintetici” (B 14) suggeriscono tuttavia un’interpretazione diversa. Per argomentare che, in quanto essi “sono ammessi in matematica”, i giudizi espressi dagli asserti ‘il tutto è uguale a se stesso’ e ‘il tutto è più grande della parte’ sono sintetici, Kant osserva che il predicato che occorre in essi appartiene necessariamente al rispettivo soggetto, ma “non in quanto è pensato nel concetto stesso [ovvero in tale soggetto], bensì per mezzo di un’intuizione che deve aggiungersi al concetto” (B 17). Il punto, per quanto possa apparire oscuro, chiarisce almeno una cosa: nello stabilire se un giudizio è analitico o sintetico, per Kant è più rilevante il fatto che la sua articolazione richieda il ricorso a un’intuizione, che il fatto che il predicato sia contenuto o no nel soggetto. La cosa si chiarisce ulteriormente se ricordiamo che per Kant l’articolazione di ogni giudizio porta con sé una giustificazione: quello che Kant sembra dirci è che un giudizio è analitico se la sua articolazione non dipende dal contenuto dei concetti rilevanti, ovvero se, per articularlo, basta considerare tali concetti come tali, mentre è sintetico se la sua articolazione dipende da tale contenuto e richiede quindi l’intervento di un’intuizione. Se le cose stanno così, la limitazione al caso dei giudizi soggetto-predicato diventa irrilevante: ogni giudizio potrebbe essere detto ‘analitico’ o ‘sintetico’ secondo tale definizione.

Tutti i giudizi *a posteriori* sono quindi sintetici, visto che la loro articolazione richiede l’intervento dell’intuizione degli oggetti che cadono sotto i concetti rilevanti. Ma vi sono anche giudizi, come quello espresso da ‘tutti i mariti sono sposati’, la cui articolazione richiede solo la considerazione di tali concetti, indipendentemente dal loro contenuto, ovvero, in questo caso, degli oggetti che cadono o sono supposti cadere sotto di essi. Questi

giudizi sono senz'altro analitici e *a priori*. Un giudizio sarà sintetico *a priori* se la sua articolazione richiede l'intervento di un'intuizione che non è intuizione di oggetti, quella che Kant chiama 'intuizione pura'. Ecco come Kant la definisce nella *Critica* (B 34/A 20 – B 35/A 21), §1 dell'*Estetica Trascendentale*):

[...] la forma pura delle intuizioni sensibili in generale [...] si ritroverà a priori nella coscienza. Questa forma pura della sensibilità si chiamerà inoltre essa stessa 'intuizione pura'. In tal modo, quando io separo dalla rappresentazione di un corpo ciò che ne pensa l'intelletto, come sostanza, forza, divisibilità, etc., e similmente, ciò che al riguardo appartiene alla sensazione, come impenetrabilità, durezza, colore, etc., mi rimane ancora qualcosa di questa intuizione empirica, cioè estensione e figura. Queste appartengono alla intuizione pura, che ha luogo a priori nella coscienza come una semplice forma della sensibilità, anche senza un oggetto reale dei sensi o della sensazione.

L'intuizione pura è quindi forma della sensibilità. Essa è ciò che nell'intuizione di un oggetto non dipende dalla sua natura particolare: ciò che ci permette di rappresentarci un oggetto in quanto oggetto. Ora, per Kant, l'intuizione di un oggetto è possibile solo in quanto esso sta nello spazio e nel tempo. Spazio e tempo non vanno concepiti come semplici contenitori che esistono indipendentemente da noi e ci contengono. Ma non sono neppure oggetti, e tanto meno concetti. Il tempo è la forma del senso interno: la struttura in cui gli oggetti si ordinano relativamente all'apparire della loro intuizione nella coscienza. Lo spazio è la forma del senso esterno: la struttura in cui gli oggetti si dispongono relativamente all'apparire della loro intuizione come intuizione di ciò che è esterno alla coscienza. L'intuizione pura è quindi intuizione del tempo e dello spazio, non in quanto tempo e spazio sono ciò che in essa viene intuito, ma in quanto forma dell'intuizione degli oggetti che si deve al loro essere ordinati e disposti nel tempo e nello spazio.

Gli oggetti non sono intuiti né possono esserlo solo in quanto sono ordinati e disposti in un certo modo nel tempo e nello spazio: essi non sono semplici posizioni nello spazio e nel tempo. Ma sono pur sempre qualcosa che è ordinato e disposto nel tempo e nello spazio, e la loro intuizione non può essere che l'intuizione di questo qualcosa. Essi possono tuttavia venir pensati solo in quanto ordinati e disposti in un certo modo nel tempo e nello spazio. Ciò fornisce dei concetti puri: concetti sotto cui non sono supposti cadere oggetti, e il cui contenuto non può quindi essere fornito dalla sensibilità. Si tratta dei concetti dell'aritmetica e della geometria. I primi, per esempio il concetto del numero 5, derivano dal pensare la mera pluralità di una collezione di oggetti ordinati nel tempo, senza pensare alcuna pluralità di oggetti in particolare. I secondi, per esempio il concetto di triangolo, derivano dal pensare la mera disposizione di un oggetto nello spazio, senza pensare alcun oggetto in particolare. Questi concetti sono proprio quelli che permettono di pensare gli oggetti particolari che sono ordinati e disposti nel tempo e nello spazio. Il possesso di tali concetti, e l'articolazione dei giudizi corrispondenti sono quindi delle condizioni di possibilità dell'esperienza e quindi della conoscenza *a posteriori*. Questi giudizi sono allora necessari. Vediamo come Kant ne rende conto.

Abbiamo detto che ai concetti matematici non corrispondono intuizioni di oggetti. Tuttavia a ognuno di essi corrisponde uno schema che svolge una doppia funzione (Friedman, 1992, pp.122-129). Primo, esso permette di associare al concetto



corrispondente degli oggetti che ne forniscono un'immagine perché ordinati e disposti nel tempo e nello spazio nel modo che tale concetto prevede. Secondo, esso fissa una procedura associata al concetto in questione, la quale può applicarsi in ogni circostanza appropriata per ottenere una tale immagine. Per tornare agli esempi visti sopra, quest'ultima immagine è data da una qualsiasi collezione di cinque oggetti ordinati nel tempo, o da un diagramma a forma di triangolo disegnato su di un foglio, e la procedura corrispondente sarà quindi una procedura di enumerazione o di costruzione di una figura.

Grazie alla prima funzione, lo schema associa questo concetto con un contenuto dato dall'intuizione di un oggetto che, pur non cadendo sotto il concetto, ne fornisce un modello. Per esempio, associa le dita di una mano al concetto del numero 5, anche se le dita della mano, pur se prese tutte insieme, non cadono sotto questo concetto, ma ne forniscono solo un modello. Grazie alla seconda funzione, lo schema fornisce direttamente un contenuto a questo concetto. Tale contenuto non è un oggetto; non è altro che la procedura che lo schema associa al concetto. Kant ritiene tuttavia che se ne abbia un'intuizione, prodotta però non dalla sensibilità, ma dall'immaginazione. Si tratta quindi di un'intuizione *a priori*, o pura. L'intuizione pura non è allora solo forma della sensibilità. Essa può anche essere intuizione di un contenuto.

Si comprende allora perché i giudizi della matematica sono sintetici *a priori*: perché l'intuizione pura interviene nella loro articolazione. Essa lo fa svolgendo due funzioni: garantisce che ciò che si prova attraverso la considerazione di opportuni modelli (per esempio le dita di una mano per il risultato di un'addizione, o un diagramma per un teorema di geometria) abbia validità generale, in quanto dovuto alla corrispondenza di tale modello con la procedura fissata nello schema; e permette di condurre una dimostrazione non su un qualche modello particolare, ma attraverso la mera considerazione degli schemi rilevanti, ovvero nell'intuizione pura.

Si potrebbe pensare che gli schemi dei concetti matematici funzionino come oggetti astratti prodotti dall'immaginazione, come le proiezioni dei *logoi* di Proclo. Oppure che gli oggetti che forniscono i modelli dei concetti matematici funzionino come le immagini che intervengono nella conoscenza ipotetica descritta da Platone nella *Repubblica* e nella *Settima Lettera*. Entrambe le interpretazioni farebbero di Kant una specie di platonista, anche se restio a impiegare un linguaggio platonista chiamando 'oggetti' gli schemi dei concetti matematici o questi stessi concetti. Queste interpretazioni sembrano comunque scorrette. Nonostante le analogie, restano infatti differenze essenziali che allontanano Kant dalla tradizione del platonismo. Gli schemi dei concetti matematici sono istruzioni universali, non contenuti particolari; essi non sono molti per ogni concetto, come lo sono le proiezioni di Proclo per ogni *logos*. Non vi è quindi nessun senso plausibile in cui possono considerarsi come oggetti che cadono sotto il concetto corrispondente<sup>19</sup>. Inoltre, i concetti non esistono, come le idee platoniche, in un proprio regno. Non sono oggetti trascendenti

---

<sup>19</sup>Per gli schemi geometrici questo non sembra richiedere spiegazioni particolari. Per quelli aritmetici, si osservi che per Kant vi è un concetto per ogni numero e non solo il concetto di numero o quelli dell'unità, del pari e del dispari. Se vi è moltiplicazione di entità, essa si svolge quindi al livello della generazione dei concetti, non degli schemi.

imitati da oggetti immanenti; sono meri modi per pensare gli oggetti di questo nostro mondo.

## II

### DA FREGE A GÖDEL (PASSANDO PER HILBERT)

Frege nacque nel 1848, appena quarantaquattro anni dopo la morte di Kant. Eppure il modo di fare filosofia della matematica di Frege differisce da quello di Kant molto di più di quanto questo differisca da quelli di Platone, Aristotele e Proclo. La differenza si deve principalmente all'attenzione di Frege verso un modo profondamente rinnovato di fare matematica che si afferma nel XIX secolo, e al suo tentativo di contribuire, se non allo sviluppo di questa, almeno alla sua fondazione. Spesso si dice che con Frege comincia la filosofia analitica. Questo non spiega una tale attenzione verso la matematica; ne è piuttosto la conseguenza.

Per quanto sia figlia di quelle novità introdotte nei secoli precedenti che Kant aveva ignorato, la matematica ottocentesca è molto diversa da quella che Kant avrebbe potuto conoscere.

#### 1. Il platonismo logicista di Frege

##### 1.1. *L'evoluzione dell'analisi fra sette e ottocento: il contesto storico del programma di Frege*

Aritmetica e geometria erano per Euclide — come per Kant — discipline separate, proprie di diversi domini di oggetti: i numeri e le grandezze spaziali. La geometria cartesiana aveva già infranto questa separazione definendo sulle grandezze spaziali un formalismo equivalente a quello in uso sui numeri. Ciò non solo consentì di fare geometria studiando e classificando equazioni, ma spostò soprattutto l'attenzione dallo studio di numeri e grandezze allo studio delle equazioni stesse. Insieme al contemporaneo affermarsi dei metodi infinitesimali, ciò fece emergere un nuovo campo di indagine, concepito come più generale e quindi più fondamentale sia della geometria sia dell'aritmetica: la teoria delle funzioni, o analisi.

I due principali protagonisti di questa svolta, Euler e Lagrange, sono contemporanei di Kant. Per entrambi, la teoria delle funzioni studia quantità astratte. Queste sono caratterizzate solo dalle loro relazioni con altre quantità della stessa natura e sono espresse da formule adeguate che esprimono queste stesse relazioni (così la formula ' $x^2$ ' esprime per esempio una quantità esprimendo la relazione che tale quantità ha con la quantità  $x$ ). Le funzioni sono identificate con queste formule e, tramite loro, con le quantità che esse esprimono. L'aritmetica e la geometria sono pensate come applicazioni possibili della teoria delle funzioni, e la nozione di funzione è così concepita come il fondamento ultimo della matematica.

Questa concezione mostra presto numerose difficoltà. La principale deriva dal fatto che lo stesso formalismo delle funzioni, così intese, fa emergere entità che non trovano posto

nell'universo formale che questa concezione delimita. All'inizio del XIX secolo, grazie principalmente a Gauss e Cauchy, comincia quindi a affermarsi un processo che si protrarrà per tutto il secolo, spesso indicato con il nome di 'arimetizzazione dell'analisi'. Al centro di tale processo vi è un nuovo modo di concepire le funzioni: non più come formule o quantità astratte, ma come leggi di corrispondenza definite su certi domini numerici. Fra questi, i principali sono certo quello dei numeri reali e quello dei numeri complessi. L'analisi, o teoria delle funzioni, si scinde così in due branche significativamente differenti: l'analisi reale e quella complessa. Se le funzioni sono definite su dei domini numerici, tuttavia, esse non possono servire da fondamento ultimo della matematica. Vi è al contrario la necessità di definire numeri reali e complessi in maniera indipendente dalla teoria delle funzioni<sup>1</sup>. Questa necessità diventa tanto più impellente quanto emergono difficoltà derivate dall'assenza di una definizione chiara di tali numeri, difficoltà che conducono per esempio alla surrettizia identificazione dei numeri reali con dei punti su una retta, e di una funzione a una variabile reale con un grafico. Questo non solo è all'origine di molti fraintendimenti, ma sovverte anche l'ordine fondazionale della matematica affermatosi fin dal secolo precedente, in cui la geometria era concepita come un'applicazione dell'analisi, o comunque come una teoria da essa indipendente.

Questo è il quadro in cui prende corpo la filosofia della matematica di Frege. Formatosi come matematico a Jena, dove tornerà poi come professore, e a Göttingen, uno dei principali centri matematici del mondo, egli dedica la parte essenziale della sua attività di studioso alla ricerca di una definizione appropriata dei numeri naturali e di quelli reali. Nella seconda metà del XIX secolo, l'interesse matematico verso la definizione dei numeri naturali è legato all'idea che essi possano e debbano fornire la base su cui definire i numeri reali. Frege non condivide questa idea: nel secondo volume della sua opera maggiore, i *Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1903), egli insiste sul fatto che il dominio dei numeri reali non debba essere concepito e definito come un'estensione del dominio dei naturali. Nei §§ 1 e 2 delle *Grundlagen der Arithmetik* (1884) egli spiega invece che la "tendenza verso il rigore" che investe la matematica a lui contemporanea si deve estendere fino al concetto di numero naturale. Il problema, continua, non è tanto accertarsi delle "verità" dell'aritmetica, ma comprendere "la dipendenza di queste verità le une dalle altre". La richiesta di rigore va quindi per Frege di pari passo con l'obiettivo di comprendere la corretta organizzazione del sapere matematico. Questo costituisce, per Frege come per Platone, un sistema di verità. Ma queste per Frege, a differenza che per Platone, non sono tali in base alla loro conformità a un mondo inaccessibile di oggetti trascendenti, ma in base alla loro dipendenza da alcune verità fondamentali che tale sistema manifesta. Il principale problema della filosofia della matematica è di identificare tali verità<sup>2</sup>.

L'opera di Frege comprende tre trattati principali (a cui vanno aggiunti un certo numero

---

<sup>1</sup>Se  $a$  e  $b$ , sono due numeri reali, un numero complesso può essere identificato con un binomio  $a+ib$ , dove  $i$  è la radice quadrata di  $-1$  (ovvero è tale che  $i^2 = -1$ ). Un'appropriata definizione dei numeri reali conduce quindi facilmente a un'appropriata definizione dei numeri complessi.

<sup>2</sup>Per un'esposizione della filosofia della matematica di Frege, cf. Dummett (1991). Per introduzioni più generali alla filosofia di Frege, cf. Dummett (1973), Mariani (1994), Kenny (1995).

di articoli più brevi): la *Begriffsschrift* (1879) e i già citati *Grundlagen e Grundgesetze*. Nel primo, egli presenta un sistema formale che, in termini moderni, ci appare come un sistema della logica del secondo ordine. Nelle *Grundlagen*, egli critica le principali definizioni conosciute dei numeri naturali e ne presenta una definizione alternativa informale. Nel primo volume dei *Grundgesetze*, egli aggiorna il sistema della *Begriffsschrift* e lo estende in modo da pervenire a una formalizzazione di tale definizione, ovvero a una versione formale dell'aritmetica, che denoteremo con 'GA' (per 'aritmetica dei *Grundgesetze*')<sup>3</sup>. Nel secondo volume, egli affronta informalmente la questione della definizione dei numeri reali. Un terzo volume avrebbe dovuto fornire una definizione formale dei reali basata sullo stesso sistema formale impiegato per definire i naturali. Frege venne però bloccato nel suo tentativo della scoperta, da parte di Bertrand Russell, di una contraddizione che mina questo sistema formale alla base.

## 1.2. Il sistema formale di Frege

Per noi, come per Frege, sia pure con differenze che indicheremo più avanti, un sistema formale è composto da un linguaggio formale, da certe regole deduttive che si applicano a certe formule di questo linguaggio dette 'enunciati [di tale linguaggio]', e da quelle fra tali formule che sono dedotte in base a queste regole, e sono quindi dette 'teoremi [di tale sistema]'<sup>4</sup>. Un linguaggio formale è costituito da simboli elementari appartenenti a diverse categorie ben distinte fra loro, esplicitamente introdotti e soggiacenti a regole di composizione esplicite, fra cui alcune servono a stabilire quali delle sue formule sono degli enunciati. Un enunciato di un tale linguaggio è quindi una composizione di questi simboli che soddisfa queste regole. Il sistema formale elaborato da Frege è assiomatico<sup>5</sup>: alcuni enunciati detti 'assiomi [di tale sistema]' sono scelti come punto di partenza delle deduzioni, e i teoremi sono ottenuti a partire da essi applicando le regole deduttive (si ammette in generale che gli stessi assiomi contino come teoremi).

Un sistema formale si avvale spesso (e ciò è cruciale per Frege) di definizioni esplicite, ovvero di stipulazioni, generalmente introdotte nel corso della deduzione dei teoremi, che stabiliscono che certe combinazioni di simboli possono essere rimpiazzate da nuovi simboli elementari o da appropriate combinazioni di simboli in cui intervengono nuovi simboli elementari. Questa pratica non serve solo a semplificare gli enunciati, ma anche a fissare

---

<sup>3</sup>L'acronimo 'FA' (per 'Aritmetica di Frege') è oggi usato per denotare una teoria significativamente diversa di cui parleremo nel §V.1.

<sup>4</sup>Generalmente un sistema formale è anche detto 'teoria formale'. Secondo le convenzioni indicate nella Prefazione, una teoria è tuttavia un sistema di asserti. Essa non include quindi né un certo linguaggio, né delle regole deduttive, anche se i suoi asserti sono certamente formulati in un linguaggio e possono essere dedotti in base a certe regole. D'altra parte, se un enunciato di un certo linguaggio (formale o no) fornisce certamente una formulazione di un asserto, esso non deve necessariamente essere inteso come una formulazione di un asserto. Esso può essere inteso semplicemente come tale, come una mera successione di simboli o parole di un dato linguaggio. Questo è d'altra parte ciò che avviene abitualmente in logica per gli enunciati di un sistema formale, i quali sono appunto studiati come tali e per le loro relazioni deduttive, indipendentemente da ogni altra loro eventuale funzione. A rigore, in base alle convenzioni che adottiamo qui, un sistema formale non dovrebbe quindi intendersi come una teoria, anche se esso include (o almeno può includere) una teoria, in particolare una teoria formale.

<sup>5</sup>Oggi conosciamo sistemi formali non assiomatici in cui la funzione degli assiomi è svolta da appropriate regole dette 'di introduzione' e 'di eliminazione'. Nessuno di essi sarà tuttavia preso esplicitamente in considerazione nel nostro libro.

l'attenzione su certe componenti del sistema<sup>6</sup>. La definizione dei numeri naturali proposta da Frege consta proprio di un sistema di definizioni esplicite formulate entro un appropriato sistema formale.

La sintassi di un sistema formale viene oggi rigorosamente distinta dalla sua semantica. La prima concerne la formazione e la deduzione dei suoi enunciati. La seconda concerne la loro interpretazione, ovvero il significato dei diversi elementi del linguaggio. La semantica dipende da stipulazioni distinte da quelle che fissano la sintassi. Ne segue che un sistema formale, e in particolare i suoi enunciati, possono ammettere diverse interpretazioni e sono veri o falsi solo relativamente a una di esse. Verità e falsità sono quindi proprietà degli asserti di un sistema formale solo se essi sono interpretati. Ma interpretare un enunciato non significa *ipso facto* trasformarlo in un asserto: non implica infatti necessariamente assegnargli la funzione di asserire qualcosa, ma solo fissare ciò che asserirebbe se tale funzione gli fosse assegnata. D'altra parte, per intendere un enunciato come una formulazione di un asserto non è necessario aver già fissato un'interpretazione. Ciò è possibile anche qualora non sia ancora stato fissato ciò che tale asserto sia inteso asserire, per esempio ammettendo che questo possa variare con le diverse interpretazioni degli elementi del linguaggio rilevante. Così, per esempio, si può asserire che  $2+3=5$ , proferendo l'enunciato '2+3=5' senza aver (ancora) stabilito esattamente che cosa significhino i termini '2', '3' e '5'. Resta tuttavia che se a un enunciato interpretato si assegna la funzione di asserire qualcosa, allora esso si trasforma in un asserto (o meglio in una sua formulazione) che può ovviamente essere vero o falso.

Le stipulazioni semantiche e sintattiche comunicano tra loro attraverso la distinzione fra le diverse categorie a cui appartengono i simboli del linguaggio e le rispettive regole di composizione: tali distinzioni sono stabilite da stipulazioni sintattiche; mentre le stipulazioni semantiche sono tenute a rispettarle. Nel caso di un linguaggio predicativo, vi sono per esempio dei simboli (composti o meno da altri simboli) detti 'termini' che sono supposti denotare certi individui; altri che sono supposti designare certe proprietà (o relazioni); altri ancora che sono supposti designare certe funzioni. Tutti questi simboli svolgono il ruolo di costanti, rispettivamente individuali, predicative o funzionali. A fianco di essi vi sono simboli che svolgono il ruolo di variabili che sono rispettivamente supposte variare su individui, oppure su proprietà (o relazioni), o su funzioni. Le stipulazioni semantiche devono rispettare queste attribuzioni: esse si limitano a stabilire che le costanti individuali denotano certi particolari individui, quelle predicative e funzionali designano, rispettivamente, certe particolari proprietà (o relazioni) e funzioni, mentre le rispettive variabili variano su certi particolari domini di individui, proprietà (o relazioni) e funzioni. Queste stipulazioni non influiscono su altri simboli del linguaggio, detti 'costanti logiche', che non svolgono il ruolo di costanti relativamente a una certa interpretazione, ma costituiscono, per così dire, l'ossatura del linguaggio che resta stabile sotto ogni

---

<sup>6</sup>Ovviamente, due enunciati di cui uno è un'abbreviazione dell'altro, secondo una certa definizione esplicita, possono essere intesi e generalmente lo sono come equivalenti secondo una relazione di equivalenza (cf. cap. V, n.3), che garantisce che essi possano essere considerati come formulazioni diverse dello stesso asserto.

interpretazione. Si tratta di simboli come i connettivi o i quantificatori. La loro presenza in un linguaggio formale fa sì che vi siano enunciati di quel linguaggio che restano veri o falsi sotto ogni interpretazione possibile, cosa che avverrà ovviamente anche per gli asserti che tali enunciati eventualmente esprimono. Questi enunciati o asserti sono allora detti ‘verità (o falsità) logiche’.

La distinzione fra sintassi e semantica<sup>7</sup> è in parte dovuta alle difficoltà che sono state riscontrate nel sistema formale di Frege, che non si avvale invece di tale distinzione. Certo anche per Frege i simboli di un linguaggio formale possono, in certa misura, ammettere diverse interpretazioni, e la deduzione dei teoremi dipende solo dalle regole deduttive e non dalle interpretazioni. Tuttavia, alcune stipulazioni cruciali del suo sistema hanno la conseguenza di fissare, almeno parzialmente, il significato di certi simboli.

Noi distinguiamo oggi diverse componenti nel sistema di Frege: un calcolo proposizionale; una sua estensione che conduce a un sistema della logica del secondo ordine; un’ulteriore estensione che conduce a GA. Frege presenta invece tale sistema come un tutto unitario, fondato su una antecedente distinzione fra oggetti e funzioni. Egli intende dunque le nozioni di oggetto e di funzione come primitive. Per quanto concerne la seconda, Frege riprende quindi l’idea che era di Euler e Lagrange di fondare su di essa l’intera matematica. Ne segue l’impossibilità di intendere le funzioni come leggi definite su domini numerici. Frege non concepisce però una funzione come una formula o una quantità espressa da tale formula. Vi sono tre ragioni per questo: *i*) la nozione di funzione è per Frege precedente allo stesso linguaggio formale, e anzi interviene nella fissazione di esso; *ii*) essa è anche precedente alla nozione di quantità, comunque la si intenda; *iii*) formule e quantità sono oggetti, mentre la filosofia di Frege è fondata sulla distinzione fra oggetti e funzioni.

Questa distinzione è necessaria per chiarire la stessa nozione di funzione. Frege pensa infatti una funzione come un’entità “insatura”: uno schema che prevede posti vuoti atti a essere riempiti da oggetti o da altre funzioni, i quali forniscono gli argomenti della funzione in questione. Una funzione che prevede solo posti vuoti per oggetti è una funzione del primo livello; una funzione che prevede solo posti vuoti per funzioni del primo livello è una funzione del secondo livello; e così via. Ci sono anche funzioni che prevedono dei posti vuoti per oggetti e altri per funzioni, o alcuni per funzioni di un livello e altri per funzioni di altri livelli. Esse sono di livello diseguale. Quando tutti i posti vuoti sono riempiti, una funzione “si satura” e prende un valore che è sempre un oggetto. Un oggetto è quindi un’entità satura che non prevede alcun posto vuoto. Si tratta di un’esplicazione largamente metaforica (sulla quale cf. Picardi, 1994, cap. 4), che tuttavia si implementa facilmente in un linguaggio semi-formale. Consideriamo i casi più semplici. Si usino: ‘ $\xi$ ’ e ‘ $\zeta$ ’ per indicare posti vuoti per oggetti; ‘ $\varphi$ ’ per indicare un posto vuoto per funzioni di primo livello; ‘ $a$ ’ e ‘ $b$ ’ per denotare oggetti; ‘ $f$ ’ e ‘ $g$ ’ per designare funzioni. Allora ‘ $f(\xi)$ ’, ‘ $f(\xi, \zeta)$ ’, ‘ $\varphi(a)$ ’ e ‘ $f(\xi, \varphi(b))$ ’ designano rispettivamente una funzione di primo livello a un

<sup>7</sup>Ci riferiamo nella parte restante del paragrafo alla prima parte dei *Grundgesetze*, contenuta nel primo volume dell’opera.

argomento, una funzione di primo livello a due argomenti, una funzione di secondo livello a un argomento, una funzione a livello disuguale; mentre  $f(a)$ ,  $f(a,b)$ ,  $g(a)$  e  $f(a, g(b))$  denotano dei valori di tali funzioni.

Ma, si potrebbe chiedere, quali oggetti e quali funzioni possono fungere da argomenti di una certa funzione? Per stabilire delle limitazioni dovremmo definire dei domini ristretti di oggetti e funzioni. Ma per farlo dovremmo disporre di risorse opportune indipendentemente dalla nozione funzione. Per esempio, se volessimo limitare gli argomenti di certe funzioni al dominio dei numeri reali, dovremmo poter definire i numeri reali indipendentemente dalla nozione di funzione. Ma ciò è proprio quello che Frege non vuole. Per lui la nozione di funzione deve essere primitiva e non dipendere quindi da nessun'altra. Egli compie allora due mosse ardite. In primo luogo, ammette che tutti gli oggetti e tutte le funzioni di un livello opportuno possano fungere da argomenti di tutte le funzioni che prevedano posti vuoti del tipo adeguato. Questo equivale a supporre che le funzioni siano definite sulla totalità degli oggetti e/o delle funzioni dei livelli adeguati. Oggi sappiamo che senza precauzioni e restrizioni appropriate, le nozioni di totalità degli oggetti o delle funzioni di un certo livello portano a contraddizioni. Non consapevole di ciò, Frege usa le due nozioni molto liberamente. Non solo, egli ammette, in secondo luogo, l'esistenza di due oggetti assai particolari: il Vero e il Falso, che denoteremo rispettivamente con **V** e **F**.

Queste mosse permettono a Frege di chiarire in modo del tutto nuovo la nozione kantiana di concetto: un concetto di livello  $n$  è una funzione di livello  $n$  a un solo argomento che può prendere come valori solo gli oggetti **V** e **F**. Consideriamo il concetto di cavallo. Esso è una funzione di primo livello a un argomento che prende il valore **V** quando il suo argomento è un cavallo e il valore **F** quando il suo argomento è un qualsiasi altro oggetto. Se sappiamo distinguere i cavalli dagli altri oggetti, sappiamo quindi assegnare valori a questa funzione e possediamo quindi il concetto di cavallo. Se supponiamo anche di saper distinguere tra loro diversi cavalli, questo concetto è *ipso facto* sortale (cf. Introduzione). Ai concetti si affiancano le relazioni: funzioni a più argomenti che possono prendere come valori solo gli oggetti **V** e **F**.

Per definire degli oggetti di un certo genere basta allora definire dei concetti appropriati in modo tale da poter stabilire in quali casi essi assumono il valore **V**. Questo è proprio ciò che Frege fa per i numeri naturali: se una volta definiti i concetti appropriati, possiamo stabilire che vi sono oggetti che cadono sotto di essi, allora i numeri naturali esistono e sono *ipso facto* oggetti. E se i concetti in questione sono definiti in modo soddisfacente, questi oggetti soddisfano tutti i teoremi dell'aritmetica, e sono quindi descritti da quei teoremi. Per ottenere un argomento a favore del platonismo aritmetico basterà quindi definire appropriati concetti — quelli dei diversi numeri naturali, e quello di numero naturale — e dare ragioni per concludere che sotto di essi cadono oggetti (la cui natura dipenderà da questi stessi concetti).

Le due mosse precedenti permettono a Frege di introdurre alcune funzioni fondamentali su cui erigere il proprio edificio logico e pervenire alla definizione cercata. Semplificando



un poco, queste funzioni si possono ridurre a sette. In termini moderni esse corrispondono a sette costanti logiche. Cinque di esse sono ancora oggi in uso, anche se concepite e denotate in modo diverso da Frege. Consideriamole per prime<sup>8</sup>. Esse sono la negazione, l'implicazione, l'identità, e i due quantificatori universali del primo e secondo ordine. Per Frege, si tratta di tre concetti e due relazioni. La negazione  $\neg\xi$  è il concetto del primo livello che prende il valore **F** per **V** come argomento e il valore **V** per ogni altro argomento. L'implicazione  $\xi\Rightarrow\zeta$  è la relazione del primo livello che prende il valore **F** se il primo argomento è **V** e il secondo non è **V**, e il valore **V** altrimenti. L'identità  $\xi=\zeta$  è la relazione del primo livello che prende il valore **V** se i due argomenti sono lo stesso oggetto, e il valore **F** altrimenti. Il quantificatore del primo ordine  $\forall x[\varphi(x)]$  è il concetto del secondo livello che prende il valore **V** se l'argomento è una funzione del primo livello  $f(\xi)$  tale che il suo valore  $f(a)$  è **V** quale che sia l'oggetto  $a$ , e il valore **F** altrimenti. Il quantificatore del secondo ordine  $\forall\mu[P(\mu)]$  è il concetto del terzo livello che prende il valore **V** se l'argomento il cui posto è indicato da 'μ' è una funzione del secondo livello  $f(\varphi)$  tale che il suo valore  $f(g)$  è **V** quale che sia la funzione del primo livello  $g$ , e il valore **F** altrimenti<sup>9</sup>.

Due sono le differenze principali fra il modo in cui Frege concepisce queste funzioni e il modo in cui oggi concepiamo le costanti logiche corrispondenti. Primo, le formule che si formano impiegando e componendo fra loro i valori di queste funzioni non coinvolgono individui particolari (per esempio proposizioni, come nel calcolo proposizionale moderno, o elementi di un appropriato dominio, come nei sistemi predicativi moderni del primo o secondo ordine). Essi coinvolgono, come detto, la totalità degli oggetti o delle funzioni dei livelli adeguati. Secondo, queste formule sono nomi dei valori di verità, ovvero degli oggetti **V** e **F**. Nel sistema formale di Frege non vi sono quindi enunciati che assumono un certo valore di verità grazie a una certa interpretazione. Se vogliamo comunque sostenere che in tale sistema vi siano degli enunciati, questi non possono essere altro che nomi dei valori di verità. Che si voglia ammetterlo, o si voglia semplicemente negare che nel sistema formale di Frege vi siano enunciati, quello che è importante è che Frege distingue chiaramente fra tali nomi (o enunciati, che dir si voglia) e gli asserti che essi servono a formulare. Un asserto è per lui ciò che asserisce che una certa formula del suo linguaggio — più in particolare un nome appropriato, ovvero, come diremmo oggi, un certo termine — è un nome di **V**. Esso è allora vero se e solo se tale formula è effettivamente un nome di **V**. Per esprimere un asserto, Frege impiega un simbolo particolare, il simbolo '⊢', che, premesso a una formula appropriata che esprime il nome di un valore di verità, indica che viene asserito che tale formula è un nome di **V**<sup>10</sup>. Tale simbolo indica quindi nel contempo la presenza di un asserto e l'avvenire di una asserzione. Il soggetto che compie l'asserzione è lasciato imprecisato, o è in generale identificato con colui che eventualmente accetta la

<sup>8</sup>Per semplicità useremo in seguito notazioni moderne.

<sup>9</sup>Più precisamente, il quantificatore del secondo ordine dovrebbe essere denotato con ' $\forall\mu_\xi[P(\mu_\xi)]$ ', dove l'indice in ' $\mu_\xi$ ' serve per indicare che in ' $P(\xi)$ ' il simbolo ' $\xi$ ', non indica alcun posto vuoto per oggetti: l'argomento della funzione su cui ' $P$ ' varia potrebbe essere per esempio fisso, come in ' $\forall P[f(P(T))]$ ' o vincolato da un altro quantificatore, come in ' $\forall P[f(\forall x[P(x)])]$ '.

<sup>10</sup>Non si confonda l'uso di Frege del simbolo '⊢' con quello attuale per cui questo simbolo indica che la formula che lo segue è stata provata, ovvero è un teorema.

teoria che include l'asserto rilevante.

Questo consente a Frege di chiarire in modo nuovo anche la nozione kantiana di giudizio. Egli distingue fra il riferimento e il senso di un nome: il primo è l'oggetto di cui esso è il nome, e il secondo è il modo in cui tale oggetto viene presentato attraverso questo nome. Così ' $\mathbf{V}$ ', ' $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$ ', e ' $\forall x f(x) \Rightarrow f(a)$ ' hanno, per esempio, lo stesso riferimento, perché in base alle definizioni precedenti, il secondo e il terzo sono nomi di  $\mathbf{V}$  quali che siano gli oggetti  $a$  e  $b$  e la funzione  $f(\xi)$ . Ma essi hanno sensi diversi. Il senso di un nome di un valore di verità è per Frege un pensiero. E un giudizio è il "riconoscimento della verità di un pensiero" (*Grundgesetze*, vol. I, §5), ovvero il riconoscimento che un certo nome (distinto da ' $\mathbf{V}$ ') è un nome di  $\mathbf{V}$ , e che quindi può essere trasformato in un asserto vero premettendo a esso il simbolo 'I-'.

Impiegando solo le cinque funzioni fondamentali considerate fin qui e, eventualmente, componendo adeguatamente i loro valori, possiamo scrivere degli asserti senz'altro veri: asserti in cui occorrono nomi per oggetti indeterminati o funzioni indeterminate, e che sono veri quali che siano tali oggetti e tali funzioni<sup>11</sup>: per esempio gli asserti: 'I- $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$ ' e 'I- $\forall x f(x) \Rightarrow f(a)$ ', che sono veri quali che siano gli oggetti  $a$  e  $b$  e la funzione  $f(\xi)$ . Il fatto che in tali asserti intervengono solo le cinque funzioni esposte precedentemente, e non le due altre funzioni fondamentali di Frege (che introdurremo nel §1.3), è cruciale. Queste cinque funzioni corrispondono per noi a delle costanti logiche. La verità di tali asserti dipende quindi da tali costanti. Essi per noi sono quindi verità logiche<sup>12</sup>. Anche Frege le ritiene tali, anche se per lui queste non sono le sole verità logiche. Frege pensa infatti che vi siano altri asserti come quelli appena descritti, nei quali intervengono però anche le sue due altre funzioni fondamentali. E non vi è dubbio che per Frege anche queste siano verità logiche. La contraddizione scoperta da Russell coinvolge proprio una di queste due ultime funzioni. Per noi questi altri asserti non sono quindi affatto delle verità. Come vedremo nel §V.1, vi è tuttavia chi continua a pensare che Frege non abbia del tutto torto su questo punto.

Gli assiomi di GA, e quindi i suoi teoremi, sono degli asserti nel senso che abbiamo appena precisato. Questi assiomi sono sette<sup>13</sup>. Fra questi, cinque sono verità logiche in cui intervengono solo le cinque funzioni fondamentali introdotte fin qui. Per dedurre dei teoremi da tali assiomi occorrono delle regole deduttive, e Frege ne ammette di tre generi. Le regole di sostituzione e quelle di trasformazione sono regole che permettono di passare — rispettivamente rimpiazzando certe combinazioni di simboli con altre combinazioni di

<sup>11</sup>Finora abbiamo parlato solo di nomi di oggetti. Frege pensa però che anche le funzioni abbiano dei nomi, quali ' $f(\xi)$ '. La differenza fra i due casi è tuttavia cruciale. Ma non possiamo soffermarci su simili aspetti della filosofia del linguaggio che Frege associa alla sua filosofia della matematica. Il lettore interessato potrà scegliere fra i numerosissimi testi che espongono e discutono tale filosofia del linguaggio. Noi ci limitiamo a segnalare Dummett (1973).

<sup>12</sup>Vi è chi pensa, seguendo Quine, che la logica del secondo ordine non sia propriamente logica, ma piuttosto teoria degli insiemi mascherata, e quindi non è disposto a ammettere che la quinta delle cinque precedenti funzioni fondamentali di Frege corrisponda a una costante logica. La ragione di tale interpretazione è che per Quine le variabili del secondo ordine non possano essere intese variare su altro se non su insiemi (i cui elementi sono dati da individui su cui variano le variabili del primo ordine, o da coppie, triple, etc. di individui). Vi sono diverse interpretazioni possibili, oltre a quella di Quine: cf. Quine, (1970), pp. 66-68; Boolos (1975), (1984), (1985); Shapiro (2005b); Linnebo (2003), (2008); De Florio (2007).

<sup>13</sup>Per ragioni che saranno chiare in seguito è rilevante osservare che Frege sottolinea l'analogia che lega fra loro due di tali assiomi denotandoli con lo stesso numerale romano. Si tratta delle leggi IIa e IIb. Gli altri assiomi sono quindi le leggi I, III, e IV (l'ultima delle quali è in realtà superflua).

simboli, e tramite una vera e propria trasformazione — da un asserto ‘ $\vdash \mathcal{A}$ ’ a un asserto ‘ $\vdash \mathcal{B}$ ’ tale che ‘ $\mathcal{B}$ ’ è senz’altro un nome dello stesso valore di verità di cui ‘ $\mathcal{A}$ ’ è un nome. Le regole di inferenza permettono invece di passare da due asserti ‘ $\vdash \mathcal{A}$ ’ e ‘ $\vdash \mathcal{B}$ ’ a un terzo asserto ‘ $\vdash \mathcal{C}$ ’ tale che se ‘ $\mathcal{A}$ ’ e ‘ $\mathcal{B}$ ’ sono nomi di  $\mathbf{V}$ , allora anche ‘ $\mathcal{C}$ ’ è un nome di  $\mathbf{V}$ . Ne segue che tutti i teoremi derivati dai cinque assiomi appena menzionati sono verità logiche in cui intervengono solo le cinque precedenti funzioni fondamentali o loro appropriate composizioni. Secondo Frege, questi teoremi possono essere riscritti impiegando nuove funzioni introdotte tramite definizioni esplicite. Le regole di sostituzione ammesse da Frege e le condizioni a cui egli assume che sia possibile introdurre nuove funzioni attraverso tali definizioni svolgono nella sua teoria la stessa funzione che oggi assegniamo a schemi di assiomi di comprensione: esse assicurano che per ogni nome di funzione che possa venir scritto nel linguaggio della sua teoria, vi sia una funzione con quel nome. In termini moderni, il sistema formato dai cinque assiomi suddetti, le precedenti regole deduttive, e le stipulazioni (spesso implicite) che regolano l’introduzione di nuove funzioni via definizioni esplicite corrisponde quindi a un sistema della logica del secondo ordine che include schemi di assiomi di comprensione per tutti i suoi predicati. E tale sistema include una teoria logica nel nostro senso, costituita dall’insieme dei suoi assiomi e teoremi<sup>14</sup>.

### 1.3. Le definizioni dei numeri naturali

Possiamo ora capire come Frege propone di definire i numeri naturali nei *Grundgesetze*. È tuttavia opportuno ritornare prima alle *Grundlagen*. Se la formalizzazione proposta nei *Grundgesetze* della definizione proposta nelle *Grundlagen* è infatti essenziale per dare corpo all’argomento di Frege a favore del platonismo aritmetico, essa è più facilmente comprensibile alla luce dei suggerimenti informali contenuti in quest’ultimo trattato.

Nella sua Introduzione, Frege enuncia tre principi che guidano la sua indagine. Il primo e il terzo sono perfettamente esemplificati dalle considerazioni fatte fin qui: occorre tenere distinti ciò che è psicologico o soggettivo, da ciò che è logico o oggettivo; occorre fare sempre attenzione alla distinzione fra concetti e oggetti. Il secondo (ripreso anche nei §§ 60 e 62) è oggi noto come ‘principio del contesto’: occorre cercare il significato delle parole considerandole non isolatamente, ma nel contesto degli asserti in cui occorrono. Si tratta di un principio cruciale per la definizione di Frege dei numeri naturali.

Frege non vuole certo dire che il significato delle parole muti da asserto a asserto. Il suo punto è piuttosto che tale significato è fissato dal loro ruolo entro appropriati asserti. Parlando di significato (*Bedeutung*), Frege si riferisce a qualcosa di oggettivo che, in base al primo dei tre principi precedenti, deve essere tenuto distinto dalle nostre rappresentazioni o intenzioni. Ma quali sono gli asserti appropriati? Certamente fra questi vi sono asserti come ‘ $4+3=7$ ’, e in generale i teoremi dell’aritmetica. Ma vi sono anche asserti come ‘La carrozza è tirata da quattro cavalli’. E è proprio perché il significato di ‘4’ nel primo di questi asserti è lo stesso di quello di ‘quattro’ nel secondo che i teoremi dell’aritmetica si

---

<sup>14</sup>Cf. cap. II, n.4.

applicano ai casi della vita quotidiana. Consideriamo prima il secondo asserto. Frege ci dice (§46) che asserendolo si attribuisce il numero quattro al concetto  $\ulcorner$ (essere un) cavallo che tira la carrozza $\urcorner$ . In generale, egli pensa che ogni attribuzione di un numero naturale sia un'affermazione intorno a un concetto e possa quindi intendersi come l'affermazione che un certo numero spetta a un certo concetto. Ciò suggerisce la possibilità di spiegare che cosa si intende quando si dice che  $n$  è un numero naturale identificando un concetto a cui  $n$  spetta: qualcosa sarebbe un numero naturale se e solo se esso spettasse a un qualche concetto. Frege giustifica questa sua idea mostrando che se essa è appropriatamente applicata e se i diversi numeri naturali sono definiti in base a essa — ognuno come quel numero che spetta a un appropriato concetto —, allora asserti come '4+3=7' e come tutti i teoremi dell'aritmetica potrebbero venir dimostrati ricorrendo solo alle leggi della logica e a appropriate definizioni esplicite. Vediamo allora come Frege sviluppa questa idea nei §§ 55-86.

Quale che sia il senso preciso del verbo 'spettare', sembra naturale ammettere che il numero che spetta a un concetto  $F$  sia lo stesso che spetta a un concetto  $G$  se e solo se sotto  $F$  cadono tanti oggetti quanti ne cadono sotto  $G$ . Qui non vi è circolarità perché per stabilire che sotto  $F$  cadono tanti oggetti quanti ne cadono sotto  $G$  non è necessario richiamarsi a dei numeri: basta stabilire che fra gli oggetti che cadono sotto  $F$  e quelli che cadono sotto  $G$  vi è una corrispondenza biunivoca, ovvero che a ogni oggetto che cade sotto il primo ne corrisponda uno e uno solo che cade sotto il secondo in modo tale che ogni oggetto che cade sotto il secondo risulti corrispondere a uno e un solo oggetto che cade sotto il primo. Se i concetti  $F$  e  $G$  sono tra loro in corrispondenza biunivoca diciamo che sono equinumerosi. Abbiamo allora il seguente principio, che oggi, visto che nel §63, Frege lo associa a una regola che attribuisce a Hume, è comunemente detto 'principio di Hume' (d'ora in poi 'HP'):

$$\text{Num.}(F) = \text{Num.}(G) \text{ SSE } F \text{ e } G \text{ sono equinumerosi,}$$

dove  $F$  e  $G$  sono due concetti qualsiasi e per ogni concetto  $X$ , ' $\text{Num.}(X)$ ' denota il numero che spetta a  $X$ .

Stabiliamo ora che 0 sia il numero che spetta al concetto  $\ulcorner$ (essere) distinto da se stesso $\urcorner$  (dove 'distinto da' sta per 'non identico a'). Se ammettiamo che tale concetto sia ben definito e accettiamo questa definizione, abbiamo definito il numero 0. Abbiamo allora il concetto  $\ulcorner$ (essere) identico a 0 $\urcorner$ , sotto cui cadrà il solo oggetto 0. Possiamo allora stabilire che 1 sia il numero che spetta a questo concetto. Avremo allora un concetto — il concetto  $\ulcorner$ (essere) identico a 0 $\urcorner$  — sotto cui cade 0 e al quale spetta 1. Inoltre i concetti  $\ulcorner$ cadere sotto il concetto  $\ulcorner$ (essere) identico a 0 $\urcorner$ , ma essere distinto da 0 $\urcorner$  e  $\ulcorner$ (essere) distinto da se stesso $\urcorner$  sono equinumerosi. Quindi, in base a HP, 0 spetta anche al primo di questi concetti. Ciò suggerisce un modo di definire la relazione che lega un numero naturale al suo successore:  $n$  è il successore di  $m$  nella successione dei naturali se vi sono un concetto  $X$  e un oggetto  $x$  che cade sotto  $X$ , tali che  $n$  spetta a  $X$  e  $m$  spetta al concetto  $\ulcorner$ cadere sotto  $X$ ,

ma essere distinto da  $x \neg$ . Basta allora ammettere che 2 sia il numero che spetta al concetto  $\neg$ (essere) identico a 0 o a  $1 \neg$  per concludere che 2 è il successore di 1 nella successione dei naturali, e si potrà poi continuare così, definendo tutti i numeri naturali. Per definire poi il concetto  $\neg$ (essere) un numero naturale  $\neg$ , occorre un lavoro logico un po' più sofisticato, basato sull'introduzione di quella che è oggi per noi la relazione ancestrale di una relazione data. Qui basti dire che in tal modo si definirà questo concetto come il concetto sotto cui cadono 0 e tutti gli oggetti che appartengono alla successione che inizia con 0 e continua passando al suo successore, poi al successore di questo, e così via.

Ma questo non è tutto. Frege suggerisce infatti le definizioni precedenti solo dopo aver chiarito ciò che per lui significa che un certo numero spetta a un certo concetto. Ciò potrebbe apparire inessenziale, e per alcuni lo è. I neologicisti (cf. §V.1) per esempio pensano che HP possa essere ammesso come un assioma, o come una definizione implicita dell'operatore *Num.*(-) che, se applicato a concetti, fornisce oggetti, in particolare numeri cardinali<sup>15</sup>. Ma per Frege non lo è. La ragione può sembrare stupefacente, ma riguarda un punto filosofico cruciale: se ammettessimo HP come una mera stipulazione, e ammettessimo anche che questa stipulazione sia sufficiente per definire i numeri naturali, allora non potremmo sapere se Giulio Cesare o l'Inghilterra siano o no dei numeri naturali. Si tratta di quello che oggi chiamiamo 'problema di Cesare'.

Vi sono due facce di questo problema. La prima e più ovvia è questa: HP fornisce una condizione di identità per i numeri che spettano a concetti: stabilisce sotto quale condizione lo stesso numero spetta a due concetti distinti. Ma non ci dice che cosa sia un numero che spetta a un concetto. Lo stesso vale per ogni concetto sortale: se ci limitiamo a fissare una condizione di identità per gli oggetti che cadono sotto di esso non abbiamo modo di sapere se un certo oggetto cade o no sotto quel concetto. Una tale condizione non sembra allora sufficiente per definire un concetto sortale. Nel caso di concetti di oggetti concreti non vi è dubbio che sia così. Chi credesse, per esempio, di poter definire il concetto di stella stabilendo una condizione sotto la quale due osservazioni astronomiche sono osservazioni della stessa stella sarebbe probabilmente tratto in inganno dal fatto di sapere già che cosa sia una stella. Ma nel caso di oggetti astratti le cose potrebbero andare diversamente: gli oggetti astratti non sono sostanze definite da proprietà intrinseche, ma, si potrebbe pensare, null'altro che correlati di condizioni di identità. Qui appare la seconda faccia del problema di Cesare, la più importante per Frege: se ammettessimo la possibilità di definire un concetto sortale sotto cui sono supposti cadere degli oggetti astratti attraverso la mera stipulazione di una condizione di identità, come potremmo assicurarci che tali oggetti esistono, ovvero che sotto tale concetto cadono effettivamente degli oggetti? Certo nulla (a

---

<sup>15</sup>Si dice in generale 'definizione implicita' una definizione che è ottenuta non stabilendo che cosa sia ciò che si sta definendo o introducendo una convenzione che fissa il modo in cui si devono intendere certe parole o simboli, ma stabilendo certe condizioni che ciò che si sta definendo è tenuto a soddisfare. Preso come una definizione dell'operatore *Num.*(-), HP è una definizione implicita perché si limita a fornire una condizione di identità per i valori di tale operatore. Un operatore non è d'altra parte che un'appropriata funzione: se applicata a certe entità che ne danno gli argomenti, essa fornisce altre entità sotto forma di suoi valori. Nel §V.1 spiegheremo perché l'operatore definito implicitamente da HP fornisce non solo numeri naturali, ma più in generale numeri cardinali. In un linguaggio formale, un dato operatore è quindi designato da una costante funzionale.

parte eventuali contraddizioni) potrebbe impedirci di parlare di oggetti che cadono sotto un tale concetto, facendo come se questi esistessero, ma in assenza di altri argomenti, questo non sarebbe che una semplice *façon de parler*, simile a quella che deriverebbe dal sostenere che si sta solo giocando con dei concetti, o peggio, con pure costruzioni linguistiche prive di contenuto. La soluzione del problema di Cesare ha quindi un impatto fondamentale sulla filosofia dell'aritmetica di Frege: è ciò che fa di essa una filosofia platonista.

La soluzione è offerta nel §68 e si basa sull'impiego di una nozione che Frege prende a prestito dal lessico tradizionale della logica: la nozione di estensione [*Umfang*] di un concetto. Nella *Logica di Vienna* (WL, 911) Kant, che fa un largo uso di tale nozione nella *Critica della ragion pura*, definisce l'estensione di un concetto come “una sfera costituita dalla moltitudine di cose che sono considerate sotto il concetto”<sup>16</sup>. Sorprendentemente, Frege, non sottopone tale nozione a nessuna rielaborazione, e anzi, in una nota, riconosce esplicitamente di supporre che si sappia già che cosa sia l'estensione di un concetto. Ciò gli permette di chiarire il senso del verbo ‘spettare’ stipulando che:

Il numero naturale che spetta a un concetto  $F$  è l'estensione del concetto di secondo livello  $\ulcorner$ (essere un) concetto equinumeroso a  $F\urcorner$ .

Confrontando tale stipulazione con le definizioni precedenti otteniamo subito che:

0 è l'estensione del concetto  $\ulcorner$ (essere un) concetto equinumeroso al concetto  $\ulcorner$ (essere) distinto da se stesso $\urcorner$ ;

1 è l'estensione del concetto  $\ulcorner$ (essere un) concetto equinumeroso al concetto  $\ulcorner$ (essere) identico a 0 $\urcorner$ ;

2 è l'estensione del concetto  $\ulcorner$ (essere un) concetto equinumeroso al concetto  $\ulcorner$ (essere) identico a 0 o a 1 $\urcorner$ ;

e così via...

Allo stesso modo abbiamo che:

$n$  è il successore di  $m$  nella successione dei naturali se vi sono un concetto  $X$  e un oggetto  $x$  che cade sotto  $X$ , tali che  $n$  è l'estensione del concetto  $\ulcorner$ (essere un) concetto equinumeroso al concetto  $X\urcorner$  e  $m$  è l'estensione del concetto  $\ulcorner$ (essere un) concetto equinumeroso al concetto  $\ulcorner$ cadere sotto  $X$ , ma essere distinto da  $x\urcorner$ .

HP prende d'altra parte la forma seguente:

L'estensione del concetto  $\ulcorner$ (essere un) concetto equinumeroso al concetto  $F\urcorner$  coincide con l'estensione del concetto  $\ulcorner$ (essere un) concetto equinumeroso al concetto  $G\urcorner$  se e solo se  $F$  e  $G$  sono equinumerosi.

Se l'estensione di un concetto è definita come suggerito da Kant, questa doppia

<sup>16</sup>Kant presenta una definizione simile dell'estensione di un concetto anche nella *Logik Jäsche* (LJ, §I.7). In entrambi i casi, egli oppone l'estensione di un concetto al suo “contenuto”, ovvero all'insieme delle note caratteristiche di tale concetto. Così inteso, il contenuto di un concetto è ciò che fa sì che tale concetto contenga altri concetti o sia contenuto in essi. Nella *Logik Blomberg* (LB, §204), egli definisce invece in modo simile la “sphaera” di un concetto, poi si richiama alla nozione di estensione per chiarire la sua definizione: “La moltitudine di cose [...] che posso pensare sotto il *conceptus communis* costituisce la *sphaera conceptus*. Più sono le cose che appartengono a una nota caratteristica, più grande è il concetto nella sua estensione”.

implicazione può facilmente essere dimostrata, come Frege fa senza difficoltà nel §73.

È ora possibile risolvere il problema di Cesare. Se i concetti del secondo livello impiegati nella definizione dei numeri naturali sono ben definiti, allora essi hanno delle estensioni. Queste sono distinte tanto da Giulio Cesare quanto dall'Inghilterra che certamente non sono, invece, estensioni di concetti del secondo livello. Più precisamente, dice Frege (§ 89), queste ultime sono oggetti "che non ci possono venire dati per via dei sensi". Kant si sbaglia quindi nel pensare che "senza l'intuizione sensibile non ci sarebbe dato alcun oggetto", e anche nel sostenere che i giudizi matematici sono sintetici, almeno nel caso dell'aritmetica. In quanto seguono dalle definizioni precedenti, le "leggi dell'aritmetica" sono infatti analitiche (§ 87), almeno se, emendando convenientemente la definizione di Kant come fa Frege, ammettiamo che una "verità" è analitica se nel dimostrarla "si fa esclusivamente uso di leggi logiche generali e di definizioni" (§ 3)<sup>17</sup>.

Questo è il punto più delicato dell'intera questione. Frege non ha esitazioni nel pensare che le sue stipulazioni, che ricorrono alla nozione kantiana di estensione di un concetto, siano leggi logiche, o, quanto meno, innocenti definizioni esplicite. Non solo: egli ammette anche che i concetti che si formano basandosi su di esse hanno delle estensioni e che queste siano oggetti astratti, in particolare oggetti logici, che i teoremi dell'aritmetica descrivono. Ma che cosa renderebbe la nozione di estensione di un concetto una nozione atta a apparire in una logica, a differenza di altre nozioni kantiane, per esempio quella di schema di un concetto? E perché tale nozione dovrebbe dar luogo a oggetti, piuttosto che a semplici rappresentazioni? L'assenza di una risposta precisa a simili domande è certamente un punto debole della definizione delle *Grundndlagen*. E, al di là del desiderio di pervenire a una definizione formale, e quindi più precisa, questa sembra la ragione principale che motiva la nuova definizione proposta nei *Grundgesetze*, che cerca proprio di rispondere a tali domande.

Torniamo quindi a questo testo, cominciando dai §§ 3, 10, 11, 18 e 20 in cui Frege introduce le sue due ultime funzioni fondamentali<sup>18</sup> e i relativi assiomi. Il suo scopo è chiaramente quello di spiegare in modo nuovo la nozione di estensione di un concetto, in modo da integrarla nel suo sistema. Frege dice chiaramente che, posto che un concetto non è altro che una funzione di un genere particolare, la sua estensione è il decorso di valori di tale funzione, il quale è, a sua volta, il valore preso da una particolare funzione del secondo livello per questa funzione come argomento. Egli introduce anche un simbolo primitivo per designare tale funzione del secondo livello: si tratta del simbolo 'É[φ(ε)]', in cui 'φ' indica un posto vuoto per funzioni del primo livello, di modo che 'É[f(ε)]' indicherà il valore di tale funzione per la funzione  $f(\xi)$  come argomento, ovvero il decorso di valori di quest'ultima funzione. Fin qui nessuna sorpresa. La sorpresa sorge quando, invece di introdurre la funzione É[φ(ε)] tramite una stipulazione che fissa i suoi valori per ogni possibile argomento, Frege la introduce tramite una condizione di identità, ovvero una stipulazione che possiede la stessa forma logica di HP:

<sup>17</sup>Si noti che Frege concorda invece con Kant sul carattere sintetico *a priori* delle verità geometriche (§ 89).

<sup>18</sup>Su quanto segue nel paragrafo, cf. Dummett (1991), pp. 210-218.

$$\vdash (\dot{\epsilon}[f(\epsilon)] = \dot{\epsilon}[g(\epsilon)]) = \forall x[f(x) = g(x)].$$

Si tratta del sesto assioma del sistema formale di Frege, oggi generalmente noto come legge V (o *Basic Law V*, in inglese; d'ora in poi 'BLV'), a causa del numerale romano che Frege le assegna, che è appunto 'V'<sup>19</sup>. Essa stabilisce che due funzioni  $f(\xi)$  e  $g(\xi)$  hanno lo stesso decorso di valori se e solo se esse prendono sempre gli stessi valori per gli stessi argomenti<sup>20</sup>. Inoltre, siccome l'identità è stata definita come una funzione di primo livello, la presenza di tale relazione nel primo membro di tale legge implica che i decorsi di valori non possono che essere oggetti.

Vedremo più avanti le difficoltà connesse a BLV. Supponiamo ora che essa sia appropriata e sufficiente per introdurre la funzione  $\dot{\epsilon}\varphi(\epsilon)$ . Diventa allora facile introdurre l'ultima funzione fondamentale di Frege. Si tratta della funzione del primo livello denotata dal simbolo ' $\dot{\epsilon}\xi$ ' che prende il valore  $a$ , quale che sia tale oggetto, se il suo argomento è l'estensione  $\dot{\epsilon}[a=\epsilon]$  del concetto  $a=\xi$  (il concetto  $\ulcorner$  (essere) identico a  $a \urcorner$ ), mentre prende il valore del suo argomento in ogni altro caso. Sia allora  $C(\xi)$  un concetto sotto cui cade il solo oggetto  $a$ . In base a BLV, la sua estensione è la stessa di quella del concetto  $a=\xi$ , quindi  $\dot{\epsilon}C(\xi) = a$ . Ne segue che ' $\dot{\epsilon}C(\xi)$ ' formalizza l'espressione 'l'oggetto che cade sotto il concetto  $C$ ', ovvero corrisponde, in termini moderni, all'operatore di descrizione definita. Dalla definizione di  $\dot{\epsilon}\xi$  segue inoltre immediatamente il settimo e ultimo assioma ammesso da Frege;

$$\vdash a = \dot{\epsilon}[a=\epsilon].$$

Si tratta della legge VI.

L'aggiunta delle leggi V e VI al sistema descritto nel §1.2 permette a Frege di dimostrare HP (opportunosamente riscritto nel linguaggio formale di tale sistema), di definire i vari numeri naturali riproducendo in tale linguaggio le definizioni delle *Grundlagen*, e di dimostrare entro il sistema formale così esteso gli assiomi di Peano: gli assiomi che Giuseppe Peano (1889) aveva fornito come base assiomatica per l'aritmetica<sup>21</sup>. Frege ritiene di avere in tal modo ridotto l'intera aritmetica alla logica. È la tesi logicista: l'aritmetica è riducibile (deve essere ridotta) alla logica. La questione è vedere se Frege sia giustificato nel sostenere questa tesi, e se da essa deriva una versione appropriata di platonismo aritmetico.

Per capirlo, cominciamo con due osservazioni. La prima è che il ruolo dell'operatore ' $\text{Num.}(-)$ ' che occorre nella formulazione di HP nelle *Grundlagen* è preso nei *Grundgesetze* da un'appropriata funzione del secondo livello definita esplicitamente in base alle sette funzioni fondamentali. Quindi HP non serve a introdurre, né a definire

<sup>19</sup>Cf. cap. II, n.13.

<sup>20</sup>Oggi BLV si scrive usualmente così: ' $(\dot{\epsilon}[P(\epsilon)] = \dot{\epsilon}[Q(\epsilon)]) \Leftrightarrow \forall x[P(x) \Leftrightarrow Q(x)]$ '. Nel scriverla si impiega infatti il linguaggio della logica dei predicati in cui si stabilisce una distinzione fra lettere predicative e lettere funzionali (dovuta all'abbandono della supposizione che i valori di verità siano degli oggetti dello stesso tipo di quelli denotati dalle costanti individuali di tale linguaggio). ' $P$ ' e ' $Q$ ' sono allora lettere proposizionali e quindi ' $\dot{\epsilon}[P(\epsilon)] = \dot{\epsilon}[Q(\epsilon)]$ ', ' $P(x)$ ' e ' $Q(x)$ ' non sono nomi di oggetti ma enunciati.

<sup>21</sup>Oggi sappiamo che gli assiomi di Peano ammettono una riscrittura entro diversi linguaggi fra cui quello della logica del primo ordine (in cui essi includono uno schema di assiomi, diventando, a rigore, infiniti in numero), quello della logica del secondo ordine, quello detta teoria degli insiemi, quelli della teoria dei tipi. Ovviamente, Frege li dimostra in quanto riscritti nel linguaggio del secondo ordine del suo sistema.



implicitamente, un nuovo operatore. Il concetto sortale di numero naturale è definito esplicitamente usando la funzione  $\dot{\epsilon}\varphi(\epsilon)$ , che è anche opportunamente composta con altre funzioni fondamentali per definire i vari numeri naturali. HP, dimostrato in base agli assiomi ammessi, serve piuttosto, a sua volta, per dimostrare gli assiomi di Peano in base a tali definizioni. La seconda osservazione è che la relazione di equinumerosità fra concetti è a sua volta esplicitamente definita, ma lo è senza basarsi sulle funzioni  $\dot{\epsilon}\varphi(\epsilon)$  e  $\backslash\xi$ . In termini moderni, essa è quindi definita entro la logica del secondo ordine. HP riduce così l'identità di due termini definiti in un'estensione di tale logica dovuta all'aggiunta di quelle funzioni a una relazione definita entro tale logica. Ma esso è dimostrato in base alle leggi V e VI. Questa riduzione dipende quindi dall'accettazione di tali leggi e, *a fortiori*, dall'introduzione delle funzioni  $\dot{\epsilon}\varphi(\epsilon)$  e  $\backslash\xi$ . Ne segue che vi è riduzione dell'aritmetica alla logica solo se tali leggi e funzioni sono concepite come logiche. È chiaro che esse non riguardano direttamente i numeri, e non sono quindi aritmetiche. Ma questo non è sufficiente per stabilire che siano logiche.

Frege sembra convinto che la logica corrisponda alla teoria degli oggetti e delle funzioni concepita in tutta la sua generalità: un'idea assai vicina (per quanto riproposta in modo del tutto nuovo) all'idea tradizionale, parzialmente condivisa da Kant stesso, della logica come teoria dei concetti<sup>22</sup>. In base a questa idea, egli considera indubitabile che le funzioni  $\dot{\epsilon}\varphi(\epsilon)$  e  $\backslash\xi$  e gli assiomi corrispondenti siano parte della logica. E neppure ritiene necessario affiancare a BLV un'identificazione esplicita dei decorsi di valore. Si limita invece, nel §10, a osservare che nulla vieta di supporre che **V** e **F** siano dei decorsi di valori, in particolare che **V** sia il decorso di valori (o estensione) del concetto  $\xi=(\xi=\xi)$  e **F** sia il decorso di valori (o estensione) del concetto  $\xi=\neg\forall x[x=x]$ . Siccome  $\xi=(\xi=\xi)$  prende il valore **V** solo per **V** come argomento e  $\xi=\neg\forall x[x=x]$  prende il valore **V** solo per **F** come argomento, questa stipulazione si accorda con la nozione kantiana di estensione di un concetto. Essa permette inoltre di determinare i valori che prendono le quattro funzioni fondamentali del primo livello  $\neg\xi$ ,  $\xi\Rightarrow\xi$ ,  $\xi=\xi$  e  $\backslash\xi$  quando i loro argomenti sono decorsi di valori. La prova è nei §§ 10 e 31 dei *Grundgesetze*<sup>23</sup>. Una naturale riformulazione e generalizzazione del principio del contesto (Dummett, 1991, pp. 211-212) ci porta a pensare che dei nomi di oggetti abbiano un riferimento se riempiendo con essi i posti vuoti nel nome di una funzione qualsiasi del primo livello si ottengono nomi a loro volta dotati di riferimento. Frege ammette questo principio, e ne trae la conseguenza che se ci chiediamo se i nomi dei decorsi di valori abbiano un riferimento (ovvero se vi siano decorsi di valori), limitandosi a considerare le quattro funzioni fondamentali del primo livello e altri nomi di oggetti sicuramente dotati di riferimento, dobbiamo rispondere che i nomi dei decorsi di valori (naturalmente, per ora, solo di quelli di tali funzioni fondamentali) hanno un

<sup>22</sup>Sulle relazioni fra le nozioni di logica di Kant e Frege, cf. MacFarlane (2002).

<sup>23</sup>Per dare un esempio del modo in cui Frege ragiona, vediamo come questa prova funziona per la funzione  $\xi=\xi$ . Se i due argomenti sono decorsi di valori, allora BLV permette di stabilire se sono lo stesso o no. Nel primo caso, la funzione prende valore **V**, nel secondo valore **F**. Se uno di tali argomenti è un decorso di valori e l'altro è un valore di verità, allora essa prende valore **V** o **F** a seconda se, in base a BLV e alla supposizione precedente, tale decorso di valori è o no lo stesso valore di verità che fornisce l'altro argomento. Se un argomento è un decorso di valori e l'altro è un oggetto di un'altra natura, allora la funzione prende valore **F**.

riferimento. Per concludere che i nomi dei decorsi di valori abbiamo comunque un riferimento basta quindi generalizzare l'argomento. Per farlo, Frege ha bisogno di tre altri ingredienti: *i*) un criterio ricorsivo per stabile se dei nomi di oggetti e di funzioni abbiano un riferimento (nel caso dei nomi di funzioni, ciò significa che vi sono funzioni nominate da tali nomi, cioè che tali nomi sono stati legittimamente introdotti)<sup>24</sup>; *ii*) una base su cui far poggiare tale criterio<sup>25</sup>; *iii*) la garanzia che se certi nomi hanno un riferimento, allora anche quelli che risultano dalla loro composizione hanno un riferimento. Frege enuncia esplicitamente il criterio richiesto in (*i*) nel §29. Qui basterà dire che l'idea su cui si basa è la stessa che sta alla base della precedente riformulazione del principio del contesto: un nome di funzione ha riferimento se riempiendo alcuni o tutti i suoi posti vuoti con nomi di argomenti appropriati che hanno riferimento si ottengono nomi che hanno un riferimento; un nome di oggetto ha riferimento se hanno un riferimento i nomi che risultano riempiendo con esso alcuni o tutti i posti vuoti per oggetti in nomi di funzioni che hanno un riferimento. Frege ammette inoltre implicitamente che i nomi dei valori di verità 'V' e 'F' e quelli delle funzioni fondamentali forniscano la base richiesta in (*ii*) e che si abbia la garanzia richiesta in (*iii*). Ne trae che i nomi dei numeri naturali e quello del concetto  $\ulcorner$  (essere) un numero naturale  $\urcorner$  (costruito in un modo assai complesso, richiamandosi alle indicazioni delle *Grundlagen* e utilizzando il linguaggio formale dei *Grundgesetze*) hanno un riferimento. La conclusione ovvia è quindi che i numeri naturali esistono e sono oggetti logici, e che i teoremi dell'aritmetica descrivono tali oggetti. Se questa conclusione fosse corretta, il platonismo aritmetico sarebbe quindi stabilito in una versione che identifica i numeri naturali con oggetti logici.

#### 1.4. Le linee guida per una definizione dei numeri reali

Prima di domandarci che cosa vi sia che non funziona in questa conclusione e nel poderoso sistema di argomenti concepito da Frege per sostenerla, vediamo, più brevemente, come Frege suggerisce (nel secondo volume dei *Grundgesetze*) di affrontare il problema della definizione dei numeri reali.

Il punto principale di Frege è che come i numeri naturali forniscono la cardinalità ai concetti, ovvero sono cose che spettano ai concetti sortali in relazione all'ampiezza del domino degli individui che cadono sotto di essi, così i numeri reali forniscono la misura delle grandezze, ovvero sono cose che spettano alle grandezze in relazione alle loro dimensioni rispettive. Quindi, così come è necessario fondare la definizione dei numeri naturali su una teoria generale degli oggetti e delle funzioni (fra cui vi sono i concetti),

<sup>24</sup>Oggi non si ammetterebbe più che si possa dire che un nome di funzione ha un riferimento, a meno che non si voglia sostenere, *contra* Frege, che una funzione è un oggetto. Sui problemi connessi all'estensione della nozione di riferimento a costanti diverse dai termini singolari, cf. per es. Dummett (1973), cap. 7 e Wright (1998c).

<sup>25</sup>Un criterio ricorsivo è un criterio che si applica a certi argomenti se e solo se si è stabilito che altri argomenti di un livello in qualche senso inferiore soddisfano tale criterio. Esso si applica quindi solo a argomenti che soddisfano una gerarchia di livelli e richiede un punto di partenza, o base su cui appoggiarsi. Lo stesso vale per ogni regola o stipulazione ricorsiva. Il caso sintomatico di una definizione ricorsiva è la seguente definizione dei numeri naturali: 0 è un numero naturale; se  $n$  è un numero naturale, allora  $s(n)$  è un numero naturale; null'altro è un numero naturale. Se la funzione  $s(-)$ , detta funzione 'successore' è ammessa, allora dalla prima e dalla seconda clausola segue che  $s(0)$  è un numero naturale, e quindi anche che  $s(s(0))$  è un numero naturale e così via per tutti i numeri naturali, come assicura la terza clausola.

occorre fondare la definizione dei numeri reali su una teoria generale delle grandezze.

Questa analogia ha però due conseguenze. La prima, spesso notata e resa esplicita dallo stesso Frege, è che i numeri reali non devono definirsi tramite un'estensione del dominio dei naturali. Non che una definizione di questo tipo non sia possibile. Anzi, due modi diversi di realizzarla sono, per esempio, quelli proposti da Richard Dedekind (1872) e da Georg Cantor (1872). Questo tipo di definizione non rende però conto secondo Frege della proprietà cruciale dei numeri reali, il loro applicarsi alla misura delle grandezze: questa caratteristica apparirebbe solo come una fortunata conseguenza della definizione, mentre, sostiene Frege, dovrebbe starne alla radice. La seconda conseguenza è spesso passata sotto silenzio. Se le definizioni di Dedekind e Cantor non sono appropriate è perché non vi è modo di render conto della nozione di grandezza a partire dai numeri naturali (a meno che non si cominciasse con il definire i numeri reali e si definissero poi le grandezze sulla base di essi, cosa che per Frege invertirebbe l'ordine corretto delle definizioni). Che ciò non si possa fare segue da un problema più profondo: l'impossibilità di render conto delle nozione di grandezza fondandosi solo su una teoria delle funzioni e degli oggetti. Da qui ne segue che la definizione dei reali non è una pura questione di logica. Il logicismo di Frege non può quindi estendersi ai numeri reali a meno di non subire modificazioni essenziali.

Ciò non significa che la definizione dei numeri reali non possa essere formulata entro il sistema formale in cui Frege definisce i numeri naturali, e neppure che i numeri reali non possano identificarsi con estensioni di opportuni concetti. Il punto è che per definire i numeri reali come misure di grandezze occorre disporre non tanto di certe grandezze, ma piuttosto di una struttura invariante intesa come la struttura di tutti i domini di grandezze. La ragione è ovvia. Supponiamo infatti di disporre di domini di grandezze di tipo diverso, per esempio i segmenti della geometria di Euclide e le masse della meccanica di Newton, e definiamo poi i numeri reali come misure di queste grandezze. Dobbiamo ancora essere certi di aver definito nei due casi gli stessi numeri, che i numeri reali definiti come misure dei segmenti siano gli stessi che quelli definiti come misure delle masse. E questo può essere garantito in generale solo identificando un aspetto comune nei diversi domini di grandezze e mostrando che la definizione delle misure di queste dipende solo da quello. Il punto cruciale è che per definire questa struttura invariante (in modo in realtà insoddisfacente, visto che Frege si limita a considerare grandezze di un genere particolare), Frege prospetta di servirsi di assiomi che, per quanto formulabili nel linguaggio del suo sistema formale, non sono verità che discendono dalle proprietà delle sue funzioni fondamentali. Egli è tanto consapevole di questo che, dopo aver indicato le linee generali per giungere alla definizione che riteneva appropriata, si pone il problema di provare che esistono dei domini di grandezze, ovvero dei sistemi di oggetti che soddisfano la definizione proposta. Frege prospetta di fornire questa prova costruendo un appropriato dominio di oggetti che abbia i numeri naturali come elementi di base: ma ciò non fa comunque della sua definizione una definizione logica. Al più, dando una veste formale opportuna alle sue idee, Frege avrebbe potuto offrire un argomento puramente logico

(secondo la sua concezione di logica) per dimostrare l'esistenza di un particolare dominio di grandezze, e eventualmente anche dei numeri reali definiti come misure di queste grandezze, ma non avrebbe potuto offrire una definizione puramente logica dei numeri reali che fosse sufficientemente generale da applicarsi a qualunque dominio di grandezze.

### 1.5. La contraddizione del sistema formale di Frege

Un tale programma non si sarebbe comunque potuto realizzare, almeno nei termini prospettati da Frege. La ragione è che, se inserita in un sistema come quello di Frege, BLV — che svolge un ruolo cruciale nella definizione dei numeri naturali, e avrebbe dovuto svolgerlo anche nella definizione dei numeri reali — conduce a una contraddizione, e rende quindi il sistema inconsistente.

Non è necessario richiamarsi al sofisticato argomento concepito da Russell per accorgerci che vi è qualcosa che non va in BLV. Supponiamo (Dummett, 1991, 133) di avere solo 3 oggetti, ①, ②, e ③, che possano fornire gli argomenti e i valori di una funzione del primo livello a un argomento, diciamo  $f(\xi)$ . Vi saranno allora  $3^3 = 27$  diverse combinazioni di valori e argomenti per tale funzione:  $\{f(\textcircled{1}) = \textcircled{1}, f(\textcircled{2}) = \textcircled{1}, f(\textcircled{3}) = \textcircled{1}\}$ ;  $\{f(\textcircled{1}) = \textcircled{1}, f(\textcircled{2}) = \textcircled{1}, f(\textcircled{3}) = \textcircled{2}\}$  ...,  $\{f(\textcircled{1}) = \textcircled{3}, f(\textcircled{2}) = \textcircled{3}, f(\textcircled{3}) = \textcircled{3}\}$ . In base a BLV, vi saranno quindi 27 diversi possibili decorsi di valori per questa stessa funzione. Ma abbiamo visto che, in accordo con tale legge, i decorsi di valori non possono che essere oggetti, e noi abbiamo supposto di avere solo 3 oggetti che possono fornire gli argomenti e i valori di una funzione. Quindi, o imponiamo restrizioni alla possibilità di definire funzioni sui nostri oggetti, oppure ammettiamo che le nostre funzioni non siano definite su tutti gli oggetti: in caso contrario, avremmo più decorsi di valori che oggetti. Questo vale per ogni numero di oggetti maggiore di 1, posto che a  $n$  oggetti corrispondono sempre  $n^n$  possibili decorsi di valori e  $n^n > n$ , per ogni  $n$  maggiore di 1. Frege tuttavia non solo non introduce alcuna limitazione relativa alla possibilità di definire funzioni e al dominio su cui le sue funzioni del primo livello sono definite e prendono valori, ma assume anche *d'emblée* che vi siano almeno 2 oggetti: **V** e **F**. Le cose non possono quindi funzionare.

L'argomento di Russell rende il problema manifesto. Russell lo comunicò a Frege in una lettera del 16 giugno 1902, che questi ricevette mentre stava terminando il secondo volume dei *Grundgesetze*, volume che apparve l'anno seguente con l'aggiunta di un'appendice (pp. 253-265) in cui Frege cerca invano di far fronte alla contraddizione prospettando alcune modifiche locali nel suo sistema. L'argomento di Russell è generalmente presentato come segue (Russell 1903, §100). Consideriamo l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi e domandiamoci se tale insieme appartenga o no a se stesso. Se vi appartiene, allora è un insieme che non appartiene a se stesso, quindi non vi appartiene. Se non vi appartiene, allora è un insieme che non appartiene a se stesso, quindi vi appartiene. Ne segue che tale insieme appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso.

In tale versione, questo argomento non intacca direttamente il sistema di Frege, che non

si serve apertamente della nozione di insieme. Ma è facile capire come un argomento simile si applichi per mostrare l'inconsistenza dovuta a BLV (Boolos, 1988, pp. 172-173). Sia  $R(\xi)$  un concetto del primo livello sotto cui cadono tutte e sole le estensioni di un concetto che non cadono sotto quest'ultimo concetto. Un tale concetto è facilmente definibile entro il sistema di Frege. Consideriamo allora l'estensione  $\dot{E}R(\epsilon)$  di tale concetto e domandiamoci se essa cada o no sotto  $R$ , ovvero se vale che  $\vdash R(\dot{E}R(\epsilon))$  o che  $\vdash \neg R(\dot{E}R(\epsilon))$ . Per evitare di avvalerci inconsapevolmente dalla nostra idea intuitiva di estensione, caratterizziamo più precisamente il concetto  $R(\xi)$  stabilendo che esso è il concetto sotto il quale un oggetto  $x$  cade se e solo se vi è un concetto  $F(\xi)$  per cui vale che  $\vdash x = \dot{E}F(\epsilon)$  e che  $\vdash \neg F(x)$ . Supponiamo che  $\dot{E}R(\epsilon)$  non cada sotto  $R(\xi)$ , ovvero che valga che  $\vdash \neg R(\dot{E}R(\epsilon))$ . Allora non esiste nessun concetto  $F(\xi)$  per cui vale tanto che  $\vdash \dot{E}R(\epsilon) = \dot{E}F(\epsilon)$  quanto che  $\vdash \neg F(\dot{E}R(\epsilon))$ . Quindi questo non può essere il caso di  $R(\xi)$ . Ma se le estensioni sono oggetti e  $R(\xi)$  ha un'estensione, allora vale che  $\vdash \dot{E}R(\epsilon) = \dot{E}R(\epsilon)$ . Ne segue che vale che  $\vdash \neg[\neg R(\dot{E}R(\epsilon))]$ , che, in logica classica, equivale a dire che vale che  $\vdash R(\dot{E}R(\epsilon))$ . Supponiamo ora che  $\dot{E}R(\epsilon)$  cada sotto  $R(\xi)$ , ovvero che valga che  $\vdash R(\dot{E}R(\epsilon))$ . Vi è allora un concetto  $F(\xi)$  per cui vale tanto che  $\vdash \dot{E}R(\epsilon) = \dot{E}F(\epsilon)$  quanto che  $\vdash \neg F(\dot{E}R(\epsilon))$ . Ma se è così, allora, per BLV, vale anche che  $\vdash \neg R(\dot{E}R(\epsilon))$ . Quindi, se vale BLV, sia ' $\vdash \neg R(\dot{E}R(\epsilon))$ ' che ' $\vdash R(\dot{E}R(\epsilon))$ ' implicano la loro negazione. E questa è una contraddizione.

L'insorgere della contraddizione non dipende solo dall'accettazione di BLV e dalle ovvie regole deduttive che intervengono nell'argomento precedente. Essa dipende anche dall'assunzione che  $R(\xi)$  sia una funzione (un concetto) ben definita, ovvero dall'estrema libertà nella formazione di nomi di funzioni concessa nel sistema di Frege. Si potrebbe allora pensare di bloccare la contraddizione senza rinunciare a BLV, ma riducendo tale libertà. In questo modo si potrebbe anche rispondere a un altro problema complesso. Se l'argomento di Frege a favore dell'esistenza dei numeri naturali delineato alla fine del §1.3 fosse corretto, ne seguirebbe che ogni nome di oggetto ben formato entro tale sistema, e quindi anche ' $R(\dot{E}R(\epsilon))$ ', ha un riferimento, e questo è ciò che l'argomento di Russell mostra invece essere falso. Il problema è allora di capire dove sia l'errore nell'argomento di Frege. Dummett (1991, p. 217-218)<sup>26</sup> ha suggerito che l'errore consista nell'ammettere che si abbia la garanzia richiesta nel punto (iii) del precedente §1.3: la garanzia cioè che se certi nomi hanno un riferimento, allora anche quelli che risultano dalla loro composizione hanno un riferimento. In particolare, egli ha puntato il dito contro la formazione di nomi di funzioni attraverso l'impiego del quantificatore del secondo ordine. Ma come restringere la formazione di nomi di funzioni attraverso l'impiego di tale quantificatore, mantenendo tuttavia aperta la possibilità di definire i numeri naturali nel modo proposto da Frege o in un modo simile a questo? *Mutatis mutandis*, questo è il problema affrontato dallo stesso Russell (e, più recentemente, dai neologicisti).

<sup>26</sup>Sulle ragioni della contraddizione, cf. Boolos (1993), Dummett (1994).

## 2. Russell e la scissione fra logicismo e platonismo.

Russell aveva scoperto la contraddizione insita nel sistema di Frege mentre stava scrivendo i *The Principles of Mathematics* (1903), il cui scopo era difendere la tesi logicista, che Russell presenta così fin dal primo capoverso della prefazione (p.27):

[...] tutta la matematica pura tratta esclusivamente di concetti definibili in termini di un numero piccolissimo di principi fondamentali e [...] tutte le proposizioni di tale scienza sono deducibili da un numero piccolissimo di principi fondamentali.

Come anche il titolo del libro suggerisce, sembra trattarsi di un'estensione all'intera matematica delle idee di Frege a proposito dell'aritmetica. La trattazione di Russell è tuttavia del tutto informale e le sue tesi filosofiche differiscono in modo cruciale da quelle di Frege. Alcune differenze appaiono fin dalla prima frase del capitolo I (p. 35):

La matematica pura è la classe di tutte le proposizioni della forma 'p implica q' dove p e q sono proposizioni contenenti una o più variabili, le stesse nelle due proposizioni, e né p né q contengono alcuna costante eccetto costanti logiche. Costanti logiche sono tutte le nozioni definibili per mezzo di quanto segue: implicazione, la relazione di un termine con la classe cui esso appartiene come elemento, la nozione di tale che, la nozione di relazione, e altre nozioni siffatte che possono rientrare nella nozione generale di proposizioni della forma su riferita. Oltre a queste, la matematica adopera poi una nozione che non entra come costituente nelle proposizioni da essa considerate, e precisamente la nozione di verità.

L'insistenza sul fatto che i teoremi della matematica sono implicazioni sposta l'attenzione dalle verità fondamentali alla loro deduzione. La nozione di costante logica e il modo in cui questa è chiarita mostrano una diversa concezione di un sistema formale. Ciò è reso ancora più chiaro dalla precisazione che la nozione di verità non entra come tale nei teoremi della matematica. È vero che neppure per Frege i nomi 'V' e 'F' appaiono nel linguaggio impiegato dall'aritmetica. Ma qui Russell dice di più. Egli denuncia un errore categoriale insito nell'idea di considerare i valori di verità come oggetti. Se questa idea è scartata, tutto l'impianto filosofico su cui è costruito il sistema di Frege viene meno, e diventa necessario distinguere fra funzioni e predicati, ovvero fra lettere funzionali (lettere come 'f', tali che 'f(a)' è un nome di un individuo) e lettere predicative (lettere come 'P', tali che 'P(a)' — e non più '¬P(a)' — è un enunciato).

A queste differenze cruciali, che annunciano le trasformazioni del sistema di Frege che porteranno gradualmente alla nostra logica proposizionale e predicativa, se ne aggiunge un'altra altrettanto manifesta, che dipende dalla presenza della relazione di appartenenza insiemistica fra le costanti logiche fondamentali. Essa indica il ruolo cruciale svolto nei *Principles* dalla nozione di insieme (o classe<sup>27</sup>). Di fatto le classi prendono nell'edificio logico prospettato da Russell il posto delle estensioni di concetti. Anche se vi è chi considererebbe questa differenza poco rilevante sul piano filosofico<sup>28</sup>, essa è storicamente cruciale, perché sposta l'attenzione di chi cerca la base ultima della matematica dalla nozione di funzione a quella di insieme.

È proprio richiamandosi alla nozione di insieme che Russell riformula l'idea base della

---

<sup>27</sup>Russell usa genericamente il termine 'class' ma fa una distinzione fra *class as many* and *class as one*, che richiama quella oggi usale fra classe e insieme (per cui si veda ogni buona introduzione alla teoria degli insiemi: cf. Quine, 1963; Suppes, 1972; Potter, 2004, specialmente l'appendice C; Casalegno e Mariani, 2004). Noi useremo qui il termine 'insieme' nell'abituale accezione in cui oggi è usato.

<sup>28</sup>Ma cf. cap II, n.12.

definizione dei numeri naturali di Frege definendo (1903, §111) i numeri naturali come insiemi di insiemi equinumerosi con insiemi dati. La trattazione di Russell è informale, ma l'idea è chiara e suggerisce immediatamente di sostituire le definizioni di Frege con le seguenti:

0 è l'insieme di tutti gli insiemi equinumerosi all'insieme degli oggetti diversi da se stessi;

1 è l'insieme di tutti gli insiemi equinumerosi all'insieme degli oggetti identici a 0;

2 è l'insieme di tutti gli insiemi equinumerosi all'insieme degli oggetti identici a 0 o a 1;

e così via...

Questa modifica della definizione di Frege non è tuttavia sufficiente per bloccare la contraddizione. L'argomento di Russell non mostra infatti solo che il sistema di Frege è inconsistente, ma anche che la stessa nozione di insieme deve essere trattata con cautela. Come Russell osserva (1903, §102), non possiamo accettare nel contempo che basti enunciare una condizione necessaria e sufficiente di appartenenza per avere un insieme e che ogni insieme possa essere membro di un altro insieme. Così, lungi dal bloccarla, le riformulazioni precedenti delle definizioni di Frege rendono ancora più manifesta la contraddizione. Per quanto Russell non lo dica esplicitamente, tale contraddizione può anche essere mostrata direttamente in queste stesse definizioni. Ammettiamo che, dato un insieme  $e$ , sia sempre possibile associare a tale insieme l'insieme  $\{e\}$ , di cui tale insieme è il solo elemento. Sia allora  $e$  un insieme qualsiasi. L'insieme  $\{e\}$  è certamente equinumeroso con l'insieme degli oggetti identici a 0. Vi sono così tanti insiemi equinumerosi con l'insieme degli oggetti identici a 0 quanti sono gli insiemi, e quindi, secondo la definizione precedente, il numero 1 è un insieme che comprende tanti elementi quanti sono gli insiemi. Ma nessun insieme può comprendere tanti elementi quanti sono gli insiemi, pena l'insorgere del cosiddetto paradosso di Cantor: se così fosse, tale insieme dovrebbe infatti comprendere almeno tanti elementi quanti sono i suoi sottoinsiemi (che sono appunto insiemi), il che non è possibile.

Anche se aggiunge al suo libro un capitolo apposito (il X) per presentare la contraddizione comunicata a Frege l'anno prima, Russell non crede necessario gettare alle ortiche il suo manoscritto. Egli aggiunge anche due appendici: l'appendice A, per indicare le differenze fra le sue idee e quelle di Frege; e l'appendice B per delineare il modo (anticipato nel cap. X) in cui egli propone di bloccare la contraddizione. Si tratta, in breve, di distribuire le diverse entità nominate nel linguaggio in una gerarchia di tipi, ammettendo la possibilità di formare nomi di entità di un certo tipo solo usando nomi di entità di tipi di livello inferiore, cosa che blocca la possibilità di formare certi nomi complessi fra cui quello del concetto che occorre nel paradosso di Russell.

Nell'appendice B questa idea è sola abbozzata, e ogni indagine relativa al modo in cui essa si riflette sulla possibilità di elaborare un sistema logico abbastanza potente da includere la matematica (o una larga parte di essa) è lasciata a indagini ulteriori. Queste

indagini avrebbero dovuto condurre alla pubblicazione di un nuovo libro, in collaborazione con Alfred North Whitehead, che avrebbe dovuto presentare una versione formale della riduzione della matematica alla logica prospettata nei *Principles*. Il libro apparve qualche anno dopo, in tre volumi, sotto un titolo che evoca il capolavoro di Newton: *Principia Mathematica* (1910-1913). Ma se la riformulazione che esso contiene delle idee dei *Principles* fa certo uso di un'ormai sofisticata teoria dei tipi (in un versione "ramificata" anticipata in Russell 1908; per una introduzione alla teoria dei tipi cf., fra gli altri, Andrews, 2002) essa abbandona l'idea che i nomi di insiemi legittimamente formati si riferiscano a oggetti la cui esistenza è garantita dal modo in cui tali nomi sono introdotti. Questi nomi sono al contrario trattati come "simboli incompleti", simboli che intervengono in formule significanti senza possedere alcun significato, se presi isolatamente<sup>29</sup>. In particolare questo è appunto il caso dei termini apparentemente impiegati per denotare insiemi. L'idea che la matematica tratti di oggetti astratti, in particolare di insiemi, è quindi espressamente abbandonata, in favore di una concezione che è divenuta nota come la *no-class theory*. Il nuovo punto di vista si oppone quindi radicalmente all'opzione platonista sostenuta da Frege, e apparentemente ammessa nei *Principles*. Non solo, Russell e Whitehead ritengono necessario soddisfare nella loro costruzione il cosiddetto principio del circolo vizioso, che vieta il ricorso a definizioni impredicative: definizioni che si richiamano a un intero insieme per definire i suoi elementi. Questo li costringe a ricorrere a assiomi *ad hoc*, che, al di là di ogni idea che si possa avere a proposito del riferimento dei nomi di insiemi, vanificano ogni speranza di riformulare l'argomento logico di Frege a favore del platonismo. È oggi opinione comune che la presenza di tali assiomi vanifichi anche la pretesa di Russell e Whitehead di aver ridotto la matematica alla logica. Ma quello che è per noi più importante, è che i *Principia* consumano una scissione fra il programma logicista e l'opzione platonista che, almeno nel caso dei numeri naturali, vanno invece per Frege di pari passo.

### 3. La teoria degli insiemi

Nel porre al centro della costruzione dei *Principles* la nozione di insieme, Russell segue una delle principali linee di tendenza della matematica del suo tempo, legata in particolare ai lavori di Dedekind e Cantor<sup>30</sup>. Il primo pubblica, per esempio, un breve trattato (1888) dove, astenendosi da ogni esplicita considerazione filosofica, mostra che la successione di numeri naturali può essere definita come un insieme che soddisfa appropriate condizioni relative a una funzione con argomenti e valori in tale insieme. Nel farlo egli si serve di alcune nozioni che prefigurano i primi elementi di una teoria degli insiemi. Questa incomincia d'altra parte a svilupparsi negli stessi anni grazie a una serie di articoli di Cantor

---

<sup>29</sup>L'idea riecheggia il principio del contesto di Frege, ma se ne allontana radicalmente: Frege aveva sostenuto che il significato delle parole dovesse venir cercato nel contesto degli asserti cui esse appartengono, ma non che esse abbiano un significato solo in tale contesto, o peggio che certe parole possano formare asserti significanti, senza possedere un significato proprio.

<sup>30</sup>Quello che diremo qui a proposito dell'emergere della teoria degli insiemi è necessariamente molto sommario. Tra i tanti testi consultabili per approfondimenti, cf. Ferreirós (1999). Cf. anche Cavailles (1938) per una ricostruzione classica.



(1872, 1874, 1879-1884, 1883, 1895-1897), dapprima dedicati a questioni di analisi reale, poi sempre più focalizzati su questioni emerse dall'autonoma evoluzione della teoria. In particolare, Cantor definisce due nuovi tipi di numeri che, per così dire, vanno al di là di quelli naturali. Da una parte vi sono i cardinali transfiniti che prolungano i numeri naturali fornendo la cardinalità di ogni tipo di insieme infinito. Dall'altra vi sono gli ordinali transfiniti che forniscono i diversi tipi di ordinamento di cui gli insiemi infiniti sono passibili. Cantor non si limita a definire tali numeri, ma elabora anche delle vere proprie aritmetiche transfinitive relative a essi, essenzialmente diverse fra loro e dall'usuale aritmetica dei numeri naturali. Lo sviluppo della teoria degli insiemi fra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX è proprio legato allo sforzo di fornire un quadro deduttivo preciso in cui inquadrare tali aritmetiche e provare quindi risultati relativi a tali numeri. Due esempi possono servire a comprendere il problema.

Già Bernard Bolzano (1851) aveva prospettato la possibilità di definire un insieme infinito come un insieme un cui sottoinsieme proprio può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme stesso. Il caso dell'insieme dei numeri naturali fornisce un esempio chiarissimo: vi sono tanti numeri naturali quanti numeri pari, quanti numeri dispari, quanti multipli di 3, etc. Tale definizione è ripresa da Dedekind (1888), e per questo un insieme che soddisfa tale condizione è oggi detto 'infinito secondo Dedekind'. Una questione interessante è la seguente: possiamo provare che un insieme è infinito secondo Dedekind se e solo se è infinito nel senso usuale del termine (ovvero non può essere messo in corrispondenza biunivoca con nessun segmento iniziale  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$  della successione dei numeri naturali)? La risposta dipende dagli assiomi che vengono concessi: la prova oggi abituale richiede il cosiddetto assioma di scelta che concede la possibilità di formare un nuovo insieme a partire da ogni insieme di insiemi non vuoti, prendendo uno e un solo elemento per ognuno di questi ultimi insiemi.

Veniamo all'altro esempio. Un insieme che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali è detto 'infinito numerabile'. Cantor prova che questo è il caso, per esempio, dell'insieme dei numeri razionali, ma non di quello dei numeri reali. Egli prova anche che nessun insieme può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutti i suoi possibili sottoinsiemi e che l'insieme dei numeri reali può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutti i sottoinsiemi possibili dell'insieme dei numeri naturali. Diciamo che due insiemi hanno lo stesso cardinale se e solo se possono essere messi in corrispondenza biunivoca. Supponiamo di avere definito un ordine totale sui cardinali — ovvero una relazione d'ordine stretta,  $<$ , tale che per ogni coppia di cardinali  $\alpha$  e  $\beta$  o vale che  $\alpha = \beta$ , o vale che  $\alpha < \beta$  o vale che  $\beta < \alpha$  — e di averlo fatto in modo che se  $\alpha$  è il cardinale di un certo insieme e  $\beta$  è il cardinale dell'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, allora  $\alpha < \beta$ . Ne segue che se  $\aleph_0$  (letto 'aleph con zero') è il cardinale dell'insieme dei numeri naturali, il cardinale dell'insieme dei numeri reali è  $2^{\aleph_0}$  e che  $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ <sup>31</sup>. Possiamo dunque chiederci: vi è qualche cardinale compreso fra  $\aleph_0$  e  $2^{\aleph_0}$ ?

<sup>31</sup>Se consideriamo un insieme finito, è facile verificare che se esso ha  $n$  elementi, allora l'insieme dei suoi sottoinsiemi ne ha  $2^n$ . Questo vale anche per gli insiemi infiniti. Se  $\alpha$  è il cardinale di un insieme infinito, il

La risposta negativa è la cosiddetta ipotesi del continuo. Oggi sappiamo, grazie a Kurt Gödel (1939a, 1939b, 1940) e Paul Cohen (1963), che gli assiomi abituali della teoria degli insiemi con l'aggiunta dell'assioma di scelta non formano una base assiomatica sufficiente per decidere fra l'ipotesi del continuo e la sua negazione.

Questi assiomi sono quelli proposti in una serie di articoli apparsi fra il 1908 e il 1930 da Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel e oggi codificati nella cosiddetta teoria ZF, che con l'aggiunta dell'assioma di scelta si trasforma nella teoria ZFC. Questa teoria non richiede alcuna stratificazioni in tipi, ma il suo linguaggio è tale da bloccare l'insorgere del paradosso di Russell (così come di ogni altro paradosso conosciuto): in esso l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi non può essere definito. Tale teoria fornisce quindi un quadro formale adeguato in cui è possibile riformulare una grandissima parte della matematica classica, fra cui ovviamente le teorie dei numeri naturali e reali.

Entro tale teoria, vi sono molti modi di definire i numeri naturali e, basandosi su questi, i reali. Il più semplice è senz'altro quello di identificare un'appropriata famiglia di insiemi e di definire su di essa le usali relazioni e operazioni aritmetiche. Un modo di farlo, suggerito dalla definizione di Frege, è quello proposto da John von Neumann (1923, p. 347). Si tratta di identificare lo zero con l'insieme vuoto, e di usare poi la clausola ricorsiva che associa a un insieme dato l'unione di tale insieme con l'insieme di cui esso è l'unico elemento (dato un insieme  $e$ , si passa a  $e \cup \{e\}$ ). Si ottiene allora una progressione ordinata in base a tale clausola ricorsiva::

$$\emptyset ; \{\emptyset\} ; \{\emptyset, \{\emptyset\}\} ; \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} ; \dots$$

Un altro modo, altrettanto semplice, è quello proposto da Zermelo (1908). Lo zero si identifica ancora con l'insieme vuoto, ma si usa ora la clausola ricorsiva che associa a un insieme dato l'insieme di cui tale insieme è l'unico elemento (dato  $e$ , si passa a  $\{e\}$ ). La progressione che si ottiene, ordinata in base a tale clausola ricorsiva, è la seguente:

$$\emptyset ; \{\emptyset\} ; \{\{\emptyset\}\} ; \{\{\{\emptyset\}\}\} ; \dots$$

In questo modo siamo tuttavia ben lungi dall'aver risolto il problema della fondazione dell'aritmetica. E ancor meno abbiamo fornito un qualche argomento a favore del platonismo aritmetico. Ciò che abbiamo mostrato è infatti solamente che entro la teoria degli insiemi è possibile costruire dei modelli degli assiomi di Peano, ovvero delle progressioni i cui elementi sono degli insiemi<sup>32</sup>. Questo garantisce la possibilità di identificare i numeri naturali con gli elementi di uno di questi modelli (non importa quale<sup>33</sup>), ma non ci garantisce affatto che la loro teoria sia ben fondata o che i numeri

cardinale dell'insieme dei suoi sottoinsiemi è  $2^a$ .

<sup>32</sup>Per la nozione di progressione, cf. cap. I, n.8. Sarà sufficiente osservare qui che un insieme soddisfa gli assiomi di Peano se e solo se è ordinato in modo tale da formare una progressione.

<sup>33</sup>La questione è in realtà più complicata: le relazioni esatte che si instaurano fra tale modello e gli assiomi di Peano dipendono infatti dal modo in cui questi ultimi sono formulati (cf. cap. II, n.21). Se essi sono formulati in un linguaggio del secondo ordine (e sono quindi in numero finito), tutti i loro modelli sono isomorfi (ovvero includono elementi che si comportano esattamente nello stesso modo rispetto a tali assiomi). Se invece sono formulati in un linguaggio del primo ordine (e sono quindi in numero infinito), non tutti i loro modelli sono isomorfi: alcuni (detti 'non standard') includono degli elementi supplementari che si comportano, per dirla brevemente, come dei numeri infiniti. Questa è una conseguenza del cosiddetto teorema di Löwenheim-Skolem. Per manuali di logica su cui approfondire, cf. Mendelson (1964), Kleene (1967), Shoenfield (1967), Boolos, Jeffery (1989), Ebbinghaus, Flum, Thomas (2004), Palladino (2004). Sulla teoria dei modelli, cf. Chang e Keisler

naturali, così identificati, esistano in quanto oggetti, in qualche senso appropriato del termine. Per avere tali garanzie dobbiamo rivolgerci alla teoria degli insiemi e chiederci se essa è ben fondata e se gli insiemi definibili entro di essa esistano in quanto oggetti, in qualche senso appropriato del termine. Tanto il problema della fondazione, quanto quello di dare un argomento pro o contro il platonismo, sono quindi scaricati sulla teoria degli insiemi. Questo non vale solo per l'aritmetica, ma anche per ogni altra branca della matematica che sia formulabile e si voglia formulare entro la teoria degli insiemi.

Quando si parla genericamente di teoria degli insiemi, ci si riferisce di solito a ZFC. Questa differisce tuttavia da altre versioni disponibili della teoria degli insiemi, che includono assiomi diversi o diversamente formulati. La comprovata incapacità di decidere certe ipotesi entro ZFC (come l'ipotesi del continuo) motiva, per esempio, la ricerca di altri assiomi da aggiungere a quelli di ZFC, così come l'assioma di scelta si aggiunge agli assiomi di ZF per accrescerne il potere deduttivo<sup>34</sup>.

Questa situazione spiega da sola che gli assiomi di ZFC, e di ogni altra versione disponibile della teoria degli insiemi, non solo non sono in nessun modo identificabili con delle verità logiche, ma non hanno neppure quel carattere, per così dire, di naturalità che riconosciamo negli assiomi della logica del primo, o per qualcuno anche del secondo, ordine. Non vi è alcun senso plausibile in cui si possa pensare che essi mettano capo a un sistema linguistico neutrale impiegabile per indagare diversi fenomeni intellettuali o empirici, senza influire su tali fenomeni in modo decisivo. Al contrario, la teoria degli insiemi mette capo a un universo di entità proprie, sulla cui natura, esistenza e legittimità ci si continua a interrogare: quale che sia la nostra idea di logica, la teoria degli insiemi non è un branca della logica, ma è di per se stessa una teoria matematica.

#### **4. Il problema dei fondamenti**

##### *4.1. Carnap fra logicismo e empirismo logico*

Se la teoria degli insiemi non risolve il problema dei fondamenti della matematica, è naturale che la sua progressiva elaborazione coabiti con diversi tentativi di risolverlo. Fra questi vi è quello proposto da Rudolf Carnap, il terzo grande filosofo logicista della prima metà del XX secolo, con cui la scissione fra logicismo e platonismo diventa ancora più netta che per Russell. Esponente di primo piano del positivismo logico (cf. Ayer 1946; Jacob, 1980; Parrini, 1983; Coffa, 1991; Stadler, 1997), Carnap ne condivide la tesi centrale: un asserto a cui si voglia assegnare un contenuto fattuale<sup>35</sup> è dotato di un significato (intelligibile) se e solo se vi è, almeno in linea di principio, un metodo per verificarlo; e siccome solo l'esperienza può decidere su questioni di fatto, tale metodo deve richiamarsi a essa. Gli asserti matematici sono quindi dotati di significato solo se sono verificabili sperimentalmente o se non si assegna loro alcun contenuto fattuale. Ma per

---

(1973), Hodges (1993) e Rothmaler (2000).

<sup>34</sup>Cf. §5. Per approfondimenti, cf. Cohen (1966), Kanamori (2004), Woodin (2001a-b).

<sup>35</sup>Ci limitiamo qui a una formulazione necessariamente vaga, sperando sia sufficiente a dare un'idea abbastanza chiara della tesi in questione.

Carnap non vi è dubbio che la matematica sia *a priori*. Ne segue che i suoi teoremi sono dotati di significato solo se non si assegna loro alcun contenuto fattuale, in particolare se si ammette che non vi sia alcuna questione di fatto che decida della loro verità o falsità. Non vi è allora nessuna questione di fatto neppure a proposito dell'esistenza di oggetti eventualmente descritti dai teoremi della matematica, né a proposito della fondazione di questa. Ciò non significa che ogni problema di esistenza relativo alla matematica sia mal posto, e neppure che lo sia il problema della fondazione di questa. Tali problemi sono sensati, e hanno delle risposte. Ma si tratta di comprenderli e formularli correttamente.

Se la matematica non ha contenuto fattuale e i suoi teoremi sono significanti, questa non può che ridursi a un *framework* linguistico in cui formuliamo alcuni dei nostri problemi e delle nostre affermazioni sul mondo dell'esperienza, e di cui ci serviamo nel contesto della verifica di altri enunciati: essa riguarda solo la struttura del nostro linguaggio. Il problema della sua fondazione riguarderà dunque il modo più opportuno di strutturare tale *framework*. Essere logicista significa allora sostenere che la matematica costituisce un *framework* linguistico adeguato solo se è strutturata in accordo con le risorse della logica, e affermare che questa strutturazione è possibile, ovvero che "la matematica è riducibile alla logica" (Carnap 1931, pp. 91-92). Questa seconda affermazione è chiarita da Carnap come segue (*ib.*):

Separiamo la tesi logicista in due parti [...]: i) i concetti della matematica possono essere derivati da concetti logici tramite definizioni esplicite; ii) i teoremi della matematica possono essere derivati da assiomi logici tramite una deduzioni puramente logica;

Per giustificare la tesi (i), Carnap si richiama al sistema dei *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead suggerendo alcune semplificazioni rese possibili dall'ammissione di definizioni impredicative. Il prezzo pagato per tali semplificazioni è così una sorta di viziosità definizionale che appare tuttavia innocua se lo scopo è solo quello di fornire un *framework* linguistico (Shapiro, 2000a, p. 125)<sup>36</sup>. Ma è la tesi (ii) che pone il problema principale. Carnap non nasconde la difficoltà posta dalla presenza nel sistema dei *Principia Mathematica* di assiomi che egli stesso riconosce come non logici. Ma osserva che essi sono necessari per provare certi teoremi solo se questi ultimi sono formulati in modo usuale. Basta riformularli sotto forma di implicazioni il cui antecedente è costituito da questi stessi assiomi (e eventualmente altri) e il cui conseguente è dato dalle loro formulazioni usuali per evitare la difficoltà: per provare tali teoremi, così formulati, quegli assiomi non sono infatti necessari.

Questa mossa è accettabile solo se si ammette che la tesi logicista non riguarda il contenuto della matematica, ma la sua forma. Siccome per Carnap la matematica non ha contenuto, questo è ovvio. Ma allora, dire che la matematica è riducibile alla logica non significa dire null'altro se non che essa può essere scritta in linguaggio logico e che le sue dimostrazioni sono riconducibili a delle catene deduttive. Che, così intesa, tale tesi abbia

---

<sup>36</sup>Ovviamente l'eventuale insorgere di paradossi sarebbe inaccettabile anche da un punto di vista come quello di Carnap. Il punto logico della questione sta allora nella relazione fra definizioni impredicative e paradossi. H. Poincaré (1906) aveva identificato nelle prime la fonte principale dei secondi. Oggi sappiamo che molte definizioni impredicative sono perfettamente consistenti (un esempio è HP usato per definire i numeri naturali: cf. §V.1). Per approfondimenti, cf.. Chihara (1973), Heinzmann (1985) e Feferman (2005).

poco a che fare con il problema di Platone, a cui Frege aveva cercato di rispondere, sembra evidente. Ma Carnap non vuole lasciare dubbi su questo punto. Egli insiste sul carattere esistenziale degli assiomi incriminati, sostenendo che una “pura scienza formale [...] possa fare solo asserzioni condizionali [...] di esistenza” (*ib.*, p. 96). Qualche anno dopo (Carnap 1950, § 2), egli radicalizza ulteriormente la propria posizione introducendo una distinzione che sarà più volte richiamata nel dibattito successivo: quella fra esistenza interna e esterna, o meglio fra questioni d’esistenza interne e esterne. Le prime concernono “l’esistenza di certe entità [...] in un *framework*”; le seconde “l’esistenza o realtà *del sistema di entità come un tutto*”. Le prime sono ben formulate e ricevono una risposta che dipende dalla teoria in questione. In aritmetica ci si può chiedere per esempio se esistono infiniti numeri primi. La prova di ciò non comporta difficoltà e permette di concludere che l’asserto ‘esistono infiniti numeri primi’ è vero. Ma da ciò non segue che vi siano numeri primi, e quindi naturali, al di fuori dell’aritmetica e che essi siano descritti dai teoremi dell’aritmetica. Sostenere questo sarebbe rispondere a una questione di esistenza esterna e, dice Carnap, questioni come questa hanno un significato solo se intese come questioni pragmatiche, relative all’opportunità o meno di adottare un certo *framework*.

Risulta allora chiaro che per Carnap le verità della matematica sono sempre analitiche, anche quando hanno una forma logica (ma non un contenuto) esistenziale. E lo sono perché non sono altro che conseguenze logiche delle definizioni che introducono i concetti rilevanti: sono verità analitiche perché sono vere in base al loro significato, fissato da tali definizioni. Ma siamo certi che ogni questione esistenziale interna ammetta una risposta (entro la teoria rilevante)? Shapiro (2000a, pp. 131-133) suggerisce l’esempio dell’ultimo teorema di Fermat. Esso risponde a una questione esistenziale interna: esistono delle triple  $\{p, q, r\}$  di numeri naturali tali che, per un qualche numero naturale  $n$  maggiore di 2, valga che  $p^n + q^n = r^n$ ? Da qualche anno, grazie alla prova di Andrew Wiles (1995), sappiamo che la risposta è negativa. Ma quella prova impiega risorse che vanno ben oltre l’aritmetica. La questione è quindi interna o esterna? E, se è interna, la prova di Wiles ne fornisce una risposta appropriata? Il teorema provato da Wiles è una verità analitica, è vero in base al suo significato? Per rispondere positivamente a queste domande, chi volesse difendere le tesi di Carnap avrebbe due sole possibilità: *i*) ammettere che il significato di tale teorema dipende da un’amplissima famiglia di definizioni che non solo trascende i limiti dell’aritmetica ma che sarebbe anche difficile delimitare in generale; *ii*) ammettere che affrontando certe questioni sui numeri naturali in un contesto più ampio possiamo capire meglio ciò che dipende dal loro significato e è fissato dalle sole definizioni dell’aritmetica. Entrambe le opzioni appaiono implausibili. Difficoltà come questa non colpiscono tanto il logicismo e l’empirismo logico di Carnap nel loro insieme. Esse colpiscono la sua stessa distinzione fra esistenza esterna e interna. E questa è una delle ragioni per cui tale distinzione è spesso rigettata.

#### 4.2. Hilbert e la fondazione assiomatica delle geometria

Nei §§ 143-144 del secondo volume dei *Grundgesetze*, Frege discute le “definizioni

creatrici”: delle stipulazioni che introducono delle entità *ex novo* stabilendo che queste soddisfano certe condizioni. Egli fa due semplici esempi tratti dalle *Lezioni di aritmetica generale* di Otto Stolz (1885). Vediamo il secondo. Supponiamo che su un certo dominio di oggetti sia definita un’operazione commutativa  $*$  e che esso sia tale che, dati due suoi elementi  $a$  e  $b$ , non vi sia alcun elemento  $x$  tale che  $a * x = b$ . Allora, dice Stolz, possiamo introdurre tale elemento, riservando per esso un simbolo appropriato, diciamo ‘ $b\sim a$ ’, e stipulando che  $a * (b\sim a) = (b\sim a) * a = b$ ; ciò fatto, possiamo assegnare a  $b\sim a$  tutte le proprietà che vogliamo, a patto solo di evitare di cadere in contraddizione. Questo genere di definizioni sono comuni: si pensi al modo spesso impiegato per introdurre i numeri interi negativi a partire dai naturali: per ogni naturale  $n$ , l’intero negativo  $-n$  è introdotto stipulando che  $n + (-n) = -n + n = 0$ . Eppure la critica di Frege è spietata: l’unico modo per accertarsi che certe proprietà non sono mutualmente inconsistenti è di identificare un oggetto che le soddisfa tutte; le definizioni creatrici sono quindi legittime solo se sono inutili, ovvero solo se già disponiamo degli oggetti che esse sono supposte introdurre. Posto che una proprietà è per Frege ciò che fa sì che un oggetto cada sotto un certo concetto, e che i concetti si compongono fra loro, il suo argomento si basa su un principio generale che potremmo formulare così (Blanchette, 1996, p.328): il solo modo di mostrare la consistenza di un concetto è di esibire un oggetto che cade sotto di esso.

I due esempi considerati da Frege sono troppo semplici per esibire tutta la portata di questo principio. Essi riguardano entrambi delle definizioni che introducono nuovi oggetti sulla base di altri di cui già si suppone di disporre, ovvero conducono a delle estensioni di un dominio di oggetti già dato. È proprio così che Cantor e Dedekind definiscono i numeri reali: estendendo il dominio dei razionali tramite l’introduzione di nuovi numeri definiti come quei numeri che soddisfano certe condizioni che nessun razionale soddisfa. La critica precedente è una tra quelle che Frege muove contro una tale pratica. Il suo punto è tuttavia molto più generale e, per quanto non lo osservi esplicitamente, egli ne era certamente consapevole.

Quattro anni prima dell’apparizione del Volume II dei *Grundgesetze*, David Hilbert, forse il più autorevole matematico dell’epoca, aveva pubblicato un trattato il cui impatto sulla matematica, la filosofia della matematica, e la logica sarà enorme: le *Grundlagen der Geometrie* (1899). Il suo scopo è di suggerire un certo modo di intendere e fondare la geometria euclidea (mostrando fra l’altro i suoi legami con la geometria proiettiva). L’idea non era nuova: la geometria non tratta di oggetti spaziali soggetti a una qualche forma di intuizione, come Kant pensava e Frege continuava a credere; essa non tratta di oggetti dotati di proprietà intrinseche che li caratterizzano singolarmente, quanto piuttosto di una struttura relazionale che caratterizza i suoi elementi solo in quanto atti a soddisfare le condizioni che essa impone loro. Per fondare la geometria euclidea non è così né necessario né utile stabilire che cosa sia un punto o che cosa siano una retta e un piano euclidei. Si devono invece fissare assiomaticamente le condizioni che punti, rette e piani devono soddisfare perché essi posseggano le proprietà che in tale geometria vengono loro ascritte (i

cerchi sono definiti da Hilbert come luoghi di punti). Anche se ammettiamo che la geometria, per come è presentata da Euclide, abbia un contenuto intuitivo, questo è un'esemplificazione di un sistema di condizioni esprimibili in un linguaggio indipendente da quello impiegato per descriverlo. È proprio di tale sistema di condizioni che la geometria euclidea, se propriamente intesa, si deve occupare; non delle sue, pretese o reali, esemplificazioni intuitive.

Così intesa, la geometria euclidea è un sistema di conseguenze tratte da un numero finito di assiomi in cui intervengono termini primitivi che non sono definiti se non attraverso tali assiomi. In un senso, questi assiomi si comportano come la BLV di Frege: fissano condizioni che le entità denominate da certi termini devono soddisfare, senza dire null'altro di tali entità e senza richiamarsi a definizioni precedenti. Ma per Hilbert non si tratta solo di introdurre una certa entità entro un sistema di entità già definite in modo esplicito, e tanto meno si tratta di caratterizzare delle entità che possano, in un modo o nell'altro, pensarsi come logiche. Hilbert non si preoccupa di formalizzare il suo sistema oltre misura e per esporlo usa il linguaggio naturale. È tuttavia chiaro che i suoi assiomi, comunque riformulati, non possono evitare di impiegare un linguaggio neutrale, ovvero non propriamente geometrico, che deve essere preso come dato e perfettamente compreso. Possiamo pensare che questo linguaggio sia semplicemente quello di una logica soggiacente al suo sistema, ovvero includa solo le costanti logiche proprie a tale logica. Ma, quale che sia il sistema di logica entro cui si vogliono formulare gli assiomi rilevanti, tale linguaggio sarà insufficiente per farlo. Per questo si dovranno aggiungere nuovi elementi (in generale delle costanti non logiche) il cui significato è invece stabilito solo in base a tali assiomi. Fra essi non vi possono essere solo termini che denotano punti, rette o piani, o costanti predicative che denotano le proprietà di essere un punto, una retta, o un piano. Vi devono anche essere costanti predicative che denotano relazioni. Consideriamo per esempio l'assioma II.2: 'Se  $A$  e  $C$  sono punti distinti di una retta, allora esiste almeno un punto  $B$  che giace fra  $A$  e  $C$ , e almeno un punto  $D$  tale che  $C$  giace fra  $A$  e  $D$ '. Le parole 'se ...allora', 'e', 'distinti', 'esiste almeno un', 'che', 'tale che' fanno chiaramente parte del linguaggio neutrale soggiacente alla geometria. Ma questo non è certamente il caso per 'punto', 'essere di', 'retta', 'giace fra'. La cosa è meno chiara per ' $A$ ', ' $B$ ', ' $C$ ', ' $D$ '. Possiamo considerare queste come variabili, 'punto' e 'retta' come costanti predicative unarie, 'essere di' come una costante predicativa binaria, e 'giace fra' come una costante predicativa ternaria. L'assioma si scrive allora così, nel linguaggio della logica del primo ordine:

$$\forall x,y[[Pun(x) \wedge Pun(y) \wedge x \neq y \wedge \exists z[Ret(z) \wedge x \in z \wedge y \in z]] \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists v[Pun(v) \wedge v \in z \wedge Fra(x, v, y)] \wedge \exists w[Pun(w) \wedge w \in z \wedge Fra(x, y, w)]$$

I predicati  $Pun(-)$ , e  $Ret(-)$ ,  $\in$ , e  $Fra(-, -, -)$  sono qui delle costanti che acquisiscono un significato solo in quanto occorrono in questo e in altri assiomi del sistema. Esse e le altre costanti propriamente geometriche che intervengono negli assiomi di Hilbert non sono quindi definite separatamente (sia pure implicitamente), ciascuna da una singola stipulazione. Esse sono definite (implicitamente) tutte insieme, tramite diverse stipulazioni,

in ognuna delle quali possono intervenire più costanti che intervengono eventualmente anche in altre stipulazioni: esse sono definite come elementi di una struttura che tali stipulazioni caratterizzano nel suo insieme.

All'indomani della pubblicazione delle *Grundlagen der Geometrie* e prima di quella del secondo volume dei *Grundgesetze*, Frege (PMC, pp.39-65) intrattenne una fitta corrispondenza con Hilbert incentrata sulle definizioni implicite di quest'ultimo. Frege ne nega infatti la legittimità con argomenti che si richiamano a quello già visto a proposito delle definizioni di Stolz. Quest'argomento porta ora a concludere che gli assiomi di Hilbert non pervengono a definire opportunamente i concetti di punto, retta e piano, in quanto non assicurano l'esistenza degli oggetti corrispondenti. Non vi è quindi alcuna garanzia della consistenza del sistema che essi formano. Se disponiamo di questi oggetti indipendentemente da tali assiomi (per esempio grazie alle nostre intuizioni spaziali), allora, sembra dire Frege, possiamo assicurarci della consistenza di questi ultimi, ma essi sono inutili. Se non disponiamo di questi oggetti indipendentemente da tali assiomi nulla ci garantisce che questi siano consistenti.

Questo argomento non riguarda semplicemente gli assiomi di Hilbert e la pretesa che essi forniscano una fondazione della geometria euclidea. Quello che è più generalmente in gioco è ciò che Hilbert sostiene nel secondo capitolo del suo trattato, dedicato proprio a mostrare la consistenza e l'indipendenza dei suoi assiomi. Esso si apre con la seguente dichiarazione (Hilbert 1899, p. 34):

Gli assiomi [...] esposti nel primo capitolo non sono in contraddizione fra loro, cioè non è possibile dedurre da essi con inferenze logiche un fatto che contraddica uno di essi. Per far vedere questo, è sufficiente costruire una geometria dove [essi] sono soddisfatti [...]

Nel seguito del capitolo, Hilbert fornisce la prova di ciò costruendo tale geometria. Prova poi l'indipendenza di alcuni assiomi da altri, costruendo altre geometrie che soddisfano il sistema formato dai secondi e la negazione di primi. Hilbert sembra adottare il criterio seguente: se vi è un dominio di oggetti che soddisfa un certo sistema di assiomi (in termini moderni: se tale sistema di assiomi possiede un modello), allora esso è consistente. A prima vista, sembra che Hilbert concordi, *mutatis mutandis*, con il principio generale di Frege a proposito della consistenza dei concetti, o almeno che egli riconosca che la condizione stabilita in tale principio sia una condizione sufficiente di consistenza. Ma non è così.

Per vederlo, dobbiamo capire che cosa Hilbert intende dicendo che per dimostrare la consistenza dei suoi assiomi “è sufficiente costruire una geometria” che li soddisfi. Se tale geometria fosse quella di Euclide, la sua prova di consistenza renderebbe i suoi assiomi inutili, come sembra suggerire Frege. Ma l'articolo indeterminato davanti a ‘geometria’ suggerisce che non sia così. Qui Hilbert parla piuttosto di un dominio qualsiasi di oggetti che soddisfi gli assiomi e di cui si possa disporre in modo indipendente da questi. In particolare, nella sua prova di consistenza, egli considera il dominio  $\Omega$  dei “numeri algebrici” che si ottengono “partendo dal numero 1 ed applicando a esso un numero finito di volte le quattro operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione, e una quinta operazione  $\sqrt{(1+\omega^2)}$ , dove  $\omega$  rappresenta ogni volta un numero che sia già stato



ottenuto per mezzo di queste cinque operazioni” (1899, p. 34). Tutti tali numeri sono reali, ma essi non sono tutti i reali. Il modo in cui sono generati a partire da 1, permette tuttavia di definire su di essi le usuali operazioni definite sui reali e di mostrare che, come i reali, essi formano un corpo, ovvero soddisfano certe proprietà algebriche soddisfatte dall’insieme dei reali. L’idea di Hilbert è allora di interpretare su tale corpo le costanti definite implicitamente dai suoi assiomi e mostrare, tramite calcoli propri all’aritmetica di questo corpo, che questi assiomi valgono per una tale interpretazione. Un punto è per esempio interpretato come una coppia di elementi di  $\Omega$  e una retta come un’appropriata classe di equivalenza  $Cl(\langle p, q, r \rangle)$  di triple di tali elementi. Sotto questa interpretazione, un punto  $\langle p, q \rangle$  è poi considerato appartenere alla retta  $Cl(\langle r, s, t \rangle)$  se e solo se  $rp + sq + t = 0$ .

In tal modo la consistenza degli assiomi geometrici di Hilbert è provata solo a condizione che l’aritmetica del corpo  $\Omega$  sia supposta consistente. Hilbert dà per scontato che lo sia. Ma non è questo che Frege gli rimprovera. Egli gli rimprovera piuttosto che una tale prova non permette di escludere che un’analisi più approfondita dei concetti di punto, retta e piano faccia emergere contraddizioni che i suoi assiomi non rivelano. La prova mostra che tali assiomi ammettono un’interpretazione: che vi è un dominio di oggetti, assunti come esistenti, che soddisfa la struttura relazionale che essi descrivono. Ma non stabilisce che tale struttura sia soddisfatta dai punti, le rette e i piani della geometria euclidea. La differenza fra Hilbert e Frege sta qui. Per il primo la geometria euclidea non è altro che la teoria di tale struttura. Per il secondo, essa non può essere invece che la teoria di tali oggetti, e è solo mostrando che essi (e non altri oggetti) soddisfano gli assiomi della struttura che si mostra la consistenza degli assiomi (Blanchette, 1996, p. 330).

La differenza fra Frege e Hilbert è allora quella che distingue chi pensa che la matematica tratti di oggetti dotati di una natura particolare che è loro intrinseca e che fa di essi, per esempio, dei numeri naturali o delle rette euclidee, e chi pensa invece che essa tratti solo di strutture relazionali che possono essere esemplificate da certi domini di oggetti, ma che sono, come tali, indipendenti da questi. I primi sono certamente dei platonisti, come lo è Frege, tanto in aritmetica quanto in geometria; per Frege, tanto l’una che l’altra descrivono oggetti; la differenza è che mentre gli oggetti dell’aritmetica sono logici e possiamo quindi conoscerli tramite ragionamenti analitici, quelli della geometria sono spaziali e possiamo quindi conoscerli solo tramite l’intuizione. Ma anche i secondi potrebbero dirsi platonisti, a condizione di pensare che gli oggetti descritti dalla matematica non sono null’altro che le entità descritte da appropriate strutture, ovvero mere posizioni in tali strutture. Questa idea è per esempio difesa oggi da Stewart Shapiro (cf. §V.3). Qui è solo necessario osservare che, per chiarire questo punto, Hilbert non ritiene improprio parlare di verità degli assiomi e di esistenza di ciò che essi definiscono implicitamente. In una lettera a Frege (29 dicembre 1899) egli si esprime così (Frege, PMC, p. 51):

Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi. Questo è per me il criterio della verità e dell’esistenza.

Ovviamente si tratta di un modo di parlare di verità e esistenza che Frege non poteva

ammettere. Qualcuno potrebbe vedervi un'idea vicina a quelle di esistenza interna di Carnap, ma le differenze fra le concezioni filosofiche di Hilbert e Carnap consigliano prudenza in questo accostamento.

#### 4.3 Hilbert, il programma formalista e l'emergenza della metamatematica

Resta il fatto che la dimostrazione di consistenza di Hilbert richiede l'ammissione della consistenza dell'aritmetica di  $\Omega$ . Questa segue banalmente dalla consistenza della teoria dei reali, posto che  $\Omega$  è un sotto-corpo del corpo dei reali. Ma non è difficile mostrare che tanto l'aritmetica di  $\Omega$ , quanto la teoria dei reali sono consistenti se lo è l'aritmetica dei naturali. La fondazione della geometria euclidea proposta da Hilbert è quindi appropriata solo se l'aritmetica dei naturali è consistente. Ma come accertarsi che sia così? Se fosse andato a buon fine, il programma di Frege avrebbe, al di là di tutte le sue implicazioni filosofiche, fornito un argomento solido a questo riguardo. Il suo fallimento lascia il problema aperto. E questo problema non è risolto dalla riformulazione del logicismo di Russell e Carnap. Si potrebbe pensare che le *Gundlagen* di Hilbert suggeriscano un altro modo per risolverlo. Basterebbe concepire gli assiomi di Peano come Hilbert concepisce i propri (ciò che, *mutatis mutandis*, aveva d'altra parte fatto lo stesso Peano), ovvero come definizioni implicite della struttura numeri naturali, e mostrarne la consistenza interpretandoli su di un dominio di oggetti di cui si disponga in modo indipendente. Il modo più ovvio per farlo è di usare modelli insiemistici come quelli proposti da Zermelo e von Neumann. Ma ciò non solo si limita a spostare il problema, ma lo sposta nella direzione sbagliata, posto che gli assiomi di ZFC sono assai meno elementari di quelli di Peano.

È lo stesso Hilbert a proporre una nuova strategia, in una serie di articoli pubblicati a partire dal 1922, spesso in collaborazione con Paul Bernays, suo assistente a Göttingen e autore di numerosi articoli finalizzati alla realizzazione dello stesso programma<sup>37</sup>. Si tratta di riprendere un'idea già presente nel trattato del 1899, implementandola in modo diverso. La prova di consistenza presentata in (1899) non richiede solo l'ammissione della consistenza dell'aritmetica di  $\Omega$ . Richiede anche di disporre di una terza teoria che tratti delle relazioni fra gli assiomi della geometria e quest'ultima aritmetica. Nel 1899, Hilbert presenta la sua prova in modo del tutto informale e, così facendo, sottace il problema relativo alla natura e alla legittimità di tale teoria. In quanto tratta delle relazioni fra due teorie matematiche, essa è una teoria metamatematica. La nuova idea di Hilbert è di cercare una forma di metamatematica atta a fornire una prova di consistenza non più relativa, ovvero che non dipenda dall'assunzione della consistenza di una teoria matematica indipendente ma ugualmente soggetta al dubbio di inconsistenza.

Il cuore del suo programma sta nell'identificazione di una modalità di dimostrazione

---

<sup>37</sup>Per alcuni fra gli articoli di Hilbert e Bernays, cf. Hilbert (GA), vol. III. Per traduzioni in antologie, cf. van Heijenoort (1967), Largeault (1992), Ewald (1996), Mancosu (1998). La versione più matura della proposta fondazionale di Hilbert e Bernays s'è esposta in Hilbert e Bernays (1934-1939). Molte delle cose che diremo nel seguito si adattano male alle idee presentate in questo testo, dove la matematica finitista è presentata come una teoria formale. Qui rimarremo più fedeli alle prime versioni di tale proposta. La differenza fra i due approcci dipende in larga parte da una trasformazione nella concezione dell'intuizione che sarebbe all'opera nella matematica finitista. Su questo, cf. Mancosu (1998), pp. 149-188. Sul programma di Hilbert, cf. Detlefsen (1986) e Giaquinto (1983).

matematica che assicura una totale certezza delle conclusioni in quanto riguarda oggetti immediatamente accessibili che si presentano a noi manifestando quelle proprietà cui si richiama la dimostrazione stessa. Tale modalità di dimostrazione è per Hilbert all'opera in una parte dell'aritmetica che egli qualifica come 'finitista'. Questa non dipende per lui dalla stipulazione di assiomi, ma si serve soltanto dell'intuizione di certe configurazioni di segni. I suoi oggetti non sono quindi propriamente definiti, ma piuttosto esibiti. Ecco come Hilbert propone di farlo (1922, p.163):

Il segno 1 è un numero. Un segno che comincia per 1 e finisce per 1, in modo tale che, nell'intervallo, + segue sempre 1 e 1 segue sempre + è ugualmente un numero. Per esempio, i segni 1+1, 1+1+1 sono dei numeri.

Questi segni non stanno per i numeri naturali, ma sono i numeri naturali. Essi non sono quindi simboli o espressioni di qualcosa. Sono, in quanto tali, ciò di cui l'aritmetica finitista tratta. A essi si affiancano altri tipi di segni: alcuni, come '2' o '3', "denotano" dei numeri particolari, ovvero sono delle "abbreviazioni" di questi; altri come '=' e '<' servono a "comunicare asserzioni"; e altri ancora, come 'a' e 'b', stanno per numeri indeterminati<sup>38</sup>.

Impiegando questo linguaggio minimale è possibile condurre delle dimostrazioni. Eccone una, che Hilbert presenta come esempio. Consideriamo due numeri qualsiasi **a** e **b** distinti fra loro. Uno di essi sarà allora una parte dell'altro, così come 1+1 è per esempio una parte di 1+1+1. Supponiamo che **a** sia una parte di **b**, ciò che si può comunicare scrivendo '**b** > **a**'. Vi sarà allora un numero **c** tale che **b** non è altro che **a** + **c**, ciò che si può comunicare scrivendo '**b** = **a** + **c**'. Asserire che **a** + **a** + **c** = **a** + **c** + **a** è allora lo stesso che asserire che **a** + **b** = **b** + **a**. Ne segue che **a** + **b** = **b** + **a** se e solo se **a** + **c** = **c** + **a**. Ma **c** è per ipotesi contenuto in **b**, così come lo è **a**. Quindi continuando così, in un numero finito di passi, si arriverà a stabilire che **a** + **b** = **b** + **a** se e solo se **d** + **d** = **d** + **d**, per qualche numero **d**. Siccome è certo che **d** + **d** = **d** + **d**, ciò prova che **a** + **b** = **b** + **a**, quali che siano i numeri **a** e **b**.

Questa prova non usa assiomi, e usa delle regole deduttive che appaiono ovvie, così come ovvie appaiono le conclusioni tratte nei suoi passi successivi. Tale ovvietà dipende dal fatto che la prova riguarda un contenuto preciso: segni quali 1+1 o 1+1+1. Essa è quindi certa perché, come si usa dire, è contentuale. Tratta di oggetti esibiti e dati come tali, piuttosto che di oggetti in quanto soddisfano certe condizioni: "oggetti extralogici concreti, che sono intuiti come esperienze immediate, anteriori ad ogni attività di pensiero" (1926, p. 72). L'ispirazione kantiana di questo passaggio è chiara. E lo è ancora di più se si osserva che i numeri 1, 1+1, 1+1+1, etc. non possono essere dei *token*, ma devono essere dei *type*: è chiaro che ognuno di essi ha diverse occorrenze che sono appunto occorrenze dello stesso segno. L'aggettivo 'concreto', riferito a tali oggetti non va quindi inteso nel senso usuale, per cui nessun *type* potrebbe essere concreto, ma piuttosto in un senso diverso, tale da ammettere la possibilità che un *type* sia concreto se sta in una appropriata relazione con i suoi *tokens*<sup>39</sup>. Non è quindi solo l'intuizione sensibile che è qui in gioco, ma anche quella

<sup>38</sup>Hilbert non usa virgolette per nessuno dei suoi segni. Le introduciamo qui quando richiesto dalle convenzioni oggi generalmente accettate.

<sup>39</sup>Secondo la terminologia di Parsons (1998), p. 252, e (2008), pp. 241-242), questo significa che 'concreto' deve

pura.

Ciò è ancora più chiaro se si osserva che, per quanto contentuali, la prova precedente e il teorema che essa stabilisce riguardano un'infinità di numeri, dal momento che valgono quali che siano i numeri **a** e **b**. Questo loro carattere infinitario è però essenzialmente differente da quello di teoremi quali 'vi sono infiniti numeri primi'. Il teorema che Hilbert prova contentualmente è uno schema di teoremi, ognuno dei quali (per esempio ' $7 + 5 = 5 + 7$ ') può essere verificato tramite una computazione finita. Esso è quindi parte, secondo Hilbert, dell'aritmetica finitista. Questo non è il caso del teorema sui numeri primi, che non è quindi parte di tale aritmetica. Anche quest'ultimo si può provare facilmente, come fa Euclide nella proposizione XX del nono libro degli *Elementi*. Sia  $p$  un numero primo e sia  $P$  il prodotto di tutti i numeri primi minori o uguali a  $p$ . Allora  $P+1$  non è divisibile per nessuno di tali numeri. Quindi o esso è primo o ha un divisore primo maggiore di  $p$ . Quindi, quale che sia  $p$ , esso non può essere il maggiore dei numeri primi. Questa prova è semplice. Ma non è contentuale. Si richiama a proprietà dei numeri naturali che non derivano immediatamente dalla loro esibizione in quanto segni quali  $1+1$  o  $1+1+1$ , e che possono venir fissate solo tramite un sistema di assiomi.

La differenza fra l'aritmetica finitista che impiega solo dimostrazioni contentuali, e una teoria matematica che si fonda su assiomi ha per Hilbert una conseguenza cruciale: in quanto tratta di oggetti dati come tali, la prima non può che condurre alla dimostrazione di asserti veri a proposito di tali oggetti, e quindi non può generare contraddizioni. L'idea di Hilbert è allora quella di servirsi di metodi di prova contentuali (e quindi finitisti) che integrino tale aritmetica per provare la consistenza delle teorie della parte restante della matematica. Quest'ultima deriva dall'introduzione di "elementi ideali", entità astratte che non sono esibite, ma solo caratterizzate tramite appropriate stipulazioni. Queste stipulazioni devono essere formulate tramite l'impiego di un linguaggio formale perfettamente codificato, dando luogo a teorie assiomatiche formali, in cui una prova non è altro che una successione di formule ben formate che seguono l'una dall'altra secondo regole esplicite. Tali teorie formali non si identificano con la matematica corrente, ma ne sono una riformulazione sotto forma di sistemi di segni. Questi sistemi possono essere studiati contentualmente da un'appropriata metamatematica finitista; e tramite tale studio è possibile stabilire se essi sono consistenti. Se lo sono, e se essi derivano da una riformulazione corretta della matematica effettiva, allora quest'ultima è a sua volta consistente. Il cosiddetto formalismo di Hilbert è quindi il programma che mira a riformulare la matematica effettiva in termini di teorie formali che possano essere oggetto di prove contentuali di consistenza. Tali teorie (ma non la matematica di cui essi costituiscono una riformulazione) non hanno contenuto. Sono puri giochi deduttivi, in cui il significato di ogni elemento si riduce alle regole che presiedono alla sua partecipazione a tali giochi. Ma essi forniscono il contenuto di una metamatematica finitista e contentuale (e quindi certamente consistente) che, provando la loro consistenza, assegna verità ai loro

---

qui essere inteso come sinonimo di 'quasi-concreto. Cf. §V.4)

teoremi e esistenza alle entità ideali corrispondenti.

La realizzazione di tale programma è difficile: tanto difficile che Hilbert stesso si limita a fornirne esempi, confidando in successi futuri. L'obiettivo che persegue è tuttavia chiaro. La matematica ideale deve essere soggetta al seguente vincolo di conservatività rispetto all'aritmetica finitista (Shapiro 2000a, pp. 163-164): se  $\tau$  è la formalizzazione assiomatica di una teoria matematica ideale e  $\tau^*$  è un qualsiasi asserto del linguaggio dell'aritmetica finitista, allora in  $\tau$  deve essere possibile provare una riformulazione  $\tau^*$  di  $\tau$  nel linguaggio di  $\tau$  solo se  $\tau^*$  è vero. Ne segue che la matematica ideale deve essere tale che se  $\tau$ ,  $\tau$  e  $\tau^*$  sono come sopra, allora  $\tau^*$  è un teorema di  $\tau$  solo se  $\tau^*$  è vero. Ma è naturale richiedere che una teoria della matematica includa (o possa essere estesa in modo da includere) l'aritmetica ideale, e sia quindi tale che nel linguaggio di una sua formalizzazione assiomatica sia possibile riformulare ogni asserto del linguaggio dell'aritmetica finitista (o che tale linguaggio possa essere esteso in modo tale che questo sia possibile). È allora ovvio richiedere che se  $\tau^*$  è una verità dell'aritmetica finitista, allora vi sia un teorema  $\tau^*$  di  $\tau$  che è una riformulazione di  $\tau^*$  nel linguaggio di tale teoria. Ciò posto, si può ragionare come segue. Immaginiamo che  $\tau$  non sia conservativa rispetto all'aritmetica finitista, ovvero che vi sia una verità  $\tau^*$  dell'aritmetica finitista tale che la negazione  $\neg\tau^*$  della sua riformulazione  $\tau^*$  nel linguaggio di  $\tau$  sia un teorema di  $\tau$ . Allora sia  $\tau^*$  che  $\neg\tau^*$  sono dei teoremi di  $\tau$ , e quindi  $\tau$  è inconsistente. D'altra parte, se  $\tau$  è inconsistente, allora ogni asserto del suo linguaggio è un teorema di  $\tau$  e quindi vi è certamente un teorema di  $\tau$  che è la riformulazione di un asserto falso formulato nel linguaggio dell'aritmetica finitista. Quindi  $\tau$  non è conservativa rispetto all'aritmetica finitista. Ne segue che una formalizzazione assiomatica  $\tau$  di una teoria matematica ideale è consistente se e solo se è conservativa rispetto all'aritmetica finitista. La prova di consistenza si riduce quindi alla prova di conservatività: si deve provare che in  $\tau$  non si possa dimostrare la riformulazione di nessun asserto falso del linguaggio dell'aritmetica finitista. Consideriamo allora una qualsiasi verità di tale aritmetica. Per esempio '1=1'. Per provare che  $\tau$  è consistente, basta provare (in modo finitista) che la riformulazione della negazione '1≠1' di tale verità non è un teorema di  $\tau$ , ovvero che non vi è alcuna successione  $\alpha$  di asserti del linguaggio di  $\tau$  che seguono dagli assiomi di  $\tau$  l'ultimo dei quali sia tale riformulazione.

#### 4.4 I teoremi di Gödel

Le speranze di trovare una prova di consistenza di una parte significativa della matematica ideale che includa l'aritmetica ideale seguendo il percorso indicato da Hilbert trovano un ostacolo che molti ritengono insormontabile nei due teoremi di incompletezza di Gödel (1931). L'importanza di tali teoremi ha fatto proliferare moltissime esposizioni che ne rendono conto a diversi livelli di tecnicità e precisione. Il lettore interessato potrà rivolgersi per esempio a Nagel e Newman (1992), Smullyan (1992), Smith (2007), Berto (2008). Qui basterà un rapido cenno (basato su Shapiro, 2000a, pp. 165-168). Supponiamo che  $\tau$  sia una teoria formale sufficientemente forte da contenere una parte significativa dell'aritmetica

ideale (opportunamente riformulata). Supponiamo anche che  $\tau$  sia effettiva, ovvero sia tale che vi è un algoritmo atto a determinare se una certa sequenza di simboli del suo linguaggio è un formula ben formata, e se una certa sequenza di formule ben formate è una dimostrazione<sup>40</sup>. Sembra ovvio ammettere che il ruolo assegnato da Hilbert alle riformulazioni delle teorie della matematica reale possa essere svolto solo da teorie come  $\tau$ . I teoremi di Gödel stabiliscono due limitazioni decisive per tali teorie.

Il primo di tali teoremi stabilisce che vi è un asserto  $\gamma^*$  del linguaggio di  $\tau$  che è una riformulazione di un asserto  $\gamma$  del linguaggio dell'aritmetica finitista e che è tale che se  $\tau$  è consistente allora né  $\gamma^*$  né la sua negazione sono teoremi di  $\tau$ <sup>41</sup>. La prova di tale teorema consiste nell'enunciazione effettiva di  $\gamma^*$ . Essa è quindi indipendente dalla matematica ideale. Ora, se interpretato in modo standard,  $\gamma^*$  asserisce che  $\gamma^*$  stesso non è provabile in  $\tau$ . Quindi, se  $\tau$  è consistente, allora  $\gamma^*$  è vero per questa interpretazione, ma non è provabile. Non solo, Gödel mostra anche che la prova del suo primo teorema è riproducibile in  $\tau$  e che, sotto opportune condizioni restrittive, è possibile provare in  $\tau$  un asserto che asserisce che se  $\tau$  è consistente allora  $\gamma^*$ . Supponiamo che  $\tau$  sia consistente e che si possa provare che sia così nella stessa  $\tau$ . Ne seguirebbe che in  $\tau$  si può provare  $\gamma^*$ , contro quanto stabilito dal primo teorema. Quindi, se  $\tau$  è consistente in  $\tau$  non si può provare che lo sia. Questo è il secondo teorema. Ma abbiamo supposto che  $\tau$  contenga una parte significativa dell'aritmetica ideale.  $\tau$  deve quindi contenere una riformulazione dell'aritmetica finitista (contenuta in ogni parte significativa dell'aritmetica ideale). Quindi se  $\tau$  è consistente non è possibile provare che lo è impiegando l'aritmetica finitista, così come richiede il programma di Hilbert.

Si possono immaginare dei modi per superare l'ostacolo posto da questi due teoremi e proseguire il programma di Hilbert dopo averlo opportunamente emendato. Alcuni sono assai tecnici (Gentzen, 1936, 1938). Uno, discusso da Detlefsen (1986), si basa invece sull'idea che l'aritmetica finitista sia intrinsecamente informale e nessuna sua riformulazione possa quindi essere contenuta, in una teoria formale come  $\tau$ . Al di là di questo, resta il fatto che il programma di Hilbert non ha condotto a nessuna prova unanimemente ritenuta soddisfacente della consistenza dell'aritmetica. Ha però suggerito tanto un modo di pensare la matematica, quanto un modo di provare teoremi sulla matematica (oggi studiato della cosiddetta teoria della dimostrazione) che sono oggi protagonisti fondamentali del dibattito in filosofia della matematica.

#### 4.5 *La strategia intuizionista*

Tanto il programma logicista (sia nella versione di Frege che in quelle di Russell e Carnap) che il programma formalista mirano a fornire una giustificazione di alcune teorie matematiche (eventualmente di tutte), prese in tutta la loro estensione, senza provare a domandarsi se parti di tali teorie siano ben fondate e altre parti non lo siano (per Hilbert le

<sup>40</sup>Oggi sappiamo, proprio grazie ai teoremi di Gödel, che questo esclude la possibilità che  $\tau$  sia è una teoria del secondo ordine che soddisfi altri requisiti generalmente richiesti per una buona teoria matematica.

<sup>41</sup>Gödel prova in realtà un teorema leggermente più debole di questo. La versione più forte che abbiamo appena enunciato è provata da John Barkley Rosser (1936).

ragioni che giustificano l'aritmetica finitista sono distinte da quelle che dovrebbero giustificare quella ideale; ma lo scopo di fondare l'aritmetica non è per lui raggiunto che a condizione di aver fornito una giustificazione per la totalità di quest'ultima). Questo non è il punto di vista difeso da Luitzen Egbertus Jan Brouwer in una serie di lavori pubblicati nell'arco della prima metà del XX secolo<sup>42</sup>. Secondo Brouwer, molti degli argomenti solitamente impiegati in matematica sono indissolubilmente legati alla supposizione che vi siano oggetti matematici la cui esistenza non dipende in alcun modo dall'attività di un soggetto, e che la verità degli asserti che vertono su di essi sia altrettanto indipendente dai soggetti che li asseriscono. Se si abbandona questa presupposizione, anche gli argomenti che si basano su di essa devono essere rigettati, come pure i risultati provati per loro tramite. Questo rende illegittima e ingiustificabile buona parte della matematica generalmente accettata.

Le idee di Brouwer sono alla base di un orientamento filosofico tuttora abbastanza diffuso, detto 'intuizionismo' in ragione del ruolo fondamentale assegnato all'intuizione. Secondo Brouwer la matematica deriva da una libera attività mentale, completamente governata dall'intuizione pura del tempo, intesa come un'esperienza interna primaria e fondamentale. Se il riferimento a Kant è esplicito, altrettanto esplicito è il rifiuto dell'apriorità dello spazio e quindi del ruolo fondatore dell'intuizione pura in quanto intuizione della forma del senso esterno. La geometria, o meglio le diverse geometrie, sono così per Brouwer, come l'aritmetica e l'analisi, il risultato di costruzioni mentali che trovano il loro fondamento ultimo nell'intuizione pura del tempo e, in particolare, nell'intuizione della "diade pura". Ecco come si esprime Brouwer (1912, p. 85):

Per quanto apparentemente indebolita dagli sviluppi matematici [...] [della seconda metà del XIX secolo], la posizione intuizionista ha potuto riprendersi abbandonando l'apriorità kantiana dello spazio ma mantenendo ancora più fermamente l'apriorità del tempo. Questo neo-intuizionismo considera la dissociazione di istanti vissuti in parti qualitativamente distinte, che non si riuniscono che rimanendo separate dal tempo, come il fenomeno fondamentale dell'intelletto umano, il quale, per astrazione dal suo contenuto emozionale, dà luogo al fenomeno fondamentale del pensiero matematico, l'intuizione della diade pura.

Questa intuizione dà immediatamente origine ai numeri naturali finiti (intesi come ordinali) e, per iterazione indefinita, dà luogo all'intuizione del continuo lineare e da qui, tramite costruzioni mentali opportune, a tutta la matematica.

Il continuo di cui parla Brouwer non coincide tuttavia con quello abituale dato dall'insieme dei numeri reali. A partire dall'intuizione della diade pura, la matematica si genera infatti per costruzioni mentali successive sempre governate dall'intuizione interna, e non vi è quindi spazio in essa per la supposizione di totalità infinite i cui elementi non siano supposti generati passo a passo secondo una procedura appropriata. Questa concezione potrebbe essere considerata oscura, e in parte lo è. Brouwer non si limita comunque a esporla in generale. Egli critica argomentazioni matematiche particolari che non ritiene conformi a questo ideale, e ne propone di alternative, così da dar luogo a una nuova

---

<sup>42</sup>Per i testi originali di Brouwer (con traduzione in inglese dei testi in olandese) cf. Brouwer (CW). Traduzioni si trovano in molte antologie (cf. cap. II, n.37). Fra i numerosi studi su Brouwer, cf. Stigt (1990), van Dalen (1999-2005) e van Atten (2004).

matematica (la matematica intuizionista) la cui certezza è garantita dalla sua origine intuitiva, ovvero dal suo essere dovuta a un'attività mentale completamente controllata. Un esempio è dato dal continuo dei numeri reali di Brouwer, essenzialmente diverso da quello classico. Per Brouwer, un numero reale si identifica con una sequenza infinita di numeri naturali ognuno dei quali è computato in base a un algoritmo o è scelto arbitrariamente. Ma nel secondo caso, le sole informazioni sul numero reale in questione che possono venir impiegate in una prova riguardano una sequenza iniziale, effettivamente ottenuta, della sequenza rilevante. Per tale continuo valgono molti risultati che non valgono per quello classico e viceversa. La matematica intuizionista include comunque ampie porzioni di matematica classica, anche di quella che Hilbert considera ideale. La loro giustificazione non è tuttavia fatta discendere dalla consistenza di appropriati sistemi assiomatici, quanto piuttosto dall'attività introspettiva che ne garantisce la costruibilità. Si noti che si tratta proprio di costruibilità, e non di costruzione effettiva. Come già aveva fatto Poincaré (1900, 1902, 1906) — a cui Brouwer stesso si richiama come a uno dei padri fondatori dell'intuizionismo — Brouwer ammette infatti una facoltà (che Poincaré aveva chiamato 'potenza della mente [*esprit*] umana') capace di garantire la ripetibilità indefinita di certi atti mentali. Non solo: egli ammette la facoltà di identificare in generale dei processi costruttivi legittimi anche se non realizzati (e presumibilmente non realizzabili) effettivamente.

Non è ovviamente possibile descrivere qui la matematica intuizionista neppure a grandi linee. Basti osservare che gli strali di Brouwer si abbattono principalmente sull'impiego della legge del terzo escluso e di tutte le inferenze a essa connesse. Per ogni asserto ' $a$ ', tale legge asserisce che è il caso che  $a$  o che non  $a$ . Un'immediata conseguenza di tale legge è la legge di eliminazione della doppia negazione che asserisce, ancora per ogni asserto ' $a$ ', che la negazione della negazione di ' $a$ ' è equivalente a ' $a$ ', e è impiegata in alcune dimostrazioni per assurdo in cui, per provare ' $a$ ', si prova che la sua negazione conduce a contraddizione. In questo modo si può provare che vi è un oggetto di un certo genere che gode di una certa proprietà provando che l'asserto che asserisce che ogni oggetto di questo genere non gode di tale proprietà conduce a contraddizione e deve quindi essere negato<sup>43</sup>. Brouwer non pensa che la legge del terzo escluso e le inferenze che seguono da essa non ammettano alcuna esemplificazione legittima. Per esempio, egli accetta che ogni numero naturale, per quanto grande, sia primo o non primo. La ragione è che, almeno in linea di principio, una delle due ipotesi può essere verificata tramite un calcolo effettivo, ciò che per lui equivale a una costruzione. Lo stesso vale per le asserzioni di esistenza: per giustificarle è necessario e sufficiente realizzare, o almeno identificare, una costruzione effettiva degli oggetti rilevanti. Siccome questo è il caso per i numeri naturali, la loro esistenza è quindi per Brouwer certa e stabilita *a priori*. Essi sono ovviamente oggetti astratti e sono perfettamente descritti dai teoremi legittimamente stabiliti che ne trattano, che sono quindi

<sup>43</sup>Ammettiamo che le variabili varino sugli oggetti del genere considerato. Allora se si vuole provare l'asserto ' $\exists xP(x)$ ', per qualche proprietà  $P$ , si prova che la negazione di tale asserto, ovvero ' $\neg\exists xP(x)$ ' (che è equivalente a ' $\forall x\neg P(x)$ '), conduce a contraddizione, in modo da poter dedurre, per *modus tollens*, ' $\neg\neg\exists xP(x)$ ' (o ' $\neg\neg\forall x\neg P(x)$ '), e da qui passare all'asserto voluto per eliminazione della doppia negazione.



veri. Ma tutto questo dipende dall'attività umana: ciò che esiste e ciò che è vero in matematica è tutto e solo ciò a cui tale attività permette (almeno in linea di principio) di accedere tramite un processo intuitivamente garantito.

Si comprenderà che Brouwer rigetta ogni identificazione della matematica con dei sistemi linguistici sottomessi a regole logiche. Non solo la matematica non si può ridurre alla logica, ma non si può neppure riformulare usando sistemi formali. Il linguaggio è solo un mezzo per comunicare, e in matematica esso deve essere impiegato solo per comunicare gli esiti di certe esperienze interne, favorendo la loro ripetizione in altri soggetti. La logica non è poi che un modo per descrivere come si perviene a tali esiti, e non può garantire nessuna inferenza, e, *a fortiori*, nessuna costruzione mentale.

Nonostante questo rifiuto di principio a concedere ogni ruolo attivo del linguaggio e della logica in matematica, le idee di Brouwer suggerirono al suo studente Arend Heyting (1930, 1956) la possibilità di edificare un sistema di logica proposizionale e predicativa intuizionista corredato da un'appropriata semantica, che interpreta gli asserti rilevanti come asserzioni relative alla disponibilità di certe prove. L'asserto ' $a \vee \neg a$ ' non è ovviamente un teorema di tale logica e, se interpretato secondo la semantica corrispondente, asserisce la disponibilità di una prova di ' $a$ ' oppure di ' $\neg a$ '. La sua verità dipende quindi dalla natura di ' $a$ ' e, eventualmente, dai progressi della matematica (intuizionista). Analogamente, da una prova che la negazione di un asserto ' $a$ ' conduce a contraddizione segue (assunta la consistenza del sistema) che ' $\neg a$ ' non è un teorema, ma non che lo è ' $a$ ', visto che tale prova non fornisce una prova di quest'ultimo asserto.

Gli sviluppi successivi dell'intuizionismo sono principalmente legati al sistema di Heyting o a suoi derivati. A fianco dei contributi più tecnici si assiste oggi anche a una ripresa delle idee filosofiche di Brouwer a proposito del modo di intendere la matematica, la sua ontologia e la sua epistemologia. In questo contesto, tali idee sono spesso associate all'interpretazione fenomenologica della matematica e della sua ontologia promossa da Edmund Husserl<sup>44</sup>. Si tratta di temi certamente legati a quelli discussi nel nostro libro ma che, per ovvie ragioni di spazio, siamo costretti a sacrificare.

## **5 Il platonismo di Gödel e l'avvento dell'intuizione matematica**

Se l'intuizionismo è sopravvissuto alle difficoltà che hanno colpito logicismo e formalismo è perché ha preso questi programmi in contropiede, negando *d'emblée* che la logica (comunque intesa) possa fornire una giustificazione di qualche parte della matematica e perfino fornire gli oggetti dell'aritmetica, come sostenuto dai logicisti, o possa almeno servire a formulare tali teorie in modo da rendere possibile una prova di consistenza, come sostenuto da Hilbert. Negato alla logica ogni ruolo fondazionale, Brouwer torna a Kant, cercando nell'intuizione pura la garanzia ultima dell'edificio matematico. Una mossa simile è compiuta da Gödel. La nozione di intuizione di Gödel è tuttavia essenzialmente distinta da quella di Brouwer. Quest'ultimo propone di emendare il kantismo scartando quella

<sup>44</sup>Su questo, cf. Tieszen (2005) e van Atten (2006). Sulla filosofia della matematica di Husserl, cf. Tieszen (1995) e Haddock e Hill (2000).

modalità dell'intuizione pura che per Kant è rivolta verso l'esterno del soggetto; Gödel crede necessario andare al di là di Kant ammettendo una forma di intuizione non sensibile, ma tuttavia atta a rendere possibile l'accesso a oggetti e/o verità cui non potremmo accedere né guardando all'interno di noi, come pensava Brouwer, né ammettendo la ripetibilità di alcuni atti mentali, come pensava Poincaré (parlando anch'egli di intuizione). L'intuizione matematica è quindi per Gödel pura, ma non è costitutiva né di oggetti né di verità.

L'interesse di Gödel per la filosofia (non solo quella della matematica e dalla logica) perdura per tutta la sua vita e è testimoniato da molte note, in parte pubblicate postume nel terzo volume delle sue opere (CW), e in parte conservate all'università di Princeton, dove egli insegnò a partire dal 1940. Queste note stanno attirando l'attenzione di molti studiosi e sembrano indicare legami molto forti con le idee di Kant e, verso la fine della sua vita, anche con quelle di Husserl (cf. Føllesdal, 1995; Tieszen 1992, 2005; van Atten e Kennedy 2003). Alcuni (Cassou-Nogues, 2005) hanno identificato in questi documenti un progressivo indebolimento delle tesi platoniste sostenute nei due principali lavori espressamente filosofici che Gödel ha pubblicato durante la sua vita (1944; 1947-1964). L'influenza di questi articoli sul dibattito successivo è così grande che molti, considerando fallito il platonismo logicista di Frege, riconoscono in Gödel l'esempio archetipico del platonista.

Il primo di questi articoli è espressamente dedicato a una discussione del logicismo di Russell e in particolare allo sforzo compiuto da questi e da Whitehead nei *Principia Mathematica* per attenersi al principio del circolo vizioso evitando ogni tipo di definizione impredicativa. Abbiamo già visto che tale sforzo non sembra giustificato se, con Carnap, si pensa la matematica come un puro *framework* linguistico. Ma non lo è neppure se si pensa che essa tratti di oggetti già dati che le nostre definizioni non fanno che descrivere. Questa è appunto la posizione difesa da Gödel, che ritiene che il principio del circolo vizioso sia plausibile solo se si ammette “un punto di vista costruttivista [...] verso gli oggetti della logica e della matematica”, ovvero se si suppone che “le entità coinvolte [nelle definizioni] sono costruite da noi” (1944, p. 132-133). Ecco come egli continua (*ib.*; qui Gödel si richiama a Ramsey, 1926):

Se, tuttavia, si tratta di oggetti che esistono indipendentemente da nostre costruzioni, in fin dei conti non c'è nulla di assurdo nell'esistenza di totalità contenenti elementi che possono essere descritti (ossia caratterizzati univocamente) solo riferendosi a queste totalità.

Se si adotta un tale punto di vista, le definizioni impredicative manifestano al più un limite delle nostre capacità epistemiche.

Il punto di vista costruttivista a cui Gödel si oppone non si identifica con quello, assai più particolare, di Brouwer, anche se spesso si parla di costruttivismo per riferirsi proprio a quest'ultimo. Per esemplificare il primo, Gödel si richiama alla *no-class theory* di Russell e Whitehead. Essa manifesta infatti chiaramente l'idea che la matematica tratti solo di costruzioni logiche realizzate a partire da certi dati presi come immediati. Gödel manifesta la sua opposizione a una simile concezione (p. 133):

[...] classi e concetti possono anche essere concepiti come oggetti reali, e precisamente le classi come

“pluralità di cose” o come strutture consistenti di una pluralità di cose e i concetti come le proprietà di, e le relazioni fra cose esistenti indipendentemente dalle nostre definizioni e costruzioni.

Secondo Gödel, le difficoltà incontrate dal progetto fondazionale di Russell e Whitehead, in particolare la loro necessità di ricorrere a assiomi *ad hoc*, suggeriscono “un atteggiamento più conservativo” secondo cui classi e concetti sono “entità esistenti oggettivamente” (*ib.*, pp. 144), ovvero dotate di un’esistenza indipendente. Egli continua così (*ib.*, pp. 133):

A me sembra che l’assunzione di tali oggetti sia altrettanto legittima dell’assunzione di corpi fisici e che si sono almeno altrettanti motivi per credere nella loro esistenza. Essi sono necessari per ottenere un sistema soddisfacente di matematica nello stesso senso in cui i corpi fisici lo sono per una teoria soddisfacente delle nostre percezioni sensibili.

Gödel dice che è stato uno dei primi scritti dello stesso Russell (forse Russell, 1903, cf. in particolare la Prefazione), a aver attirato la sua attenzione su un tale parallelo fra matematica e fisica su cui egli ritorna spesso. Russell, dice Gödel (*ib.*, p. 126), “paragona gli assiomi della logica e della matematica con le leggi della natura e l’evidenza logica con la percezione sensibile”. Ne segue che “non è necessario che gli assiomi siano di per sé evidenti, ma la loro giustificazione sta piuttosto (esattamente come in fisica) nel fatto che essi rendono possibile dedurre queste «percezioni sensibili»”. Gödel accetta un tale punto di vista, a patto di correggerlo in senso non logicista. Le verità evidenti non sono logiche ma aritmetiche, e gli sviluppi recenti mostrano che “la soluzione di certi problemi aritmetici richiede l’impiego di assunzioni che trascendono essenzialmente l’aritmetica” (*ib.*), ovvero gli assiomi della teoria degli insiemi. E allo stesso tempo, per decidere problemi relativi a tale teoria è necessario ricorrere a altri assiomi più forti. Così come egli lo presenta nel suo saggio su Russell, il platonismo di Gödel è quindi l’asserzione dell’esistenza degli insiemi, esistenza che per Gödel è d’altra parte giustificata dagli sviluppi della stessa teoria degli insiemi: lungi dal rendere meno plausibile che gli insiemi esistono in quanto oggetti indipendenti, l’esigenza di assiomi sempre più forti, necessari per risolvere i problemi sorti entro questa stessa teoria, ci convince sempre di più della loro esistenza e ci porta a svelare le loro proprietà più nascoste. Invece di cercare una giustificazione della matematica che scende verso le basi delle nostre capacità epistemiche, egli la cerca risalendo queste capacità fino ai suoi limiti estremi, nelle assunzioni fatte in teoria degli insiemi.

Questa impostazione è confermata e anzi resa ancora più evidente dal secondo articolo, dedicato alla discussione dell’ipotesi del continuo (indicata generalmente con l’acronimo ‘CH’). Esistono due versioni di tale articolo. Quando ne redige la prima (del 1947), Gödel ha già dimostrato (1939a, 1939b, 1940) che se ZF è consistente, allora lo è anche ZFC+CH (il sistema ottenuto aggiungendo CH agli assiomi di ZFC)<sup>45</sup>. Ne segue che, se ZFC è consistente, allora la negazione di CH non può essere provata in ZFC. Nell’articolo del 1947, egli congetture che se ZFC è consistente, neppure CH possa essere provata in ZFC, e quindi che CH sia indipendente da ZFC. Questo sarà in seguito provato da Cohen (1963), che proverà più precisamente che se ZF è consistente allora lo è anche ZFC+¬CH (il

---

<sup>45</sup>Gödel costruisce in particolare un modello per ZF (la classe propria  $L$  di tutti gli insiemi costruttibili) e mostra che esso soddisfa l’assioma di scelta e l’ipotesi del continuo. Ovviamente, tutto quanto diciamo qui a proposito di CH si riferisce alla matematica classica.

sistema ottenuto aggiungendo agli assiomi di ZFC la negazione di CH). Nel 1964 Gödel rivede suo articolo, ma licenzia il proprio manoscritto poco prima di venire a sapere della dimostrazione di Cohen, della quale rende conto in un corto poscritto finale. La differenza più rilevante fra le due versioni dipende invece dall'aggiunta di un supplemento in cui Gödel informa i lettori di altri risultati ottenuti nel frattempo riguardo a CH e si oppone all'opinione di Alfred Errera (1953), secondo cui l'indipendenza (poi provata) di CH da ZFC avrebbe reso la questione della sua verità del tutto priva di significato, rendendola simile a quella della verità del quinto postulato di Euclide (che, come è noto, è indipendente dagli altri postulati della geometria euclidea e la cui negazione fornisce un assioma incluso in due distinti sistemi di geometria non euclidea). È nelle risposte a questa obiezione che Gödel fa intervenire la nozione di intuizione matematica.

Già nella sua versione del 1947, l'articolo di Gödel costituisce un vero e proprio manifesto per un programma di ricerca che è tutt'ora in corso (cf. n.34): cercare assiomi appropriati da aggiungere a quelli di ZFC in modo da rendere CH decidibile, in particolare permettendo di provare la sua negazione. La dichiarazione finale di Gödel è sintomatica (1947-64, p. 262):

Io credo che [...] si abbiano buone ragioni per sospettare che il ruolo del problema del continuo nella teoria degli insiemi sarà quello di portare alla scoperta di nuovi assiomi che renderanno possibile refutare la congettura di Cantor.

L'uso del termine 'scoperta' è già un sintomo del punto di vista filosofico di Gödel: una decisione a proposito di CH è una decisione a proposito della sua verità o falsità, e per pervenire a essa non si tratta che di approfondire l'analisi del significato dei termini impiegati in teoria degli insiemi, a cominciare ovviamente dal termine 'insieme'. Scopo di tale analisi non è solo quello di chiarire il nostro impiego dei termini in questione. Essa serve anche a svelare le reali proprietà degli insiemi. I passaggi in cui Gödel presenta quest'idea cambiano in modo abbastanza significativo fra la prima e la seconda versione dell'articolo, ma il punto sembra restare lo stesso: *i*) l'inferenza dalla non decidibilità di CH in ZFC alla mancanza di significato di CH dipende da una concezione costruttivista (nel senso particolare indicato sopra) degli oggetti matematici; *ii*) questa concezione deve essere rimpiazzata da un'altra che riconosce che gli assiomi della teoria degli insiemi descrivono una "realtà ben determinata" (*ib.* p. 258) in cui CH deve essere vera o falsa; *iii*) secondo tale concezione, la non decidibilità di CH in ZFC indica solo che "questi assiomi non contengono una descrizione completa di tale realtà" (*ib.*); *iv*) questa descrizione completa può essere raggiunta attraverso l'aggiunta di nuovi assiomi.

Per Gödel, quest'ultimo è un obiettivo realizzabile perché gli stessi assiomi già ammessi si basano su di un "concetto d'insieme" che "suggerisce" di per sé degli assiomi nuovi. In altri termini, Gödel sembra pensare che il sistema formato dai primi assiomi possa essere esteso in modo "naturale", "senza arbitrarietà", aggiungendo a essi i secondi. Al di là di degli esempi che Gödel fornisce, il suo punto è che i nuovi assiomi possono essere suggeriti sulla base di due tipi di considerazioni: dalla loro capacità di risolvere problemi lasciati aperti dagli assiomi già ammessi, e dal confronto fra le conseguenze che questi ultimi

hanno se presi da soli o se presi insieme ai nuovi; e dalla considerazione della “fruttuosità” dei nuovi assiomi, ovvero dal loro possibile uso per semplificare in modo significativo prove già ottenute usando gli assiomi precedentemente ammessi.

In entrambi i casi è solo il lavoro tecnico approfondito entro la teoria degli insiemi o su di essa (secondo il metodo della metamatemica di Hilbert) che può svelare le proprietà degli insiemi che restano ancora sconosciute. In altri termini, i suggerimenti appropriati sono visibili solo agli occhi del matematico esperto. È proprio questo il punto che nel supplemento del 1964 Gödel sembra voler spiegare attraverso l'introduzione della nozione di intuizione matematica. Egli osserva che la teoria ottenuta aggiungendo CH agli assiomi di ZFC e quella ottenuta aggiungendo a tali assiomi la negazione di CH non sono simmetriche: mentre la seconda appare come un'estensione naturale di ZFC, questo non vale per la prima. La situazione è quindi simile a quella che si avrebbe se si volesse decidere della verità del quinto postulato di Euclide non considerando la geometria come un sistema matematico astratto, ma come una teoria che riguarda il comportamento dei corpi fisici, dei raggi luminosi, etc. La differenza è solo che in quest'ultimo caso sarebbe la nostra indagine relativa alla realtà fisica che ci guiderebbe, mentre in teoria degli insiemi siamo guidati da un altro tipo di realtà. L'intuizione matematica è proprio ciò che ci permette, anzi permette ai matematici esperti, di accedere a tale realtà (*ib.*, p. 266):

Malgrado la loro distanza dall'esperienza sensibile, però, noi abbiamo qualcosa di analogo a una percezione anche per gli oggetti insiemistici, come si vede dal fatto che gli assiomi ci si impongono come veri. Non vedo motivi per avere meno fiducia in questa sorta di percezione, cioè nell'intuizione matematica, che nella percezione sensibile, che ci spinge a costruire teorie fisiche e a attenderci che le percezioni sensibili future vi si adegueranno e, inoltre, a credere che un problema oggi non decidibile abbia senso e possa essere deciso in futuro.

Ma come funziona questa intuizione? Per spiegarlo, Gödel si serve, ancora una volta, di un paragone con la fisica (*ib.*, p. 266):

Va osservato che l'intuizione matematica non deve necessariamente essere concepita come una facoltà che dia una conoscenza immediata degli oggetti interessati. Sembra piuttosto che, come avviene per l'esperienza fisica, noi ci formiamo le nostre idee anche di quegli oggetti sulla base di qualcosa d'altro che è dato immediatamente. Solo che questo qualcos'altro qui [nel caso dell'esperienza fisica] non sono, o comunque non in primo luogo, le sensazioni. Che qualcosa accanto alle sensazioni sia in effetti immediatamente dato segue (indipendente dalla matematica) dal fatto che anche le nostre idee che si riferiscono a oggetti fisici contengono costituenti che differiscono qualitativamente dalle sensazioni o dalle mere combinazioni di sensazioni, per esempio l'idea stessa di oggetto, mentre, d'altra parte, col nostro pensiero non possiamo creare alcun elemento qualitativamente nuovo, ma solo riprodurre e combinare quelli che sono dati. Evidentemente il “dato” alla base della matematica è strettamente collegato agli elementi astratti contenuti nelle nostre idee empiriche. Non ne segue assolutamente che i dati di questa seconda specie [quelli che sono alla base della matematica], dal momento che non possono essere associati con azioni di certe cose sui nostri organi di senso, siano qualcosa di puramente soggettivo, come sosteneva Kant. Anch'essi piuttosto rappresentano un aspetto della realtà oggettiva ma, in quanto opposti alle sensazioni, la loro presenza in noi può essere dovuta a una altra specie di relazione fra noi stessi e la realtà.

Se Gödel cita qui Kant per opporsi al suo punto di vista, non è certamente per rifiutare l'insieme della sua filosofia. Per quanto parli di idee e di pensiero, Gödel sembra riferirsi a qualcosa di molto simile ai concetti e all'intelletto di Kant. Noi non possiamo accedere

direttamente agli oggetti, tanto astratti quanto concreti o fisici. Per farlo dobbiamo servirci di certe idee (concetti) fondamentali che il pensiero (intelletto) non può fornire. Questo può infatti combinare idee (concetti) già date ma non può crearle dal nulla. Nel caso degli oggetti fisici, queste idee non possono neppure venirci dalla sensazione, che, proprio in quanto sensazione di oggetti, è già informata da esse. Allo stesso modo, nel caso della matematica, queste non possono neppure venirci dall'intuizione intesa come una facoltà che ci mette immediatamente in relazione con gli oggetti matematici: l'intuizione matematica deve contenere qualcosa di più. Questo qualcosa di più non fornisce altri oggetti, ma piuttosto dei concetti appropriati e fondamentali, delle idee nel senso di Gödel e non delle idee nel senso di Platone. Esso differisce quindi dal *nous* di quest'ultimo, ma sembra avvicinarsi a quello di Proclo, almeno se si ammette che per quest'ultimo sia il *nous* a generare i *logoi* (cf. §§ I.2 e I.4). Ma che cosa sono queste idee (concetti) fondamentali che il pensiero combina fra loro ma non può creare? Nella citazione precedente, Gödel ci dice chiaramente che nel caso della sensazione, ovvero della nostra relazione con gli oggetti fisici, esse includono l'idea stessa (il concetto stesso) di oggetto; ma la citazione non chiarisce quali idee (concetti) fondamentali sono necessari per accedere agli oggetti matematici.

Per capirlo, occorre considerare una nota che egli appone al suo testo, dopo le parole 'idee empiriche' (*ib.*, p. 266):

Si osservi che c'è una relazione stretta fra il concetto di insieme [...] e le categorie dell'intelletto puro nel senso di Kant. Infatti la funzione di entrambi è la "sintesi", ossia la generazione di unità da molteplicità (per esempio, in Kant, dell'idea di un oggetto dai suoi vari aspetti).

Ciò di cui abbiamo bisogno per accedere agli oggetti matematici è quindi l'idea (concetto) di insieme, la quale non può venire dalla nostra intuizione di tali oggetti, proprio in quanto essa è già informata da tale idee (concetto). Sembra quindi che l'intuizione matematica abbia una doppia funzione: da una parte, essa ci mette in relazione con gli oggetti matematici, ma lo fa in modo non immediato, ma servendosi piuttosto di un'idea (concetto) fondamentale che essa, d'altra parte, acquisisce traendola da una realtà (che Gödel chiama 'oggettiva' ma sembra intendere come costituita da concetti) che precede quella degli oggetti matematici stessi e assomiglia a quella delle categorie dell'intelletto, in senso kantiano. Dal fatto che questa idea (concetto) fondamentale non sia altro che quello di insieme, sembra seguire che gli oggetti matematici non sono che insiemi. Se vi è intuizione matematica di insiemi in quanto oggetti, vi è quindi, necessariamente, anche intuizione matematica dell'idea (concetto) di insieme.

Ma neppure questo è sufficiente. Gödel introduce un nuovo ingrediente che complica ulteriormente la sua nozione di intuizione matematica (*ib.*, p. 266):

Comunque, il problema dell'esistenza oggettiva degli oggetti nell'intuizione matematica (che, detto per inciso, è una replica esatta del problema dell'esistenza oggettiva del mondo esterno) non è decisivo per il problema che stiamo qui discutendo. Il fatto meramente psicologico dell'esistenza di un'intuizione sufficientemente chiara da produrre gli assiomi della teoria degli insiemi e una successione aperta di loro estensioni, è sufficiente a dare senso al problema della verità o falsità di proposizioni come l'ipotesi del continuo di Cantor.

Per Gödel l'intuizione matematica sembra quindi essere, nello stesso tempo: intuizione di oggetti, gli insiemi; intuizione di un concetto fondamentale, quello di insieme; e intuizione proposizionale, l'intuizione che gli insiemi sono così e così, che certi asserti su di essi sono veri.

Per quanto egli non voglia rinunciare alla prima, e quindi ritenga di non poter neppure rinunciare alla seconda, egli sembra d'altra parte suggerire che solo la terza è decisiva nella pratica matematica. E se è su tale pratica che si deve in ultima istanza basare, allora l'elaborazione del complesso apparato filosofico che riguarda l'intuizione degli insiemi e quella del concetto di insieme lascia il posto a una riflessione più particolare che riguarda il modo in cui perveniamo a identificare gli asserti veri a proposito degli insiemi, e in particolari quelli che possiamo ammettere come assiomi. Si tratta di una questione già affrontata in precedenza, ma alla quale Gödel ritorna in chiusura del suo articolo (*ib.*, p. 267). E con essa, egli ritorna anche su di una soluzione già velocemente prospettata, quella che si richiama alla fruttuosità degli assiomi, aggiungendo che questa potrebbe riguardare il loro uso non solo in matematica, ma anche in fisica. Ciò mette capo, dice Gödel, a un "criterio per la verità degli assiomi matematici" che è distinto dall'intuizione e è "solo probabile", un criterio, inoltre, che "malgrado possa divenire decisivo in futuro, non può ancora essere applicato agli assiomi specificamente insiemistici", in particolare agli assiomi che dovrebbero venir aggiunti a quelli di ZFC per rendere HC decidibile.

Questo "criterio" è stato spesso associato all'argomento di indispensabilità di cui tratteremo nei capitoli VI-VII. Prima di questo considereremo, nei capitoli III-V, alcune reazioni che le posizioni presentate fin qui, in particolare quelle di Frege e dello stesso Gödel, hanno suscitato e continuano a suscitare fra i filosofi della matematica contemporanei.

### III

#### IL DILEMMA DI BENACERAF<sup>1</sup>

All'origine di uno dei principali filoni del dibattito contemporaneo sul problema di Platone sono due articoli di Paul Benacerraf (1965, 1973). Prima di entrare nel vivo di questa discussione, che ci occuperà nei capitoli III-V, riassumiamo alcuni aspetti del problema di Platone emersi dalle considerazioni dei due capitoli precedenti.

Un modo di porre il problema di Platone è di formulare una domanda ontologica: vi sono oggetti matematici? Per comprenderla e rispondervi adeguatamente, occorre chiarire almeno tre punti: *i*) che cosa s'intende quando si asserisce (o si nega) l'esistenza di oggetti astratti? *ii*) sotto quali condizioni si può asserire di qualcosa che è un oggetto (astratto)? *iii*) che cosa garantisce che un oggetto debba essere considerato come matematico?

La domanda (*iii*) è solo apparentemente semplice. Come già osservato nell'Introduzione (§ 1.3), se si vuole rispondervi attraverso una caratterizzazione generale di ciò che fa di un oggetto un oggetto matematico, essa diventa tanto complessa che è preferibile evitarla. Una maniera per farlo è limitare il campo d'indagine scegliendo esempi paradigmatici. Un'ovvia possibilità è di limitarsi all'aritmetica e alla teoria degli insiemi. Le due cose vanno spesso assieme, almeno se si ammette, come suggerisce Russell nei *Principles of Mathematics* (1903), che se l'aritmetica tratta di oggetti, allora questi sono degli insiemi. Più in generale, la scelta di limitarsi al caso dell'aritmetica, alle sue possibili estensioni e alla teoria degli insiemi è condivisa dalla maggior parte dei protagonisti del dibattito che ricostruiremo.

Alla luce di tale limitazione, il problema di Platone si presenta sotto forma di domande quali: l'aritmetica e la teoria degli insiemi parlano di, o descrivono oggetti? Vi sono oggetti identici ai numeri naturali e agli insiemi? I numeri naturali e gli insiemi sono oggetti?

Un modo comune per rispondere alla domanda (*ii*) è il seguente (cf. Introduzione, §1.5):  $x$  è un oggetto se e solo se cade sotto un concetto sortale. Quale che sia la teoria dei concetti che si voglia adottare, è naturale ammettere che sotto un concetto  $P$  cada qualche oggetto se e solo se vi sono dei  $P$ . Se lo si ammette e si risponde così alla domanda (*ii*), si deve anche ammettere che qualcosa è un oggetto solo se esiste. Si risponde così anche alla domanda (*i*): asserire che esistono certi oggetti — concreti o astratti che siano — equivale a asserire che sotto appropriati concetti sortali cadono degli oggetti. Questa risposta non ci fa avanzare di molto, ma fissa una convenzione terminologica utile. Suggerisce inoltre che per argomentare a favore del platonismo dobbiamo definire appropriati concetti sortali, o dire almeno come essi debbano essere di volta in volta definiti, e mostrare che sotto di essi cade qualche oggetto. Un modo ovvio per mostrarlo è individuare degli oggetti indipendentemente dall'impiego di tali concetti e mostrare che cadono sotto di essi, cioè

---

<sup>1</sup>I capitoli III-V sono parzialmente basati su Panza (2007). Per altre ricostruzioni della discussione che ci occuperà in questi capitoli, cf. Shapiro (2000a), pp. 281-289; Garavaso (1998, 2002); Engel (1995). Per approfondimenti, cf. Shapiro (2005).



soddisfano le condizioni fissate dalla definizione di questi ultimi. Questo è proprio ciò che fa chi, per esempio, sostiene che i numeri naturali sono certi insiemi, e che esistono in quanto esistono questi insiemi. Chi segue questa strategia, nel caso dell'aritmetica, deve definire un appropriato concetto sortale sotto cui i numeri naturali sono supposti cadere, per esempio tramite appropriati assiomi come quelli di Peano, e mostrare poi che certi insiemi soddisfano le condizioni stabilite dalla definizione data e cadono quindi sotto tale concetto. Ma deve anche ammettere che quegli insiemi esistano. Il problema dell'esistenza dei numeri naturali è così trasformato in quello dell'esistenza degli, o di certi insiemi

Il problema cruciale diventa allora: che cosa significa definire un concetto sortale? Supponiamo di aver fissato una condizione d'identità per ciò che cade sotto un concetto  $P$ , ovvero di aver stipulato che se  $x$  e  $y$  cadono sotto  $P$ , allora  $x$  è identico a  $y$  se e solo se una certa condizione è soddisfatta. Supponiamo anche che se  $x$  e  $y$  cadono sotto  $P$ , allora si possa stabilire se tale condizione è soddisfatta o no. Possiamo sostenere di aver definito il concetto sortale  $P$ ?

Per evitare di essere ingannati dalla nostra familiarità previa con tale concetto, supponiamo che  $P$  sia un concetto del tutto nuovo, per esempio quello di zuzazu, e che tutto ciò che abbiamo fissato sia una condizione di identità per ciò che è supposto cadere sotto questo concetto. Abbiamo in tal modo definito il concetto di zuzazu? Si potrebbe rispondere negativamente sulla base di quanto segue: per definire un concetto sortale è necessario, ma non sufficiente, fissare una condizione d'identità; occorre anche fissare una condizione di applicazione, ovvero una condizione che caratterizza gli oggetti che sono supposti cadere sotto questo concetto. Ma è davvero così? Non si potrebbe sostenere che, almeno in certi casi, la condizione d'identità sia sufficiente? Il caso dei numeri naturali potrebbe essere un caso del genere. Come abbiamo visto nel §II.1.3, nelle *Grundlagen* Frege aveva osservato che un'attribuzione di un numero naturale equivale all'affermazione che tale numero spetta a un concetto. E ne aveva dedotto che per definire i numeri naturali è necessario stabilire che cosa questa affermazione significa, scartando la possibilità di definire tali numeri attraverso la mera stipulazione di una condizione di identità per i numeri che spettano a concetti (il principio di Hume). Una tale definizione sarebbe puramente contestuale: non stabilirebbe che cosa sono le cose che cadono sotto il concetto rilevante, ma fisserebbe soltanto una condizione di verità per asserti d'identità in cui occorrono i termini usati per denotare queste cose (asserti della forma ' $\alpha = \beta$ ', in cui ' $\alpha$ ' e ' $\beta$ ' sono tali termini). Si tratta di un caso assai semplice di definizione implicita (cf. cap. II, n.15). Uno più complesso è dato dall'impiego degli assiomi di Peano come definizioni implicite della costante predicativa '(essere un) numero naturale', della costante individuale 'zero', e della costante relazionale diadica '(essere un) successore di'.

Se Frege scartò la possibilità di definire i numeri naturali tramite la mera stipulazione del principio di Hume, e si oppose a ogni tentativo di definire qualsiasi altro oggetto matematico tramite definizioni implicite, è perché riteneva che definizioni simili si imbattano nel problema di Cesare (cf. §II.1.3), e che questo possa venir risolto solo tramite

una definizione esplicita che fissi una condizione di applicazione.

### 1. Ciò che i numeri naturali non possono essere (secondo Benacerraf)

La strategia di Frege per fondare l'aritmetica, e rispondere così al problema di Platone per questa parte della matematica, non ha sortito i risultati voluti. Questa non è tuttavia una ragione sufficiente per concludere che, nel caso dell'aritmetica, il problema di Platone non possa essere risolto seguendo una strategia strutturalmente simile a quella di Frege, ovvero stabilendo che ogni numero naturale  $n$  soddisfa un asserto di identità della forma ' $n = s$ ' in cui ' $s$ ' è il nome di un oggetto identificato indipendentemente dalla considerazione del concetto di numero naturale. Benacerraf (1965) argomenta contro tale possibilità. In realtà, egli pretende fare di più, ovvero mostrare che i numeri naturali "non sono affatto oggetti" (*ib.*, p. 79).

Nel §II.3 abbiamo osservato che è possibile identificare i numeri naturali con degli insiemi particolari generati gli uni dagli altri secondo una clausola ricorsiva che genera una relazione d'ordine e permette di ottenere un modello degli assiomi di Peano. Abbiamo anche detto che questo non risolve di per sé né il problema di Platone, né quello dei fondamenti dell'aritmetica. Tuttavia, se si vogliono risolvere questi problemi tramite una strategia simile a quella di Frege, i candidati più ovvi a essere dichiarati identici ai numeri naturali sono degli insiemi, in particolare quelli che formano le progressioni di von Neumann e Zermelo o altre analoghe.

La prima parte dell'argomento di Benacerraf (1965, §§ I e II) intende mostrare che i numeri naturali non sono tali insiemi, anzi che non sono affatto insiemi. Egli immagina due giovani, Ernie e Johnny (diminutivi dei nomi di Zermelo e von Neumann) educati a riconoscere i numeri naturali rispettivamente negli insiemi di Zermelo e von Neumann. Per Ernie e Johnny, gli assiomi di Peano sono teoremi relativi a questi insiemi. E essi non hanno alcuna difficoltà né a definire (esplicitamente) su di essi le usuali operazioni aritmetiche (addizione, moltiplicazione, esponenziazione), né a impiegarli per contare oggetti<sup>2</sup>, dimostrando che se ' $k$ ' è il nome di uno di questi insiemi, allora ogni insieme di oggetti ha  $k$  membri se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme i cui elementi sono tutti e soli quelli fra questi insiemi che sono minori di  $k$ . Non solo, le progressioni formate dagli insiemi di Zermelo e von Neumann, che Ernie e Johnny riconoscono rispettivamente come i loro numeri, sono anche ordinate secondo una relazione d'ordine decidibile (ovvero tale che per ogni coppia di suoi elementi distinti,  $x$  e  $y$ , è possibile stabilire se  $x < y$  o  $y < x$ ). I numeri di Ernie e Johnny hanno quindi tutte le proprietà aritmetiche assegnate usualmente ai numeri naturali e soddisfano tutte le condizioni che i numeri naturali devono soddisfare<sup>3</sup>. Una caratteristica degli insiemi è

---

<sup>2</sup>Benacerraf distingue fra il conteggio che chiama 'transitivo', in cui si contano oggetti, e quello che chiama 'intransitivo' che consiste solo nel preferire i nomi dei numeri naturali nel loro ordine. Secondo Benacerraf non si può contare transitivamente se non si sa contare intransitivamente, perché contare transitivamente significa associare oggetti ai nomi dei numeri naturali preferiti nel loro ordine corretto.

<sup>3</sup>Benacerraf (*ib.*, p. 51, n.3) riconosce che non tutti ammettono che la possibilità di definire le usuali operazioni aritmetiche sugli elementi di una progressione e quella di impiegare tali elementi per contare oggetti siano requisiti necessari per poter identificare questi elementi con i numeri naturali. Per molti (Benacerraf cita Quine, 1960, cf. §54) i numeri naturali possono essere identificati con gli elementi di qualsiasi progressione. Il punto è per molti

tuttavia quella di poter appartenere a altri insiemi. Quindi, se i numeri naturali sono insiemi è possibile domandarsi se uno di essi appartiene a un altro. Consideriamo due numeri naturali non successivi, e chiediamoci se il primo appartiene al secondo. Se i numeri naturali sono gli insiemi di Zermelo, la risposta è negativa; se sono quelli di von Neumann è positiva. Per esempio, per Ernie i numeri 2 e 4 sono rispettivamente gli insiemi

$$\{\{\emptyset\}\} \text{ e } \{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$$

il primo dei quali non appartiene al secondo (il cui solo elemento è l'insieme  $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ ). Per Johnny, essi sono invece rispettivamente gli insiemi

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \text{ e } \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

il primo dei quali appartiene chiaramente al secondo.

Se i numeri naturali sono determinati insiemi, la domanda precedente deve prevedere una sola risposta corretta (positiva o negativa). Ma proprio perché gli insiemi di Ernie e Johnny soddisfano tutte le condizioni che i numeri naturali devono soddisfare, non vi è alcun argomento che non sia estraneo all'aritmetica e alle sue applicazioni che permetta di stabilire quale sia la risposta corretta. Ne segue che se i numeri naturali sono determinati insiemi, l'aritmetica e le sue applicazioni non ci offrono alcuna ragione per stabilire quali insiemi essi siano. A questo punto, Benacerraf aggiunge due ulteriori premesse al suo argomento: *i*) "se i numeri formano un particolare insieme di insiemi e non un altro, allora devono esserci degli argomenti per stabilire quale insieme di insieme essi formano" (*ib.*, p. 58); *ii*) solo l'aritmetica e/o le sue applicazioni possono fornire tali argomenti. Dal momento che l'aritmetica non può fornire tali argomenti, ne segue che i numeri naturali non sono insiemi.

La seconda parte dell'argomento di Benacerraf (1965, §III.C) va oltre questa conclusione, per concludere che i numeri naturali non sono affatto oggetti. Benacerraf nota che ciò che fa sì che gli insiemi di Zermelo e von Neumann soddisfino tutte le condizioni che i numeri naturali devono soddisfare non è l'intrinseca natura di tali insiemi, ma il fatto che essi formano una progressione (appropriata)<sup>4</sup>. Ne segue che al loro posto si possono prendere altri oggetti: se essi formano una (appropriata) progressione, anch'essi soddisferanno le condizioni rilevanti. Quindi, come non vi è ragione per decidere che i numeri naturali sono certi insiemi piuttosto che altri, non vi è nemmeno ragione per stabilire che essi sono certi oggetti piuttosto che altri. Ne segue che non solo non sono insiemi: non sono oggetti di qualsivoglia altro tipo.

Ma allora, di che cosa tratta l'aritmetica? Le seguenti citazioni suggeriscono una risposta (*ib.*):

Ciò che veramente importa non è una qualsiasi condizione sugli oggetti [...], ma piuttosto una condizione sulla relazione in forza della quale essi formano una progressione. [...] nel dare le proprietà [...] dei

---

versi rilevanti, ma non colpisce l'argomento che stiamo discutendo, per il quale basta ammettere che le progressioni formate dagli insiemi di Zermelo e von Neumann sono adeguate. Benacerraf (1996a, Appendice; 1966b) riconoscerà poi che la condizione di decidibilità della relazione d'ordine fra i membri di una progressione non è essenziale, argomentando che su una progressione è sempre possibile definire una relazione d'ordine decidibile. Ma anche su questo punto, la discussione è aperta: si veda per esempio Halbach e Horsten (2005), che ritengono tale condizione essenziale.

<sup>4</sup>Cf. n.3.

numeri si caratterizza semplicemente una struttura astratta, e [...] gli "elementi" della struttura non hanno alcuna altra proprietà che quelle che li mettono in relazione con gli altri "elementi" della stessa struttura. Se identifichiamo una struttura astratta con un sistema di relazioni [...], otteniamo l'aritmetica elaborando le proprietà della relazione  $\tau$  minore di  $\tau$ , o di tutti i sistemi di oggetti [...] che esibiscono questa struttura astratta. [...] L'aritmetica è perciò la scienza che elabora la struttura astratta che tutte le progressioni hanno in comune in virtù del loro essere progressioni.

La risposta è che l'aritmetica tratta della struttura astratta di progressione. Benacerraf oppone quindi la singolarità di una struttura alla pluralità degli oggetti dell'aritmetica: se questa ha oggetti, allora ne ha uno solo, e questo è la struttura di progressione. Questo viene chiarito dalla proposta positiva che Benacerraf delinea (*ib.*):

[...] vi è una forma modificata di [...] [formalismo] che nega che le parole usate per parlare dei numeri [number words] siano nomi, la quale costituisce una plausibile e attraente estensione della tesi in favore della quale ho argomentato. [...] Essa asserisce che la sequenza di queste parole è solo questo: una sequenza di parole o espressioni con certe proprietà. Non vi sono due generi di cose, i numeri e le parole per i numeri, ma solo una: le parole stesse.

Benacerraf dedica poche righe a chiarire questa idea, concludendo che per difenderla adeguatamente sarebbe necessario un libro. Un tale libro non è ancora stato scritto. In compenso Benacerraf, una ventina d'anni più tardi (1996a, §3), torna sull'argomento principale del suo articolo riconoscendovi quattro punti deboli.

Primo, è dubbio che solo l'aritmetica e/o le sue applicazioni possano fornire argomenti per stabilire quali oggetti siano i numeri naturali. Dal fatto che l'aritmetica e/o le sue applicazioni non forniscano tali argomenti non segue che non ve ne siano. Considerazioni metafisiche (o di altra natura) relative al concetto di numero naturale potrebbero fornirne uno.

Secondo, l'eventuale assenza di tali argomenti non implica che i numeri naturali non siano oggetti: potrebbero essere oggetti anche se nessun argomento permettesse di stabilire quali oggetti sono.

Terzo, l'argomento precedente non può nulla contro chi volesse sostenere, applicando il rasoio di Occam, che i numeri naturali sono insiemi (o altri oggetti) perché gli insiemi (o tali oggetti) sono sufficienti per fare ciò che vogliamo fare con i numeri naturali, e non vi è quindi bisogno di ammettere nessun'altra entità. Costui non avrebbe difficoltà a osservare che diverse progressioni possano fare le veci dei numeri naturali: se volesse fissare in modo univoco il riferimento dei termini che denotano questi ultimi basterebbe sceglierne una, cosa che non lo impegnerebbe a nessuna assunzione ontologica. Questo potrebbe tuttavia non essere necessario, perché si potrebbe sostenere, come suggerisce Resnik (1997, p. 239), che la questione se i numeri naturali siano una o l'altra progressione non riguarda alcuna questione di fatto (*fact of the matter*).

Quarto, la seconda parte dell'argomento escluderebbe senza ragione la possibilità di oggetti la cui natura intrinseca dipenda solo dal loro stare in certe relazioni con altri oggetti: avendo escluso che i numeri naturali sono insiemi, si potrebbe convenire che essi non sono neppure oggetti di un'altra natura particolare, individuabili anche al di là delle relazioni proprie degli elementi di una progressione. Questo non implica che i numeri naturali non sono oggetti: potrebbero essere oggetti caratterizzati solo da tali relazioni.

Secondo Benacerraf queste obiezioni non confutano il suo argomento, ma indicano strategie che il platonista potrebbe seguire per controbatterlo. Vedremo come queste strategie siano state tutte seguite (suggerendo appunto a Benacerraf le sue autocritiche). Nel §V.1 discuteremo la proposta neologicista, che dà corpo alle strategie suggerite dalle prime due obiezioni. L'argomento di indispensabilità potrebbe, sotto appropriate precisazioni, indicare un modo di seguire la strategia suggerita dalla terza obiezione. Infine, lo strutturalismo non-eliminativo, che esporremo nei §§ V.3 e V.4, è direttamente suggerito dalla quarta obiezione. Più in generale, tale obiezione suggerisce che per concludere che una certa porzione  $M$  della matematica non tratta di oggetti, non basta ammettere che il problema di Platone non possa essere risolto per  $M$  stabilendo che per ogni costante individuale ' $t$ ' che interviene in  $M$  valga un'identità della forma ' $t = r$ ', in cui ' $r$ ' è il nome di un oggetto individuato indipendentemente dalla considerazione dei concetti coinvolti in  $M$ . Ne consegue che un argomento come quello di Benacerraf non potrebbe comunque valere che contro alcune forme di platonismo (ispirate da quello di Frege) che suggeriscono di risolvere il problema di Platone in tal modo. Altre forme ancora potrebbero sostenere, e sostengono, che gli oggetti matematici, o alcuni di essi, sono oggetti *sui generis*, ovvero sono distinti da ogni altro genere di oggetti dati indipendentemente da essi (Parsons 2008, p. 101).

È inoltre possibile contrastare l'argomento di Benacerraf in modo assai semplice: anche se esso fosse corretto, escluderebbe solo la possibilità che i nomi dei numeri naturali si riferiscano a un unico oggetto, lasciando aperta la possibilità che ognuno di essi denoti, in un qualche senso, una pluralità di oggetti. Vi sono almeno due modi di dare corpo a questa idea.

Secondo Nicholas White (1974, p. 112), “nel nostro discorso aritmetico, possiamo rimpiazzare i nostri termini aritmetici singolari, come ‘tre’, con corrispondenti termini generali atomici, come ‘è un tre’ o ‘dei tre [*threes*]’”. Questi termini generali devono essere relativizzati a delle progressioni, ovvero intervenire in espressioni quali ‘ $x$  è un tre in  $\Sigma$ ’, dove  $\Sigma$  è una progressione. I numeri naturali sarebbero allora “oggetti che occupano posizioni nelle progressioni, e dei quali predicati del tipo ‘ $\exists \Pi(x \text{ è un tre in } \Pi)$ ’ sono veri” (*ib.* p. 114). La proposta di White sembra allora quella di interpretare i nomi dei numeri naturali come costanti predicative che designano proprietà godute da più oggetti diversi. Non vi sarebbe il numero tre, ma differenti numeri tre, e un asserto nel quale interviene il termine ‘tre’ non ci parlerebbe di  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ , di  $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ , o di qualsiasi altro oggetto particolare, ma di ogni oggetto che, come questi, possa considerarsi come un tre in una progressione. La forma grammaticale apparente di un asserto quale ‘Tre è un numero primo’ non rispecchierebbe quindi la sua struttura semantica, e tale asserto dovrebbe essere riformulato così: ‘per ogni progressione  $\Pi$ , il tre di  $\Pi$  è primo in  $\Pi$ ’. Così inteso, esso sarebbe vero.

Field (1974, pp. 209 e 220-222) ha invece suggerito che certi termini singolari si riferiscono parzialmente a più oggetti distinti, ognuno dei quali costituisce una parte del

loro riferimento. I nomi dei numeri naturali sarebbero dei termini singolari di questo tipo, e si riferirebbero parzialmente a ognuno degli oggetti che svolgono la funzione di elemento appropriato di una progressione.

I due resoconti dell'aritmetica suggeriti da queste mosse non sono contraddetti dall'argomento di Benacerraf, ma possono essere oggetto di altre obiezioni. Per esempio, entrambi ammettono l'esistenza di più progressioni, e chi volesse argomentare in loro favore dovrebbe giustificare — invece dell'esistenza dei numeri naturali, intesi come singoli oggetti — quella di diverse progressioni, senza neppure poter godere della semplicità delle abituali versioni del platonismo, dovendo ricorrere a opportune parafrasi degli asserti aritmetici.

## **2. Il dilemma di Benacerraf**

Torniamo alle due prime autocritiche di Benacerraf. Abbiamo detto che il neologicismo è un esempio delle strategie che esse suggeriscono. Ma per sviluppare quelle autocritiche basterebbe osservare, come ha fatto lo stesso Wright (1983, p. 128), indipendentemente dall'accettazione dell'opzione neologicista, che quello di Benacerraf è solo un "argomento per l'impercipiabilità del riferimento dei termini numerici singolari rispetto al dominio delle classi". Esso mostra che l'uso che facciamo di tali termini è compatibile con "varie interpretazioni", ma non solleva alcun problema che riguardi quei termini in particolare. Anzi, mostra che essi si comportano rispetto al loro riferimento come tutti i termini singolari del linguaggio quotidiano, almeno se accettiamo le tesi di Quine su riferimento e traduzione (Quine, 1969, sopr. cap. 2): se essi hanno un riferimento, i nostri usi linguistici non ci permettono di identificarlo. Oppure sarebbe possibile sostenere che l'aritmetica non è la fonte delle nostre conoscenze sui numeri naturali, ma ne è il risultato: i numeri naturali non sono come l'aritmetica ci dice che siano; è piuttosto l'aritmetica che è come i numeri naturali fanno sì che essa sia. Sostenere questo è in fondo sostenere una versione di platonismo aritmetico. Se vi fossero buone ragioni per ammettere una simile posizione, l'argomento di Benacerraf non potrebbe nulla contro di essa.

Queste due contromosse concordano sul fatto che l'argomento di Benacerraf non scalfisce l'opzione platonista, anzi in un senso la rafforza: se i numeri naturali sono oggetti che esistono indipendentemente da noi, essi esistono indipendentemente dall'aritmetica, che è certamente una nostra produzione intellettuale. Che l'aritmetica non ci dica tutto dei numeri naturali non è quindi sorprendente. Ma le due contromosse non sono prive di conseguenze. Quello di Frege è, per così dire, un platonismo sobrio: afferma che i numeri naturali esistono perché sono identici a oggetti, le estensioni di concetti, la cui esistenza è assicurata da altre ragioni. Anche rigettando le ragioni di Frege a favore dell'esistenza delle estensioni di concetti, si potrebbero immaginare ragioni per sostenere l'esistenza di altri oggetti che potrebbero venire considerati identici ai numeri naturali. Se adottiamo le contromosse precedenti, però, questa forma sobria di platonismo rischia di lasciare il posto a un platonismo arrogante, che afferma l'esistenza dei numeri naturali indipendentemente

da ogni nostro tentativo e perfino dalla nostra possibilità di individuarne la natura.

Per quanto lo slittamento verso un platonismo arrogante non sia una conseguenza obbligata di queste contromosse (il neologicismo è per esempio un modo di evitarlo pur aderendo a esse), ne è un esito che molti potrebbero considerare naturale. È soprattutto contro questo esito che si rivolge l'argomento del secondo articolo di Benacerraf. Questo non è solo e non tanto un argomento contro il platonismo. È piuttosto un argomento volto a mostrare che due richieste separatamente plausibili relativamente alla verità degli asserti matematici e alla conoscenza matematica non possono essere soddisfatte insieme.

La prima richiesta è che la “teoria della verità matematica sia conforme con una teoria generale della verità [...] che certifichi che la proprietà degli asserti che [...] è detta ‘verità’ sia veramente la verità” (1973, p. 666)<sup>5</sup>. L'implicita assunzione della disponibilità di una tale teoria generale della verità può naturalmente essere messa in dubbio. Ma Benacerraf chiarisce che il suo punto è che agli asserti matematici si debba applicare una semantica strutturalmente equivalente a quella degli asserti ordinari del linguaggio quotidiano, e che questa venga corredata dalla distinzione fra verità e giustificazione. Egli presenta un esempio aritmetico. Dati gli asserti ‘vi sono almeno tre numeri perfetti maggiori di 17’ e ‘vi sono almeno tre grandi città più antiche di New York’, la prima richiesta è soddisfatta se l'analisi semantica del secondo è analoga a quella del primo: in particolare se entrambi questi asserti sono considerati veri in quanto esistono oggetti con proprietà rilevanti indipendentemente da ogni nostra giustificazione.

La seconda richiesta è che la spiegazione della verità matematica sia compatibile con quella della conoscenza matematica: “siccome la nostra conoscenza è conoscenza di verità, o può essere così concepita, perché un resoconto della verità matematica sia accettabile deve essere consistente con la possibilità di avere conoscenza matematica” (*ib.*, p. 667). In sé, questa richiesta sembra piuttosto debole, almeno per chi pensi che la conoscenza è opinione vera giustificata. Ma Benacerraf ha una concezione della conoscenza che influisce sul contenuto di tale richiesta: un soggetto conosce che  $p$  solo se la sua credenza che  $p$  “è causalmente connessa in un modo appropriato con ciò che fa sì che sia vero che  $p$ ” (*ib.*, p. 672). Egli non pone condizioni precise sulla natura di questa connessione. Ciò che conta è che un soggetto conosce che  $p$  solo se vi è qualcosa che rende vero che  $p$  e il soggetto sta in una relazione con questo qualcosa che gli permetta di stabilire se le condizioni di verità di  $p$  sono soddisfatte.

Consideriamo una posizione platonista che soddisfi la prima richiesta. Se si adotta tale posizione, “è difficile vedere come la conoscenza matematica sia possibile” (*ib.*, p. 673), in quanto è difficile dar conto della connessione che sulla base della seconda richiesta deve instaurarsi fra le credenze del soggetto di tale conoscenza e ciò che rende veri gli asserti corrispondenti. Più precisamente, considerando ancora il caso dell'aritmetica, se i numeri naturali sono oggetti astratti che esistono indipendentemente da noi “non è possibile render conto della connessione fra le condizioni di verità degli asserti dell'aritmetica e ogni evento

---

<sup>5</sup>Sulle diverse possibili teorie della verità, cf. Künne (2003) e Volpe (2005).

rilevante connesso con coloro che sono supposti avere conoscenza matematica” (*ib.*). La seconda richiesta non sarebbe quindi soddisfatta. D’altra parte, se si ammettesse — secondo una concezione che Benacerraf chiama ‘combinatoria’ — che gli asserti matematici sono veri se e solo se sono provati, o comunque che la loro verità dipenda “da certi fatti sintattici” (*ib.*, p. 665), allora la seconda richiesta sarebbe soddisfatta, ma non la prima, perché non si avrebbe alcuna spiegazione del perché questa sia propriamente una condizione di verità.

In breve, il punto di Benacerraf è che una buona semantica per la matematica sembra richiedere una cattiva epistemologia, e una buona epistemologia una cattiva semantica. Si tratta di quello che è divenuto noto come il dilemma di Benacerraf. Per illustrare il suo punto, egli considera due esempi. Il primo è quello di Gödel, il cui platonismo violerebbe la seconda richiesta perché non spiegherebbe adeguatamente in che senso “gli assiomi ci si impongono come veri” (cf. §II.5). Il secondo rimanda a Quine (1935), che presenterebbe una concezione combinatoria della verità matematica e fallirebbe nel connettere le condizioni di verità degli asserti matematici con la loro verità in un senso proprio.

La forza del secondo argomento di Benacerraf può essere variamente valutata. Si può sostenere che Benacerraf non dia alcuna giustificazione per l’adozione delle sue richieste. Ma l’argomento ha comunque il merito di poter denunciare l’apparente incompatibilità fra una richiesta semantica e una epistemologica anche senza richiamarsi a assunzioni forti relative alla natura della conoscenza matematica, se non quella che essa sia conoscenza di soggetti umani indotta da appropriati stati di cose. Come ha osservato Field (1989b, p. 233), il dilemma di Benacerraf può infatti essere riformulato in modo che esso “non dipenda da nessuna assunzione sulle condizioni necessarie e sufficienti per la conoscenza”, ma solo “dall’idea che dovremmo considerare con sospetto ogni pretesa di conoscere fatti relativi a un certo dominio se crediamo che sia in principio impossibile spiegare l’affidabilità delle nostre credenze relative a questo dominio”. Più in generale, Benacerraf non insiste tanto sulla natura della conoscenza matematica, ma piuttosto sulla possibilità per il soggetto di tale conoscenza di accedere a ciò di cui essa è supposta essere conoscenza. Il problema è allora che sembra implausibile asserire allo stesso tempo che gli oggetti matematici sono astratti, che esistono indipendentemente da noi e che sono per noi accessibili. Si tratta del cosiddetto problema dell’accesso.

### **3. Una mappa delle risposte al dilemma di Benacerraf: le soluzioni contemporanee del problema di Platone**

Il problema dell’accesso accompagna il platonismo fin dalle sue origini. Ma il dilemma di Benacerraf non pone solo un problema al platonismo: come osservano Bob Hale e Crispin Wright (2002, p. 103), “la questione generale di riconciliare semantica e epistemologia per la matematica non è solo una sfida per chi vorrebbe essere platonista, ma riguarda tutte le posizioni filosofiche che ammettono che la matematica pura rappresenta [...] una parte propria e sostanziale della conoscenza umana”. È quindi naturale che una grande parte della



discussione degli ultimi 35 anni sul problema di Platone si sia concentrata, esplicitamente o meno, sui tentativi di rispondere al dilemma: tentativi che, per i platonisti, si sono congiunti allo sforzo di contrastare l'argomento di Benacerraf (1965). *ib.*

Hale e Wright (2002, pp. 103-104) hanno proposto di classificare le risposte al dilemma distinguendo fra risposte "conservative" e non. Le prime sono quelle che "affrontano il dilemma frontalmente", ammettendo che: *i*) gli asseriti matematici debbano essere intesi in accordo con la loro forma grammaticale apparente; *ii*) la matematica pura, intesa in accordo alla condizione (*i*), "rappresenta, almeno per una sua grande parte, un corpo di conoscenze *a priori*". Le seconde sono quelle che rigettano almeno una di queste due condizioni.

Fra queste ultime, Hale e Wright menzionano il nominalismo di Field, lo strutturalismo eliminativista (o modale) di Geoffrey Hellman, e la concezione suggerita dall'argomento di indispensabilità. Fra le prime, distinguono fra quelle — dette 'intuizionali [*intuitional*]' — secondo cui il problema dell'accesso può venir risolto solo tramite il ricorso a "una facoltà speciale, tradizionalmente detta 'intuizione', che rende accessibili dei sistemi di oggetti astratti [...] con le loro proprietà caratteristiche"; e quelle — dette 'intellettive [*intellectual*]' — che riconoscono che "l'accesso agli oggetti della matematica pura sia possibile grazie alle nostre capacità generali di ragionare e comprendere [*understanding*]". La sola risposta intuizionale che essi menzionano è quella di Charles Parsons. Fra quelle intellettive essi menzionano lo strutturalismo *ante rem* di Shapiro, e il loro stesso neologicismo.

Le risposte conservative si inquadrano tutte, sia pure in modi diversi, nella tradizione del platonismo. Tratteremo di esse nel capitolo IV, aggiungendo a quelle menzionate da Hale e Wright quella che dipende dalla teoria degli oggetti astratti di Edward Zalta (che quest'ultimo considera come un'altra forma di neologicismo). Le risposte non conservative sono invece più strettamente legate alla tradizione nominalista e/o empirista. Nel capitolo V tratteremo, oltre a quelle menzionate da Hale e Wright, anche del platonismo a base empirista e cognitiva di Maddy e del finzionalismo di Yablo. Lasciamo invece l'argomento di indispensabilità per i capitoli VI e VII.

## IV

### RISPOSTE NON CONSERVATIVE A DILEMMA DI BENACERRAF

Nel presente capitolo discuteremo alcune delle risposte che sono state date al dilemma di Benacerraf, in particolare alcune di quelle che nel §III.3 abbiamo classificato, seguendo la classificazione di Hale e Wright (2002), come non conservative. Ne vedremo quattro: il nominalismo di Field; il finzionalismo, sia nella versione dello stesso Field che in quella di Yablo; lo strutturalismo eliminativo modale di Hellman; e il platonismo a base cognitiva di Maddy.

#### 1. Il nominalismo di Field: matematica senza verità e scienza senza numeri

La prima risposta non conservativa al dilemma di Benacerraf che considereremo è quella offerta da Field (1980; 1982). Field adotta una posizione nominalista negando che esistano oggetti astratti che i teoremi matematici descriverebbero, ma accetta (1982, pp. 45-46) la condizione (i) fra quelle che caratterizzano le risposte conservative al dilemma di Benacerraf. Egli ritiene che il modo appropriato di concepire la verità degli asserti matematici sia di ammettere che essa dipenda dal fatto che, indipendentemente da ogni nostra attività cognitiva, esitano certi oggetti astratti dotati di certe proprietà, il che è equivale a aderire alla richiesta semantica di Benacerraf. Ne segue che per Field i teoremi matematici non sono veri, o lo sono al più solo vacuamente. Supponendo che non si possa conoscere che  $p$  se non a condizione che  $p$  sia vero, ne segue che i soli fra questi teoremi che potrebbero eventualmente costituire un corpo di conoscenze sono quelli vacuamente veri. Ma se neghiamo, come sembra plausibile fare, che la conoscenza eventualmente espressa da tali asserti possa essere considerata rilevante rispetto all'accettazione della condizione (ii), ne segue che Field è costretto a rigettare quest'ultima condizione<sup>1</sup>.

Nei due lavori citati, Field non avanza alcun argomento positivo a favore della sua opzione nominalista, ma intende piuttosto contrastare tutti quegli argomenti che, per concludere che i teoremi matematici sono veri o che esistono oggetti matematici, si richiamano al ruolo cruciale che la matematica gioca nelle scienze, in particolare in fisica. Si tratta dell'idea essenziale dell'argomento di indispensabilità. Secondo Field, questi argomenti si basano su una premessa implicita, solitamente accettata senza discussione: che la verità dei teoremi della matematica sia una condizione necessaria perché essa possa applicarsi con successo alla scienza. Questo è ciò che egli nega. Più in generale, egli nega che le virtù della matematica dipendano dalla verità dei suoi teoremi, ovvero che tali teoremi debbano essere veri perché la matematica sia "buona" (1982, p. 46; 1985, p. 239).

---

<sup>1</sup>In realtà, Field (1984) ammette che si possa parlare di conoscenza matematica, anche senza negare che la conoscenza richieda la verità. Tuttavia la conoscenza matematica non è per lui espressa dai teoremi della matematica (intesi in accordo alla condizione (i)), ma è piuttosto o conoscenza a proposito di questi stessi teoremi, o conoscenza di fatti empirici relativi al comportamento dei matematici: da una parte è conoscenza che certi teoremi hanno certe proprietà logiche (modali), e dall'altra che certi matematici adottano certe teorie o accettano certe assunzioni.

Secondo Field, quegli argomenti sono comunque i soli non circolari che sono stati avanzati per sostenere il platonismo e/o il realismo semantico a proposito della matematica. Rigettarli è quindi un modo per opporsi a queste posizioni e difendere l'opzione nominalista. Per sostenere che la matematica è un corpo di verità non basta osservare che essa è "logicamente derivata da un corpo di assiomi apparentemente consistenti"; occorrerebbe anche spiegare "perché questi assiomi debbano essere intesi come delle verità, piuttosto che come delle finzioni alle quali i matematici hanno cominciato a interessarsi per una qualche ragione" (1980, pp. vii-viii). E se cerchiamo di spiegarlo senza considerare le applicazioni della matematica, non possiamo in ultima istanza che richiamarci a un "dogma ingiustificabile" (*ib.*, p. 5). Così, se l'argomento di indispensabilità è contraddetto, non resta "alcuna [buona] ragione per considerare qualche parte della matematica come vera", e ammettere che esistano degli oggetti astratti di cui essa tratta. Ciò non solo non fornisce un argomento positivo a favore del nominalismo, ma neppure un argomento diretto contro il platonismo. Ma fornisce, secondo Field, buone ragioni per rigettare quest'ultimo (1989, pp. 45):

Non possiamo nemmeno avere evidenza diretta contro l'ipotesi che esistano piccoli omini verdi che vivono dentro gli elettroni e che non possono in linea di principio essere scoperti dagli esseri umani; ma mi sembra che restare agnostici nei confronti di una tale ipotesi, piuttosto che dichiararsi schiettamente increduli [*maintain flat out disbelief*], sia una cautela epistemica indebita.

Vedremo nel capitolo VII come l'argomento di Field si oppone a quello di indispensabilità. Qui ci concentreremo sulla parte positiva del primo, ovvero sulle ragioni che Field avanza per giustificare la tesi che la matematica possa essere "buona" senza essere vera, che sono *ipso facto* ragioni per rispondere al dilemma di Benacerraf.

Ovviamente Field non intende sottrarre ai matematici, per ascriverla alla filosofia, la facoltà di stabilire che cosa sia la buona matematica. Egli si domanda (1982, pp. 46-49) solo se vi sia, oltre alla consistenza, un'altra condizione generale, ovvero indipendente dal contenuto specifico di una data teoria matematica, che tale teoria debba soddisfare per poter essere ammessa (ovvero considerata buona). L'ipotesi che non vi sia tale condizione contrasta con la richiesta, generalmente accettata, che la matematica debba poter essere utile, ovvero applicabile (si noti: non che essa sia utile, ma che possa esserlo). Sembra ovvio che la consistenza non basti a soddisfare tale richiesta. Vi sono tuttavia diversi modi per argomentare che sia così. Per Field, una teoria matematica può applicarsi allo studio di un certo fenomeno solo se non è pura, ovvero solo se ammette, a fianco dei teoremi che riguardano "entità matematiche" (ovvero gli usuali teoremi che trattano di numeri, insiemi o altri supposti oggetti astratti), anche delle "leggi-ponte" (1980, pp. 9-10) che associano tali entità con entità proprie a quel fenomeno. Questo è il caso, per esempio, della teoria degli insiemi con urelementi, una versione della teoria degli insiemi in cui si ammette che questi possano avere elementi che non sono insiemi. In particolare, posto che per Field la fisica tratta di oggetti concreti, se si vuole che una teoria matematica possa applicarsi in fisica, tali leggi-ponte devono associare entità matematiche con oggetti concreti. Field chiama 'nominalista' un linguaggio che contiene solo termini che denotano tali oggetti e

nel quale le variabili sono supposte variare solo su di essi. Tale condizione si può quindi esprimere dicendo che le teorie matematiche che si possono applicare in fisica non sono pure, ma nominalisticamente impure (il termine non è di Field, ma lo adotteremo per semplicità).

Il punto cruciale è che una tale teoria, per quanto consistente, può avere conseguenze nominaliste false, ovvero può essere tale che i suoi assiomi (che comprenderanno, come detto, leggi-ponte) abbiano conseguenze nominaliste false, ovvero conseguenze false formulate in un linguaggio nominalista. Field ritiene ovvio che una simile teoria sia inammissibile. E ritiene che lo sia anche una teoria matematica nominalisticamente impura che, per quanto consistente, abbia conseguenze nominaliste che potrebbero essere false. Egli ritiene ammissibili solo quelle teorie matematiche (consistenti) nominalisticamente impure le cui eventuali conseguenze nominaliste sono necessariamente vere<sup>2</sup>. Field sembra ritenere ovvia anche questa condizione, e si limita a osservare che essa è il corrispondente nominalista della condizione che, in termini platonisti, si enuncia richiedendo che i teoremi di una teoria matematica siano necessariamente veri, o, come egli dice, in modo un po' rapido, è "più o meno equivalente" a tale condizione (1982, p. 51). Per Field, questa è la sola condizione necessaria generale che una teoria matematica nominalisticamente impura debba soddisfare per poter essere ammessa.

Qui è tuttavia necessario fare una precisazione. In un linguaggio nominalista è certamente possibile formulare un asserto da cui segua che gli, o degli, oggetti matematici non esistono, per esempio negando *tout court* l'esistenza di tali oggetti, come nel caso dell'asserto 'non esistono oggetti non concreti', o imponendo restrizioni relative alla cardinalità del dominio di tali oggetti, come nel caso dell'asserto 'non esistono oggetti (concreti o no) che non possono venire denominati in modo diverso da altri oggetti che esistono' (che nega indirettamente che esistono domini non numerabili di oggetti). La negazione di tali asserti non è necessariamente vera. Tuttavia, quella del primo segue da ogni teoria matematica (almeno se essa è intesa in accordo alla sua forma grammaticale apparente, come Field richiede), mentre quella del secondo segue da molte teorie matematiche comunemente accettate, come l'analisi (o teoria dei numeri reali). Quindi se nell'argomento precedente ammettessimo che fra le conseguenze nominaliste false o non necessariamente vere vi possano essere degli asserti come questi, ne seguirebbe che nessuna teoria matematica sia ammissibile, o che molte teorie matematiche comunemente accettate non lo siano. Per rendere l'argomento di Field plausibile, dobbiamo quindi richiedere che sia soddisfatta una condizione di separazione fra asserti nominalisti e asserti

---

<sup>2</sup>Posto che un asserto nominalista non è che un asserto formulato in un linguaggio nominalista, nulla osta al fatto che esso possa essere necessariamente vero. Se 't' è un termine di un tale linguaggio, l'asserto 'per ogni x, se x è identico a t, allora è identico a t' è per esempio un tale asserto, e, in presenza di una logica minimale, esso è una conseguenza di ogni teoria che ammetta fra i suoi assiomi asserti in cui occorre il termine 't'. Se questo è il caso per una legge-ponte di una teoria matematica nominalisticamente impura, allora un tale asserto è una conseguenza di tale teoria. La condizione avanzata da Field può comunque essere intesa come definitoria della nozione di teoria matematica nominalisticamente impura. Una teoria che contenesse asserti formulati impiegando le risorse tanto di un linguaggio nominalista che di un linguaggio matematico, e che avesse conseguenze nominaliste non necessariamente vere sarebbe quindi inammissibile come teoria matematica. Questo è proprio il caso delle teorie fisiche che impiegano un linguaggio matematico, e che hanno conseguenze nominaliste non necessariamente vere, per quanto vere relativamente al mondo fisico che esse sono supposte descrivere: esse sono eventualmente ammissibili in quanto teorie fisiche, ma non sono teorie matematiche (sia pure nominalisticamente impure).

matematici, che assicurino che casi come questi non possano verificarsi, garantendo che gli asserti nominalisti rilevanti siano “agnostici” quanto all’esistenza di oggetti matematici. (Field, 1980, pp. 11-12; Shapiro, 1983, p. 523, n.4)<sup>3</sup>. Per evitare inutili precisazioni, nel seguito ammetteremo che sia sempre così.

Una teoria matematica pura soddisfa vacuamente la condizione necessaria di ammissibilità indicata sopra per le teorie matematiche nominalisticamente impure, in quanto non ha alcuna conseguenza nominalista. Siccome per Field le teorie matematiche possono essere solo pure o nominalisticamente impure, egli può quindi enunciare tale condizione relativamente a una teoria matematica *tout-court*: “perché una teoria matematica interessante sia buona [ovvero ammissibile] essa deve solo essere *consistente con ogni teoria internamente consistente a proposito del mondo fisico*” (1982, p. 49), ovvero deve essere tale che se  $N$  è un corpo qualsiasi consistente di asserti nominalisti e  $M$  la teoria matematica in questione, allora  $M+N$  è consistente<sup>4</sup>. Egli chiama poi ‘conservativa’ una teoria matematica consistente con ogni teoria internamente consistente a proposito del mondo fisico. Ne segue che una teoria matematica è ammissibile solo se è conservativa.

Posta tale condizione, tutto quanto Field dice sulla matematica riguarda le teorie matematiche conservative. Ciò è del tutto naturale. Assunta la condizione precedente, se una presunta teoria matematica non fosse conservativa non sarebbe ammissibile e quindi non potrebbe essere una teoria matematica reale, ovvero ammessa da una qualche comunità di matematici. Possiamo quindi esprimerci dicendo che per Field tutte le teorie matematiche sono conservative: in breve, la matematica è conservativa. Non solo, essa è buona, proprio in quanto è conservativa, e, in particolare, la sua utilità dipende da questo. La conservatività è la condizione che deve essere sostituita alla verità se si vuole render conto delle virtù della matematica.

Questa tesi ha due aspetti: asserisce che la matematica è buona, cioè ammissibile, in quanto è conservativa, e che la sua conservatività spiega la sua applicabilità. La prima affermazione è una conseguenza ovvia del modo in cui la conservatività è definita e dell’assunzione che la conservatività sia la sola condizione necessaria generale di ammissibilità. La seconda affermazione deve invece essere giustificata diversamente. Vediamo come Field lo fa.

Supponiamo che  $N$  sia un corpo consistente di asserti nominalisti e che  $M$  sia una teoria matematica (consistente), eventualmente nominalisticamente impura. Allora, secondo Field, affermare che la matematica è conservativa equivale a affermare che, quali che siano  $N$  e  $M$ , un asserto nominalista  $\varphi$  è una conseguenza di  $N+M$  solo se è una conseguenza del

---

<sup>3</sup>Si potrebbe dubitare che, data tale condizione, si possano concepire delle teorie matematiche nominalisticamente impure che non soddisfano la condizione necessaria di ammissibilità indicata sopra. Field (1982, pp.48-49) fornisce un esempio di una tale teoria. Semplificando, egli mostra come ottenere una teoria matematica (consistente) una delle cui conseguenze asserisce che esiste solo un numero infinito di oggetti concreti, cosa che non solo non è necessariamente vera, ma che è anche contraddetta da teorie fisiche che non è difficile formulare.

<sup>4</sup>Per comprendere che questa condizione è equivalente alla precedente si ragioni come segue. Si supponga che  $\varphi$  sia un asserto nominalista non contraddittorio e  $M+\varphi$  sia inconsistente. Allora  $\neg\varphi$  sarebbe una conseguenza di  $M$  che non sarebbe necessariamente vera (posto che  $\varphi$  è non contraddittorio) e quindi  $M$  avrebbe delle conseguenze nominaliste non necessariamente vere. Viceversa, sia  $\varphi$  una conseguenza nominalista di  $M$  non necessariamente vera. Allora  $\neg\varphi$  sarebbe un asserto nominalista consistente mentre  $M+\neg\varphi$  sarebbe inconsistente.

solo  $N$  (cosa che si esprime spesso dicendo che  $N+M$  è un'estensione conservativa di  $N$ ). In altri termini la matematica è conservativa se e solo se l'aggiunta di una qualsiasi teoria matematica  $M$  a un qualsiasi corpo  $N$  di asserti nominalisti non accresce il corpo delle conseguenze di  $N$ .

Per giustificare questa equivalenza si può ragionare come segue. Supponiamo che  $\varphi$  sia una conseguenza di  $N+M$ , ma non di  $N$ . Allora  $N+\neg\varphi$  sarebbe un corpo consistente di asserti nominalisti e  $M+N+\neg\varphi$  non sarebbe consistente e  $M$  non sarebbe conservativa. Viceversa, supponiamo che  $N$  sia un corpo consistente di asserti nominalisti, e  $M+N$  sia inconsistente. Allora ogni asserto sarebbe una conseguenza di  $M+N$ , mentre non ogni asserto sarebbe una conseguenza di  $N$ . Vi sarebbe quindi un asserto nominalista  $\varphi$  che sarebbe conseguenza di  $M+N$  ma non di  $N$ <sup>5</sup>.

Joseph Melia (2006, p. 203) suggerisce che il punto di Field è che “la matematica debba essere conservativa perché altrimenti sarebbe impossibile assegnare un senso all'opinione comune che la matematica debba essere vera in tutti mondi possibili o vera *a priori*”<sup>6</sup>. Tale interpretazione pare tuttavia fuorviante, così come lo sono molte formulazioni dello stesso Field e di molti dei suoi commentatori. Per Field, infatti, la matematica non è affatto vera in tutti in tutti mondi possibili o vera *a priori*. Anzi, come abbiamo detto, i suoi soli asserti veri sono quelli che lo sono vacuamente. La difficoltà deriva da un punto che abbiamo cercato di chiarire: per quanto sia ovvio che la matematica pura sia conservativa, questo dipende al fatto che essa non ha conseguenze nominaliste, e il punto cruciale relativo alla conservatività della matematica riguarda le teorie matematiche nominalisticamente impure. Queste possono avere conseguenze nominaliste che, secondo Field, devono essere necessariamente vere, vere in tutti mondi possibili, e/o vere *a priori*. Quando Field sostiene che i soli asserti matematici veri sono quelli che lo sono vacuamente, si riferisce solo alla matematica pura o agli asserti non nominalisti delle teorie matematiche nominalisticamente impure.

Torniamo alla tesi che la conservatività della matematica spiega la sua applicabilità. Per capirla meglio, ricorriamo a una metafora linguistica. Immaginiamo di voler trarre delle conseguenze relative a un certo argomento da un certo sistema di premesse formulate in inglese. Supponiamo di essere di madre lingua italiana e di avere una limitata dimestichezza con l'inglese, pur conoscendolo abbastanza bene. Potremmo servirci di certe leggi-ponte che stabiliscono delle relazioni fra certi lemmi dell'inglese e certi lemmi dell'italiano, pur volendo giungere a formulare le nostre conseguenze in inglese. Queste stipulazioni potrebbero permetterci di identificare più facilmente certe conseguenze delle nostre premesse. Esse sarebbero tuttavia appropriate solo se le conseguenze che esse ci permettono di identificare fossero già conseguenze delle sole premesse formulate in

---

<sup>5</sup>In (1980), Field non definisce la conservatività come abbiamo fatto più sopra seguendo (1982), ma direttamente tramite la condizione appena indicata. Egli usa quindi (1980, pp. 12-13) una versione leggermente diversa della prima parte dell'argomento precedente per mostrare direttamente che le “nostre teorie matematiche” sono conservative. E affianca questo argomento con altri due (*ib.*, pp. 16-19) più tecnici ma più particolari, in quanto riferiti al solo caso della teoria degli insiemi (considerata la teoria matematica per eccellenza).

<sup>6</sup>L'espressione ‘vera in tutti mondi possibili o vera *a priori*’ è dello stesso Field. Non possiamo qui considerare le critiche mosse da Melia a Field nello stesso articolo.

inglese. Ciò che Field sembra dirci è che le (buone) teorie matematiche consistenti forniscono sempre leggi-ponte appropriate in tal senso. Immaginiamo infatti che  $N$  sia un corpo di asserti di una certa teoria fisica, e che questa, come ogni buona teoria fisica dovrebbe fare, secondo Field, includa solo asserti nominalisti. Allora, ci si potrebbe servire di una qualsiasi (buona) teoria matematica consistente  $M$  per “vedere più facilmente” le conseguenze nominaliste di  $N$  — per “facilitare le inferenze” da  $N$  a tali conseguenze (1982, p. 50) — senza con ciò correre il rischio di imbattersi in asserti nominalisti che sono conseguenze di  $N+M$ , ma non di  $N$  da sola. Supponendo che la fisica sia assimilabile a un corpo di asserti nominalisti, ciò non solo spiegherebbe perché la matematica sia applicabile utilmente alla fisica, ma lo farebbe richiamandosi a una caratteristica speciale di questa, la conservatività.

Cerchiamo di capire perché, per Field, la conservatività è una caratteristica speciale della matematica. Secondo il suo resoconto, il ruolo che la matematica ha in fisica non è per nulla equiparabile a quello delle stipulazioni che introducono “entità teoriche” come le (o certe) particelle sub-atomiche o altre entità simili (1980, pp. 7-8). Queste stipulazioni sono utili perché deduciamo da esse “un’ampia gamma di fenomeni” che non possono venir spiegati in modo appropriato da nessuna teoria alterativa nota. Esse sono quindi “teoricamente indispensabili”, mentre la matematica è perfettamente dispensabile per la fisica. Di più (1982, pp. 50-52) se modifichiamo un poco la condizione di conservatività della matematica per applicarla alle teorie fisiche — e stabiliamo che una teoria fisica  $T$  è conservativa se e solo se per ogni corpo  $P$  di asserti a proposito di osservabili e per ogni asserto  $\psi$  anch’esso a proposito di osservabili,  $\psi$  è una conseguenza di  $P+T$  solo se lo è di  $P$  da solo —, allora dobbiamo concludere che una tale teoria fisica conservativa è inaccettabile (a meno che non sia parte di una più larga teoria fisica non conservativa e accettabile), in quanto non la si può testare alla luce delle sue conseguenze osservabili.

Ma prima di poter dire di aver giustificato la tesi che la conservatività della matematica spiega la sua applicabilità se alla(o almeno alla fisica), dobbiamo ancora assicurarci di quanto abbiamo finora presentato come una semplice ipotesi, ovvero che le teorie fisiche effettive possano essere assimilate a corpi di asserti nominalisti. Spieghiamoci meglio. Field ha finora argomentato che la (buona) matematica è conservativa rispetto a dei corpi di asserti nominalisti. Supponiamo che tutto ciò che una teoria fisica ci dice sul mondo fisico possa essere detto utilizzando solo tali asserti. Allora questa teoria sarà assimilabile a un corpo di asserti nominalisti e l’argomento di Field si applicherà a mostrare che la (buona) matematica è conservativa rispetto a essa. Ma supponiamo invece che una teoria fisica ci dica qualcosa sul mondo fisico che non possa essere detto utilizzando solo asserti nominalisti. Ciò è perfettamente plausibile: un asserto come ‘l’accelerazione di gravità ai poli terrestri è uguale a  $9,823 \text{ m/s}^2$ ’ ci parla del mondo fisico ma non è nominalista. La questione è se ciò che esso ci dice del mondo possa o meno essere detto usando solo asserti nominalisti (torneremo su questo nei §§ VI.4.2.2 e VII.1). Se una teoria fisica ci dicesse qualcosa sul mondo fisico che non potesse essere detto utilizzando solo asserti nominalisti,

allora essa non potrebbe essere assimilata a un corpo di asserti nominalisti, e l'argomento di Field non si applicherebbe a mostrare che la (buona) matematica è conservativa rispetto a essa. Field deve quindi mostrare che le cose stanno diversamente. Non solo però la matematica è presente in modo massiccio nelle teorie fisiche effettive, ma il linguaggio matematico è anche impiegato in esse per formulare conseguenze relative al mondo fisico. Per rendere il suo argomento cogente, Field deve quindi accertarsi che questo sia un fatto contingente, dovuto alle comodità che l'impiego di tale linguaggio permette: deve accertarsi che tanto le assunzioni di base specificamente proprie alle teorie fisiche effettive, quanto le loro conseguenze relative al mondo fisico, possano essere appropriatamente riformulate usando solo un linguaggio nominalista. Si tratta di mostrare che la matematica non solo è conservativa rispetto a corpi di asserti formulati in un tale linguaggio, ma anche eliminabile dalle teorie fisiche effettive senza perdita di contenuto empirico, ovvero che si possa fare in fisica ciò che Field (a differenza di altri nominalisti) non pensa possibile fare in matematica: che si possano riformulare appropriatamente le teorie fisiche senza richiamarsi in un modo o nell'altro a oggetti astratti e alle loro proprietà e relazioni, pur senza alcuna perdita quanto a ciò che tali teorie dicono sul mondo fisico.

Per mostrarlo, Field presenta un esempio. Mostra come riformulare la "teoria newtoniana della gravitazione" impiegando solo un linguaggio nominalista: un linguaggio che non contenga alcun termine per numeri reali (e quindi anche naturali) e nessuna variabile che sia supposta variare su di essi (e quindi anche nessuna lettera predicativa o funzionale che designi proprietà di, relazioni fra, e funzioni definite su tali numeri). Questo per Field è un esempio paradigmatico che dovrebbe indicare la via da seguire anche in altri casi (anche se il carattere paradigmatico di tale esempio è stato messo in dubbio, per esempio da Malament, 1982, pp. 532-534).

Field mostra dapprima come eliminare i termini che sono supposti denotare i numeri naturali o le variabili che sono supposte variare su di essi<sup>7</sup>. Si tratta semplicemente di ricorrere all'uso di quantificatori esistenziali numerici, come ' $\exists_i x[P(x)]$ ' ( $i = 0, 1, \dots$ ), che si legge: 'Esistono esattamente  $i$   $x$  che godono di  $P$ '<sup>8</sup>. Questi possono infatti essere definiti ricorsivamente usando le sole risorse della logica del primo ordine, per esempio seguendo le indicazioni date da Frege nel §55 delle *Grundlagen*, ovvero così:

$$\exists_0 x[P(x)] \Leftrightarrow \forall x[\neg P(x)] \quad ; \quad \exists_m x[P(x)] \Leftrightarrow \exists y[P(y) \wedge \exists_{m-1} x[P(x) \wedge x \neq y]]$$

dove  $m$  è il predecessore di  $n$ .

Per i termini che sono supposti denotare numeri reali o le variabili che sono supposte variare su di essi, le cose sono più complesse. Field comincia con il mostrare che "l'uso dei numeri reali in geometria può essere spiegato tramite la conservatività della matematica, senza assumere la verità della teoria dei numeri reali" (*ib.*, p. xi). In particolare, egli si

<sup>7</sup>Si noti che qui si tratta di mostrare come questi termini e variabili possano essere eliminati da un linguaggio non puramente matematico. La semplice soluzione adottata non può quindi servire a definire i numeri naturali come tali, ovvero a fornire un fondamento extra-matematico per l'aritmetica.

<sup>8</sup>Field (1980, p. 21) definisce questi quantificatori esistenziali numerici a partire da altri, del tipo  $\exists_{\geq i} x[P(x)]$ , che si legge 'vi sono almeno  $i$   $x$  che godono di  $P$ '. È tuttavia facile passare da una definizione all'altra; diamo solo la prima per ragioni di semplicità.



richiama all'assiomatizzazione di Hilbert della geometria euclidea, notando, correttamente, che essa non fa intervenire tali numeri, che sono invece impiegati per costruire i modelli su cui gli assiomi sono interpretati nelle prove di consistenza e indipendenza (cf. §II.4.2). E osserva come, nel trattare tali modelli, Hilbert abbia di fatto provato un "teorema di rappresentazione" che mostra che un sistema in cui intervengono solo entità genuinamente geometriche soddisfa le condizioni strutturali proprie del campo dei numeri reali. Secondo Field tale sistema può essere inteso come un sistema nominalista: un sistema composto solo da oggetti concreti a cui vengono assegnate appropriate proprietà e relazioni. Questi oggetti concreti sono i punti e le regioni dello spazio-tempo. Hilbert (e, almeno in prima istanza, Descartes) ha mostrato che tutte le operazioni e funzioni definite sui numeri reali possono essere riprodotte sotto forma di operazioni e funzioni definite sui punti dello spazio e sui segmenti che li uniscono. E la stessa meccanica impiegando la quale Newton ha formulato la propria teoria della gravitazione non fa affatto ricorso a numeri reali (la cui teoria non era all'epoca disponibile). Per realizzare il suo scopo, Field non deve quindi far altro che mostrare che l'assenza di ogni ricorso ai numeri reali non costituisce alcuna limitazione per sviluppare questa teoria in modo appropriato e perfettamente rigoroso, seguendo le indicazioni dello stesso Newton, pur andando al di là di ciò che egli ha fatto (ovvero riformulando la teoria nella sua versione moderna), richiamandosi solo a punti e regioni dello spazio-tempo, e definendo in base a essi (via definizioni implicite) tutte le altre grandezze rilevanti: velocità, accelerazione, forza, massa, densità, temperatura, etc.

Qui possiamo solo indicare l'idea fondamentale alla base di questa riformulazione. Consideriamo il caso della temperatura (Field, 1980, cap. 7). Secondo Field, nella odierna formulazione della teoria newtoniana, le leggi proprie alla temperatura sono espresse come leggi relative a una funzione  $T$  definita su quadruple di numeri reali e con valori fra i numeri reali ( $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ ). Se sui punti dello spazio-tempo possiamo definire due appropriate funzioni con valori rispettivamente fra le quadruple dei numeri reali e fra i numeri reali ( $\phi: \mathbf{ST} \rightarrow \mathbf{R}^4$  e  $\psi: \mathbf{ST} \rightarrow \mathbf{R}$ ), allora possiamo rimpiazzare la funzione  $T$  con un'appropriata funzione definita in base a tali funzioni. Se queste sono poi definite impiegando altre funzioni definite sui punti dello spazio-tempo e con valori fra questi stessi punti, possiamo impiegare queste ultime per rimpiazzare  $T$  senza alcun ricorso ai numeri reali.

Un argomento simile si richiama esplicitamente a numeri reali e a funzioni definite su tali numeri e con valori fra di essi. Come osserva lo stesso Field (*ib.*, pp. 5-6), esso, come altri argomenti impiegati nel suo libro, è quindi un argomento platonista. Questo non è tuttavia un problema secondo Field, posto che se è possibile "provare *platonisticamente* che le entità astratte non sono necessarie per le inferenze ordinarie a proposito del mondo fisico o per la scienza", allora *a fortiori* ogni argomentazione in favore del platonismo basata sull'argomento di indispensabilità è illegittima. Se il solo punto di Field fosse di contrastare l'argomento di indispensabilità, questa replica sarebbe inoppugnabile. Ma, come abbiamo visto, l'eliminabilità della matematica dalla fisica è anche una premessa essenziale per

mostrare la sua conservatività rispetto alla fisica stessa. Se per stabilire tale premessa, Field deve quindi far ricorso a supposizioni platoniste, non gli è più concesso di richiamarsi alla conservatività per spiegare l'applicabilità della matematica alla fisica senza richiedere la verità dei suoi teoremi (Chihara, 1990, pp. 162-163). È quindi la sua risposta al dilemma di Benacerraf che vacilla. Chihara (*ib.*), ha d'altra parte fatto notare che vi è di più: se per spiegare l'applicabilità della matematica ci si serve di argomenti platonisti, si fornisce una spiegazione alla quale nessun nominalista può credere, visto che impiega asserti che un nominalista non crede veri; quindi nemmeno Field dovrebbe poter credere alla sua stessa spiegazione, né potrebbe sperare di convincere della sua bontà altri nominalisti.

Questo a parte, gli argomenti di Field hanno suscitato molte altre critiche (alcune sono riassunte e discusse in Chihara, 1990, cap. 8, pp. 153-173 e Appendice; nell'Appendice sono discussi anche argomenti avanzati da Field, 1984, che Chihara considera come "gli inizi di una replica" alla sua stessa obiezione). Ne consideriamo solo due.

La prima si deve a Shapiro (1983). Per come è formulata da Field, la condizione di conservatività è ambigua: la si può intendere tanto come riferita alle conseguenze sintattiche, quanto a quelle semantiche, e quindi, tanto alla consistenza, in senso stretto, quanto alla soddisfacibilità semantica (la proprietà che un certo corpo di asserti possiede se vi è un'interpretazione per cui essi sono tutti veri). Per limitarci a una sola delle diverse formulazioni equivalenti proposte da Field, la prima lettura richiede, perché una teoria matematica  $M$  sia conservativa rispetto a un corpo  $N$  di asserti nominalisti, che un asserto nominalista  $\varphi$  sia deducibile da  $N+M$  solo se lo è da  $N$ . La seconda richiede invece che  $\varphi$  sia vero in ogni modello di  $N+M$  solo se è vero in ogni modello di  $N$ . Nel caso in cui  $N$  e  $M$  impieghino solo un linguaggio del primo ordine, allora il teorema di completezza di Gödel (1930) garantisce la coestensività di conseguenze semantiche e sintattiche (in quanto asserisce che nelle teorie del primo ordine è possibile dedurre una certa formula ben formata da un'altra se e solo se la seconda è soddisfacibile da tutti i modelli della prima). Ma la riformulazione della teoria della gravitazione di Newton proposta da Field impiega un linguaggio del secondo ordine, in cui vi sono variabili che variano sui punti dello spazio-tempo e altre che variano sulle sue regioni (ovvero su insiemi di tali punti) anche se egli (1980, cap. IX) suggerisce un modo per limitarsi a un linguaggio del primo ordine in cui le variabili variano solo su regioni (intese non come insiemi di punti ma come entità primitive). Field (1980, n.30) opta esplicitamente per l'interpretazione semantica e osserva che questo comporta la necessità di precisare alcuni dei suoi argomenti qualora si ammettano linguaggi del secondo ordine. Il punto di Shapiro è tuttavia che tanto l'ammissione di linguaggi del secondo ordine che la limitazione a linguaggi del primo ordine comportano difficoltà per l'argomento di Field (questo punto dipende da alcune condizioni relative a  $N$  e a  $M$  che sembrano del tutto plausibili, ma che qui non descriveremo).

Ammettiamo innanzitutto che  $N$  impieghi un linguaggio del secondo ordine, allora, gli argomenti offerti da Field a proposito della conservatività della matematica reggono solo se

riferiti alle conseguenze semantiche. Ma la conservatività semantica non è il genere di conservatività rilevante per il suo argomento, in quanto non assicura che la matematica sia utile in fisica perché permette di semplificare le deduzioni. Infatti, se la matematica è conservativa in senso solo semantico, allora, se  $\varphi$  è deducibile da  $N+M$  è certo che  $\varphi$  sia una conseguenza semantica di  $N$ , ma non è affatto detto che sia deducibile da  $N$ ; e se non lo è, allora il ricorso a  $M$  permette di dedurre una conseguenza di  $N$  che non è deducibile solo da  $N$ . Shapiro rinforza il suo punto con l'esempio di un asserto nominalista che non è un teorema della fisica nominalista di Field, ma si deduce da essa insieme alla teoria degli insiemi. Questo e altri esempi (cf. per esempio Burgess e Rosen, 1997, pp. 118-123) hanno provocato un vasto dibattito (un rapidissimo sommario del quale si trova in Shapiro, 2000a, pp. 235-237). Un punto rilevante è che lo stesso ricorso alle nozioni di conseguenza e soddisfacibilità semantica entro un linguaggio del secondo ordine (in cui tali nozioni non hanno alcuna controparte sintattica che potrebbe permettere di spiegarle) appare problematico per un nominalista, visto che la nozione di verità in ogni modello di un certo corpo (consistente) di asserti appare inevitabilmente non nominalista (su questo cf. tuttavia Field, 1984).

Supponiamo ora che  $N$  impieghi solo un linguaggio del primo ordine. Dobbiamo allora mostrare che la riformulazione della teoria di Newton suggerita da Field sia appropriata, e Shapiro lo nega, visto che non è possibile provare nella teoria così riformulata che i punti dello spazio-tempo (definiti come regioni senza sotto-regioni) soddisfano la stessa struttura soddisfatta dalle quadruple dei numeri reali. Il punto dell'argomento di Shapiro (1983, pp. 529-530) è che se supponiamo che  $N$  impieghi solo un linguaggio del primo ordine, non abbiamo una spiegazione appropriata di come la matematica si applichi alla teoria della gravitazione newtoniana. In generale, quello che Shapiro mostra è quindi che "o la matematica [...] non è conservativa nel modo filosoficamente rilevante, o non è applicabile alla fisica [...] nel modo usuale"<sup>9</sup>.

La seconda critica (per diverse versioni della quale, fra gli altri, cf. Malament 1982, pp. 531-532; Resnik, 1985, pp. 164-169; Petitot, 1995, pp. 155-156; Shapiro, 1997, pp. 75-77) concerne la tesi, essenziale affinché l'argomento di Field possa intendersi come un argomento contro il platonismo, secondo la quale i punti e le regioni dello spazio-tempo sarebbero oggetti concreti e la geometria euclidea, nell'assiomatizzazione proposta da Hilbert, sarebbe una teoria di tali oggetti (cosa che, per Field, ne farebbe una teoria fisica piuttosto che matematica). Chiaramente questo non era il punto di vista di Hilbert, e ben pochi matematici, fisici e storici della scienza sarebbero pronti a ammetterlo. Ma per non procedere tramite argomenti d'autorità, consideriamo il punto in dettaglio. Field ammette che su tali punti e regioni possano venir definite delle operazioni, relazioni e funzioni, le cui caratteristiche essenziali dipendono dal fatto che i punti formino un continuo, ovvero un insieme non numerabile, cosa che è d'altra parte esplicitamente stabilita da uno degli assiomi di Hilbert. Field riconosce che si tratta di un'assunzione assai forte, ma osserva

---

<sup>9</sup>Field (1985) risponde agli argomenti di Shapiro (per l'ultimo punto menzionato relativamente al caso del secondo ordine, cf. anche Field, 1984), ma le risposte non chiudono le questioni che essi sollevano.

(1980, p. 31) che secondo la sua visione del nominalismo “le obiezioni nominaliste all’uso dei numeri reali non si basano sulla loro non contabilità [ovvero sul fatto che essi formino un insieme non numerabile], o su assunzioni strutturali [...] che sono tipicamente fatte su di essi; le obiezioni riguardano piuttosto la loro astrattezza: anche postulando *un solo* numero reale si violerebbe il nominalismo”. E aggiunge (*ib.*, p. 33) che l’equivalenza strutturale fra un sistema di oggetti concreti, quale quello dei punti dello spazio-tempo, e un sistema basato sui numeri reali ( $\mathbf{R}^4$ ) non deve sorprenderci, posto che storicamente “la teoria dei numeri reali [...] si è precisamente sviluppata per trattare con lo spazio e il tempo fisici”.

Ciò è storicamente dubbio. Questo a parte, il punto non è se il nominalista obietta contro la non contabilità o contro l’astrattezza dei numeri reali, ma se un sistema formato da oggetti concreti possa avere la struttura di un continuo e le altre proprietà strutturali connesse che Field riconosce al sistema dei punti dello spazio-tempo. Come ha osservato Shapiro (2000a, p. 230), il punto non si riduce a domandarsi se lo spazio-tempo debba essere inteso come una realtà fisica o come una mera struttura relazionale, prendendo così posizione nella celeberrima disputa fra una concezione sostanzialista e un relazionista. Anche propendendo, come fa Field (1980, pp. 34-36), per la prima opzione e ammettendo che “i punti dello spazio tempo [...] sono entità che esistono in sé [*in their own right*]”, si potrebbe sostenere che riconoscere che i punti dello spazio-tempo sono fisicamente reali è diverso da dire che essi sono concreti. Il problema è quindi connesso al modo in cui Field distingue oggetti concreti e (presunti) oggetti astratti. Stranamente però egli è reticente su questa questione. Egli osserva (*ib.*, pp. 31-32) che “i punti dello spazio-tempo non sono entità astratte in nessun senso normale”, perché “la struttura dello spazio fisico è una questione empirica” e quindi la nostra conoscenza di tali punti non è *a priori*. L’argomento è debole, perché è possibile sostenere che certe “proprietà essenziali di certe entità astratte [quali gli enunciati o le proposizioni] sono conosciute empiricamente” (Resnik, 1983, p. 516). Ciò a parte, si potrebbe pensare che una condizione necessaria perché degli oggetti siano concreti sia che essi soddisfano la legge di Leibniz o principio degli indiscernibili: l’oggetto  $x$  è identico all’oggetto  $y$  se e solo se  $x$  gode di qualsivoglia proprietà monadica se e solo se  $y$  ne gode. Si potrebbe anche pensare che ogni oggetto concreto dovrebbe poter esistere come tale indipendentemente da una totalità a cui sia supposto appartenere (ovvero che gli oggetti concreti possano al più poter ammettere un’impredicatività definizionale, ma non ontologica: cf. §§ II.2, II.4.1 e II.5). Se così fosse, dovrebbe essere possibile, almeno supponendo che le nostre capacità sensoriali si possano indefinitamente sviluppare, identificarlo percettivamente distinguendolo da qualsiasi altro. Ma se i punti dello spazio-tempo formano un continuo sembra difficile ammettere che soddisfino entrambe queste condizioni (per la seconda condizione la difficoltà dovrebbe sembrare chiara; nel caso della prima, essa dipende dal fatto che i punti di un continuo non sembrano potersi distinguere fra loro in base alle loro proprietà monadiche). Si potrebbe continuare, riferendosi a altri modi, non necessariamente incompatibili con questi, di intendere la distinzione fra oggetti astratti e concreti.

Ma ammettiamo che i punti dello spazio-tempo siano davvero oggetti concreti (cf. anche Field, 1982, pp. 59-63 per altri argomenti al riguardo). Resterebbe da decidere se sia possibile definire in base a essi, senza ricorrere a altri oggetti astratti, per esempio agli insiemi, tutto l'apparato necessario per ottenere la geometria che interviene nella ricostruzione proposta da Field della teoria della gravitazione newtoniana. Field pensa ovviamente di sì, e argomenta (1980, pp. 36-40) che le regioni dello spazio-tempo (fra cui i segmenti) si possono pensare come somme mereologiche di punti<sup>10</sup>, piuttosto che come insiemi. Se così fosse, allora sarebbe non solo possibile considerare la geometria, almeno quella euclidea (ammesso che la supposta struttura reale dello spazio-tempo sia euclidea) come una teoria di oggetti concreti, ma anche definire i numeri reali e l'intero apparato dell'analisi matematica in base a simili oggetti, o perfino considerare i numeri reali come oggetti concreti. La complessa strategia di Field si mostrerebbe quindi inutile, visto che sarebbe allora possibile rispondere al dilemma di Benacerraf, almeno per una larga parte della matematica, e fornire, più in generale, un'appropriata filosofia per essa, ammettendo che tratta di oggetti concreti<sup>11</sup>. Certo, occorrerebbe spiegare come si possa avere conoscenza (apparentemente *a posteriori*) di tali oggetti, come si possa accedere a essi; se non fosse possibile spiegarlo, il nominalismo di Field, comunque inteso, si mostrerebbe incapace di rispondere al problema dell'accesso e al dilemma di Benacerraf.

## 2. Matematica come finzione: Field e Yablo

Il complesso argomento di Field è volto negare che i teoremi della matematica debbano essere veri per potersi applicare con successo alla fisica. Ma come dobbiamo intendere gli asserti matematici in quanto tali, e rendere conto della convinzione diffusa e naturale che asserendo i teoremi della matematica facciamo asserzioni vere (non vacuamente)?

Abbiamo visto che l'argomento di Field non si basa sul tentativo di riformulare gli asserti matematici in un linguaggio nominalista. Anzi, Field sostiene ripetutamente che l'interpretazione corretta degli asserti matematici è quella che li intende come asserti che trattano di oggetti matematici. Poiché tali oggetti non esistono, coloro che ritengono veri (non vacuamente) i teoremi della matematica semplicemente si sbagliano. Quella di Field sembra configurarsi allora come un tipo di teoria dell'errore, simile a quella proposta in ambito etico da John Leslie Mackie (1977): se credere che  $p$  significa credere che l'asserto  $p$  sia vero, e credere che  $p$  è vero implica credere che esistano gli oggetti la cui esistenza è condizione necessaria per la verità di  $p$ , dalla posizione di Field segue che i parlanti (tanto quelli ordinari quanto gli scienziati e i matematici) sono in errore se credono che  $2+2=4$  o che 8 sia il numero dei pianeti.

Field ritiene però che si possa parlare di verità degli asserti matematici anche in un altro

---

<sup>10</sup>Nell'accezione rilevante qui, il linguaggio della mereologia si basa su una relazione fondamentale, quella di (essere) parte di, che si applica a oggetti concreti. Se questi oggetti non hanno parti, sono detti 'atomi'. Un oggetto concreto che ha parti è detto 'somma mereologica' delle sue parti, che possono essere sia atomi che altre somme mereologiche. Una somma mereologica è quindi un oggetto concreto formato da parti (atomi o somme) a loro volta concrete che non devono essere necessariamente contigue spazialmente (si può per esempio considerare la somma mereologica del Monte Bianco e della torre di Pisa). Chiaramente, in tale linguaggio si quantifica solamente su oggetti concreti (atomi o somme). Per un'introduzione e per precisazioni, cf. Varzi, 2009.

<sup>11</sup>Burgess e Rosen (1997, II.A) mostrano dettagliatamente come questa strategia potrebbe procedere.

sensu (1980, p. 2; 1989, pp. 1-14), secondo il quale essa non dipende dall'esistenza e dalle eventuali proprietà di certi oggetti astratti. Si tratta di adottare nei confronti di tali asseriti la posizione nota con il nome di 'finzionalismo'. Vi sono molti modi di caratterizzare tale posizione (cf. Papineau, 1988; Yablo 2001; Kalderon, 2005; Eklund, 2007; Balaguer, 2008). In generale, possiamo dire che il finzionalismo riguardo a un particolare ambito del discorso è la tesi secondo la quale gli asseriti che appartengono a tale ambito devono essere intesi in analogia con gli asseriti di una storia di finzione. In particolare, i termini singolari che occorrono in tali asseriti devono essere interpretati in analogia con i nomi dei personaggi di una finzione: non esistono realmente oggetti quali, per esempio, i numeri naturali, ma possiamo parlare dei numeri naturali purché li concepiamo come finzioni utili per determinati scopi. Possiamo quindi dire che gli asseriti matematici sono veri (non vacuamente) se, dicendolo, non intendiamo dire che sono veri in senso proprio, o *simpliciter*, quanto piuttosto che essi sono veri-in-una-storia. Allo stesso modo parliamo di Sherlock Holmes e diciamo che l'asserto 'Sherlock Holmes vive a Londra in Baker Street' è vero (non vacuamente), senza però ritenere né che esista realmente Sherlock Holmes, né che sia letteralmente vero che abita in Baker Street. Il predicato 'vero-nella-storia' funzionerebbe all'interno di una determinata storia allo stesso modo in cui il predicato 'vero' funziona nel discorso ordinario: per esempio, se l'asserto 'Esistono numeri primi maggiori di 2', preso alla lettera, è vero-nella-storia, allora è vero-nella-storia che esistono numeri, alcuni dei quali sono primi e maggiori del numero 2. Non vi è però nessuna garanzia che un asserto vero-nella-storia sia anche vero *simpliciter*. Naturalmente ciò può avvenire, per esempio se nella finzione vi fosse l'asserto 'Il 221b di Baker Street si trova tra Park Road e Melcombe Street', ma in ogni caso ciò che rende vero-nella-storia l'asserto è ciò che viene detto nella storia, mentre ciò che lo rende vero *simpliciter* (non vacuamente) è il modo in cui le cose stanno nella realtà. È solo nella storia dell'aritmetica che vi sono determinati oggetti matematici, i numeri naturali, che possiedono determinate proprietà e che rendono veri-nella-storia gli asseriti dell'aritmetica.

Un problema fondamentale per il finzionalista è quello di chiarire in che senso le teorie matematiche possano essere considerate in analogia con le storie di finzione. Per esempio, in un romanzo vi è, da parte dell'autore, una libertà di stabilire cosa deve essere considerato vero-nella-storia che sembra assente nella matematica. Questo non è un problema insormontabile per il finzionalista, se si è disposti a concedere che una storia di finzione possa essere anche estremamente codificata, e prevedere criteri precisi per stabilire quando un asserto debba essere considerato vero-nella-storia, anche sulla base del fatto che altri asseriti siano ritenuti veri-nella-storia.

Fermiamoci per il momento a questa descrizione approssimativa del finzionalismo e torniamo a Field. Il finzionalismo serve a Field per rimediare a certi aspetti implausibili della sua posizione. In primo luogo, gli consente di spiegare, almeno parzialmente, in che senso gli asseriti della matematica possano essere ritenuti veri (non vacuamente) da molti di coloro che li asseriscono. In secondo luogo, consente a Field di rispondere a una possibile

obiezione, quella di non poter rendere conto dell'oggettività della matematica. Prendiamo due asserti matematici come '3+2=5' e '3+2=7'. Il primo è generalmente ritenuto vero, il secondo no. Ma per Field nessuno di questi due asserti è vero *simpliciter*, o, al più, essi sono entrambi vacuamente veri (se interpretati come implicazioni universali del tipo 'per ogni  $x, y, z$ , se  $x = 3, y = 2, e z = 5$ , allora ...'). Grazie al suo finzionalismo, Field (1998) può sostenere che il primo di tali asserti è generalmente ritenuto vero (non vacuamente), a differenza del secondo, in quanto esso, a differenza del secondo, segue dagli assiomi correntemente accettati dell'aritmetica, e è quindi vero-nella-storia dell'aritmetica (allo stesso modo in cui 'Sherlock Holmes vive a Londra' è vero-nella-storia de *Il mastino dei Baskerville*, al contrario di 'Sherlock Holmes vive a Manchester').

Balaguer (2009, pp. 136-137) ha fatto notare un limite di questa posizione. Nel §II.5 abbiamo accennato all'indipendenza dell'ipotesi del continuo (CH) dalla teoria degli insiemi ZFC, ovvero al fatto che i sistemi di assiomi ZFC+CH e ZFC+¬CH sono entrambi consistenti. Supponiamo ora chela comunità matematica pervenga un giorno a identificare e accettare un nuovo assioma  $\alpha$ , che sia ritenuto evidente e possa essere aggiunto agli assiomi di ZFC in modo da ottenere una nuova teoria ZFC+ $\alpha$  da cui segua ¬CH. Molti reagirebbero sostenendo che ¬CH è sempre stata vera, anche se non lo si sapeva, e che quella ottenuta è una scoperta genuina. Se il richiamo alla verità-nella-storia deve consentire a Field di rendere conto della convinzione diffusa che i teoremi della matematica sono veri, allora, secondo Balaguer, Field dovrebbe poter rendere conto anche di una simile reazione. Ma la nozione di verità-nella-storia fa riferimento solo alle teorie matematiche correntemente accettate, e queste teorie (nello specifico ZFC) sono consistenti tanto con ¬CH che con CH. Tutto ciò che Field può dire è che né ¬CH né CH sono al momento veri-nella-storia della teoria degli insiemi, e che ¬CH sarebbe vera in una storia differente, quale quella di ZFC+ $\alpha$ . Ma non può render conto dell'intuizione diffusa secondo cui può venir scoperta una verità che prima non si sapeva essere tale, anche se lo era: per farlo dovrebbe sostenere che vi sia una storia per così dire ideale della teoria degli insiemi, che essa possa essere diversa da tutte le teorie degli insiemi correntemente accettate, e che un asserto possa essere vero-nella-storia (ideale) della teoria degli insiemi anche se non è possibile dire se esso è tale basandosi solamente sulle teorie correntemente accettate (l'essere vero nella storia ideale sarebbe un corrispettivo dell'essere vero di qualcosa anche prima che la sua verità sia scoperta). Non è chiaro però perché Field non dovrebbe poter reagire sostenendo che l'intuizione di cui parla Balaguer, per quanto diffusa, è un'intuizione che potrebbe essere fondata per un platonista ma del tutto infondata per un finzionalista.

Quella di Field è solo una tra tante posizioni finzionaliste. Per orientarsi tra le varie proposte è utile presentare la distinzione, suggerita da John Burgess e Gideon Rosen<sup>12</sup>, fra nominalismo rivoluzionario e nominalismo ermeneutico. Semplificando su alcuni dettagli,

---

<sup>12</sup>Originariamente suggerita da Burgess, 1983; poi precisata in Burgess e Rosen, 1997, pp. 6-7; per una formulazione più dettagliata, cf. Burgess e Rosen, 2005, pp. 515-518; per discussioni, cf. Chihara (2005), pp. 483-489 e Hellman (1998).

possiamo dire che il nominalista rivoluzionario è quello che ritiene che: *i*) gli asserti matematici (puri o impuri), letteralmente intesi, dicono ciò che il platonista ritiene che dicano; *ii*) visto che non esistono oggetti matematici, tali asserti, letteralmente intesi, non sono mai veri (se non vacuamente); *iii*) le abituali teorie matematiche e le teorie scientifiche che integrano parti di matematica dovrebbero essere rimpiazzate da opportune riscritture nominaliste. Il nominalista ermeneutico, in particolare quello che Burgess e Rosen (2005, p. 517) chiamano ‘nominalista ermeneutico del contenuto’, condivide le tesi (*i*) e (*ii*). Egli ritiene tuttavia che, se si intendono letteralmente gli asserti matematici (puri o impuri), non se ne esprime correttamente il contenuto reale. Il nominalista rivoluzionario pensa che la forma superficiale degli asserti matematici suggerisca che essi hanno il contenuto che anche il platonista ritiene che abbiano. Il nominalista ermeneutico concorda su questo; ritiene però che la loro forma superficiale sia fuorviante: se tali asserti sono correttamente intesi, il loro contenuto reale si mostra perfettamente accettabile per un nominalista. Il nominalista ermeneutico non condivide quindi con quello rivoluzionario la tesi (*iii*): non mira a suggerire riformulazioni nominaliste degli asserti matematici, quanto piuttosto a mostrare che questi stessi asserti hanno già, come tali, un contenuto nominalisticamente accettabile. Il suo compito è mostrare come questo contenuto possa essere espresso in termini nominalistici o, se non può esserlo, in che senso esso sia accettabile per un nominalista<sup>13</sup>.

Un'altra versione del nominalismo ermeneutico è quella che Burgess e Rosen (*ib.*, p. 516) chiamano ‘nominalismo ermeneutico dell’atteggiamento [*attitude*]’, intendendo riferirsi all’atteggiamento proposizionale<sup>14</sup> dei matematici o degli scienziati che accettano senza esplicite riserve gli asserti matematici, così come abitualmente formulati, e fanno affidamento su di essi per gli scopi della loro attività. Il punto di questa posizione è che tale comportamento non indica affatto che costoro assumano l’atteggiamento proposizionale della credenza quando asseriscono o accettano tali asserti, cioè che essi li credano veri, letteralmente intesi.

Questa seconda versione del nominalismo ermeneutico è la più controversa, perché si basa su un giudizio di fatto a proposito di ciò che matematici e scienziati effettivamente credono, che è difficile da confermare o falsificare (nessuna inchiesta psicologica o sociologica sembra infatti poter stabilire, in generale, l’atteggiamento reale dei matematici e degli scienziati). Ciò che è rilevante, comunque, è che anche in questa versione il nominalismo ermeneutico, a differenza di quello rivoluzionario, non richiede di rimpiazzare gli asserti della matematica usuale con appropriate riscritture nominaliste.

Stanely (2001) ha indicato come applicare la distinzione tra nominalisti rivoluzionari e ermeneutici al caso del funzionalismo. I funzionalisti rivoluzionari avrebbero una posizione prescrittiva: ammetterebbero che gli asserti matematici, presi alla lettera, trattano di oggetti

---

<sup>13</sup>Burgess e Rosen utilizzano intercambiabilmente espressioni come ‘contenuto’, ‘ciò che un asserto dice’, e ‘significato’. Per evitare le precisazioni che sarebbero richieste, impiegheremo qui il solo termine ‘contenuto’.

<sup>14</sup>Aggiungiamo la specificazione ‘proposizionale’ per chiarire che il termine ‘atteggiamento’ è usato nel senso specifico di ‘atteggiamento proposizionale’, cioè per denotare stati mentali che vengono indicati da espressioni quali ‘credere che’, ‘desiderare che’ e simili. Non vogliamo comunque implicare (né lo vogliono gli autori considerati) che sostenere che un soggetto adotti un particolare atteggiamento proposizionale comporti di per sé credere all’esistenza di proposizioni in quanto oggetti astratti distinti dagli asserti.



astratti, ma suggerirebbero che dovremmo intendere questo loro trattare di oggetti astratti così come intendiamo il trattare degli asserti di una storia di finzione dei personaggi di tale storia. I finzionalisti ermeneutici avrebbero invece una posizione descrittiva: intenderebbero mostrare che la comprensione degli asserti matematici che opera di fatto nella pratica matematica e scientifica è quella secondo cui tali asserti sono propri di una storia di finzione.

Non è immediato collocare la posizione di Field in base alle distinzioni precedenti. Da una parte, egli intende mostrare come possiamo riscrivere nominalisticamente le nostre teorie scientifiche, e ciò suggerisce che egli possa essere annoverato fra i nominalisti rivoluzionari (così come fanno Burgess e Rosen). Egli però non propone nessuna riformulazione nominalista delle teorie matematiche (neppure di quelle impiegate nelle stesse teorie scientifiche), che propone piuttosto di eliminare. Inoltre, Field non suggerisce mai che le teorie scientifiche attuali debbano essere rimpiazzate nella pratica scientifica con le loro versioni nominalistiche<sup>15</sup>. Per quanto riguarda il suo finzionalismo, Field è comunque sicuramente lontano da posizioni ermeneutiche. Se anche ritiene che credere letteralmente a un asserto matematico comporti un errore, Field (1989, p. 8) sostiene che sia comunque implausibile attribuire in generale alcuna posizione specifica (platonista o finzionalista che sia) a parlanti ordinari o a matematici e fisici, che in media non avrebbero “una visione coerente” di ciò che la credenza in asserti matematici comporta da un punto di vista ontologico.

Una versione di finzionalismo apertamente ermeneutica è quella di Yablo (1998, 2001, 2002, 2005)<sup>16</sup>. Spesso il finzionalismo è sostenuto senza chiarire a fondo in che cosa consista intendere un determinato discorso come una storia di finzione. Per chiarirlo è infatti necessario affrontare questioni particolarmente complesse proprie alla filosofia del linguaggio, che riguardano in primo luogo la distinzione fra comprensione letterale e non letterale di un certo discorso, in particolare l’opportunità di intendere tale distinzione come relativa a contenuti diversi che gli stessi asserti possono esprimere oppure all’atteggiamento proposizionale che i parlanti possono assumere nei confronti di uno stesso asserto. Yablo ha più di altri cercato di mostrare in che senso le teorie matematiche possono venire assimilate a storie di finzione, o, più in generale, al discorso figurativo (in particolare metaforico). Nella sua posizione si mescolano aspetti di nominalismo ermeneutico del contenuto e dell’atteggiamento proposizionale. Secondo Yablo: *i*) dato un asserto matematico, è possibile distinguere il suo “contenuto letterale” (platonista) dal suo “contenuto reale” (nominalista); *ii*) il primo fra questi contenuti è vero-nella-storia della matematica, mentre il secondo è vero *simpliciter*; *iii*) quando tanto i parlanti ordinari che i matematici o gli scienziati asseriscono un asserto matematico, a meno che non ammettano specifiche

---

<sup>15</sup>Hellman (1998, pp. 342-344) ha criticato la distinzione di Burgess e Rosen sostenendo che non è in generale un obiettivo dei nominalisti, nemmeno di quelli classificati come rivoluzionari, proporre che le versioni nominaliste delle teorie matematiche o scientifiche abituali rimpiazzino queste ultime nella pratica: si tratterebbe invece in generale di teorie sull’epistemologia della matematica, compatibili con l’impiego nella pratica delle teorie abituali.

<sup>16</sup>Ci limitiamo qui a trattare la posizione di Yablo per come essa è presentata in lavori già pubblicati, nonostante Yablo l’abbia recentemente elaborata e modificata.

stipulazioni platoniste, ne asseriscono il contenuto reale<sup>17</sup>. Ne segue che per Yablo chi asserisce un asserto matematico lo asserisce in uno “spirito finzionalista” (Yablo 2001, p. 74), senza credere che sia letteralmente vero; fa cioè “come se” esistessero oggetti matematici, senza però credere letteralmente che esistano. Il contenuto letterale di un asserto matematico non è quindi mai asserito; al più è “quasi-asserito”. Questo per Yablo richiede che un finzionalista, di qualunque tipo, specifichi una distinzione tra asserzioni reali e quasi-asserzioni.

Secondo Yablo, Field non sarebbe in grado di render conto adeguatamente di questa distinzione. La sua posizione potrebbe essere intesa come una sorta di “meta-finzionalismo”: quando asseriamo un asserto matematico  $\varphi$ , per esempio ‘ $3+5=8$ ’, non facciamo in realtà che fingere di asserirne il contenuto (letterale), asserendo invece, di fatto, che  $\varphi$  è l’asserto che deve essere asserito in quanto soddisfa una certa condizione di correttezza  $C$  (nel caso di Field  $C$  è che  $\varphi$  segua dagli assiomi delle teorie matematiche attualmente accettate). Il contenuto reale della nostra asserzione sarebbe dunque che  $\varphi$  soddisfa  $C$ . Secondo Yablo, questa posizione ha tre problemi. Il primo è di natura modale: mentre sembra chiaro che se ‘ $3+5=8$ ’ è ritenuto vero, allora debba essere ritenuto necessariamente vero, è ovvio che non è necessariamente vero che ‘ $3+5=8$ ’ segua dalle nostre teorie attuali (potremmo non avere alcuna teoria, o averne di diverse da come sono ora). Il secondo problema riguarda l’intento delle nostre asserzioni: se asseriamo ‘Il numero dei senza tetto è molto grande’, non abbiamo certo l’intento di asserire che il numero dei senza tetto è grande secondo le teorie matematiche attuali (non è ciò che riguarda queste teorie che ci interessa in questi casi). Vi è infine un problema fenomenico: in asserzioni come la precedente non ci sembra affatto di star dicendo alcunché riguardo a una teoria matematica come tale.

Per evitare tali difficoltà, Yablo suggerisce una posizione che chiama ‘finzionalismo oggettuale [*object fictionalism*]’, secondo la quale, mentre il contenuto letterale di un asserto  $\varphi$  proprio di una storia di finzione  $\mathcal{F}$  (ovvero ciò che quasi-asseriamo asserendo tale asserto) è ciò che è vero-in- $\mathcal{F}$ , il suo contenuto reale (ovvero ciò che asseriamo realmente asserendolo) è che si dà la circostanza reale  $k_{\varphi}^{\mathcal{F}}$  che rende  $\varphi$  vero sulla base di ciò che è stabilito in  $\mathcal{F}$ , ovvero che fa sì che esso sia vero-in- $\mathcal{F}$ .

Consideriamo un esempio. Nella finzione dell’aritmetica, stabiliamo che vi siano (nella finzione stessa) delle entità alle quali sia possibile richiamarsi per indicare quanti oggetti di un certo genere — per esempio quante lune di Marte — vi siano nella realtà. Tale finzione stabilisce quindi che vi è un’entità, il numero cardinale 2, tale che è possibile richiamarsi a essa per esprimere il fatto reale che le lune di Marte sono quante esse di fatto sono, posto che tale entità è proprio quella che, secondo la finzione, è il numero delle lune di Marte. In questo caso, la circostanza reale che fa sì che sia vero-nell’aritmetica (o meglio, nella

---

<sup>17</sup>Non è chiaro se Yablo identifichi il contenuto di un asserto con una proposizione, come spesso accade. Nel seguito ammetteremo che il contenuto di un asserto sia qualcosa che possa essere vero o falso e che esso possa essere asserito, e che esso corrisponda a un fatto, o al verificarsi di una circostanza.

finzione che si genera a proposito del mondo, una volta adottata la finzione dell'aritmetica) che 2 (piuttosto che un altro numero naturale) è il numero delle lune di Marte è che le lune di Marte sono quante esse di fatto sono. E questa circostanza è quindi quella che fa sì che l'asserto 'il numero delle lune di Marte è 2' sia vero-nell'aritmetica (applicata). Quindi il contenuto reale di tale asserto è che tale circostanza ha luogo, e questo può esser descritto senza richiamarsi a alcun numero naturale tramite l'uso di quantificatori numerici (cf. §1). Il contenuto letterale del nostro asserto è invece che 2 è il numero delle lune di Marte: questo è infatti ciò che vero-nell'aritmetica.

La differenza fra un meta-finzionalista alla Field e un funzionalista oggettuale può allora essere spiegata come segue: per entrambi, quando asseriamo un asserto  $\varphi$  proprio di una certa storia di finzione  $\mathcal{F}$ , quasi-asseriamo ciò che è vero-in- $\mathcal{F}$  (ovvero il contenuto letterale di  $\varphi$ ); ma mentre per il primo asseriamo realmente che  $\varphi$  è vero-in- $\mathcal{F}$ , per il secondo asseriamo realmente che si dà la circostanza reale  $k_{\varphi}^{\mathcal{F}}$ .

A suggerire la lettura della posizione di Field come un tipo di meta-finzionalismo è principalmente un passo in cui Field (1989, p. 3) dice che "il finzionalista *crede* che  $2+2=4$  solo nel senso che egli [...] crede che la matematica standard *dice che* (o *ha come conseguenza che*)  $2+2=4$ ". La lettura di Yablo, che forza in parte quanto dice Field, nasconde una differenza importante tra i due. Field infatti non distingue esplicitamente tra contenuto letterale e contenuto reale, né tra asserzioni o quasi-asserzioni. Se sostiene che un teorema della matematica non è vero *simpliciter*, ma è vero-nella-storia, non è perché ritiene che esso possa essere inteso in due maniere distinte. L'asserto esprime sempre lo stesso contenuto (platonista), e per poter dire che esso è vero-nella-storia dell'aritmetica dobbiamo per così dire guardare la finzione dal di fuori, e riconoscere a esso la proprietà di seguire dagli assiomi che fissano la storia.

Ma torniamo alla differenza fra le due posizioni per come Yablo la intende. Tale differenza è evidente se  $\varphi$  è un asserto matematico impuro, come appunto 'il numero delle lune di Marte è 2'. Per entrambe le posizioni, quando asseriamo tale asserto, quasi-asseriamo che il numero 2 è il numero delle lune di Marte; ma, mentre per il meta-finzionalista quello che asseriamo realmente è che dagli assiomi dell'aritmetica (congiuntamente a certe circostanze reali) segue 'il numero delle lune di Marte = 2', per il finzionalista oggettuale quello che asseriamo realmente è che le lune di Marte sono quante di fatto sono.

Supponiamo ora che  $\varphi$  sia un asserto della matematica pura, per esempio ' $3+5=8$ '. È chiaro che per entrambe le posizioni, quando lo asseriamo quasi-asseriamo che la somma dei numeri 3 e 5 è il numero 8, e che per un meta-finzionalista quello che asseriamo realmente è che dagli assiomi dell'aritmetica segue ' $3+5=8$ '. Resta da chiarire ciò, secondo un finzionalista oggettuale, asseriamo realmente, ovvero quale sia per quest'ultimo la circostanza reale che fa sì che ' $3+5=8$ ' sia vero-nell'aritmetica. Una prima opzione potrebbe essere che tale circostanza è che gli assiomi dell'aritmetica sono tali che da essi segue che la somma dei numeri 3 e 5 è il numero 8, ovvero che si dia il fatto che

l'aritmetica sia fatta in modo tale che le cose stiano così.

Yablo adotta invece una seconda opzione (2001, p. 78; 2002, p. 178). Supponiamo di aver già introdotto la finzione dell'aritmetica, in modo tale che se nella realtà vi sono tre  $F$  e cinque  $G$  possiamo dire, avvalendoci di tale finzione, che il numero degli  $F$  è 3 e il numero dei  $G$  è 5. Se assumiamo che il numero degli  $F$  è 3, il numero dei  $G$  è 5, e che nessun  $F$  è  $G$  e viceversa, ne segue che il numero degli  $(F \text{ o } G)$  è 8. Possiamo esprimere la circostanza reale che rende quest'ultimo asserto vero nella storia  $\mathcal{F}$  (l'aritmetica), con l'asserto (chiamiamolo  $\psi$ ): 'se ci sono tre  $F$ , e ci sono cinque  $G$ , e nessuno degli  $F$  è un  $G$  e viceversa, allora ci sono otto  $(F \text{ o } G)$ ', asserto che possiamo esprimere nel calcolo dei predicati del primo ordine avvalendoci dei quantificatori numerici come segue: ' $\exists_3 x Fx \wedge \exists_5 y Gy \wedge \forall x \neg (Fx \wedge Gy) \Rightarrow \exists_8 z (Fz \vee Gz)$ '. Yablo ritiene che  $\psi$ , esprima il contenuto reale di ' $3+5=8$ '. Dal momento che  $\psi$  esprime una verità della logica del primo ordine, Yablo (grazie anche a certe assunzioni necessarie per rendere conto di asserti aritmetici quantificati, cf. Yablo, 2002, p. 179), ne conclude che "il contenuto reale di qualunque verità dell'aritmetica è una verità logica" (*ib.*).

In realtà questa analisi di Yablo nasconde un problema: se consideriamo  $\psi$  come un vero e proprio asserto, in cui ' $F$ ' e ' $G$ ' sono costanti predicative, esso si limita a esprimere una implicazione che vale per gli oggetti che godono di due specifici predicati. Ma è chiaro che quello che vogliamo asserire quando asseriamo ' $3+5=8$ ' non riguarda in particolare alcun predicato specifico. Sostenere che  $\psi$  esprima il contenuto reale di ' $3+5=8$ ' sembra quindi inadeguato. Yablo non affronta esplicitamente questo problema, ma ha suggerito (in conversazione) una possibile soluzione. Una possibilità sarebbe quella di sostenere che il significato reale di ' $3+5=8$ ' è dato non da  $\psi$ , ma da un asserto formulato nella logica del secondo ordine che preveda una doppia quantificazione universale su variabili predicative, ' $\forall F \forall G$ '. Questo però introdurrebbe il problema di dover rispondere alla critica di Quine secondo cui la logica del secondo ordine non è altro che teoria degli insiemi (cf. cap. II, n.12). Piuttosto, Yablo suggerisce che  $\psi$  non debba essere considerato come un asserto, ma come uno schema, e che di conseguenza ' $F$ ' e ' $G$ ' debbano essere considerate non come costanti predicative, ma come lettere predicative schematiche. In questo modo  $\psi$  esprimerebbe un'implicazione che rimane valida per qualunque sostituzione di due particolari costanti predicative alle lettere schematiche ' $F$ ' e ' $G$ '. Questa possibile soluzione apre però un ulteriore problema. Infatti secondo Yablo  $\psi$  esprime il contenuto reale di ' $3+5=8$ ', e come è qualcosa che deve poter essere asserito: ma non è affatto chiaro come sia possibile sostenere che ciò che asseriamo sia uno schema di asserti<sup>18</sup>.

Le due opzioni, quella di Field e quella di Yablo, relative alla circostanza reale che fa sì che ' $3+5=8$ ' sia vero-nell'aritmetica hanno un importante aspetto in comune: in entrambi i casi, il fatto che si dia tale circostanza non dipende né dall'aritmetica stessa, né da alcuna presupposizione di natura platonista. Entrambe sono quindi appropriate in una prospettiva nominalista. Ma vi sono differenze rilevanti.

<sup>18</sup>Su questo, cf. McGee (1997), pp. 56-62.

Una è che l'opzione di Yablo sembra difficilmente replicabile per asserti come 'vi sono infiniti numeri primi': in questo caso è infatti difficile immaginare quale possa essere la condizione reale che rende vero l'asserto nella finzione dell'aritmetica<sup>19</sup>, mentre parrebbe ovvio poter dire, in base alla prima opzione, che la circostanza reale che fa sì che tale asserto sia vero-nell'aritmetica è che gli assiomi dell'aritmetica sono tali che da essi segue che vi sono infiniti numeri primi (ovvero, per essere più precisi e restare fedeli al modo in cui tale asserto è provato nell'aritmetica), che per ogni numero primo si possa indicare come ottenere un numero primo maggiore.

In base a questa differenza la prima opzione potrebbe sembrare più soddisfacente. Vi sono tuttavia altre differenze che sembrano motivare la scelta di Yablo. Yablo ritiene che si possa dire che, come abbiamo visto sopra, è logicamente vero che si dia la circostanza reale che fa sì che '3+5=8' sia vero-nell'aritmetica, mentre è chiaro che non è affatto logicamente vero che gli assiomi dell'aritmetica siano tali che da essi segue che la somma di 3 e 5 è 8. La scelta di Yablo permetterebbe quindi a quest'ultimo di risolvere il problema modale che egli imputa alla posizione di Field: il contenuto reale di '3+5=8' sarebbe infatti logicamente, e quindi necessariamente, vero.

Questo non sembra però poter essere la ragione fondamentale per adottare l'opzione di Yablo. Nulla impone per esempio di ritenere che le verità della matematica pura siano verità logiche, anche se questa è certamente una opinione diffusa. Inoltre, anche se con ragioni e modalità differenti, lo stesso Field (1984) ha sostenuto una posizione simile<sup>20</sup>. La soluzione del problema modale potrebbe al più rendere l'opzione di Yablo preferibile a quella di Field se essa potesse essere estesa a qualunque asserto aritmetico, e a qualunque teoria matematica. Ma, oltre ai problemi già notati nel caso di asserti come 'vi sono infiniti numeri primi', e anche se Yablo (2002, pp. 179-185) suggerisce come estendere la sua opzione alla teoria degli insiemi, non è chiaro se egli sia in grado di sostenere adeguatamente né che il contenuto reale di asserti della teoria degli insiemi è costituito da verità logiche, né se lo stesso possa dirsi per qualunque teoria matematica accettata.

La situazione è più semplice per ciò che riguarda gli due altri problemi che Yablo imputa alla posizione di Field. L'asserto 'il numero dei senza-tetto è grande' può essere trattato facilmente come Yablo propone di trattare 'il numero delle lune di Marte è 2': il suo contenuto reale è che i senzاتetto sono quanti di fatto sono e che essi sono tanti quanti noi riteniamo essere molti. Se il contenuto reale di quell'asserto è così inteso, esso non riguarda dunque affatto l'aritmetica: tanto il problema dell'intento che quello fenomenico sono dissolti.

Riprendiamo la nostra esposizione. Ammettiamo che il contenuto reale di un certo

---

<sup>19</sup>Yablo ha recentemente sostenuto, in sede di conferenze, che il contenuto letterale di un asserto come 'vi sono infiniti numeri primi' debba essere considerato come ellittico per l'asserto 'esistono numeri naturali, e essi sono tali che ve ne è un numero infinito di essi che sono primi'. 'Vi sono infiniti numeri primi' dovrebbe essere quindi considerato alla stregua di un asserto che esprime una legge fisica come 'i corpi che non subiscono alcuna forza si muovono a velocità costante' (che andrebbe reso come 'esistono corpi sui quali non agisce nessuna forza, e essi sono tali che si muovono a velocità costante'). In altre parole, il contenuto reale di quell'asserto non esprimerebbe altro che una condizione che i numeri naturali soddisferebbero se esistessero, anche se di fatto non esistono. Resta però che il contenuto reale dell'asserto in questione non sarebbe determinato da una condizione che si verifica all'esterno della finzione dell'aritmetica.

<sup>20</sup>Cf. n.1.

asserto possa essere espresso a sua volta da un altro asserto, inteso letteralmente. Yablo suggerisce che si possa definire una funzione  $CR$  che prende come argomenti degli asserti qualsiasi e associa a qualsivoglia asserto  $\varphi$  l'asserto  $CR(\varphi)$  che, se inteso letteralmente, esprime il contenuto reale di  $\varphi$ . Se  $\varphi$  è quindi un asserto di una storia di finzione  $\mathcal{F}$ , in particolare di una teoria matematica  $M$  (pura o impura che sia),  $CR(\varphi)$  è l'asserto che, se inteso letteralmente, esprime la circostanza  $k_\varphi^M$  che rende  $\varphi$  vero-in- $M$ .

Il problema è di stabilire come la funzione  $CR(\varphi)$  possa essere definita in generale, o almeno di determinarne il valore nel caso di asserti matematici di genere diverso. Nei due casi considerati qui sopra — ‘il numero delle lune di Marte è 2’ e ‘ $3+5=8$ ’ — questo può farsi abbastanza semplicemente (al di là delle possibili divergenze di opinione riguardo al secondo). Ma abbiamo già visto che altri casi possono presentare maggiori difficoltà.

Yablo non considera nel dettaglio tutti i possibili casi rilevanti, ma suggerisce (2005, pp. 103-108) un modo in cui è possibile trattare casi diversi da quelli più semplici considerati sopra. Supponiamo di avere avuto degli antenati “goodmaniani”: antenati il cui unico linguaggio fosse un linguaggio mereologico nominalista<sup>21</sup>, tale da poter essere codificato nel “calcolo degli individui” di Nelson Goodman (1951). Yablo immagina allora un immaginario processo storico attraverso il quale, spinti prevalentemente dalla necessità di disporre di linguaggi sempre più semplici per far fronte a difficoltà e esigenze pratiche, gli uomini abbiano gradualmente introdotto delle storie di finzione che consentissero loro di parlare di: numeri finiti di oggetti concreti; numeri finiti di numeri finiti; operazioni su numeri finiti; insiemi finiti di oggetti concreti; insiemi infiniti di oggetti concreti; numeri infiniti di oggetti concreti; e così via, fino a arrivare a linguaggi che consentono di parlare di insiemi e numeri infiniti di oggetti astratti. Potremmo allora rappresentarci lo stadio attuale dell'evoluzione dei nostri linguaggi come uno stadio in cui ci siamo dimenticati dell'originario linguaggio goodmaniano dei nostri antenati e utilizziamo linguaggi in cui, senza esserne più consapevoli, ci avvaliamo costantemente delle finzioni via via introdotte. Il problema di identificare il valore della funzione  $CR$  per gli asserti del nostro linguaggio matematico corrisponderebbe allora a quello di ricostruire questa catena evolutiva ideale, fino a ritrovare gli asserti di questo linguaggio originario che, corrispondendo ai primi, ne esprimono il contenuto reale. Come Yablo stesso riconosce, questa semplice metafora che aiuta però poco nel comprendere come poter determinare il valore di  $CR$  in tutti i casi in cui sarebbe necessario farlo.

Vi sono problemi che emergono anche nel caso di asserti molto semplici. Prendiamo l'asserto ‘vi è un solo numero primo pari’. Il suo contenuto reale è che si dà la circostanza reale che fa sì che esso sia vero-nell'aritmetica. Ma in quanto reale, questa circostanza non può essere, per un sostenitore del finzionalismo oggettuale, che i numeri primi pari sono quanto di fatto sono, posto che, per quest'ultimo, o questa circostanza non è reale, o è la circostanza che non vi è alcun numero primo pari. Non possiamo quindi trattare tale asserto come l'asserto ‘il numero delle lune di Marte è 2’.

---

<sup>21</sup>Cf. n.10.

Ma è ovvio che non possiamo neppure trattarlo come Yablo propone di trattare l'asserto '3+5=8'. Se volessimo evitare di trattarlo come Field propone (ovvero dicendo che il suo contenuto reale è semplicemente che esso deriva dagli assiomi dell'aritmetica), dovremmo trattarlo in accordo con la prima delle due opzioni relative al contenuto reale di '3+5=8' che abbiamo considerato sopra, ovvero riconoscere che il suo contenuto reale è che gli assiomi dell'aritmetica sono tali che da essi segue che vi è un solo numero primo pari. Più in generale, se  $M$  è una qualsiasi teoria matematica pura, la circostanza reale  $k_{\varphi}^M$  che rende un asserto  $\varphi$  di  $M$  vero-in- $M$  deve essere uno stato di cose che si dà nel mondo reale. E si potrebbe immaginare che questa circostanza riguardi il modo in cui i matematici che lo hanno fatto hanno scelto di edificare la teoria  $M$ . In tal caso essa sarebbe una circostanza storica che, come tale, non concerne la teoria  $M$  ma piuttosto il modo in cui tale teoria è stata edificata per rispondere alle esigenze che il mondo reale pone, o ha posto ai matematici.

Un problema ulteriore può essere dato da asserti come 'il numero dei numeri naturali è 0'. Se trattiamo questo asserto come trattiamo un asserto di una teoria matematica pura  $M$ , allora dovremmo dire che il suo contenuto reale è che si dà la circostanza che lo rende vero-in- $M$ . Tuttavia, esso non è affatto vero-in- $M$ ; tale circostanza quindi non si dà, e dunque il contenuto reale di tale asserto dovrebbe essere falso: ma per un nominalista esso dovrebbe essere vero. Il problema si risolve se si considera l'asserto 'il numero dei numeri naturali è 0' come un asserto dell'aritmetica applicata, e lo si tratta come 'il numero delle lune di Marte è 2'. Il suo contenuto reale è quindi che si dà la circostanza reale che i numeri naturali sono quanti essi di fatto sono, ovvero che non ve ne sono.

Yablo chiarisce la difficoltà che questi ultimi esempi sembrano presentare distinguendo tra due ruoli che possono avere i termini che apparentemente denotano degli oggetti matematici: quello di essere un 'aiuto per la rappresentazione' e quello di essere una 'cosa rappresentata'. Il primo ruolo consente di utilizzare la finzione della matematica per parlare di fatti reali. Il secondo ruolo è quello che consente di parlare di oggetti nella finzione della matematica. Così, in 'il numero dei numeri naturali è 0', il termine 'numeri naturali' è usato per denotare delle cose rappresentate, i numeri naturali appunto, e quello che si dice in tale asserto (inteso secondo il suo contenuto reale) è che nella realtà non ve ne sono. Il termine '0' è invece usato come un aiuto per la rappresentazione: ci si avvale di tale costante come essa è intesa nella storia dell'aritmetica per esprimere l'asserto 'non esistono numeri naturali', che è proprio quello che esprime il contenuto reale di 'il numero dei numeri naturali è 0'. Yablo evita così anche di dover ammettere che il contenuto letterale di tale asserto sia contraddittorio in quanto si richiama a un numero naturale per esprimere il fatto che non vi sono numeri naturali.

Questa distinzione di ruoli richiama da vicino la distinzione di Carnap (1950a) fra questioni d'esistenza interne e esterne. È proprio lo spirito di tale distinzione che Yablo vuole recuperare. Nel §II.4.1 abbiamo introdotto la distinzione di Carnap, e abbiamo detto che per Carnap le verità della matematica sono sempre analitiche (anche quando hanno una

forma logica esistenziale), e lo sono perché non sono altro che conseguenze logiche delle definizioni che introducono i concetti rilevanti, cioè sono vere solamente in base al loro significato, fissato da tali definizioni. Chiedersi se, per esempio, l'asserto 'esistono infiniti numeri primi' è vero o falso, significa chiedersi se tale asserto è una conseguenza logica delle definizioni che introducono i concetti rilevanti. Non significa invece chiedersi se si dà una qualche questione di fatto, esterna all'aritmetica, tale per cui esistano infiniti numeri primi (descritti dall'aritmetica). Come lo stesso Carnap (1950, p. 340, n.2) chiarisce, la distinzione tra un senso interno e un senso esterno di esistenza richiede che si possa tracciare una distinzione precisa tra "questioni di significato" e "questioni di fatto", la quale corrisponde a una distinzione precisa tra asserti analitici e asserti sintetici. Abbiamo già menzionato le critiche di Quine (1935, 1951a, 1951b) a questa distinzione e all'uso che Carnap ne fa. Se Yablo intende recuperare la distinzione tra senso interno e esterno di Carnap, dunque, egli dovrà o riabilitare la distinzione tra analitico e sintetico, oppure definire la distinzione tra interno e esterno su altre basi. Yablo (1998; 2001, pp. 86-91; 2005, pp. 96-100) segue questa seconda strada, e si basa su un'altra distinzione dovuta a Kendall Walton (1990, 1993), che riguarda quelli che Walton chiama 'giochi di fare finta' [*games of make-believe*]. Dettagli a parte, ciò che è rilevante è che Walton sostiene che si possano distinguere due ruoli diversi che gli asserti usati nei giochi di fare finta possono svolgere. Tali asserti possono essere utilizzati tanto per dire qualcosa all'interno del gioco (come quando si asserisce 'questa è Excalibur', brandendo una spada giocattolo), che per dire qualcosa degli oggetti reali che servono come "puntelli [*props*]" per costruire la storia (come quando si asserisce 'Excalibur si è rotta', per dire che la spada giocattolo si è rotta). Questa distinzione di ruoli corrisponde secondo Yablo a quella tra ruolo di cosa rappresentata e ruolo di aiuto per la rappresentazione delle espressioni del linguaggio di una storia di finzione (Yablo si riferisce principalmente a nomi propri, termini singolari e predicati).

Resta da capire se tale distinzione riguarda due diversi tipi di contenuto che uno stesso asserto può esprimere in base ai diversi ruoli (come cosa rappresentata o come aiuto per la rappresentazione) che alcuni dei termini che in esso occorrono svolgono, o due diversi usi del linguaggio che dipendono dall'atteggiamento proposizionale adottato. Per quando abbiamo detto fin qui sul rapporto tra contenuto letterale e contenuto reale di un asserto, Yablo sembrerebbe adottare la prima opzione (classificandosi quindi come un finzionalista ermeneutico del contenuto). Tuttavia, Yablo (2001, pp. 90) suggerisce che si possano identificare anche due tipi di atteggiamento proposizionale diversi con i quali asseriamo certi asserti (classificandosi così anche come un finzionalista ermeneutico dell'atteggiamento proposizionale). Yablo non sostiene infatti che quando quasi-asseriamo 'il numero delle lune di Marte è 2' facciamo deliberatamente e consciamente finta che esistano numeri (un'idea certamente implausibile). Piuttosto, egli suggerisce che in tal caso il nostro atteggiamento proposizionale non è quello della credenza — atteggiamento che abbiamo, invece in quanto asseriamo il contenuto reale del nostro asserto —, ma un



atteggiamento che egli chiama 'simulazione'. La simulazione sarebbe un atteggiamento simile al fare finta, ma che si può adottare inconsciamente (similmente a quanto avviene nel caso delle cosiddette metafore morte, cioè quelle metafore così consolidate che il loro aspetto metaforico non è più percepito). Secondo Yablo, salvo se applichiamo consapevolmente delle stipulazioni platoniste, quando asseriamo asserti matematici adottiamo inconsapevolmente l'atteggiamento proposizionale della simulazione.

Possiamo ora capire in che senso Yablo intende recuperare la distinzione di Carnap fra senso interno e senso esterno di esistenza. Tale distinzione è reinterpretata nei termini della distinzione tra asserzioni fatte all'interno di un gioco di fare finta e asserzioni fatte all'esterno di un gioco di fare finta. In altre parole, chiedere se un asserto esistenziale è vero in una determinata finzione equivale per Yablo a quello che per Carnap consiste nel chiedersi se un asserto esistenziale è vero in un determinato *framework* linguistico. Quando ci chiediamo se un asserto esistenziale asserito con l'atteggiamento della simulazione è vero, quello che ci stiamo chiedendo non è se gli oggetti che dovrebbero esistere per renderlo vero esistono realmente, ma se possiamo dire che essi esistano all'interno della finzione di cui ci siamo avvalsi nel formularlo, ovvero ci chiediamo se il contenuto letterale dell'asserto è vero-nella-finzione. Naturalmente possiamo anche chiederci se il contenuto letterale di tale asserto è vero *simpliciter*. Se lo facciamo in quanto vogliamo porci una questione semantica relativa al valore di verità di asserti che coinvolgono oggetti astratti, la domanda è legittima. Ma possiamo anche porci questa domanda, perché, meramente, ci sbagliamo e confondiamo il significato letterale del nostro asserto con il suo significato reale. Nella posizione di Carnap, questa situazione si verifica quando ci chiediamo se un determinato asserto esistenziale è vero all'esterno di ogni *framework* (con la differenza che, mentre per Carnap l'asserto preso all'esterno di ogni *framework* è privo di significato, per Yablo il significato letterale di un asserto di finzione è semplicemente falso *simpliciter*).

La posizione di Yablo presenta numerosi problemi e è stata oggetto di numerose critiche. Una di queste riguarda la nozione di simulazione. La tesi che in determinati casi i parlanti adottino l'atteggiamento della simulazione è una tesi empirica che dovrebbe poter essere empiricamente confermabile o falsificabile in base a studi psicologici. Questo rende la posizione di Yablo attaccabile su basi scientifiche. Stanley (2001, pp. 48-49) ha per esempio mosso contro di essa la cosiddetta 'obiezione dell'autismo'. Sappiamo che alcuni soggetti autistici hanno stupefacenti capacità di calcolo. Ma sappiamo anche che questi soggetti sono incapaci di fingere, e anzi questa carenza costituisce uno dei tratti caratteristici e diagnostici dell'autismo (Baron-Cohen et al., 1985; Leslie 1987, 1994; per vari aspetti connessi a questo problema, cf. Meini, 2007). Ma se Yablo ha ragione, non si spiega come la competenza matematica possa essere così spiccata in soggetti incapaci di simulazione (per una discussione, cf. Liggins, cs). Un altro problema con l'idea della simulazione, sollevato da Burgess e Rosen (2005, pp. 526, riprendendo un punto fatto da Horwich, 1991) è che la supposizione dell'esistenza di un tale atteggiamento proposizionale distinto da quello della credenza appare gratuita se non si spiega come esso possa

manifestarsi nell'uso che i parlanti fanno del linguaggio. Ma è la stessa definizione di simulazione di Yablo che sembra impedire che la differenza fra simulazione e credenza possa mai manifestarsi nell'uso.

Altre critiche al finzionalismo in generale sono esposte da Burgess (2004) (cf. anche Burgess e Rosen, 2005). Burgess osserva per esempio come l'analogia tra discorso matematico e discorso di finzione è spesso presentata in modo assai vago e impreciso. Egli ritiene inoltre che sia il finzionalismo ermeneutico che quello rivoluzionario presentino gravi difficoltà. Secondo Burgess il finzionalismo ermeneutico nel suo insieme si riduce in ultima istanza a una tesi empirica sull'atteggiamento proposizionale di chi asserisce asserti matematici. Come tale, essa è però immotivata, in quanto poco o per nulla supportata da appropriate osservazioni empiriche (qui Burgess non sembra ancora distinguere tra finzionalismo del contenuto e dell'atteggiamento proposizionale). Il finzionalismo rivoluzionario è invece, per Burgess, una tesi revisionista e, in quanto tale, immodesta e inaccettabile: non è compito dei filosofi dubitare della verità di asserti prodotti all'interno di una pratica di successo come la matematica e proporre cambiamenti in base a considerazioni filosofiche esterne a tale pratica. Leng (2005a) ha replicato che il finzionalismo rivoluzionario non deve essere considerato immodesto di per sé. L'immodestia starebbe nel fornire riformulazioni delle teorie attuali che non preservano ciò che è realmente rilevante nella pratica scientifica, cioè l'applicabilità e l'utilità delle teorie matematiche. Se queste caratteristiche sono preservate, il finzionalismo rivoluzionario non è immodesto, neanche se ritiene falsi gli asserti di tali teorie intesi letteralmente. Balaguer (2009) ha inoltre sostenuto che la tesi secondo cui non vi sono versioni plausibili di finzionalismo rivoluzionario è ingiustificata. Per Balaguer il finzionalismo è una tesi puramente filosofica e quindi irrilevante per la pratica matematica. Non si tratta di una posizione revisionista nello stesso senso in cui lo è, per esempio, l'intuizionismo. D'altra parte, continua Balaguer, l'analogia con i discorsi di finzione è appunto solo un'analogia: anche se vi sono aspetti del discorso di finzione che non sono preservati nel caso della matematica, e viceversa (su questo cf. anche Thomas, 2000, 2002), ciò che importa è solo che vi siano delle somiglianze, e un'analogia troppo stretta tra le due può portare a fraintendimenti e a problemi di fatto irrilevanti.

Resta naturalmente il problema di capire se tali somiglianze, che senz'altro esistono, colgano o no tratti essenziali della matematica e se richiamandosi a esse si possa giungere a una soluzione plausibile al problema di Platone. La questione resta aperta. Vi torneremo ancora nel §VII.2.4, discutendo il modo in cui il finzionalismo può costituire una critica all'argomento di indispensabilità.

### **3. Lo strutturalismo eliminativo e la sua versione modale**

Nel §III.1, abbiamo osservato che Benacerraf chiude il suo primo articolo opponendo la singolarità di una struttura alla pluralità degli oggetti dell'aritmetica. Per dare corpo a questa opposizione, egli suggerisce che i nomi dei numerali naturali non abbiano

riferimento, che siano solo parole che siamo abituati a ordinare in un certo modo. Questa idea lascia aperto, tra gli altri, il problema di capire che cosa vogliamo dire quando usiamo queste parole. Esclusa la possibilità che ci riferiamo a oggetti (astratti o concreti), non resta che proporre opportune parafrasi, oppure adottare l'opzione finzionalista. Ma vi è di più: l'opposizione di una struttura a più oggetti può risultare perspicua, almeno a prima vista, solo localmente, per esempio quando è riferita alla sola aritmetica. Ma che dire, per esempio, della teoria dei gruppi? Una struttura è generalmente intesa come un dominio di oggetti su cui sono supposte definite delle funzioni e relazioni che soddisfano certe condizioni. Un gruppo è quindi una struttura: una coppia  $\langle G, * \rangle$ , dove  $G$  è un dominio qualsiasi e  $*$  una legge di composizione interna a  $G$  (un'operazione binaria tale che se  $x$  e  $y$  sono elementi di  $G$ , anche  $x * y$  lo è) che soddisfa tre condizioni: è associativa; ammette un elemento neutro (un elemento  $u$  di  $G$ , tale che per ogni  $x$  in  $G$ ,  $x * u = u * x = x$ ); è tale che ogni elemento di  $G$  ha un inverso in  $G$  rispetto a essa (per ogni  $x$  in  $G$ , vi è un  $y$  in  $G$  tale che  $x * y = y * x = u$ ). Ora, la teoria dei gruppi studia i gruppi come tali, le loro diverse tipologie e le proprietà di ognuna di esse. Per tale teoria, vi sono quindi diverse specie di gruppi: alcuni commutativi, altri no; alcuni finiti, altri no; alcuni ciclici, altri no; etc. Anche se ammettiamo che ogni specie di gruppo occupi un posto in una struttura e che la teoria dei gruppi studi tale struttura, resta che la definizione di un gruppo suggerisce che i gruppi siano oggetti astratti, e lo siano proprio in quanto strutture. La teoria dei gruppi tratta quindi sia di una sola struttura che di vari oggetti. E che dire della teoria delle funzioni a variabili reali? I numeri reali sono elementi di una struttura, e tali funzioni sono leggi che operano su di essi, ovvero, apparentemente, oggetti definiti a partire dagli elementi di una struttura.

Queste e altre considerazioni suggeriscono di evitare di contrapporre una struttura a degli oggetti, e pensare piuttosto la prima come una rete di relazioni fra i secondi. Ciò conduce a quella che Parsons (1990, p. 303; 2008, p. 40) ha chiamato 'concezione strutturalista degli oggetti matematici': "il riferimento agli oggetti matematici si fa sempre nel contesto di una qualche struttura di sfondo, e gli oggetti coinvolti non hanno altra 'natura' che quella che è loro assegnata dalle relazioni base della struttura" (Parsons cita Resnik, 1981, p. 530, per un'altra formulazione). Questa idea può essere implementata in almeno due modi diversi: si può pensare che la considerazione della struttura permetta di evitare indesiderate assunzioni ontologiche relative a oggetti matematici; oppure si può sostenere che tale considerazione renda queste assunzioni ammissibili. Consideriamo l'esempio dei numeri reali. Essi formano una struttura detta 'campo ordinato completo' (poco importanti qui i dettagli tecnici). Nessun filosofo negherebbe questo fatto matematico attestato, ma ciò che caratterizza gli strutturalisti in filosofia della matematica è il modo in cui lo interpretano. Secondo Burgess (2008, p. 403), tutti gli strutturalisti concordano che da esso segue che l'espressione 'i numeri reali' significa lo stesso che 'il campo ordinato completo arbitrario'. La differenza fra i due modi di implementare la concezione strutturalista riguarda allora l'interpretazione dell'aggettivo 'arbitrario'. Si può sostenere che l'espressione 'l'arbitrario  $F$ ' presa in se stessa non denota nulla, mentre l'asserto

‘l'arbitrario  $F$  è un  $G$ ' significa lo stesso che ‘tutti gli  $F$  sono  $G$ '. Ma si può anche sostenere che ‘l'arbitrario  $F$ ' denota uno specifico oggetto che ha la singolare caratteristica di non avere alcuna proprietà che non sia condivisa da tutti gli  $F$ . Gli strutturalisti che ammettono la prima opzione pensano che gli asserti a proposito dei numeri reali siano generalizzazioni relative a tutti i campi completi ordinati (tutti i sistemi di oggetti che esemplificano la struttura di campo completo ordinato). Gli strutturalisti che ammettono la seconda opzione pensano che i numeri reali siano oggetti *sui generis*, ognuno dei quali ha la caratteristica di non avere alcuna proprietà che non sia condivisa da tutti gli oggetti che occupano un posto corrispondente in un qualche campo completo ordinato. Discuteremo questa seconda opzione nei §§ V.3 e V.4. Qui ci limiteremo alla prima che, secondo Parsons, risale a Dedekind (1888). Parsons (1990; 2008, capp. 2-3) la discute a fondo, pur rigettandola. Per una descrizione più veloce, cf. Shapiro (1997, pp. 85-90; 2000a, pp. 270-275).

Una prima mossa consiste nel generalizzare il suggerimento di White relativo ai numeri naturali (cf. §II.2). Una struttura può essere definita senza definire un particolare sistema di oggetti che la esemplifica: è sufficiente stabilire le condizioni che le funzioni e relazioni rilevanti devono soddisfare. La definizione di un gruppo lo mostra chiaramente: essa non garantisce l'esistenza della struttura (almeno se si ammette che una struttura esiste solo se esiste un sistema di oggetti che la esemplifica), ma è sufficiente per stabilire che gli oggetti che sono supposti formare il suo dominio devono godere di certe proprietà relazionali. L'idea è quindi che un asserto matematico ci dice solo questo, e dovrebbe essere riformulato come un asserto universalmente quantificato sui sistemi di oggetti che esemplificano una certa struttura. Un teorema quale ‘3 è un numero primo’ dovrebbe per esempio essere riformulato così: ‘Per ogni sistema di oggetti  $\sigma$ , se  $\sigma$  esemplifica la struttura di progressione, allora l'oggetto che occupa il posto-3 in  $\sigma$  è  $\sigma$ -primo’, dove il termine ‘posto-3’ è definito in generale per tutte le progressioni. Parsons ritiene che questa opzione conduca a una forma di strutturalismo eliminativo: una posizione che “inizia con l'idea basilare della concezione strutturalista degli oggetti matematici e la sviluppa in un'analisi in cui si sostiene che si sia eliminato il riferimento, o l'impegno ontologico [*commitment*] relativo a tali oggetti oppure a un genere particolare di oggetti matematici come i numeri naturali” (2008, p. 51).

Tuttavia, se non esistesse nessun sistema di oggetti  $\sigma$  che esemplifica una struttura  $\Sigma$ , allora ogni asserto della forma ‘Per ogni sistema di oggetti  $\sigma$ , se  $\sigma$  esemplifica la struttura  $\Sigma$ , allora...’ sarebbe vacuamente vero. Ne segue che ogni asserto matematico sarebbe vero e lo sarebbero quindi tanto il corrispettivo di ‘3 è un numero primo’, quanto il corrispettivo di ‘3 è un numero pari’. Dunque, lo strutturalismo eliminativo può fornire un'opzione filosofica plausibile solo se si può assicurare l'esistenza di sistemi di oggetti che esemplificano le strutture di cui la matematica è supposta trattare. Di per sé esso non può quindi fornire né un'alternativa al platonismo, né una risposta al dilemma di Benacerraf.

Un modo per evitare questa difficoltà è adottare una forma modale di strutturalismo eliminativo, proposta da Hellman (1989, 1990, 1994, 1996a) a partire da un suggerimento

di Putnam (1967; cf. §VII.2.2). L'idea fondamentale è di rimpiazzare gli asserti che quantificano universalmente su sistemi di oggetti che esemplificano una certa struttura con asserti che quantificano universalmente su strutture possibili, i quali possono essere non vacuamente veri anche se non vi è nessuna struttura attuale. L'asserto '3 è un numero primo' sarebbe allora interpretato come 'Per ogni possibile sistema di oggetti  $\sigma$ , se  $\sigma$  esemplifica la struttura di progressione, allora l'oggetto che occupa il posto-3 in  $\sigma$  è  $\sigma$ -primo'.

Hellman suggerisce una strategia generale per passare da una particolare teoria matematica a una sua interpretazione modalizzata specificando, per ogni teoria matematica, un insieme di istruzioni che consentono di passare da ogni asserto della teoria a una sua riscrittura modalizzata, e un insieme di condizioni che devono valere affinché la teoria così ottenuta, composta solamente di asserti modali, possa essere considerata una versione appropriata della teoria originaria. Secondo Hellman interpretare in termini modali una determinata teoria matematica consiste dunque nello specificare, data una teoria matematica, una "componente ipotetica" e una "componente categorica" della procedura di interpretazione. La componente ipotetica specifica, per ogni teoria matematica data, uno "schema di traduzione" (Hellman, 1989, p. 15) generale che indica come ottenere un asserto condizionale modale appropriato a partire da ogni asserto di tale teoria. La componente categorica specifica quali assiomi devono essere aggiunti all'insieme degli asserti modali così ottenuti. I dettagli di entrambe le componenti variano a seconda della particolare teoria matematica considerata<sup>22</sup>.

Prendiamo per esempio l'aritmetica di Peano al secondo ordine (Hellman, 1989, pp. 11-44; 1990 pp. 314-321). Sia  $\varphi$  un suo asserto. Hellman propone di rimpiazzarlo con un nuovo asserto modale  $\varphi_{\text{msi}}$  (l'indice 'msi' sta per 'modal-structuralist interpretation') che ne fornisce un'appropriata riformulazione:

$$\Box \forall X \forall R [ \&PA^2 \Rightarrow \varphi ]^X (Suc/R)$$

dove '&PA<sup>2</sup>' denota la congiunzione degli assiomi di Peano al secondo ordine, 'Suc' è la costante che designa la relazione o funzione di successore definita implicitamente da tali assiomi (che si tratti di una relazione o una funzione dipende ovviamente dalla formulazione scelta per gli assiomi di Peano) e 'X' e 'R' sono due variabili che variano rispettivamente sulle classi di oggetti e sulle relazioni o funzioni dello stesso tipo di Suc (per il caso dell'aritmetica di Peano al primo ordine, cf. Hellman, 1989, p. 24). Questo asserto si legge come segue: necessariamente, per ogni classe X di oggetti, e per ogni relazione o funzione R del tipo adeguato, &PA<sup>2</sup> implica  $\varphi$ , posto che i quantificatori di &PA<sup>2</sup> e  $\varphi$  siano relativizzati agli elementi di X, e 'Suc' sia rimpiazzata in questi asserti da 'R'. La relativizzazione agli elementi di X permette di restringere &PA<sup>2</sup> e  $\varphi$  a domini di oggetti

<sup>22</sup>La prima componente è detta 'ipotetica' poiché lo schema di traduzione trasforma ogni asserto di una teoria matematica data in un asserto modalizzato condizionale. Le componenti ipotetica e categorica sono, strettamente parlando, componenti della procedura complessiva di interpretazione di una teoria matematica. È tuttavia possibile dire che nella versione modalizzata di una particolare teoria vi sono una componente ipotetica e una categorica, a patto che con 'componente ipotetica' in questo caso non si intenda lo schema di traduzione, ma l'insieme degli asserti tradotti in accordo con esso (la componente categorica è invece in entrambi i casi composta da assiomi che diventano gli assiomi della nuova teoria).

particolari, mentre il rimpiazzo di ‘*Suc*’ con ‘*R*’ serve a evitare interpretazioni della relazione di successore che risultino incompatibili con l’interpretazione modale (per dettagli, cf. Hellman, 1989, pp. 21-23).  $\varphi_{\text{msi}}$  esprime quindi il fatto che, se opportunamente relativizzato,  $\varphi$  vale in qualsiasi progressione possibile (Hellman 2005, p. 553). Quindi, se  $\varphi$  è una conseguenza di  $\&PA^2$ , allora  $\varphi_{\text{msi}}$  è una verità della logica modale del secondo ordine (in caso contrario sarebbe  $\neg\varphi_{\text{msi}}$  a essere una tale verità), posto solo che sia possibile che vi siano progressioni (quindi anche nel caso in cui non vi fosse alcuna progressione attuale).

La componente categorica della riformulazione proposta da Hellman per l’aritmetica di Peano al secondo ordine è invece costituita da diverse assunzioni<sup>23</sup>. Vi è dapprima un’assunzione che assicura la possibilità che vi siano progressioni, evitando così che si generi un problema parallelo a quello visto sopra per lo strutturalismo eliminativista non modale:

$$\diamond \exists X \forall R [\&PA^2]^X (Succ/R)$$

Se questa possibilità non fosse infatti garantita,  $\varphi_{\text{msi}}$  sarebbe vacuamente vero. A fianco di tale assunzione, la componente categorica comprende (nelle presentazioni di Hellman successive al 1991) anche: un particolare assioma dell’infinito, che asserisce la possibilità dell’esistenza di un numero infinito di oggetti concreti (atomi o loro somme mereologiche — l’assioma è formulato in termini mereologici e avvalendosi della quantificazione plurale), e uno schema di assiomi di comprensione per somme mereologiche che stabilisce che esiste la somma mereologica degli individui che godono di una qualunque proprietà, posto che vi sia almeno un individuo che ne goda. Indicheremo più avanti la ragione di queste due ultime assunzioni. Per ora si osservi che, insieme alla prima, esse fanno sì che lo strutturalismo modale non debba richiedere l’esistenza di alcun oggetto<sup>24</sup>, ma solo la possibilità dell’esistenza di strutture.

Nel caso dell’aritmetica, l’assunzione che assicura la possibilità che vi siano progressioni è in realtà superflua perché la possibilità dell’esistenza della struttura di progressione può essere derivata a partire dalle due altre assunzioni. La presenza di una “assunzione di esistenza modale” analoga alla prima è tuttavia necessaria in altri casi in cui la possibilità dell’esistenza della struttura rilevante non può essere derivata da altri assiomi della componente categorica (per teorie diverse dall’aritmetica è inoltre possibile che si debbano aggiungere ulteriori assiomi).

Si vede già come per Hellman l’appello alla modalità generi non solo una matematica senza oggetti, per esempio senza numeri — come suggerisce il titolo di Hellman (1989) — ma anche uno strutturalismo senza strutture (attuali), come suggerisce l’appellativo ‘strutturalismo eliminativo’.

<sup>23</sup>A queste assunzioni vanno aggiunti gli assiomi della logica del secondo ordine (in cui lo schema di assiomi di comprensione sia opportunamente modificato in termini modali, cf. Hellman, 1989, p. 25; 2005, p. 553-554), assieme a quelli della logica modale quantificata del sistema S5, senza la formula Barcan (per dettagli, si veda un buon manuale di logica modale, per es. Hughes e Cresswell, 1996).

<sup>24</sup>Per la precisione: né di oggetti attuali, né di oggetti possibili ma non attuali, i cosiddetti *possibilia*. Questi ultimi in particolare vengono evitati grazie a una particolare restrizione dello schema di assiomi di comprensione della logica del secondo ordine (Hellman, 2005, p. 553-554).

Una prima difficoltà di questa proposta dipende dal fatto che essa impiega appieno le risorse della logica modale del secondo ordine, anche quando si tratta di riformulare una teoria originariamente al primo ordine: quale che sia la teoria data, lo schema di traduzione impiega infatti le risorse di tale logica (cf. Hellman, 1989, pp. 18-20; 1990, p. 322). E (come anticipa lo stesso Hellman, 1989, p. 47) la logica del secondo ordine potrebbe essere ritenuta inadeguata a fornire una fondazione per la matematica da coloro che la intendono a sua volta come una teoria matematica<sup>25</sup>. A questa obiezione, Hellman dà due risposte, una più filosofica e una di carattere tecnico.

Egli chiarisce in primo luogo (2005, pp. 25-26) che il suo strutturalismo modale non intende fornire né una fondazione della matematica né una sua riduzione alla logica, ma semplicemente suggerire un'interpretazione adeguata delle teorie matematiche, per ottenere la quale è perfettamente legittimo richiamarsi a nozioni matematiche appropriate. Lo strutturalista modale potrebbe quindi impiegare la logica del secondo ordine senza cadere in nessuna circolarità, anche se ammettesse che si tratta, a sua volta, di una teoria matematica.

Si potrebbe però ribattere che se la logica del secondo ordine fosse davvero intesa come una teoria matematica, allora richiederebbe essa stessa, secondo la proposta di Hellman, un'interpretazione appropriata, ciò che genererebbe un altro tipo di circolarità. Ma quest'obiezione è bloccata dalla seconda risposta di Hellman (suggerita in Hellman, 1989, §I.6; poi ampliata in Hellman, 2006, 104-114; cf. anche Hellman, 2005, pp. 20-21). Hellman infatti nega che la logica del secondo ordine debba intendersi come una versione camuffata della teoria degli insiemi, e ne suggerisce al contrario un'interpretazione mereologica (cf. n.10): le variabili predicative monadiche sono intese variare su somme mereologiche di individui. È proprio per rendere possibile questa interpretazione che Hellman introduce nella componente categorica della riformulazione dell'aritmetica la seconda e la terza assunzione menzionate sopra: un assioma che asserisce la possibile esistenza di infiniti oggetti (atomi o somme mereologiche); e lo schema di assiomi di comprensione per somme mereologiche. Nella formulazione del primo di questi due assiomi Hellman impiega poi la quantificazione plurale introdotta da George Boolos (1975; 1984; 1985; cf. anche Linnebo, 2008). Infine, egli si richiama a tecniche proposte da Burgess, Hazen, Lewis (1991), che consentono di ridurre la quantificazione su predicati poliadici a quella su predicati monadici, in modo da poter limitare le variabili del secondo ordine a variabili predicative monadiche. Così interpretata, la logica del secondo ordine non sembra doversi considerare come una teoria matematica; ma se qualcuno insistesse che comunque lo è (per esempio in forza degli assiomi infinitari aggiunti alla componente categorica delle diverse teorie matematiche, che sembrano dover essere intesi come una parte di tale logica, atta a rendere legittima l'interpretazione proposta), dovrebbe concedere che essa possa venir considerata come una sorta di nucleo primitivo della matematica scevro dalla necessità di un'ulteriore interpretazione. Lo stesso Hellman suggerisce una posizione simile. Hellman mostra certo come, grazie agli strumenti appena indicati, sia

---

<sup>25</sup>Cf. cap. II, n.12.

possibile evitare di assumere come primitive le nozioni di ‘relazione’ e di ‘funzione’, e ottenere lo stesso potere espressivo della logica del secondo ordine avvalendosi solamente della mereologia. Ma in (2005, p. 559) sembra suggerire che anche se questo non fosse considerato sufficiente, lo strutturalista modale può accettare che “un qualche contenuto matematico essenziale debba essere incorporato [*built into*] nelle [proprie] nozioni primitive”.

Questo a parte, ciò che conta è che, secondo Hellman (1989, §I.6), questa interpretazione della logica del secondo ordine rende legittimo restringere l’assunzione di esistenza modale per l’aritmetica. Se si ammette che gli atomi mereologici sono oggetti concreti e che una somma mereologica di oggetti concreti sia un oggetto concreto, sarebbe legittimo restringere tale assunzione in modo che essa assicuri solo la possibilità dell’esistenza di progressioni composte da oggetti concreti. Per quanto riguarda l’aritmetica, dunque, l’interpretazione strutturalista modale di Hellman sarebbe radicalmente nominalista, in quanto: i) non postula l’esistenza di strutture, ma solo la possibilità che ve ne siano; ii) non postula la possibilità di strutture i cui elementi sono oggetti astratti, ma solo di strutture i cui elementi sono oggetti concreti (atomi o somme mereologiche); iii) interpreta la quantificazione del secondo ordine su predicati e relazioni non in termini insiemistici, ma riducendo la quantificazione poliadica a quella monadica e interpretando quest’ultima in termini di quantificazione su somme mereologiche. È importante (cf. Hellman, 2006, pp. 106-107) tenere distinto quest’ultimo punto dalla questione se una strategia simile possa essere replicata man mano che si sale nell’ordine della quantificazione (cioè non solo per interpretare nominalisticamente la quantificazione su insiemi di numeri naturali, ma anche su insiemi di reali, e su insiemi di insiemi di reali, etc.) fino a permettere una interpretazione (strutturalista modale) nominalista di teorie che non ammettono un modello numerabile, fino alla teoria degli insiemi. Questa seconda questione è particolarmente complessa (cf. Hellman, 1989, cap.2; 2006). Qui ci limiteremo a dire che Hellman ritiene possibile replicare tale strategia, basandosi solo sull’assunzione della possibile esistenza di un numero infinito numerabile di oggetti concreti (atomi o somme mereologiche) fino al terzo ordine (ovvero alla teoria che risulta dall’aritmetica del secondo ordine estendendo il suo linguaggio con l’introduzione di variabili al terzo ordine e i suoi assiomi attraverso un appropriato assioma di comprensione relativo a tali variabili), e che, aggiungendo un assioma che postula la possibile esistenza di un continuo di atomi mereologici, ritiene di poter replicare la strategia anche al quarto ordine. Secondo Hellman queste teorie sono sufficienti a rendere conto della maggior parte delle applicazioni della matematica nelle scienze empiriche, senza quindi che per tali applicazioni vi sia bisogno di richiamarsi alla teoria degli insiemi.

Se comunque non fosse possibile replicare questa strategia per qualunque teoria che non ammette modelli numerabili, l’interpretazione strutturalista modale si troverebbe di fronte a una grave difficoltà, segnalata da Parsons (2008, cap 3, §17). Parsons sostiene che dal momento che non sembra che possa esserci un dominio di oggetti concreti tale da



soddisfare la teoria degli insiemi, lo strutturalista eliminativista modale deve riconoscere la possibilità dell'esistenza di un dominio di oggetti astratti sufficientemente grande da soddisfare tale teoria. E secondo Parsons, questo significa che uno strutturalista modale non può essere nominalista<sup>26</sup>. Ma, come ha notato Burgess (2008, p. 405), questa critica avrebbe un peso solo per un "arci-nominalista" che ritiene inintelligibile la nozione stessa di oggetto astratto e non può quindi neppure ammettere la possibilità dell'esistenza possibile di oggetti astratti. Ma potrebbe esservi chi, pur essendo nominalista, ammetta l'intelligibilità di tale nozione e la possibilità dell'esistenza di oggetti astratti<sup>27</sup>.

In ogni caso, Hellman stesso (2005, pp. 20-21) chiarisce che il suo strutturalismo eliminativo modale non rende necessaria, per quanto sia legittima, una presa di posizione nominalista. Se non la si avanza, lo strutturalismo modale prende la forma di una posizione "neutralista" (Hellman, 1989, p. 117), neutrale cioè rispetto al problema di stabilire quale natura abbiano le strutture possibili rilevanti (in questo caso, tuttavia, il linguaggio mereologico impiegato dovrebbe venire interpretato ammettendo che atomi e somme mereologiche possano non essere oggetti concreti). Il fatto di non poter offrire una interpretazione nominalista di certe teorie matematiche non costituisce quindi di per sé un'obiezione fatale alla proposta di Hellman, il cui principale obiettivo non è quello di difendere una versione di nominalismo. Il suo scopo è piuttosto mostrare come la maggior parte della matematica effettiva, in particolare quella applicata nelle scienze empiriche, possa essere trattata secondo un'interpretazione modale, indipendentemente dal fatto che si assuma una prospettiva nominalista. Al di là di questo, va comunque notato che l'assunzione della possibile esistenza di infiniti oggetti, congiunta all'assioma di comprensione per somme mereologiche menzionato sopra, rendono l'assunzione che atomi e somme mereologici siano oggetti concreti meno innocenti di quanto Hellman sembri voler ammettere.

La difficoltà principale per la proposta di Hellman sembra comunque risiedere altrove, in particolare nell'interpretazione stessa della modalità. La modalità logica (ovvero le nozioni di logicamente possibile e logicamente necessario) può essere spiegata in termini insiemistici: se ' $\diamond$ ' è interpretato come un operatore di possibilità logica e  $\varphi$  è un asserto non modale, allora  $\diamond\varphi$  è vero se e solo se  $\varphi$  è soddisfatto da un certo insieme. Ovviamente non si tratta qui di insiemi possibili (cosa che indurrebbe un'ovvia circolarità), ma di insiemi la cui esistenza deve essere garantita dalla teoria semantica impiegata per gli asserti modali. Se la modalità cui Hellman si richiama fosse quella logica, così interpretata, egli sarebbe quindi costretto a garantire non solo la possibilità dell'esistenza di strutture, ma anche l'esistenza (attuale) di appropriati insiemi. La sua posizione e non avrebbe quindi alcun vantaggio rispetto al platonismo nelle sue versioni più classiche. Non solo: come nota Shapiro (1997, p. 89; 2000a, p. 275), se la proposta di Hellman è a sua volta applicata alla

<sup>26</sup>Parsons fa qui riferimento a un suggerimento di Putnam (1967) sulla possibilità di interpretare nominalisticamente la teoria degli insiemi sulla base di domini concreti, suggerimento che Hellman (1989, p. 71) richiama solamente, proponendo poi (1989, cap II) per tale teoria una interpretazione strutturalista modale non nominalista. La critica di Parsons può comunque rivolgersi anche allo strutturalismo modale di Hellman.

<sup>27</sup>Questo sembra opporsi all'idea di Zalta (cf. §V.2), per cui un oggetto astratto è un oggetto che non è concreto in nessun mondo possibile, e che quindi, per un nominalista, non dovrebbe poter esistere.

teoria degli insiemi, l'asserzione che esiste un certo insieme deve essere intesa come un'asserzione a proposito di ogni sistema logicamente possibile di oggetti che esemplifica la struttura definita da tale teoria. E questo sarebbe circolare. Lo strutturalismo eliminativo modalizzato dovrebbe quindi interpretare l'esistenza degli insiemi in modo diverso dall'esistenza degli altri oggetti matematici, oppure richiamarsi a un tipo di modalità diverso da quella logica.

Simili difficoltà spiegano perché la prima non sia la strada percorsa da Hellman. Parsons (2008, cap. 3, §15) passa in rassegna diverse interpretazioni della modalità: quella logica, quella fisica, quella metafisica, e quella che egli chiama apertamente 'matematica'. Abbiamo già visto alcune difficoltà legate alla prima interpretazione, ma anche le altre sono difficili da caratterizzare in modo preciso. È chiaro che è metafisicamente possibile che un uomo salti, senza l'aiuto di nessun macchinario, dalla Terra alla Luna, anche se questo non certamente fisicamente possibile. Dovrebbe anche essere chiaro che ciò che è costruibile tramite una certa procedura ammessa entro una teoria matematica, per esempio un punto così e così che è costruito con riga e compasso, è matematicamente possibile. Questi sono semplici esempi di intuizioni chiare che noi tutti abbiamo a proposito della modalità fisica, metafisica, e matematica. Ma è difficile chiarire esattamente che cosa ognuna di esse sia in generale<sup>28</sup>. Ci limitiamo a osservare che ognuna delle quattro diverse interpretazioni pone problemi assai seri allo strutturalismo modale: problemi che lo stesso Hellman (2006, p. 103) riconosce. La sua soluzione è quindi radicale: egli sostiene che la nozione di modalità debba essere presa come primitiva. Hellman (2005, p. 556-558) osserva che non si deve sperare di ottenere una caratterizzazione formale della modalità così intesa, anche se offre alcuni suggerimenti su come tale nozione possa venir spiegata in termini informali, in modo da renderla filosoficamente accettabile.

Resta tuttavia che, come suggerito da Shapiro (1997, pp. 228-29), il problema più pressante che la questione dell'interpretazione della modalità pone allo strutturalismo modale non è tanto quello di dire che cosa si intende con 'possibile' e 'necessario', ma quello di fornire, quale che sia l'interpretazione scelta, un'epistemologia adeguata per essa: spiegare cioè che cosa voglia dire che conosciamo che qualcosa è possibile, e, ciò che sembra ancora più difficile, come conosciamo ciò che è ritenuto possibile. E non vi è nessuna garanzia che un tale problema epistemologico sia più facilmente risolvibile del problema epistemologico che accompagna il platonismo nelle sue varie forme. Lo strutturalismo modale non sembra quindi, come tale, poter fornire una risposta al dilemma di Benacerraf. Al più, esso conduce a riformulare in termini modali la difficoltà che il dilemma segnala.

#### **4. Maddy e le origini cognitive della teoria degli insiemi**

L'ultima risposta non conservativa al dilemma di Benacerraf di cui tratteremo è quella

---

<sup>28</sup>Per discussioni sulle distinzioni tra i diversi tipi di modalità, cf. Plantinga (1974), Kripke (1980), Lewis (1986), Hale (1999), Fine (2005), Mackie (2006). Per discussioni sull'utilizzo della modalità in matematica, cf. Putnam (1967), Field (1984; 1989b), Parsons (1983b), Hale (1996b), Chihara (2008).

fornita dal realismo di derivazione empirista e cognitivista di Maddy (1980, 1989, 1990a, 1990b). Se la trattiamo immediatamente prima di passare alle risposte conservative è perché il suo carattere non conservativo può essere messo dubbio. Maddy accetta infatti la condizione (i) fra quelle che caratterizzano le risposte conservative, ma rigetta la condizione (ii), almeno se l'espressione 'per una sua grande parte' in quella condizione è intesa in modo da includere le componenti più elementari della teoria degli insiemi.

Secondo Maddy, la conoscenza di queste componenti è infatti basata sulla nostre capacità percettive, e non è quindi *a priori*. Ciò non le impedisce di concepire il suo punto di vista come una versione di platonismo, detta 'platonismo del compromesso' (1989, p. 1136), risultante da un compromesso fra il platonismo di Gödel e quello suggerito dall'argomento di indispensabilità. Maddy riconosce che "il successo delle applicazioni della matematica dà ragione per credere [...] che una grande parte di essa si avvicina almeno alla verità", ma osserva che "questo non è sufficiente per dare una spiegazione adeguata della pratica matematica", in particolare "una spiegazione dell'immediata perspicuità della matematica elementare, spiegazione che l'intuizione di Gödel è intesa fornire", e "di altre forme puramente matematiche di evidenza", quali l'evidenza manifestata da una dimostrazione. È dubbio che l'intuizione abbia per Gödel un tale compito, ma il punto di Maddy è chiaro: se le ripetute e fruttuose applicazioni della matematica suggeriscono, a monte, che essa non possa essere il risultato di nostre libere stipulazioni e ci inducono a propendere per una qualche forma di platonismo, questo non può essere ammesso senza che a valle si fornisca una spiegazione diretta del nostro naturale convincimento a proposito delle basi su cui si erge l'edificio matematico. È per fornire tale spiegazione che Maddy si richiama alla percezione (*ib.*, p. 1140):

Noi percepiamo insiemi di oggetti fisici così come percepiamo questi stessi oggetti. Entrambe queste abilità si sviluppano gradualmente mentre la nostra esperienza infantile interagisce con le strutture del cervello condizionate dell'evoluzione. I cambiamenti neurofisiologici che costituiscono questo sviluppo producono anche una gamma di credenze estremamente generali a proposito di questo genere di cose, per esempio a proposito della collocazione spaziale degli oggetti fisici e della combinabilità degli insiemi. Queste credenze intuitive, come le chiamo, stanno alla base delle più semplici e più fondamentali assunzioni delle nostre scienze fisiche e matematiche, quelle assunzioni che "ci si impongono come vere" [Gödel, 1947-64; cf. §II.5].

Secondo Maddy noi percepiamo quindi direttamente certi insiemi, e non solo gli oggetti fisici che li compongono. Maddy non si limita a affermare che, in appropriate condizioni, una pluralità di oggetti fisici entra in una certa relazione causale con i nostri apparati percettivi come un tutto unitario, ma sostiene che grazie a questa interazione noi acquisiamo delle credenze che riguardano l'insieme di tali oggetti, e di cui tale insieme è quindi causalmente responsabile. Per giustificare questa tesi, Maddy (1990a, pp. 58-67) osserva che molti risultati sperimentali — alcuni sono discussi da Dehaene (1997), anche se la ricerca in questo campo è in continua evoluzione — mostrano che le nostre credenze numeriche più elementari sono percettive. Il ruolo della teoria degli insiemi nell'edificio matematico suggerirebbe di intendere queste credenze come credenze a proposito di insiemi. L'idea sembra la seguente: posto che la più appropriata formulazione delle

principali teorie matematiche si richiama alla teoria degli insiemi, e che queste teorie intervengono nelle nostre principali teorie relative al mondo fisico, e in particolare nella nostra descrizione dei fenomeni percettivi che stanno alla base delle nostre credenze numeriche elementari, tale descrizione dipende dal fatto che certi componenti di questo mondo siano intesi come degli insiemi (anche se ciò non significa che il soggetto che li percepisce li identifichi consapevolmente con degli insiemi).

Maddy descrive inoltre un possibile processo neuronale, ispirato alle teorie di Donald Hebb (1949, 1980), che, a seguito di ripetute esperienze con piccole collezioni di oggetti di taglia media, produrrebbe trasformazioni strutturali nel nostro cervello che condurrebbero alla costituzione di un vero e proprio “rilevatore [*detector*] di insiemi” (*ib.*, p. 65), che darebbe origine al nostro concetto di insieme. Un processo ulteriore ci porterebbe poi a acquisire la capacità di produrre delle credenze non inferenziali a proposito degli insiemi percepiti, e da qui a credenze elementari e primitive a proposito degli insiemi in generale. Queste credenze fornirebbero una giustificazione per gli assiomi più elementari della teoria degli insiemi. Oltre a questo tipo di giustificazione, Maddy ritiene se ne dia un altro, riconducibile non a processi percettivi ma a “fonti teoriche” (*ib.*, p. 107). Insieme, questi due tipi di giustificazione condurrebbero infine all’edificazione completa della teoria degli insiemi. Le fonti teoriche consisterebbero in larga parte nella considerazione delle conseguenze stesse della teoria degli insiemi, in particolare quelle ottenute aggiungendo nuovi assiomi a quelli elementari, e tali da permettere a tali teorie di svolgere quella che per Maddy è la loro principale funzione: offrire un contesto appropriato in cui riformulare le teorie matematiche. Maddy è tornata spesso su questo punto (cf. Maddy, 1997, 1990b, 1992, 1998, 2005), supportando le sue tesi anche con ricostruzioni storiche relative all’evoluzione della teoria degli insiemi.

Maddy si richiama dunque ai risultati di certi esperimenti relativi alla cognizione numerica. Se l’esito di questi esperimenti è unanimemente attestato, la sua interpretazione è molto più controversa. Spesso si ritiene di aver mostrato qualcosa a proposito del modo in cui si formano le nostre credenze sui numeri per il solo fatto di aver osservato comportamenti che possono venir descritti usando concetti aritmetici. Ma una cosa è il modo in cui certi fenomeni si possono descrivere qualora si possa e si voglia impiegare un certo sistema di concetti; un’altra sono le cause effettive, in questo caso neurali e fisiologiche, di quei fenomeni<sup>29</sup>.

Ma anche se le interpretazioni favorevoli alle tesi di Maddy venissero concesse, il suo argomento non si limita comunque a un appello ai risultati di tali esperimenti. Esso si richiama anche al ruolo che la teoria degli insiemi svolge in matematica e a quello che la matematica svolge nelle teorie scientifiche. Questo argomento, che è vicino all’argomento di indispensabilità<sup>30</sup> e sembra sfruttare un’inferenza alla spiegazione migliore (cf. §§

<sup>29</sup>Su questo punto e sulle sue conseguenze su di una possibile interazione fra scienze cognitive e filosofia della matematica, cf. Doridot e Panza (2004). Per un’obiezione simile, cf. Parsons (2008), p. 211.

<sup>30</sup>Maddy ha successivamente criticato l’argomento di indispensabilità: cf. §§ VII.3.1 e VII.4.3. Maddy (1997, p. 152, n.30) ha mantenuto l’idea che la teoria degli insiemi abbia basi cognitive, ma ha sostenuto il suo platonismo sugli insiemi non più sulla base di un argomento come il precedente, ma a partire dalla sua concezione del naturalismo, che descriveremo nel §§ VII.3.1

VI.4.2.3 e VII.4.2), pone così almeno due problemi.

Il primo è stato sollevato da Parsons (2008, pp. 210-211). Anche supponendo che sia ammissibile trarre una conclusione a proposito delle “relazioni basilari fra un organismo e l’ambiente circostante” a partire da certe proprietà della matematica e dal suo ruolo nella scienza, in particolare nella nostra descrizione dei fenomeni percettivi che starebbero alla base delle nostre credenze numeriche elementari, resta che le teorie matematiche che sono applicate in questa descrizione, e perfino quelle impiegate nelle teorie psicologiche e neurali rilevanti per associare questi fenomeni a queste credenze, possono formularsi senza richiamarsi alla teoria degli insiemi. Quindi, anche ammettendo che queste teorie siano indispensabili per la descrizione dei fenomeni percettivi di cui sopra, non ne seguirebbe che lo sia la loro formulazione insiemistica. È quindi “implausibile che la [loro] formulazione nei termini della teoria degli insiemi rifletta la natura delle cose così come l’argomento di Maddy presuppone”.

Il secondo problema è il seguente. Il ruolo che la teoria degli insiemi svolge in matematica dipende dall’intera teoria. L’eventuale ammissione dell’argomento di Maddy sembra quindi pregiudicare, pena un’evidente circolarità, la possibilità di sostenere che la distinzione fra insiemi in senso proprio e mere collezioni o altri generi di aggregati di oggetti — che è resa possibile solo dalla edificazione dell’intera teoria degli insiemi — abbia un’origine percettiva. Quindi, se anche concedessimo che tale argomento mostra che le proprietà più elementari assegnate agli insiemi dalla relativa teoria dipendono da un contatto percettivo originario con certi insiemi, dovremmo aggiungere che tali proprietà sono solo quelle che gli insiemi condividono con altri aggregati di oggetti. Gli insiemi che noi percepiremmo sarebbero quindi, al più, degli antenati assai lontani di quelli che popolano la matematica insiemistica. E la differenza fra i due sarebbe esattamente quella che separa ogni sistema di concetti atto a rendere conto delle esperienze percettive rilevanti per l’argomento di Maddy da una vera e propria teoria matematica quale è la teoria degli insiemi<sup>31</sup>.

Tutt’al più, Maddy attira quindi la nostra attenzione su certi invarianti cognitivi che, secondo un’interpretazione platonista della teoria degli insiemi, corrispondono a proprietà elementari degli oggetti di cui tratta tale teoria. Ma questo non basta per pervenire a un’epistemologia plausibile per la matematica e a un’appropriata risposta al dilemma di Benacerraf. Se vuole essere conforme a un’interpretazione platonista, questa epistemologia deve spiegare la nostra relazione con quegli oggetti. E se questa spiegazione dipende dal fatto che la teoria degli insiemi si evolve per una sorta di necessità interna, grazie a forme intra-matematiche di evidenza, allora ci troveremo di fronte all’alternativa seguente. O possediamo un buon argomento per mostrare che, malgrado tutto, gli oggetti della teoria degli insiemi sono proprio quegli insiemi che noi percepiamo (anche se la nostra percezione non è in grado di rivelarne tutte le proprietà rilevanti): un argomento che Maddy non

---

<sup>31</sup>Per comprendere questa differenza consideriamo due semplici esempi: la nozione di insieme vuoto, essenziale per la teoria degli insiemi, e la distinzione che in tale teoria deve essere fatta fra un insieme  $e$  e gli insiemi  $\{e\}$  e  $e \cup \{e\}$ . In entrambi i casi è difficile trovare un riscontro percettivo appropriato.

fornisce e sembra difficile si possa fornire. O rispondiamo al dilemma di Benacerraf ammettendo che le basi della conoscenza matematica, o almeno di una parte rilevante di essa, risiedono nelle nostre stesse costruzioni teoriche, ovvero in un sistema di stipulazioni, e risolviamo così il problema dell'accesso negando l'esistenza di una realtà indipendente di cui parla la matematica. Quest'ultima opzione è ancora compatibile con una qualche forma di platonismo, ma la compatibilità dipende da un'elaborazione filosofica che Maddy non fornisce. Nei §§ V 2-V 4 vedremo diversi modi per farlo.

Una difficoltà simile concerne ogni tentativo di promuovere una filosofia della matematica di ispirazione empirista richiamandosi al riconoscimento che le credenze che stanno alla base delle nostre teorie matematiche hanno un'origine empirica. Il problema non è tanto quello di giustificare la tesi che anche le più astratte teorie matematiche possano essere in qualche modo ricondotte a una base empirica. Anche se difficilmente formulabile in modo preciso, ciò sembra assolutamente plausibile per chi abbia un minimo di consapevolezza dell'evoluzione storica della matematica (Kitcher, 1983). Il problema dipende piuttosto dal fatto che il passaggio dalle nostre credenze empiricamente fondate ai principi che reggono le nostre teorie matematiche non si possa a sua volta giustificare empiricamente, pur essendo chiaramente cruciale nell'edificazione della matematica stessa.

Nel presente capitolo proseguiamo la presentazione delle risposte al dilemma di Benacerraf discutendo alcune di quelle che nel §III.3, seguendo Hale e Wright (2002), abbiamo classificato come conservative. Anche in questo caso ne vedremo quattro, che ci sembrano essere particolarmente significative: il neologicismo di Hale e Wright; la *Object Theory* di Linsky e Zalta; lo strutturalismo non-eliminativo *ante rem* di Shapiro; e la versione dello strutturalismo non-eliminativo di Parsons.

### 1. Il neologicismo: una versione aggiornata del programma di Frege

Il neologicismo fornisce al dilemma di Benacerraf una risposta conservativa e intellettuale, che soddisfa le condizioni (i) e (ii) enunciate nel §III.3 e ammette che il problema dell'accesso possa essere risolto richiamandosi solo alle nostre capacità intellettive. A differenza di quelle che discuteremo nei prossimi due paragrafi, anch'esse conservative e intellettive, questa risposta concerne la sola aritmetica (discuteremo brevemente una possibile estensione all'analisi). Avanzata per la prima volta da Wright (1983), essa è stata affinata nel tempo in seguito alle numerose discussioni suscitate<sup>1</sup>.

Come il nome stesso suggerisce, questa risposta è parte di un progetto ben più ambizioso che si propone di tornare al programma di Frege, aggiornandolo e emendandolo. Alla sua base sta un'interpretazione del principio del contesto (cf. §II.1.3), già offerta da Dummett (1956, pp. 493-494, e 1973, pp. 195 e 496-497), secondo la quale tale principio suggerisce la seguente condizione (Hale e Wright, 2002, p. 115; formulazioni equivalenti si possono trovare altrove nei lavori di Hale e Wright):

Se, in accordo a opportune spiegazioni delle condizioni di verità di un appropriato dominio di asserti [...] [che contengono dei termini che sono supposti riferirsi a numeri o a altri oggetti astratti], opportuni asserti di tale dominio sono veri [...] allora quei termini che intervengono in essi e sono supposti riferirsi a numeri o a altri oggetti astratti si riferiscono di fatto [...] a tali oggetti.

Hale e Wright impiegano qui (come altrove) il verbo 'riferirsi' e i suoi derivati in modo tecnico, secondo l'uso abituale nella letteratura ispirata da Frege. Secondo questo uso (cf. §II.1.2), asserire che un nome proprio o termine singolare ha un riferimento equivale a asserire che esiste un oggetto denotato da quel termine. L'espressione 'essere supposto riferirsi a' è quindi impiegata per indicare un'occorrenza di tale termine che, almeno logicamente, precede il riconoscimento o l'assunzione che vi sia un tale oggetto (anche se si ammette che questo termine sia atto a identificare in modo univoco il presunto oggetto a cui si riferirebbe se avesse un riferimento).

Valutata alla luce di questa convenzione metodologica, la condizione che se gli asserti

---

<sup>1</sup>Molti degli articoli di Hale e Wright sull'argomento sono raccolti nel loro (2001). Alcuni di essi sono tradotti in italiano in Pedferri (2005). Cf. anche Hale (1987), Hale e Wright (2002), Cook (2007). Per una ricostruzione del dibattito, cf. MacBride (2003).

che formano un certo corpo  $A$  di asserti sono veri allora i termini singolari  $t_1, t_2, \dots$ , che intervengono in essi e sono supposti riferirsi a certi oggetti astratti, si riferiscono di fatto a tali oggetti, è logicamente equivalente alla condizione seguente: gli asserti di  $A$  sono veri solo se esistono degli oggetti astratti che i termini  $t_1, t_2, \dots$  denotano. Supponiamo che  $A$  si riduca al solo asserto ' $2+3=5$ '. Quest'ultima condizione ci dice che un tale asserto è vero solo se esistono i numeri 2, 3 e 5. Richiedere questo è analogo a richiedere che l'asserto 'Biancaneve è la madre di Nessy' sia vero solo se Biancaneve e Nessy esistono: l'esistenza rispettiva dei numeri 2, 3 e 5 e di Biancaneve e Nessy è una condizione necessaria per la verità di ' $2+3=5$ ' e di 'Biancaneve è la madre di Nessy'. Tale condizione, opportunamente generalizzata, è molto naturale e interviene in tutti gli argomenti — fra cui l'argomento di indispensabilità — che concludono che gli oggetti, o certi oggetti, matematici esistono perché, se così non fosse, i teoremi, o certi teoremi matematici non potrebbero essere veri. Il punto di Hale e Wright non è tuttavia questo. Quello che essi propongono è piuttosto di invertire la relazione fra ciò che spiega e ciò che è spiegato che è in generale ammessa in questi argomenti: non è perché i numeri naturali esistono, e sono così e così, che i teoremi dell'aritmetica sono veri (e quindi non potrebbero esserlo se i numeri non esistessero); piuttosto, è perché certi appropriati teoremi dell'aritmetica sono veri che i termini che sono supposti riferirsi ai numeri naturali hanno un riferimento, ovvero questi ultimi esistono e sono così e così. È proprio questo che il complesso argomento logico di Frege ricostruito nel §II.1.3 sembra suggerire. È per questo che Hale e Wright riconducono tale tesi al principio del contesto di Frege, che costituisce la pietra angolare di quell'argomento. Per semplicità chiamiamo allora questa tesi 'tesi di Frege'. Semplificando, essa è la tesi che i numeri naturali esistono e hanno certe caratteristiche perché certi asserti sono veri.

Presa da sola, questa tesi non permette di andare molto lontano. Lo stesso argomento di Frege comporta altri ingredienti volti a stabilire che i teoremi dell'aritmetica sono veri in quanto conseguenze delle leggi della logica. Se vogliamo quindi basare la nostra filosofia dell'aritmetica sulla tesi di Frege, dobbiamo corredarla di ingredienti che rimpiazzino quelli impiegati da Frege garantendo la verità degli asserti rilevanti, senza generare i problemi che hanno portato all'abbandono dell'argomento originale di Frege (cf. §II.1.5). Questo è ciò fanno che i neologicisti.

Prima di vedere come lo facciano, soffermiamoci sulla tesi di Frege. Nel formularla, abbiamo cercato di enucleare, nel modo che ci è sembrato più chiaro possibile, il punto cruciale della lettura neologicista del principio del contesto. Tuttavia, così come l'abbiamo formulata, questa tesi non è mai esplicitamente sostenuta né da Frege, né dai neologicisti. Più precisamente, i neologicisti sostengono che una volta che si sia stabilito, in base a certi appropriati criteri sintattici, che certe espressioni sono termini singolari, e, in base a altri criteri non ontologici, che certi asserti di un tipo opportuno, in cui tali termini occorrono, sono veri, nessun dubbio ulteriore può più essere avanzato a proposito del fatto che tali espressioni possiedono un riferimento, ovvero che esistono oggetti a cui esse si riferiscono (cf., per esempio: Wright, 1983, pp. 7-8, 13-15; Wright, 1998c, pp 350-351; Hale e Wright,



2001, p. 8). È invalso nel dibattito fare riferimento a questa tesi chiamandola ‘tesi della priorità sintattica’<sup>2</sup>, intendendo con questo che nel rispondere a domande sull’esistenza di certi oggetti, la priorità è attribuita alla struttura sintattica di certi asserti di un tipo opportuno la cui verità sia stata stabilita indipendentemente da considerazioni di natura ontologica .

La tesi della priorità sintattica è più precisa della tesi di Frege perché si accompagna alla (almeno presunta) identificazione dei criteri sintattici atti a stabilire se certe espressioni sono o no dei termini singolari e alla fissazione del tipo particolare di asserti in cui intervengono tali espressioni la cui verità è rilevante per decidere del carattere referenziale di queste ultime. È anche più generale, perché non si limita alla sola aritmetica. Ciò che più importa è che essa sembra spostare l’accento da una priorità causale — suggerita dalla tesi di Frege — a una priorità di natura puramente epistemologica, relativa soltanto all’ordine in cui si susseguono le considerazioni che ci permettono di stabilire che certi oggetti esistono.

Il modo in cui la tesi della priorità sintattica è formulata suggerisce quindi la possibilità di intendere la tesi di Frege in due modi molto diversi. Secondo un primo modo, questa tesi asserisce che l’esistenza dei numeri naturali dipende causalmente dalla verità di certi asserti. Il modo più naturale di articolare questa interpretazione è di sostenere che la nozione di esistenza, almeno qualora riguardi oggetti astratti, o certi oggetti astratti come i numeri naturali, non è primitiva, ma è definita in base alla nozione di verità. In altri termini, si dovrebbe sostenere che l’asserto ‘esistono i numeri naturali’ è per definizione l’abbreviazione di un asserto più complesso quale ‘gli asserti così e così, in cui intervengono i termini singolari così e così sono veri’. Un secondo modo di intendere la tesi di Frege è suggerito dalla formulazione della tesi priorità sintattica. Secondo tale interpretazione, la tesi di Frege non asserisce che l’esistenza dei numeri naturali dipende dalla verità degli asserti in questione, ma piuttosto da ciò che li rende veri. Si potrebbe allora sostenere questa tesi, pur ammettendo che i numeri naturali esistono indipendentemente dall’articolazione stessa degli asserti in questione, anche se è solo grazie alla loro articolazione e al riconoscimento della loro verità che perveniamo a sapere che esistono, ovvero a avere un accesso epistemico a essi.

Ci si può allora chiedere in che modo i neologicisti intendono la tesi di Frege e, conseguentemente, quella della priorità sintattica. La risposta non è immediata. Essi non suggeriscono mai apertamente che la nozione di esistenza non sia primitiva neppure in certi casi particolari, e anzi in certe occasioni (per esempio in Hale 1994a, pp. 137-138) sottolineano le difficoltà connesse con l’ammissione che vi siano più sensi in cui si possa parlare di esistenza. Inoltre, essi pensano che i numeri naturali non sono “creazioni della mente umana, in qualche modo portati a esistere dalle nostre stipulazioni” (Hale e Wright, 2001, pp. 16). Tuttavia, essi aggiungono (*ib.*, pp. 16-17) “che il concetto (sortale) sotto cui essi cadono è [...] introdotto” da noi, tramite l’ammissione di un principio generale che fissa la condizione necessaria e sufficiente in base alla quale gli asserti coinvolti nella tesi

---

<sup>2</sup>Il nome, oggi di uso comune, si deve a un passaggio di Wright (1983), p. 51. Per una formulazione più articolata, cf. MacBride, 2003, p.108.

di Frege sono veri. L'introduzione di questo concetto permetterebbe, come essi dicono (*ib.* p. 16), di "riconcettualizzare" uno stato di cose che, come tale, è indipendente dall'ammissione di tale principio. La verità di questi asserti risulterebbe congiuntamente da questo principio e da questo stato di cose, e i numeri naturali non sarebbero allora che il riferimento dei termini singolari che occorrono in tali asserti e quindi esistono proprio perché tali asserti sono veri.

Chiariamo questo punto anticipando qualcosa che spiegheremo più dettagliatamente nel seguito. Il principio generale di cui i neologicisti si servono — o meglio suggeriscono che di fatto ci si serve — per introdurre il concetto (sortale) sotto cui cadono i numeri naturali è HP (cf. §II.1.3), che essi formulano entro un contesto logico che preciseremo più avanti. Ma quale che sia il modo in cui è formulato, quel principio consiste di una doppia implicazione: esso stabilisce che il numero cardinale identificato in un certo modo è identico al numero cardinale identificato in un altro modo (nella formulazione di Frege, il numero che spetta a un dato concetto è identico al numero che spetta a un altro concetto) se e solo se si verifica una certa circostanza che può essere descritta senza richiamarsi ai numeri cardinali (nella formulazione di Frege, se e solo se i due concetti sono equinumerosi). Il lato sinistro di questa doppia implicazione dice che il numero cardinale *così* è *così* è identico al numero cardinale *cosà* e *cosà*; il lato destro dice che la circostanza *così* e *cosà* si verifica (per evitare fraintendimenti, osserviamo che, come chiariremo in seguito, per i neologicisti, come per Frege, i numeri naturali sono inclusi fra i cardinali).

Ora, secondo i neologicisti (per un'esposizione particolarmente chiara, tra le tante, di questo argomento, cf. Wright, 1990, pp. 87-91), lo stato di cose che fa sì che la circostanza *così* e *cosà* si verifichi è anche lo stato di cose che fa sì che il numero cardinale *così* è *così* sia identico al numero cardinale *cosà* e *cosà*. Quindi, i due lati della doppia implicazione hanno le stesse condizioni di verità. Tuttavia, continuano i neologicisti, lo stato di cose unico che fa sì tanto che il numero cardinale *così* è *così* sia identico al numero cardinale *cosà* e *cosà*, quanto che la circostanza *così* e *cosà* si verifichi è descritto nei due lati della nostra doppia implicazione in modo diverso, ovvero attraverso due asserti che hanno un "senso" diverso, o, in una terminologia suggerita dallo stesso Frege, esprimono due pensieri diversi. Nel descrivere questo stesso stato di cose, una volta facciamo riferimento a dei numeri cardinali, e una volta no.

Ne segue che i neologicisti devono ammettere: *i*) che due asserti con le stesse condizioni di verità possono avere sensi diversi, o esprimere pensieri diversi; *ii*) che due asserti che hanno le stesse condizioni di verità possono essere tali che in uno di essi occorrono termini che si riferiscono a oggetti tali che nell'altro asserto non occorra nessun termine che si riferisca a essi. Ammettere (*i*) è piuttosto comune e non dovrebbe porre difficoltà. Ammettere (*ii*) è molto più problematico. Data (*i*), un modo per rendere (*ii*) innocua sarebbe quello di stabilire che: *iii*) se due classi *A* e *B* di asserti sono tali che negli asserti di *A* occorrono termini che si riferiscono a oggetti (chiamiamoli gli *a*) tali che negli asserti di *B* non occorre nessun termine che si riferisce a essi, e ogni asserto di *A* ha le stesse

condizioni di verità di un asserto di  $B$ , allora gli  $a$  esistono solo in quanto gli asserti di  $A$  sono veri, e tali asserti sono a loro volta veri solo in quanto gli asserti di  $B$  lo sono.

Stabilire che sia così equivarrebbe a stabilire che gli  $a$  esistono solo in quanto gli asserti di  $B$  sono veri. Ma ciò significa che il senso in cui si dice che gli  $a$  esistono è specificato richiamandosi alle condizioni che rendono veri gli asserti di  $B$ . Nel caso di HP, si tratterebbe di stabilire che i numeri cardinali (e quindi i naturali) esistono solo in quanto gli asserti che includono termini che si riferiscono a essi sono veri, e questi ultimi asserti sono veri solo in quanto gli asserti che occorrono nel lato destro delle diverse esemplificazioni di tale principio lo sono. Ne seguirebbe che il senso in cui si dice che i numeri cardinali (e quindi i naturali) esistono è specificato richiamandosi alle condizioni che rendono veri questi ultimi asserti. Supponendo, come sembra plausibile, che il senso in cui altri oggetti esistono non sia specificato in questo modo, da ciò segue che vi sono, per stipulazione, almeno due sensi distinti in cui si può dire che un oggetto esiste. E abbiamo visto che i neologicisti non intendono ammettere questo. Più in generale, essi rigettano (iii).

Non vi è quindi per i neologicisti nessun'altra via se non quella di ammettere che asserendo che la circostanza così e così che rende veri gli asserti che occorrono nelle diverse esemplificazioni del lato destro di HP si verifica, si attribuiscono *ipso facto* certe proprietà e/o relazioni ai numeri cardinali. Ma, posto che tale circostanza si può verificare indipendentemente dalla accettazione di HP, e che il concetto di numero cardinale è introdotto tramite tale principio (e che i numeri naturali sono inclusi fra i cardinali), allora perché questo possa essere ammesso, si deve anche ammettere che i numeri cardinali (e fra questi i naturali) esistono — nel solo senso in cui si possa dire che degli oggetti esistono — del tutto indipendentemente dalla verità di ogni asserto in cui intervengono i termini singolari corrispondenti. I neologicisti non possono quindi che rigettare la prima interpretazione, causale, della tesi di Frege, e ammettere la seconda. Per essi la tesi della priorità sintattica è quindi una tesi di natura epistemica, non ontologica.

Ma se si ammette quanto appena detto, non ci si ritrova di fronte al problema dell'accesso e quindi al dilemma di Benacerraf? I neologicisti pensano di no, poiché ritengono che questo problema possa risolversi proprio grazie alla tesi della priorità sintattica, intesa in termini epistemic: è grazie a HP che abbiamo un accesso epistemico ai numeri naturali; in particolare, ciò che consente di avere accesso epistemico ai numeri naturali è il fatto che HP permette di stabilire che certi asserti in cui occorrono i termini singolari che sono supposti denotare tali naturali sono veri, e la loro verità è un fatto "indipendentemente costituito" (Hale e Wright, 2002, p. 121). Nel seguito chiariremo più in dettaglio la posizione neologicista, sperando di fornire al lettore qualche strumento per giudicare autonomamente della bontà di questa presunta soluzione al problema dell'accesso.

Torniamo quindi alla tesi della priorità sintattica. Essa richiede che la distinzione fra termini singolari e altri componenti di un linguaggio sia di natura sintattica. Come osserva Hale (1996a, p. 438), "*semanticamente*, un termine singolare è un'espressione la cui

funzione è quella di convogliare un riferimento a un oggetto particolare”. Questo criterio cozza tuttavia con la tesi di Frege, in quanto richiede, per poter essere applicato, che la decisione circa il carattere referenziale di una certa espressione preceda la decisione circa il suo essere o meno un termine singolare. Come la tesi della priorità sintattica rende esplicito, occorre quindi un criterio che non si richiami al carattere referenziale delle espressioni rilevanti, un criterio sintattico, appunto (cf. Hale, 1987, 1994b, 1996a). I neologicisti devono ammettere che un tale criterio esista, o, almeno, che vi siano ragioni puramente sintattiche, o pure stipulazioni linguistiche, che permettono di stabilire non solo che termini quali ‘zero’, ‘uno’, ‘due’, etc., o ‘0’, ‘1’, ‘2’, etc. sono singolari, ma che lo sono anche altri termini quali ‘3+5’, ‘il più piccolo numero perfetto’, ‘il numero del concetto  $\neg$ (essere) distinto da se stesso’, etc. E devono inoltre aggiungere che, qualunque cosa sia un numero naturale, il riferimento di questi termini sia un tale numero. Chiameremo qui ‘termini numerici naturali’ i termini singolari che soddisfano quest’ultima condizione.

In secondo luogo, i neologicisti devono stabilire quali sono gli asserti dalla cui verità segue che i numeri naturali esistono, ovvero il tipo di asserti ai quali si debba applicare la tesi della priorità sintattica. La loro risposta è che questi asserti sono gli asserti di identità come ‘ $a = b$ ’, dove ‘ $a$ ’ e ‘ $b$ ’ sono termini numerici naturali.

Si tratta poi di stabilire le condizioni di verità di questi asserti. I neologicisti sostengono che queste condizioni sono fissate da HP, che essi formulano come un bicondizionale che fornisce una condizione di identità per numeri di concetti (sortali). Ci si potrebbe chiedere allora, come fa Frege (che parla piuttosto, senza alcuna differenza rilevante, di numeri che spettano a concetti), che cosa sia il numero di un concetto, ovvero richiedere una condizione ulteriore: una condizione di applicazione per il concetto sortale di numero di un concetto (cf. cap. III). Questo è il punto fondamentale su cui i neologicisti si allontanano da Frege: a differenza che per quest’ultimo, essi pensano che la condizione fornita da HP sia sufficiente. La ragione non è solo, o tanto, che essi pensano che HP, in particolare il suo lato destro, “impone, almeno implicitamente, dei vincoli” (Hale e Wright, 2001, p. 368) relativi all’applicazione del concetto di numero naturale, e che questi vincoli siano sufficienti per fornire una soluzione al problema di Cesare. Ben più importante è che, se corredato da appropriati ausili logici, HP costituisce anche una base sufficiente per edificare l’intera aritmetica. Concentriamoci intanto sul secondo punto, che è davvero cruciale.

Secondo i neologicisti, HP è una definizione implicita dei numeri di concetti. I numeri di concetti non coincidono con i numeri naturali, e essendone piuttosto un sotto-insieme proprio. In altri termini, tutti i numeri naturali sono numeri di concetti, anche se vi sono concetti (quali lo stesso concetto di numero naturale) il cui numero non è un numero naturale. Ma il fatto che tutti i numeri naturali sono numeri di concetti è sufficiente a far sì che HP fornisca le condizioni di verità degli asserti di identità fra termini numerici naturali. Ma questo non è tutto: fornire queste condizioni è una cosa ben diversa dal fornire una base sufficiente per edificare l’intera l’aritmetica. Per questo non basta stabilire una condizione

di identità per i numeri naturali; occorre anche definire individualmente tutti questi numeri, mostrare che essi esistono, e definire su di essi una relazione d'ordine decidibile relativamente alla quale essi formino una progressione, cosa che permetterà poi di definire le usuali operazioni aritmetiche (cf. §III.1). Ora, come dice Wright (2000, pp. 319-320), “non vi è *a priori* alcuna particolare ragione perché un principio che sia supposto incorporare una spiegazione della natura di un particolare genere di entità matematiche debba anche fornire una base assiomatica sufficiente per la teoria matematica standard di questo genere di entità”. Infatti, “una cosa è caratterizzare il genere di entità che ci interessano, un'altra cosa è mostrare che, e perché, vi sono tutte le entità di quel genere che usualmente consideriamo ci siano, e che esse compongono una struttura come quella che intuitivamente ci aspettiamo che essi compongano”. Il punto cruciale è allora che, nel caso di HP e dell'aritmetica, queste due cose vanno insieme: se questo principio è immerso in un sistema appropriato della logica del secondo ordine, è possibile dedurre da esso, impiegando solo le risorse deduttive concesse da tale sistema, gli assiomi di Peano (ovviamente al secondo ordine). Questi assiomi si ottengono come teoremi della teoria i cui unici assiomi sono quelli di tale sistema della logica del secondo ordine più HP.

Come abbiamo visto nel §II.1.3, dopo aver enunciato HP, Frege ricorre a BLV, ovvero alla nozione di estensione di un concetto, per specificare che cosa siano i numeri che spettano ai concetti. Si basa poi su questa legge per dimostrare quel principio, definire i diversi numeri naturali, e dimostrare gli assiomi di Peano. Wright (1983, pp. 154-169) osserva che, una volta dimostrato HP grazie al ricorso a BLV, questa legge, così come la correlata legge VI, non svolgono alcun ruolo essenziale nella prova degli assiomi di Peano. La prova può quindi evitare di ricorrere alla definizione dei numeri naturali quali estensioni di concetti, e basarsi solo sulla loro caratterizzazione in quanto numeri che spettano ai concetti  $\ulcorner$ (essere) distinto da se stesso $\urcorner$ ,  $\ulcorner$ (essere) identico a zero $\urcorner$ , etc. In altre parole, secondo Wright, lo stesso argomento di Frege suggerisce la possibilità di sbarazzarsi della funzione  $\hat{\epsilon}[\varphi(\epsilon)]$ , e quindi delle leggi V e VI, aggiungendo direttamente HP agli assiomi di un sistema appropriato di logica del secondo ordine e dimostrando quindi, entro il sistema così ottenuto, gli assiomi di Peano. Wright (*ib.*) indica le linee generali per pervenire a tale dimostrazione, poi formalizzata da Boolos (1987; 1990, Appendice), che ha anche mostrato (1987; 1998, pp. 151-154) la consistenza di questo sistema (cf. anche Boolos e Heck, 1998; Burgess, 2005, cap. 3). Il teorema che asserisce che, entro un opportuno sistema della logica del secondo ordine, gli assiomi di Peano seguono dal solo HP è oggi noto come Teorema di Frege. Cerchiamo di comprenderne meglio il contenuto.

Supponiamo che  $L_2$  sia un sistema di logica del secondo ordine che includa la relazione di identità definita su oggetti, e ammette uno schema di assiomi di comprensione per predicati monadici:

$$\exists P \forall x [P(x) \leftrightarrow \mathcal{A}(x)]$$

Tale schema di assiomi assicura che, quale che sia la formula  $\mathcal{A}(x)$  del linguaggio di  $L_2$  che include una variabile libera  $x$ , esiste un predicato monadico  $P$  che è definito da tale formula.

In altri termini: è sufficiente scrivere in questo linguaggio una formula in cui occorre una variabile libera per disporre di un predicato monadico di cui ogni individuo gode se e solo se soddisfa questa formula. Aggiungiamo agli assiomi di  $L_2$  il nuovo assioma

$$\forall P \forall Q [(\#P = \#Q) \Leftrightarrow (P \approx Q)]$$

in cui ' $P \approx Q$ ' è un'abbreviazione per una formula di  $L_2$  che asserisce che gli oggetti che godono di  $P$  sono in corrispondenza biunivoca con gli oggetti che godono di  $Q$ , ovvero — se i predicati monadici sono interpretati come concetti — che i concetti  $P$  e  $Q$  sono equinumerosi, e ' $\#$ ' è un simbolo funzionale introdotto (ovvero definito implicitamente) da tale assioma che si applica a predicati monadici e fornisce termini singolari (ovvero tale che, per ogni  $P$  e  $Q$ , ' $\#P$ ' e ' $\#Q$ ' sono nomi di oggetti).

Questo assioma non è altro che HP immerso in  $L_2$ . In termini logici, esso è un principio di astrazione, ovvero un assioma della forma

$$\forall \alpha \forall \beta [(\$\alpha = \$\beta) \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta]$$

in cui ' $\alpha$ ' e ' $\beta$ ' sono variabili di in certo linguaggio, ' $\equiv$ ' è una relazione di equivalenza qualsiasi definita sulle entità su cui variano tali variabili<sup>3</sup>, e ' $\$$ ' è una costante funzionale introdotta da tale assioma che si applica a espressioni del tipo di ' $\alpha$ ' e ' $\beta$ ' e fornisce termini che possono occorrere ai lati del simbolo di identità. Non tutti i principi di astrazione sono analoghi (per uno studio delle loro diverse caratteristiche, cf. Fine, 2002). Fra le altre, due differenze sono cruciali. La prima è quella fra principi di astrazione in cui i valori della funzione  $\$$  sono entità dello stesso tipo o di tipo superiore a quelle a cui  $\$$  si applica, e quelli in cui i valori di  $\$$  sono entità di tipo inferiore a quelle a cui  $\$$  si applica. Un famoso esempio del primo caso è il principio menzionato da Frege nei §§ 64-67 delle *Grundlagen*:

$$\forall u \forall v [(\text{Dir.}(u) = \text{Dir.}(v)) \Leftrightarrow (u // v)]$$

Tale principio asserisce che, per ogni coppia di rette  $u$  e  $v$ , esse hanno la stessa direzione se e solo se esse sono parallele. Le direzioni sono cose che le rette hanno, e non viceversa, e sono quindi di tipo superiore a queste ultime. HP è un esempio del secondo caso. Dati due concetti qualsiasi  $F$  e  $G$ ,  $\#F$  e  $\#G$  sono infatti oggetti, e gli oggetti sono di tipo inferiore ai concetti poiché cadono sotto di essi. Anche BLV è un esempio del secondo caso, posto che per Frege le estensioni di concetti sono oggetti. La seconda differenza cruciale che può sussistere fra diversi principi di astrazione è esemplificata dal confronto fra BLV e HP: il secondo è consistente rispetto al sistema assiomatico in cui è immerso, ovvero la sua aggiunta a  $L_2$  dà luogo a un sistema consistente; la prima è inconsistente, rispetto a tale sistema (almeno se non è sottomessa a appropriate restrizioni), ovvero la sua aggiunta a  $L_2$ , o meglio al sistema di logica del secondo ordine di Frege, dà luogo a un sistema inconsistente.

Questa circostanza permette ai neologicisti di emendare la definizione di Frege dei numeri naturali: evitando il ricorso alle estensioni di concetti è possibile evitare l'inconsistenza insita in tale definizione. Dati due concetti qualsiasi  $F$  e  $G$ , i termini

<sup>3</sup>Una relazione  $R$  è una relazione di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva, ovvero se per ogni  $x, y$  e  $z$  vale, rispettivamente, che:  $R(x,x)$ ; se  $R(x,y)$ , allora  $R(y,x)$ ; se  $R(x,y)$  e  $R(y,z)$  allora  $R(x,z)$ .

singolari ‘#F’ e ‘#G’ introdotti nel linguaggio di  $L_2$  grazie a HP possono infatti essere interpretati come nomi per i numeri di questi concetti. Sfruttando lo schema di assiomi di comprensione, è quindi possibile definire il numero zero così:

$$0 =_{df} \#[x : x \neq x]$$

dove  $[x : x \neq x]$  è il concetto definito dalla formula ‘ $x \neq x$ ’, ovvero il concetto sotto cui cadono tutti e solo gli oggetti distinti da se stessi, il che vuol dire ovviamente, che sotto tale concetto non cade alcun oggetto. Lo schema di assiomi di comprensione garantisce la disponibilità di tale concetto; HP garantisce che ‘ $\#[x : x \neq x]$ ’ è un termine singolare ben formato. Inoltre, da HP e dalla verità logica  $[x : x \neq x] \approx [x : x \neq x]$  segue che  $\#[x : x \neq x] = \#[x : x \neq x]$ . I neologicisti ne concludono, in base alla tesi di Frege, che 0 esiste. È possibile allora definire 1 come segue:

$$1 =_{df} \#[x : x = 0]$$

dove  $[x : x = 0]$  è il concetto definito dalla formula ‘ $x = 0$ ’, ovvero il concetto sotto cui cade solo l’oggetto 0. Siccome quest’ultimo oggetto non è altro che  $\#[x : x \neq x]$ , perché la disponibilità di tale concetto sia garantita dallo schema di assiomi di comprensione, occorre che questo schema sia esteso in modo che  $\mathcal{A}(x)$  possa essere una formula che si ottiene aggiungendo il simbolo funzionale ‘#’ al linguaggio di  $L_2$ . I neologici ammettono questa estensione e si richiamano a HP e alla tesi di Frege per concludere che anche 1 esiste. È chiaro che è possibile continuare così definendo i numeri naturali uno dopo l’altro.

In tal modo, tuttavia, non si potrà mai pervenire all’insieme  $\mathbf{N}$  di tutti i numeri naturali. Per farlo si può procedere in due modi. Si può definire un’operazione  $suc(-)$ , applicabile a 0 e a tutti gli oggetti ottenuti a partire da zero applicando ricorsivamente tale operazione, la quale sia tale che  $suc(0) = 1$ ,  $suc(1) = 2 =_{df} \#[x : x = 0 \vee x = 0]$ , etc., poi ammettere che  $\mathbf{N}$  sia definito ricorsivamente in base a tale operazione (cf. cap II, n.25). Il modo scelto dai neologicisti non è questo. Essi non intendono definire  $\mathbf{N}$  ricorsivamente, ma come un tutto, attraverso una sola definizione, seguendo le indicazioni di Frege. L’idea è la seguente. Si comincia definendo una relazione di successione  $Suc(-,-)$  tale che per due oggetti  $n$  e  $m$  vale che  $Suc(n,m)$  se e solo se vi è un concetto  $P$  e un oggetto  $y$ , tali che  $y$  gode di  $P$ ,  $m$  è  $\#P$ , e  $n$  è  $\#[x : P(x) \wedge x \neq y]$ . Ne segue che per due oggetti  $n$  e  $m$  vale che  $Suc(n,m)$  solo se questi oggetti sono numeri di concetti, e che se 2, 3, ... sono definiti come suggerito sopra, allora  $Suc(0,1)$ ,  $Suc(1,2)$ ,  $Suc(2,3)$ , etc. Si definisce poi la relazione ancestrale di  $Suc(-,-)$  ovvero una relazione  $Suc^*(-,-)$  che, intuitivamente, è tale che per due oggetti  $n$  e  $m$  vale  $Suc^*(n,m)$  se e solo se  $m$  è il successore di  $n$ , o il successore del successore di  $n$ , o il successore del successore del successore di  $n$ , etc., ovvero se e solo se  $m$  segue  $n$  nella successione in cui ogni termine segue l’altro se e solo se ne è il successore. A questo punto si può stipulare che un oggetto  $n$  è un numero naturale se e solo se è 0 o è tale che  $Suc^*(0,n)$ . Data tale definizione e definito il numero 0 come detto, i diversi numeri naturali si possono poi definire come gli oggetti che formano quest’ultima successione. Posto che si ammetta uno schema di assiomi di comprensione analogo al precedente anche per predicati

diadici (o relazioni a due posti), è facile dimostrare, entro il sistema ottenuto attraverso le estensioni di  $L_2$  descritte fin qui, che tale successione è una progressione, ovvero che i numeri naturali soddisfano gli assiomi di Peano; cosa che per brevità si esprime dicendo che gli assiomi di Peano sono dimostrati in tale sistema. Ciò fatto, si può anche dimostrare che il numero di un concetto  $F$  sotto cui cadono infiniti oggetti — per esempio il concetto di numero naturale, o il concetto di oggetto identico a se stesso (sotto cui è certo che cadano infiniti oggetti, visto che se esistono tutti i numeri naturali esistono infiniti oggetti, e tutti gli oggetti sono identici a se stessi) — non è un numero naturale. Ne segue, come abbiamo anticipato sopra, che vi sono concetti i cui numeri non sono dei numeri naturali.

Queste dimostrazioni sono certamente corrette. Ma vi sono opinioni divergenti sulla natura logica e epistemica delle risorse che impiegano.

Il problema (filosofico) di stabilire i confini della logica — e in particolare di decidere se la logica del secondo ordine sia davvero una teoria logica o sia piuttosto una teoria matematica, e in particolare se la quantificazione al secondo ordine richieda o meno l'ammissione dell'esistenza di insiemi o di qualche altro tipo di oggetti astratti quali i concetti — è lungi dall'essere risolto. Non lo affronteremo qui. Ci limitiamo a indicare che Shapiro e Alan Weir (2000) hanno sostenuto che le risorse che tali dimostrazioni impiegano non sono comunque "epistemologicamente innocenti".

Ma sullo statuto di HP che si è soprattutto concentrata la discussione. Secondo i neologicisti, questo principio è analitico, perché il suo lato sinistro non fa che fornire le risorse concettuali necessarie per riconcettualizzare gli stati di cose che sono descritti nel suo lato destro (cf. per esempio Wright, 1999, per una difesa dettagliata di questa tesi). La nozione di analiticità impiegata qui differisce da quella di Frege (cf. §II.1.3) e ancora di più dalla nozione abitualmente accettata di verità logica (Boolos, 1997). I neologicisti ritengono tuttavia che dall'analiticità di HP segua che la loro definizione dei numeri naturali e la conseguente prova del teorema di Frege costituiscono un'adeguata realizzazione del programma di Frege e forniscono quindi la base per una versione neofregeana del platonismo aritmetico.

La discussione sul carattere analitico o meno di HP non può essere riassunta qui. Ciò che è importante osservare è che, anche qualora venga ammesso che tale principio sia analitico in un senso appropriato e che questo basti per riconoscere che la definizione dei numeri naturali che esso permette sia logicista e/o fregeana nello spirito, per poter concludere da qui che l'aritmetica tratta degli oggetti (astratti)  $0, 1, 2, \dots$  definiti in base a questo principio, occorre anche ammettere che tale definizione e la prova del teorema di Frege non mettano capo solo a una possibile (ovvero matematicamente appropriata) versione dell'aritmetica, ma diano luogo piuttosto all'aritmetica in quanto tale. Per comprendere il punto, basta osservare che vi sono molte maniere diverse per definire i numeri naturali in modo matematicamente appropriato, ovvero in modo che essi soddisfino gli assiomi di Peano. Il modo scelto dai neologicisti si riduce a edificare una certa teoria formale, abitualmente detta 'aritmetica di Frege', che si rivela matematicamente



appropriata. Ma tale teoria non è solo diversa da molte altre teorie formali matematicamente appropriate. Essa non è neppure logicamente equivalente a molte di esse (cf. Burgess, 2005). I neologicisti non sembrano considerare questo come un problema, e anzi ragionano come se l'aritmetica di Frege rivelasse la vera (e/o unica) natura dei numeri naturali.

Si potrebbe giustificare questa posizione come segue: i numeri naturali sono oggetti logici; i teoremi dell'aritmetica non possono quindi derivare che da principi puramente logici, o almeno analitici in un senso appropriato; HP è analitico in questo senso appropriato e la prova del teorema di Frege, così come ogni altra deduzione entro l'aritmetica di Frege, impiega solo principi puramente logici; *ergo*, tale aritmetica non è solo matematicamente, ma anche filosoficamente legittima in quanto rispetta la natura di oggetti logici dei numeri naturali; non solo, essa è la sola versione (matematicamente appropriata) dell'aritmetica che sia filosoficamente legittima. Per illustrare quest'ultimo punto si potrebbe osservare (Hale e Wright, 2000, pp. 315-318) che, mentre una definizione implicita dei numeri naturali dovuta alla semplice ammissione degli assiomi di Peano è "arrogante", in quanto stipula l'esistenza di "un dominio opportunamente largo di oggetti", la loro definizione tramite l'adozione di HP evita questo genere di arroganza, in quanto l'esistenza di numeri naturali così definiti, ovvero (secondo la tesi di Frege) la verità di asserti in cui occorrono termini numerici naturali, non segue solo da HP, ma segue da esso solo in base alla "verità indipendentemente costituita, e, nei casi migliori, indipendentemente accertabile" di altri asserti, della forma ' $P \approx Q$ ', che sono delle verità logiche (cf. anche Wright, 1997, p. 109-110; Hale e Wright, 2001, p. 10).

Qualunque giudizio si voglia dare su quest'ultima osservazione, resta che l'argomento precedente si basa su una premessa — i numeri naturali sono oggetti logici — che potrebbe venire accettata solo se si fosse disposti a riconoscere che la natura dei numeri naturali, il loro essere appunto degli oggetti logici, non discende dalla loro definizione in base a HP ma che, al contrario, legittimi tale definizione. Ma se così fosse, i numeri naturali dovrebbero avere una certa natura, e quindi esistere, indipendentemente da questo principio, e si porrebbe il problema di capire come tale esistenza e natura possa manifestarsi a noi. Si riproporrebbe allora il problema dell'accesso e quindi il dilemma di Benacerraf.

Tale problema sarebbe invece risolto se si ammettesse che l'esistenza e la natura dei numeri naturali, così come la loro natura di oggetti logici, segua da HP. Ma ciò equivarrebbe a riconoscere che, se riferita ai numeri naturali, la nozione di esistenza non è primitiva, ma è definita in base alla nozione di verità. Non solo, se si ammettesse questo, il fatto che l'aritmetica di Frege riveli la vera (e/o unica) natura dei numeri naturali dovrebbe essere giustificato senza basarsi su nessun argomento che si richiami all'assunzione che questo principio si accorda con la natura che i numeri naturali hanno in quanto tali, e quindi indipendente da esso. Un modo per farlo potrebbe essere quello di richiamarsi alla non arroganza di HP. Ma, per poter ammettere nel contempo che HP non sia arrogante occorre

intendere la tesi di Frege, e conseguentemente quella della priorità sintattica, in modo tale che tali tesi rendano legittima l'idea che l'esistenza di certi oggetti possa venir garantita dalla sola logica. E chiunque non creda già nel logicismo, potrebbe considerare questa come una riduzione all'assurdo della tesi che HP non stipula l'esistenza dei numeri di concetti (Boolos, 1987, p. 95). Un tale argomento sembrerebbe quindi o circolare, o tale da richiamarsi anch'esso, in fondo, all'assunzione che i numeri sono oggetti logici. D'altra parte, se si ammettesse che HP abbia una portata esistenziale, esso fornirebbe una definizione arrogante, come gli assiomi di Peano. Il problema sembra quindi ripresentarsi: come giustificare che l'aritmetica di Frege rivela la vera (e/o unica) natura dei numeri naturali?

Possiamo illustrare la situazione tornando al problema di Cesare. HP non fornisce, almeno esplicitamente, alcuna condizione di applicazione del concetto di numero naturale, e non ci dice quindi che oggetti sono esattamente i numeri di concetti e quindi i numeri naturali. Ma allora, come risolvere il problema di Cesare, e come rispondere al primo degli argomenti di Benacerraf? Abbiamo detto sopra che la soluzione al problema di Cesare proposta dai neologicisti si basa sull'osservazione che HP impone, almeno implicitamente, dei vincoli relativi all'applicazione del concetto di numero naturale. Più precisamente, i neologicisti si richiamano al principio seguente (Wright, 1983, pp. 116-177; Wright, 1998a, p. 395-396; Hale e Wright, 2001, p. 369):  $F$  è un concetto sortale sotto il quale cadono i numeri naturali solo se vi sono (o potrebbero esserci) dei termini singolari ' $a$ ' e ' $b$ ' suscettibili di denotare oggetti che cadono sotto  $F$ , tali che le condizioni di verità dell'asserto ' $a = b$ ' possano essere adeguatamente spiegate riconducendole all'equinumerosità di appropriati concetti. Secondo i neologicisti, questo principio è una conseguenza non problematica di HP e implica non solo che Cesare non è un numero naturale ma anche che non lo sono gli insiemi che formano la progressione di Zermelo, ognuno dei quali è equinumeroso con tutti gli altri (Wright, 1983, p. 123). Wright stesso riconosce però che, per determinare ciò che sono i numeri naturali, non basta scartare né la progressione di Zermelo, né tutti gli oggetti che non si adattano al principio precedente. La risposta neologicista al problema di Cesare non consiste quindi nel chiarire che oggetti sono i numeri naturali, ma solo nell'osservare che da HP segue che nessun oggetto che abbia certe caratteristiche indesiderabili sia un numero naturale.

Questa risposta rischia tuttavia di condurre a una vittoria di Pirro. La progressione di Zermelo soddisfa gli assiomi dell'aritmetica; perché i suoi elementi non dovrebbero potersi identificare con i numeri naturali? Come potremmo ammettere che un principio che esclude questa possibilità sia fonte di una definizione che rivela la vera (e/o unica) natura dei numeri naturali? Quale che sia questa ragione, essa non può dipendere dalle proprietà strutturali che richiediamo all'aritmetica. Ma allora da che cosa dipende, se non può neppure dipendere da certe condizioni rivelate dal nostro accesso indipendente ai numeri naturali? La sola risposta plausibile che i neologicisti sembrano poter dare si fonda sull'idea che le condizioni che i numeri naturali devono poter soddisfare non sono soltanto quelle

stabilite dalla pratica aritmetica e dall'uso dei numeri naturali per contare oggetti (garantite dagli assiomi di Peano), ma anche quelle suggerite dalla richiesta che una versione (filosoficamente) legittima di una teoria matematica dovrebbe "in qualche modo incorporare [*built into*] le sue applicazioni, attuali e potenziali, nel suo nucleo centrale, nel contenuto che ascrive agli asserti [...] di questa] teoria, piuttosto che limitarsi a 'aggiungerle in modo puramente esteriore'" (Wright 2000, p. 324; l'ultima citazione è tratta dai *Grundgesetze*, §159). Si tratta del cosiddetto 'vincolo di applicabilità [*application constraint*]' (o 'vincolo di Frege [*Frege constraint*]'): un principio generale che, come suggeriscono le considerazioni del §II.1.4, Frege sembra considerare essenziale nel caso dei numeri reali. Secondo Dummett (1991, pp. 272-273), questo vincolo è all'opera anche nella definizione di Frege dei numeri naturali. I neologicisti ammettono il vincolo e sostengono che la loro versione dell'aritmetica lo soddisfi, in quanto l'applicazione dei numeri naturali al conteggio di qualsivoglia gruppo di oggetti è direttamente spiegata dalla loro definizione in quanto numeri di concetti. L'aritmetica di Frege svelerebbe allora la vera (e/o unica) natura dei numeri naturali, in quanto, come ha osservato William Demopoulos (2005, p. 57; *cs*, p. 28 del manoscritto), HP "non è un postulato arbitrario, ma è il principio che controlla i nostri giudizi ordinari in materia di cardinalità", ovvero i nostri giudizi quotidiani che rispondono a domande come 'quanti oggetti così e così vi sono?' .

Qualunque giudizio si voglia dare su questo argomento, resta che, insieme alla precedente risposta al problema di Cesare, esso mostra perché il neologicismo permetta di dar corpo alla strategia suggerita dalle due prime obiezioni che Benacerraf rivolge a se stesso (cf. §III.1). Questo stesso argomento mostra però le difficoltà che il progetto neologicista incontra nell'estendersi al caso dei numeri reali. Wright (2000, pp. 228-229) ha osservato che le ragioni che giustificano l'adozione del vincolo di applicabilità nel caso dei numeri naturali non si estendono al caso dei reali. Infatti, se nel primo caso sembra plausibile sostenere che "il flusso della formazione dei concetti" vada dalle applicazioni empiriche alla teoria, nel secondo caso sembra che questo flusso vada nella direzione opposta, in quanto "la matematica classica della continuità [ovvero, l'analisi] è concepita per riconcettualizzare in modo *non empirico* i parametri di una variazione potenziale nei domini empirici a cui essa si applica". In altri termini, Wright osserva che quando assegniamo a una grandezza empirica, per esempio al lato di un appezzamento di terreno, una lunghezza espressa da un numero reale stiamo già, di fatto, richiamandoci a distinzioni che hanno un senso preciso solo entro la nostra teoria dei numeri reali, perché non vi è alcun modo empirico di distinguere una lunghezza che misura, diciamo 2 o  $\sqrt{2}$  chilometri, da una grandezza che misura  $r$  chilometri, dove ' $r$ ' denota un numero reale diverso da 2 o  $\sqrt{2}$  ma arbitrariamente prossimo a questi. Il problema è allora che mentre il lato destro di HP fa intervenire una relazione di equivalenza fra concetti che è facile definire e comprendere senza richiamarsi ai numeri naturali o a altre risorse di natura aritmetica, sembra difficile immaginare un principio di astrazione che introduca misure di grandezze, il cui lato destro faccia intervenire una appropriata relazione di equivalenza fra grandezze che

possa essere definite e comprese senza richiamarsi a risorse tipicamente proprie dell'analisi.

È relativamente facile definire l'insieme dei numeri reali impiegando appropriati principi di astrazione, tanto come propone Shapiro (2000b), ottenendolo come un'estensione di quello dei naturali, quanto come propone Hale (2000), seguendo i suggerimenti di Frege nel secondo volume dei *Grundgesetze*, e ottenendolo quindi come l'insieme dei rapporti fra grandezze. Ma resta il problema di fornire argomenti per sostenere che le definizioni così ottenute, che sembrano seguire più o meno naturalmente da quella che i logicisti avanzano per i numeri naturali, possano ritenersi in grado di svelare la vera (e/o unica) natura dei numeri reali. In una conferenza recente (tenuta a Parigi nel marzo 2009), Hale ha suggerito una giustificazione per il vincolo di applicabilità che si applicherebbe, senza differenze rilevanti, tanto nel caso dei naturali quanto nel caso dei reali. L'idea essenziale sarebbe che il pieno possesso dei concetti di numero naturale e di numero reale richiede la comprensione dell'uso di questi numeri per contare oggetti e misurare grandezze, rispettivamente. Ma anche se questo bastasse a giustificare (senza circolarità) il vincolo di applicabilità nei due casi, resterebbe da spiegare come, nel caso dei reali, questo uso possa essere inteso senza poter disporre in anticipo di una relazione di equivalenza fra grandezze che non dipenda da qualche risorsa tipicamente propria dell'analisi. Hale suggerisce di richiamarsi a una relazione d'equivalenza definita direttamente sulle grandezze, intese come elementi di una struttura sufficientemente ricca. Ma questo non solo sposta indietro il problema alla definizione delle grandezze, ma suggerisce anche che la teoria dei reali sia di fatto fondata su una teoria matematica previa delle grandezze, piuttosto direttamente sulle nostre capacità di formulare dei giudizi pre-matematici. E se è così, il vincolo di applicabilità non può avere il ruolo di assegnare una priorità filosofica a una certa definizione dei reali fra altre ugualmente appropriate matematicamente.

## **2. Linky e Zalta: matematica e logica (o metafisica) degli oggetti astratti**

Il problema cruciale che l'approccio neologicista deve risolvere, sia nel caso dei naturali che dei reali, è quello di giustificare che la definizione di questi numeri, basata rispettivamente su HP o su qualche altro principio di astrazione, possa svelarne la vera (e/o unica) natura. Questo problema riguarda ogni opzione filosofica che voglia fornire un resoconto di un certo frammento della matematica dando una definizione delle entità rilevanti che sia non solo matematicamente appropriata, ma anche filosoficamente legittima. Per evitare questa difficoltà, occorre cambiare strategia: cercare un modo di fornire il resoconto richiesto senza basarsi sulla scelta di una particolare definizione possibile fra altre ugualmente matematicamente appropriate. Questo è stato apertamente suggerito da Bernard Linky e Edward Zalta, relativamente al problema di fornire un'appropriate caratterizzazione della nozione di oggetto matematico in grado di rendere possibile l'adozione di una forma plausibile di platonismo (Linky e Zalta, 1995, 2006; Zalta, 1999, 2000). Secondo Zalta, questa caratterizzazione fornisce inoltre la base per un

programma neologicista, anche se questo aggettivo deve qui essere inteso in un senso molto diverso da quello che gli assegnano Hale e Wright.

Ecco quello che scrive Zalta (2000, pp. 219; cf. anche Linsky e Zalta, 2006, pp. 60-61):

[...] difendiamo una tesi filosofica che può preservare parte dello spirito del logicismo. La nostra tesi è che gli oggetti matematici sono (riducibili agli) oggetti astratti sistematizzati da una certa teoria metafisica assiomatica indipendente dalla matematica. Questa tesi appare come una versione del platonismo matematico perché, se corretta, renderebbe molto più rigorosa [...] la tesi [...] che la matematica descrive un regno di oggetti astratti. Vi sono inoltre due sensi in cui questa tesi costituisce una specie di neologicismo. In primo luogo perché il principio di comprensione per oggetti astratti che forma parte della teoria metafisica può essere formulato come un principio che suona come una verità analitica se non logica. [...] In secondo luogo perché gli astratti oggetti sistematizzati dalla teoria metafisica sono, in qualche senso, oggetti logici.

L'idea fondamentale alla base di queste dichiarazioni è che la nozione di oggetto astratto può essere trattata, *mutatis mutandis*, come la nozione di insieme, ovvero chiarificata attraverso una vera e propria teoria assiomatica formale: la *Object Theory*, come Zalta la chiama (presentata in Zalta (1983), è stata poi aggiornata<sup>4</sup> e esposta in numerosi articoli). A differenza di quella degli insiemi questa teoria non è tuttavia matematica, quanto piuttosto metafisica. Essa impiega il linguaggio usuale della logica predicativa modale di ordine superiore privo della relazione di identità ma arricchito da una nuova forma di predicazione che si affianca a quella tradizionale. Questa è detta 'codificazione [*encoding*]' e è espressa formalmente da formule come '(*a*)*F*' (letta '*a* codifica *F*'), dove '*a*' è un termine per oggetti o una variabile individuale e '*F*' una costante o variabile predicativa monadica. Nella sua versione più precisa, la *Object Theory* ricorre inoltre alla stratificazione in tipi, ma per il nostro scopo è sufficiente considerare una versione semplificata non tipificata e limitata al secondo ordine<sup>5</sup>.

Non sarà neppure necessario specificare gli assiomi logici che regolano le relazioni fra le usuali costanti della logica predicativa, gli operatori modali e le due forme di predicazione. Sarà sufficiente osservare che fra questi assiomi ve n'è uno, l'assioma

$$\Diamond[(a)F] \Rightarrow \Box[(a)F]$$

(dove '*a*' e '*F*' sono naturalmente lettere schematiche, rispettivamente per oggetti e proprietà monadiche) che assicura che, quale che siano l'oggetto *a* e la proprietà monadica *F*, *a* può codificare *F* solo se la codifica necessariamente. La teoria si avvale inoltre di una costante predicativa monadica primitiva '*E!*', in base alla quale sono definite due altre costanti predicative grazie alle stipulazioni seguenti:

$$O!(a) \text{ =}_{df} \Diamond[E!(a)] \quad ; \quad A!(a) \text{ =}_{df} \neg \Diamond[E!(a)]$$

Informalmente '*E!*' designa la proprietà di essere un oggetto concreto. A loro volta '*O!*' e '*A!*' designano, rispettivamente, la proprietà di essere un oggetto ordinario e di essere un oggetto astratto. Posto che per ogni oggetto *x*, vale che  $\Diamond[E!(x)] \vee \neg \Diamond[E!(x)]$ , gli oggetti sono quindi distinti in due classi complementari: quella degli oggetti ordinari che possono

<sup>4</sup>Un *draft* inedito disponibile in rete, *Principia Metaphysica* (<http://mally.stanford.edu/publications.html>), presenta una versione aggiornata al 1999.

<sup>5</sup>L'uso di un linguaggio tipificato garantisce maggiore rigore e permette anche di trasporre ciò che diremo in seguito sugli oggetti matematici a entità di tipo superiore, quali le proprietà monadiche, le relazioni, etc.

essere concreti, e quella degli oggetti astratti che non possono esserlo. Informalmente parlando, in un sistema di logica modale, gli oggetti appartengono a dei mondi possibili. Un oggetto ordinario è quindi un oggetto che in qualche mondo possibile è concreto, mentre un oggetto astratto non è concreto in nessun mondo possibile. Questo non basta a spiegare che cosa siano gli oggetti concreti, ordinari e astratti. Questa spiegazione è fornita dalla *Object Theory* nel suo insieme, la quale include degli assiomi propri che, insieme alle definizioni precedenti, definiscono implicitamente le costanti ‘E!’, ‘A!’ e ‘O!’.

Fra questi ultimi assiomi ve n'è uno, l'assioma:

$$O!(a) \Rightarrow \Box[\neg\exists P[(a)P]]$$

che assicura che gli oggetti ordinari non codificano alcuna proprietà monadica in nessun mondo possibile. Ne segue che un oggetto  $a$  codifica una qualche proprietà solo se è astratto. La teoria ammette anche il seguente schema di assiomi di comprensione:

$$\exists x[A!(x) \wedge \forall P[(x)P \Leftrightarrow \mathcal{A}]]$$

dove ‘ $\mathcal{A}$ ’ è una qualsiasi formula del linguaggio della teoria che non include alcuna occorrenza libera di ‘ $x$ ’. Esso assicura che, quale che sia tale formula, in particolare una formula che esprime una condizione che una proprietà monadica  $F$  è supposta soddisfare (ovvero una formula che include occorrenze libere di ‘ $F$ ’) vi è un oggetto astratto che codifica tutte e solo le proprietà monadiche che la soddisfano.

A questi assiomi si aggiungono tre definizioni implicite che introducono la relazione di identità fra oggetti e fra proprietà monadiche:

$$\begin{aligned} a =_E b &=_{\text{df}} [O!(a) \wedge O!(b) \wedge \Box\forall P[P(a) \Leftrightarrow P(b)]] \\ a = b &=_{\text{df}} (a =_E b) \vee [A!(a) \wedge A!(b) \wedge \Box\forall P[(a)P \Leftrightarrow (b)P]] \\ F = G &=_{\text{df}} \Box\forall x[(x)F \Leftrightarrow (x)G] \end{aligned}$$

La prima introduce la relazione di identità concreta (o identità fra oggetti ordinari), stabilendo che un oggetto  $a$  è concretamente identico a un oggetto  $b$  se  $a$  e  $b$  sono oggetti ordinari che necessariamente (cioè in tutti i mondi possibili) godono delle stesse proprietà monadiche. La seconda introduce la relazione di identità *tout court* fra oggetti, stabilendo che un oggetto  $a$  è identico a un oggetto  $b$  se  $a$  e  $b$  sono concretamente identici oppure sono oggetti astratti che necessariamente codificano le stesse proprietà monadiche. Infine la terza introduce la relazione di identità fra proprietà monadiche, stabilendo che una tale proprietà  $F$  è identica a una tale proprietà  $G$  se  $F$  e  $G$  sono necessariamente codificate dagli stessi oggetti.

Dalla seconda di queste definizioni, dallo schema di assiomi di comprensione e da quello che assicura che solo gli oggetti astratti codificano delle proprietà monadiche segue che per ogni formula appropriata ‘ $\mathcal{A}$ ’ vi è uno e un solo oggetto astratto che codifica tutte e solo le proprietà monadiche che soddisfano tale formula. Per denotare tale oggetto è sufficiente impiegare l'usuale operatore di descrizione ‘ $\iota$ ’, che permette di farlo tramite un termine come il seguente:

$$\ulcorner [A!(x) \wedge \forall P[(x)P \Leftrightarrow \mathcal{A}]] \urcorner$$

Un oggetto astratto è quindi inteso da Zalta come un correlato di un fascio di proprietà monadiche, e per ogni fascio di tali proprietà vi è un solo oggetto astratto che ne è il correlato. Zalta propone quindi un modo formale di implementare la vecchia idea che gli oggetti astratti risultino dalla reificazione di certe proprietà o fasci di proprietà: dato un qualsiasi fascio di proprietà monadiche, vi è un oggetto astratto che ne è la reificazione. Nel linguaggio formale di Zalta, questo è l'oggetto che codifica tutte e solo le proprietà che formano tale fascio. Supponiamo che il linguaggio della teoria di Zalta includa due costanti predicative monadiche 'Mst' e 'LcNs', atte a designare le proprietà di essere un mostro e di vivere nel lago di Loch Ness. In tale linguaggio è allora possibile scrivere la formula aperta (relativamente a 'P') ' $\forall y[P(y) \Leftrightarrow [Mst(y) \wedge LcNs(y)]]$ '. Lo schema di assiomi di comprensione precedente assicura allora l'esistenza dell'oggetto astratto

$$\ulcorner [A!(x) \wedge \forall P[(x)P \Leftrightarrow \forall y[F(y) \Leftrightarrow [Mst(y) \wedge LcNs(y)]]]] \urcorner$$

Si tratta dell'oggetto che codifica tutte e solo le proprietà che soddisfano la formula ' $\forall y[P(y) \Leftrightarrow [Mst(y) \wedge LcNs(y)]]$ ': il celeberrimo Nessy<sup>6</sup>. L'esistenza di tale oggetto, così come di ogni oggetto astratto, è allora un fatto puramente logico, metafisico e linguistico, garantito dalla metafisica e dalla logica degli oggetti astratti e dalla grammatica di ogni linguaggio predicativo appropriato che si decide di immergere in tale logica. Nel caso del nostro esempio, basta possedere un linguaggio in cui si possa parlare di mostri e del lago di Loch Ness, perché le assunzioni dell'*Object Theory* garantiscano l'esistenza di Nessy in quanto oggetto astratto. Quest'ultima specificazione è essenziale. L'esistenza di Nessy è un fatto puramente logico, metafisico e linguistico solo in quanto Nessy è inteso come il puro frutto della nostra fantasia. Che Nessy esista davvero in carne e ossa nel mondo in cui viviamo è ovviamente una questione che nessuna logica, metafisica, o linguaggio possono decidere.

Quest'ultimo fatto si rispecchia, nella teoria di Zalta, nella distinzione fra predicazione usuale e codificazione. Dato un qualsiasi fascio di proprietà monadiche, vi è un oggetto astratto che codifica tutte e solo le proprietà di tale fascio. Ma non è detto che vi sia anche un oggetto che goda di queste proprietà. Tale oggetto può esistere in qualche mondo possibile e non in altri, non esistere in nessun mondo possibile, o esistere in tutti i mondi possibili. Quale fra queste eventualità si verifichi dipende dal modo in cui i diversi mondi possibili sono fatti e dal fascio di proprietà rilevante. Per fare un altro esempio, se la teoria di Zalta assicura l'esistenza dell'oggetto astratto Cerchio Quadrato — ovvero dell'oggetto astratto che codifica la proprietà di essere un cerchio quadrato — risulta ovvio dalle rispettive definizioni delle proprietà di essere un cerchio e di essere un quadrato che in nessun mondo possibile esista un oggetto che gode di tale proprietà, ovvero un cerchio quadrato.

<sup>6</sup>È importante capire che il fascio di proprietà da cui Nessy risulta per reificazione non è formato dalle due proprietà di essere un mostro e di vivere nel lago di Loch Ness, ma dalla sola proprietà di essere un mostro che vive nel lago di Loch Ness e da tutte le eventuali proprietà di cui un oggetto gode se e solo se gode di questa proprietà. Le due proprietà di essere un mostro e di vivere nel lago di Loch Ness, separatamente prese, non soddisfano affatto la formula ' $\forall y[F(y) \Leftrightarrow [Mst(y) \wedge LcNs(y)]]$ '.

È su questa concezione degli oggetti astratti che si basano le idee di Linsky e Zalta sugli oggetti matematici. Questi sono per loro degli oggetti astratti. Il problema è stabilire quali fra gli oggetti astratti che esistono grazie alle nostre risorse linguistiche e alla *Object Theory* sia un oggetto matematico. Non basta rispondere che un oggetto astratto è matematico se è l'oggetto che codifica delle proprietà matematiche. Il problema non è solo che è difficile stabilire in generale che cosa sia una proprietà matematica. È piuttosto che se ammettessimo che fosse così, allora dovremmo concludere che il Cerchio Quadrato è un oggetto matematico, il che sembra implausibile. L'idea di Linsky e Zalta è allora che sono le teorie matematiche accettate (e non la logica e la metafisica degli oggetti astratti, le risorse dei nostri linguaggi, o qualsivoglia ragione filosofica) che decidono quali oggetti astratti sono matematici e quindi quali sono gli oggetti matematici. In breve, il loro punto è che perché un oggetto astratto sia matematico è necessario che vi sia una certa teoria matematica  $\tau$  in cui esso goda di certe proprietà. Se è così, questo è un oggetto di tale teoria, in particolare l'oggetto astratto che codifica tutte e solo le proprietà di cui gode in essa. Cerchiamo di spiegare questa idea.

Il primo passo compiuto da Linsky e Zalta consiste nell'estendere la nozione di codificazione di una proprietà a quella di codificazione di una proposizione (seguiamo qui, con alcune aggiunte, Linsky e Zalta, 1995, pp. 538-541). Questo è fatto trattando le proposizioni come proprietà a zero posti. Sia  $p$  una proposizione qualsiasi. Si tratta di associare a essa la proprietà a zero posti  $\ulcorner$  (essere) tale che  $p\ulcorner$ . Questa non deve confondersi con la proprietà monadica  $\ulcorner$  (essere) un  $x$  tale che  $p(x)\ulcorner$ , dove ' $p(x)$ ' è una formula che include un'occorrenza libera di ' $x$ '. La proprietà  $\ulcorner$  (essere) tale che  $p\ulcorner$  è piuttosto la proprietà che un oggetto  $a$  ha se e solo se è il caso che  $p$ , dove  $p$  e  $a$  sono fra loro indipendenti. In altre parole, è la proprietà che ogni oggetto possiede se il mondo a cui esso appartiene è tale che  $p$ . Essa è designata da ' $[y : p]$ '. Linsky e Zalta suggeriscono che un oggetto codifica una proposizione  $p$  se e solo se codifica la proprietà  $[y : p]$  (ovvero è intuitivamente la reificazione di tale proposizione). Questa proprietà sarà detta 'proposizionale'. Per brevità si dirà anche che essa è ottenuta da  $p$  (*constructed out of p*). Non è il caso qui addentrarsi nella complessa questione di capire che cosa sia una proposizione (su cui cf. per riferimenti McGrath, 2007). Basterà dire che una proposizione  $p$  è qualcosa di cui si può dire che è il caso che  $p$ , e che  $p$  è vero o falso<sup>7</sup>.

Ma che cosa si intende allora dicendo di una proposizione che è matematica? Linsky e Zalta non rispondono a tale domanda poiché ritengono che rispondervi non faccia parte dei compiti dell'opzione filosofica che promuovono. Che certe proposizioni siano matematiche dipende dal fatto che la comunità matematica le accetti come tali. Per il filosofo, questo è semplicemente un fatto. Che questo fatto possa richiedere una spiegazione non forza un filosofo a fornirla. Egli può affrontare altri problemi, per esempio riconoscere questo fatto e stabilire i criteri in base ai quali, a fronte di esso, si possa decidere quali siano gli oggetti

---

<sup>7</sup>In filosofia del linguaggio, solitamente si intende con proposizione il contenuto di un asserto, o ciò che un asserto esprime. In matematica si usa invece spesso questo stesso termine per denotare dei teoremi o, più in generale, degli asserti, e qualche volta questo uso sconfinava, per semplicità, anche alla filosofia delle matematiche.



delle teorie matematiche. Ciò equivale a caratterizzare in generale la nozione di oggetto matematico relativamente alla nozione, assunta come primitiva, di proposizione matematica. Questo è ciò che Linsky e Zalta si propongono di fare. Per giungere a questo scopo, essi non pensano necessario neppure chiarire in generale che cosa sia una teoria matematica ma si limitano a fornire una descrizione di una teoria matematica nei termini di certe proposizioni che sono supposte essere matematiche. Tale descrizione si basa sulle assunzioni che una teoria matematica sia a sua volta un oggetto astratto e che essa abbia un autore. Essa è inoltre tale che una teoria matematica “asserisce” delle proposizioni matematiche: l’idea è che una teoria matematica asserisce una proposizione matematica se e solo se questa teoria codifica la proprietà proposizionale ottenuta da questa proposizione.

Chiariamo questo punto (cf. Zalta, 2000, pp. 230-232). Che Linsky e Zalta non vogliono spiegare in generale che cosa faccia sì che una proposizione o una teoria siano matematiche è manifestato dal fatto che essi ricorrono a due costanti predicative primitive: ‘*Math(-)*’, che è supposta designare la proprietà di essere una proposizione matematica; e ‘*Aut(-,-)*’ che è supposta designare la relazione di essere l’autore di qualcosa. Sia la proprietà che la relazione in questione sono supposte come note. La descrizione è allora fornita dalla seguente definizione esplicita:

$$MathTh(a) =_{df} \exists z[E!(z) \wedge Aut(z,a)] \wedge \forall P[(a)P \Leftrightarrow \exists p[Math(p) \wedge P = [y : p]]]$$

che introduce a sua volta la costante ‘*MathTh(-)*’ che è appunto supposta designare la proprietà di essere una teoria matematica. Una teoria matematica è così descritta come un oggetto astratto di cui esiste un oggetto concreto che ne è l’autore, e che codifica le proprietà proposizionali ottenute da certe proposizioni matematiche. Queste proposizioni sono proprio quelle che questa teoria matematica asserisce. Linsky e Zalta ammettono anche un’altra terminologia. Essi dicono che le proprietà matematiche in questione sono vere in tale teoria e associano questo modo di parlare alla definizione esplicita seguente:

$$t \models p =_{df} (t)[y : p]$$

Il simbolo ‘ $t \models p$ ’ non deve intendersi nel modo usuale: esso non indica che  $p$  è una conseguenza logica di  $t$  (che  $p$  è vera ogni volta che lo è  $t$ ), esso fornisce solo un altro modo di scrivere ciò che si scrive anche tramite il simbolo ‘ $(t)[y : p]$ ’, ovvero indica solo che  $t$  codifica la proprietà proposizionale ottenuta da  $p$ . E siccome Linsky e Zalta propongono di leggere ‘ $t \models p$ ’ come ‘ $p$  è vera in  $t$ ’, anche la proprietà di una proposizione di essere vera in una teoria deve essere intesa come una proprietà definita in base alla nozione di codificazione: dire che  $p$  è vera in  $t$  non è altro che un modo abbreviato per dire che  $t$  codifica la proprietà proposizionale ottenuta da  $p$ .

È allora naturale ammettere un altro modo di esprimersi (cerchiamo di chiarire qui un punto che Linsky e Zalta lasciano implicito). Sia  $p_{[F(a)]}$  la proposizione che un oggetto  $a$  gode della proprietà  $F$ , ovvero la proposizione espressa dall’asserto ‘ $F(a)$ ’. Supponiamo che  $\tau \models p_{[F(a)]}$  per una certa teoria matematica  $\tau$ , ovvero che  $p_{[F(a)]}$  sia vera in  $\tau$ , o, il che è lo stesso, che  $\tau$  codifichi la proprietà proposizionale ottenuta da  $p_{[F(a)]}$ . È allora naturale esprimere questo fatto dicendo che  $a$  gode di  $F$  in  $\tau$ , o scrivendo direttamente ‘ $\tau \models F(a)$ ’.

L'ultimo ingrediente nella costruzione teorica di Linsky e Zalta è una "regola di chiusura". Si tratta di stipulare che le proposizioni che seguono da un corpo di proposizioni vere in una certa teoria matematica sono vere in tale teoria. Che cosa significhi qui che una proposizione segue da altre proposizioni in una teoria non è specificato in generale: esso può e deve esserlo solo entro tale teoria. Questo a parte, ciò che è importante osservare è che la codificazione non è chiusa, in generale, sotto alcun tipo di relazione di conseguenza: in generale, è perfettamente ammesso che un certo oggetto  $a$  possa non codificare la proprietà  $G$  anche se esso codifica  $F_1, \dots, F_n$ , e dal fatto che un oggetto  $b$  goda di  $F_1, \dots, F_n$  segua (in qualche senso) che  $b$  gode di  $G$ . La regola di chiusura per le teorie matematiche deve quindi essere introdotta tramite una stipulazione indipendente dal resto della *Object Theory*.

Siamo ora pronti a comprendere come Linsky e Zalta caratterizzano in generale la nozione di oggetto matematico. Supponiamo che  $\tau$  sia una teoria matematica. Allora (Zalta, 2000, p. 232) possiamo dire che un oggetto  $a$  è un oggetto di  $\tau$  se e solo se vi è una qualche proprietà monadica  $F$  tale che  $a$  gode di  $F$  in  $\tau$ . Ciò si esprime tramite la seguente definizione esplicita:

$$Ob.of(x, \tau) \text{ =}_{df} \exists F[\tau \models F(a)]$$

Sia ora ' $\kappa_\tau$ ' un termine del linguaggio di  $\tau$  per cui sia possibile formulare in tale linguaggio, per qualche lettera predicativa monadica ' $F$ ', l'asserto ' $F(\kappa_\tau)$ ', che esprime la proposizione che l'oggetto  $\kappa_\tau$  gode della proprietà  $F$ . Linsky e Zalta suggeriscono la seguente definizione:

$$\kappa_\tau \text{ =}_{df} \iota x[A!(x) \wedge \forall P[(x)P \Leftrightarrow t \models P(\kappa_\tau)]]$$

In altri termini, essi suggeriscono, come abbiamo già anticipato, che un oggetto matematico  $\kappa_\tau$  di una certa teoria matematica  $\tau$  sia quell'oggetto astratto che codifica tutte e solo le proprietà di cui esso gode in  $\tau$ . Questo si può dire anche così: un oggetto matematico  $\kappa_\tau$  di una certa teoria matematica  $\tau$  è l'oggetto astratto che codifica tutte e sole le proprietà monadiche  $F$  che sono tali che  $\tau$  codifica la proprietà ottenuta dalla proposizione  $p_{[F(\kappa_\tau)]}$ .

Da questa definizione non segue che vi siano oggetti matematici, e tanto meno quali essi siano. Questo dipende dall'esistenza e dalle caratteristiche delle teorie matematiche. Tale definizione mostra solo come caratterizzare in generale gli oggetti matematici la cui esistenza e caratteristiche particolari sono assicurate dalle teorie matematiche accettate. Consideriamo la proprietà di essere un numero naturale e designiamola con ' $NN$ '. Secondo la *Object Theory*, vi è un unico oggetto astratto

$$\iota x[A!(x) \wedge \forall P[(x)P \Leftrightarrow \forall y[F(y) \Leftrightarrow NN(y)]]]$$

che è la reificazione di questa proprietà, ovvero codifica tutte e solo le proprietà che soddisfano la formula ' $\forall y[F(y) \Leftrightarrow NN(y)]$ ' (ovvero la stessa proprietà  $NN$  e tutte proprietà di cui un oggetto gode se e solo se gode di essa). Chiamiamo questo oggetto 'il Numero Naturale', abbreviato ' $v$ '. Il Numero Naturale è un oggetto astratto. Perché sia un oggetto matematico è quindi necessario e sufficiente che vi sia una teoria matematica  $\tau$  tale che

$$\forall P[(\forall v)P \Leftrightarrow \tau \models NN(v)]$$

Siccome è certo che  $(\forall v)NN$ , se vi fosse una tale teoria sarebbe il caso che  $\tau \models NN(v)$ . Quindi, perché il Numero Naturale sia un oggetto matematico è necessario che vi sia una teoria matematica  $\tau$  tale che  $\tau \models NN(v)$ . Ma, per la regola di chiusura, se  $F$  è una proprietà monadica di cui un oggetto gode in  $\tau$  se e solo se gode di  $NN$ , allora vale anche  $\tau \models F(v)$ . Quindi il Numero Naturale è un oggetto matematico solo se vi è una teoria matematica in cui esso è un numero naturale. Ma vi è una tale teoria? La *Object Theory* e la precedente caratterizzazione generale della nozione di oggetto matematico non ce lo dicono. Per saperlo dobbiamo guardare alla matematica e, eventualmente, alla sua storia. E se lo facciamo, dobbiamo presumibilmente concludere che il Numero Naturale non è un oggetto matematico, ovvero che non esiste alcun oggetto matematico identico al Numero Naturale.

D'altra parte, per un platonista aritmetico non vi è dubbio che esistano infiniti numeri naturali. Per esempio il numero zero. Sia allora  $Z$  la proprietà di essere (identico a) zero. Secondo la *Object Theory*, vi è un unico oggetto astratto

$$\iota x[A!(x) \wedge \forall P[(x)P \Leftrightarrow \forall y[F(y) \Leftrightarrow Z(y)]]]$$

che ne è la reificazione, ovvero codifica tutte e solo le proprietà che soddisfano la formula ' $\forall y[F(y) \Leftrightarrow Z(y)]$ '. Chiamiamolo 'il Numero Zero', abbreviato 'ζ'. Perché questo oggetto sia un oggetto matematico è necessario e sufficiente che vi sia una teoria matematica  $\tau$  tale che

$$\forall P[(\zeta)P \Leftrightarrow \tau \models Z(\zeta)]$$

Siccome è certo che  $(\zeta)Z$ , se così fosse, sarebbe anche il caso che  $\tau \models Z(\zeta)$ . Quindi, il Numero Zero è un oggetto matematico se e solo se vi è una teoria matematica in cui esso è zero. Vi è una tale teoria? La risposta potrebbe sembrare facile: sì, vi è tale una teoria, anzi ve ne sono molte, in particolare tutte le versioni dell'aritmetica che siamo disposti a accettare. Questa risposta è però corretta solo se in queste versioni dell'aritmetica, o almeno in alcune di esse, zero è il Numero Zero. E questo non dipende solo dalle teorie matematiche in questione, ma anche dal modo in cui le concepiamo filosoficamente.

Dobbiamo quindi concludere che la *Object Theory* e la precedente caratterizzazione generale della nozione di oggetto matematico forniscono un argomento a favore del platonismo solo a condizione che si sia disposti a accettare l'idea che gli oggetti di cui le teorie matematiche sono supposte trattare siano proprio quelli che Linsky e Zalta dicono che dovrebbero essere, ovvero, fra le altre cose, oggetti astratti la cui esistenza è, come lo è per Nussy, un fatto puramente logico, metafisico e linguistico. Ma siamo disposti a fare questa concessione? Linsky e Zalta a parte, non sembrano esservi molti filosofi della matematica che siano disposti a farla.

Chiariamo questa conclusione considerando le seguenti citazioni (Zalta, 2000, p. 233; Linsky e Zalta, 1995, p. 547):

[...] non vi è nessuna prospettiva privilegiata propria alla teoria dei modelli che ci dica che cosa siano gli 'oggetti di' una teoria  $t$ . Da un punto di vista metafisico, gli oggetti di una teoria sono quelli descritti dalle sue affermazioni di re, in quanto queste affermazioni attribuiscono proprietà agli oggetti.

La conoscenza di particolari oggetti astratti non richiede alcuna connessione causale con essi, ma noi li conosciamo individualmente perché la conoscenza *de re* degli oggetti astratti è via descrizione. Tutto ciò che si deve fare per accedere *de re* a [to become acquainted *de re* with] un oggetto astratto è comprendere la condizione descrittiva che lo definisce, in quanto le proprietà che un oggetto astratto codifica sono precisamente quelle espresse dalle sue condizioni definitorie. Così la nostra facoltà conoscitiva per acquisire conoscenza di oggetti astratti è semplicemente quella usata per capire il principio di comprensione. Abbiamo così una risposta alla preoccupazione di Benacerraf [...]

Il principio di comprensione è qui ovviamente l'esempio dello schema di assiomi di comprensione che riguarda le proprietà rilevanti per definire l'oggetto in questione. Linsky e Zalta sostengono quindi che basta capire la definizione di un oggetto astratto per accedere a esso *de re*, ovvero a esso come tale e non a esso in quanto ciò che soddisfa certe condizioni. Se è così, e gli oggetti matematici sono oggetti astratti, il dilemma di Benacerraf è semplicemente dissolto: esso ammette la ovvia risposta che noi conosciamo gli oggetti matematici in quanto li definiamo. E siccome tale conoscenza è *de re*, essa è perfettamente compatibile con una concezione tradizionale della verità matematica: i teoremi della matematica sono veri perché vi sono oggetti matematici che godono delle proprietà rilevanti. Tuttavia, per Linsky e Zalta questo è una conseguenza del fatto che le teorie matematiche sono oggetti astratti che codificano delle proprietà proposizionali appropriate. In altri termini, è una conseguenza del modo in cui essi descrivono le teorie matematiche e i loro oggetti. Il punto è allora se la loro descrizione è plausibile. La risposta non può essere solo che lo è in quanto è coerente e implementa la vecchia e molto naturale idea che gli oggetti astratti sono reificazioni di proprietà. Tale risposta dovrebbe anche tener conto delle teorie matematiche effettive, ovvero dovrebbe richiamarsi al fatto che queste teorie sono come Linsky e Zalta le descrivono. Ma una volta che si sia ammesso che la proprietà di essere una teoria matematica è definita come abbiamo detto, in base alle due costanti predicative primitive '*Math(-)*' e '*Aut(-,-)*', per verificare che sia così occorre confrontare le condizioni imposte a tali costanti con le teorie matematiche reali e valutare se queste possono plausibilmente concepirsi come reificazioni di proprietà proposizionali. Ciò è tuttavia proprio quello che Linsky e Zalta non fanno, visto che evitano perfino di imporre alle costanti '*Math(-)*' e '*Aut(-,-)*' altre condizioni oltre a quelle coinvolte nella definizione di '*MathTh(-)*'. Si comprende allora perché la (dis)soluzione prospettata del dilemma di Benacerraf è spesso considerata come poco esplicativa. Essa potrebbe forse fornire le basi per una spiegazione appropriata, ma questa spiegazione non potrebbe comunque non includere altri ingredienti, come tali estranei alla *Object Theory*.

### **3. Una prima versione dello strutturalismo non-eliminativo: lo strutturalismo *ante rem***

L'idea che gli oggetti matematici siano reificazioni di certe proprietà può essere elaborata anche indipendentemente dalla complessità *Object Theory*. L'idea è in fondo suggerita dalla tesi — avanzata da Hilbert (cf. §II.4.3), e implicitamente ammessa da molti altri — che la consistenza di certe teorie è una condizione sufficiente per l'esistenza delle entità di cui esse trattano. Per trarre da questa tesi una risposta al dilemma di Benacerraf occorre tuttavia spiegare meglio lo statuto di tali entità, fissare dei criteri che una teoria consistente deve

soddisfare per essere ammessa quale teoria matematica, e stabilire il senso in cui si possa parlare di verità e conoscenza relativamente a essa.

Se è convenientemente generalizzata oltre i confini dell'aritmetica, la tesi di Frege suggerisce un modo per far fronte a queste esigenze. In base a essa, per mostrare che gli oggetti matematici esistono e che se ne ha conoscenza basta identificare degli asserti appropriati e fissare le loro condizioni di verità e le loro relazioni con tali oggetti. Secondo i neologicisti HP fissa le condizioni di verità degli asserti rilevanti per l'esistenza dei numeri naturali, e lo fa in modo da garantire che la loro esistenza non sia il frutto di una mera stipulazione, ma dipenda da fatti indipendenti dall'aritmetica stessa. Un diverso atteggiamento è però possibile: si può ammettere che la verità degli asserti rilevanti per la tesi di Frege segua dal fatto che essi sono dei teoremi di una certa teoria matematica, e che sia quindi in virtù della natura di questa teoria che certi oggetti matematici esistono e hanno certe caratteristiche: è la matematica che spiega la matematica, e la sua ontologia non dipende da altro che dalla matematica stessa. Questa idea è alla base di quello che Parsons (1990, §8; 2008, §18) chiama 'strutturalismo non-eliminativo', in quanto opposto allo strutturalismo eliminativo (cf. §IV.3). Ne presenteremo due versioni: quella di Parsons, e lo strutturalismo *ante rem* di Shapiro (1997), anche se una posizione per certi versi simile è sostenuta da Resnik (1997). In questo paragrafo consideriamo il secondo (lasciando il primo per il paragrafo successivo), seguendo l'esposizione di Shapiro (2000a, pp. 263-270 e 275-289).

L'idea fondamentale dello strutturalismo non-eliminativo è che la considerazione di strutture non conduce a fare a meno di oggetti astratti indesiderati: piuttosto, essa permette di chiarire la natura degli oggetti matematici, e mostra che essi sono oggetti in un senso genuino del termine: gli oggetti matematici, o almeno alcuni di essi, non sono altro che posti di strutture, e non hanno alcuna proprietà se non quelle che dipendono dal loro essere tali (ciò non implica che non possano avere proprietà non definibili entro la relativa struttura: il numero 100 ha per esempio la proprietà di essere il numero dei canti della *Divina Commedia*). Lo strutturalismo *ante rem* ammette questa tesi, ma, come osserva Parsons (2008, pp. 51-52), sostiene una tesi ulteriore rispetto allo strutturalismo non-eliminativo: le strutture esistono indipendentemente dal loro essere esemplificate da certi sistemi di oggetti. Prima di considerare questa seconda tesi, è necessario considerare la prima. Ci limitiamo a considerarla per come essa è articolata da Shapiro (cf. anche Parsons, 1990, §8; 2008, §18 per una discussione e difesa da possibili obiezioni).

Secondo Shapiro (1997, pp. 83-74), "una struttura è la forma astratta di un sistema" e un sistema è "una collezione di oggetti con certe relazioni". Più in particolare, una struttura è pensata come una rete che connette fra loro dei posti vuoti che sono supposti venir occupati da certi oggetti che stanno fra loro in determinate relazioni. Quando questo avviene, il sistema formato da tali oggetti esemplifica la struttura e questa fornisce la forma di quel sistema. Per brevità, diciamo che una struttura ha dei posti, e che essa è esemplificata da un sistema se questi posti sono occupati dagli oggetti che lo formano; se

un sistema esemplifica una struttura, questa è la forma astratta del primo.

Shapiro (1997, pp. 10-11 e 82-83) distingue due differenti modi di considerare le strutture e i loro posti. Possiamo trattare i posti nei termini degli oggetti che li occupano, per esempio se diciamo che il tre di von Neumann ( $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ) contiene più elementi del tre di Zermelo ( $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ ), o che il Presidente della Repubblica Italiana è un uomo di sinistra. Qui i termini ‘tre’ e ‘presidente della Repubblica Italiana’ denotano dei ruoli (*offices*). Questi sono ben distinti dagli oggetti che li svolgono, ovvero  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ,  $\{\{\{\emptyset\}\}\}$  e Giorgio Napolitano: noi attribuiamo delle proprietà ai secondi, non ai primi (è  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  che contiene più elementi di  $\{\{\{\emptyset\}\}\}$  e non il posto-tre della struttura di progressione che occupa più elementi di se stesso; analogamente è Napolitano e non il ruolo di Presidente della Repubblica Italiana a essere un uomo di sinistra). Shapiro, chiama questo punto di vista, proprio dello strutturalismo eliminativo, ‘prospettiva i-posti-sono-ruoli’. Egli non la ritiene inappropriata, ma osserva che altri usi linguistici suggeriscono un altro punto di vista. Possiamo osservare che il Presidente della Repubblica Italiana non ha né ha mai avuto poteri esecutivi. In questo caso non attribuiamo alcuna proprietà a Napolitano come tale, né a nessun altro in particolare; parliamo piuttosto del ruolo che Napolitano temporaneamente svolge e che altre persone hanno svolto. Per capirlo basta osservare che il presidente della Repubblica Italiana non ha mai avuto poteri esecutivi, mentre Napolitano li ha avuti quando ha svolto il ruolo di ministro. Dicendo che il Presidente della Repubblica Italiana non ha né ha mai avuto poteri esecutivi stiamo quindi trattando il ruolo di Presidente della Repubblica Italiana come un oggetto: lo denotiamo tramite un termine che ha la stessa funzione grammaticale dei termini che, in altri asserti, denotano le persone che svolgono tale ruolo. Questa è il punto di vista che Shapiro chiama ‘prospettiva i-posti-sono-oggetti’.

Shapiro suggerisce che gli oggetti matematici, almeno quelli di cui tratta la matematica pura moderna (torneremo più avanti su questo), siano posti di strutture trattati secondo questa prospettiva. Le teorie matematiche riguarderebbero dunque strutture e anzi, insiste Shapiro, “la matematica è la scienza delle strutture” (1997, p. 5), anche se dall’insieme del suo libro risulta chiaramente che egli intenda riferirsi solo alla matematica pura, in particolare a quella moderna. Ma per quanto le teorie della matematica (pura moderna) riguardino strutture, i loro teoremi non parlano propriamente di esse; parlano dei loro posti e ne descrivono le proprietà. Questi teoremi vanno quindi intesi secondo la loro forma grammaticale apparente: sono asserti che descrivono oggetti. Si tratta dunque di un modo di formulare una posizione platonista.

Alcuni chiarimenti sono necessari. Primo, la distinzione fra le strutture, i loro posti, e gli oggetti che li occupano è relativa. Vi possono essere teorie matematiche che riguardano strutture i cui posti sono, possono o devono essere occupati, o perfino sono costituiti, da altre strutture. La teoria dei gruppi è un esempio lampante. I teoremi matematici possono quindi parlare propriamente di strutture, proprio perché parlano dei posti di altre strutture. Secondo, dal fatto che gli oggetti matematici siano posti di strutture non segue che in certi

contesti non si possa parlare di oggetti matematici determinati come tali ma non in quanto posti di certe strutture, così come si parla per esempio degli insiemi  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  e  $\{\{\{\emptyset\}\}\}$  nel contesto del primo argomento di Benacerraf. Lo strutturalista *ante rem* si limiterà allora a osservare che questi oggetti sono in realtà determinati in quanto posti di strutture diverse da quelle immediatamente rilevanti: in questo caso, in quanto posti della struttura descritta dalla teoria degli insiemi. Terzo, se i posti di una struttura sono oggetti, allora tale struttura è essa stessa un sistema di oggetti e, naturalmente, in quanto sistema, essa esemplifica se stessa. Tuttavia ciò avviene solo in quanto i posti trattati come oggetti (considerati secondo la prospettiva i-posti-sono-oggetti) occupano i posti trattati come ruoli (considerati secondo la prospettiva i-posti-sono-ruoli).

Riprendiamo la nostra presentazione. Se gli oggetti matematici, o almeno certi oggetti matematici, sono posti di strutture, in accordo con la prospettiva i-posti-sono-oggetti, domandarsi se Giulio Cesare è uno di essi appare molto simile a domandarsi se Giorgio Napolitano è la Presidenza della Repubblica Italiana. In questa domanda sembra essere insito un errore categoriale. E sembra che incorriamo nello stesso errore se ci domandiamo se tre è  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  o  $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ . Ma, dice Shapiro, se — incuranti di questo errore, o convinti che non sia tale — insistiamo nel porre queste domande, non sarà difficile rispondere negativamente: Cesare non è un posto di una struttura, quindi non è un oggetto matematico;  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  e  $\{\{\{\emptyset\}\}\}$  non sono posti della struttura di progressione quindi non sono il numero tre.

Lo strutturalismo non-eliminativo fornisce quindi una semplice risposta al primo argomento di Benacerraf. E questa risposta è profondamente diversa da quella neologicista, non solo perché essa è generale e non ristretta alla sola aritmetica, ma soprattutto perché non lascia spazio per altre domande simili e non dipende da alcuna condizione imposta alla matematica (pura) dall'esterno di essa. La ragione è che per lo strutturalista non-eliminativo dire di tre che è un posto della struttura di progressione è dire che esso è un oggetto perfettamente e completamente determinato: essere tale posto è proprio l'essenza del numero tre. A differenza dei neologicisti, gli strutturalisti non-eliminativi ci dicono quindi esattamente che oggetti sono i numeri naturali e non solo come essi sono. Questo non dipende però dal fatto che i secondi dispongono di una particolare definizione esplicita dei numeri naturali che si oppone alla definizione implicita data da HP. In quanto posti della struttura di progressione, i numeri naturali sono definiti se e solo se lo è la struttura di progressione, la quale sembra poter essere appropriatamente definita solo da un sistema di assiomi. Inoltre, come ha osservato Parsons (1990, pp. 334-335; 2008, p. 106), i posti di una struttura sono doppiamente incompleti: lo sono come i protagonisti di un romanzo, perché non è stabilito se godono o no di certe proprietà; ma lo sono anche perché le loro proprietà distintive sono strutturali, ovvero non sono definite al di fuori dalla struttura (mentre le proprietà di cui godono i protagonisti di un romanzo sono in generale concepibili indipendentemente dal romanzo stesso). Inoltre, gli stessi numeri di concetti possono essere intesi come posti della struttura definita dagli assiomi dell'aritmetica di Frege. Come tali

essi sono, secondo lo strutturalismo non-eliminativo, oggetti matematici determinati. La differenza fra le risposte del neologicismo e dello strutturalismo non-eliminativo al primo argomento di Benacerraf sta quindi nel modo di intendere la nozione di oggetto matematico. Essa si basa sull'idea che è possibile avere "un genuino riferimento a oggetti [anche] se gli 'oggetti' sono impoveriti nel modo in cui gli elementi di una struttura matematica sembrano esserlo" (Parsons, 2008, p. 107).

Veniamo al dilemma di Benacerraf. Lo strutturalismo non-eliminativo fornisce solo una parte, peraltro assai semplice, di risposta al dilemma. Se gli, o degli, oggetti matematici sono posti di strutture, allora essi hanno delle proprietà se e solo se queste strutture sono fatte in un certo modo. Dire che i teoremi della matematica sono veri secondo una buona semantica (nel senso di Benacerraf) non può quindi significare nient'altro che dire che le strutture rilevanti hanno le proprietà che tali teoremi attribuiscono ai loro posti. Inoltre, se gli, o degli oggetti matematici sono posti di strutture, noi accediamo a essi accedendo a queste strutture, che sono proprio ciò che deve essere fatto così e così perché i teoremi matematici siano veri. Per avere una risposta completa al dilemma occorre però ancora rispondere a un problema: se gli, o degli, oggetti matematici sono posti di strutture, essi esistono, hanno certe proprietà e sono conosciuti, se e solo se tali strutture esistono, hanno certe altre proprietà, e sono conosciute; ma che cosa ci assicura che tali strutture esistano, abbiano certe proprietà e siano conosciute? Le diverse versioni dello strutturalismo non-eliminativo si distinguono in base alle risposte a queste domande. Non rispondervi farebbe dello strutturalismo eliminativo solo un modo per spostare il problema di Platone o tradurlo in un altro linguaggio. In un senso è così: lo strutturalismo non-eliminativo sposta il problema di Platone. Ma per gli strutturalisti non-eliminativi lo spostamento è benefico, visto che nella sua nuova forma il problema può essere appropriatamente risolto.

Per lo strutturalismo *ante rem*, il punto cruciale della soluzione è proprio ciò che motiva l'aggettivo '*ante rem*' e distingue questa versione dello strutturalismo non-eliminativo da ogni altra: le strutture esistono indipendentemente dai sistemi che le esemplificano. Vediamo cosa questo significhi e come si possa giustificare.

Si possono immaginare casi in cui una certa struttura è descritta come la forma astratta di uno o più sistemi e nessuna descrizione alternativa è disponibile, così come non vi è modo di riconoscere la struttura se non attraverso il riconoscimento questi sistemi. In casi come questi, vi è un senso chiaro in cui tali sistemi precedono la struttura: non possiamo accedere alla seconda se non accedendo ai primi. Ma si può sostenere che in questo caso l'esistenza della struttura è indipendente dall'esistenza dei sistemi che la esemplificano. Si potrebbe infatti immaginare una situazione in cui questi cessassero di esistere o noi perdessimo la nostra capacità di accedere a essi: non saremmo più in grado di descrivere la struttura se non come la forma astratta di sistemi che non esistono più, e non saremmo più in grado di accedere a essa. Ma sembrerebbe strano ammettere che la struttura stessa, in quanto forma astratta, cessi di esistere. In un tale ragionamento, si parla però di esistenza di una struttura in un senso largamente imprecisato, e anzi il ragionamento sembra scorrere



proprio grazie a questo. Ovviamente si potrebbe dire che certe strutture sono posti di altre strutture e quindi esistono se queste ultime esistono. Ma questo non ci porterebbe molto lontano: non si potrebbe retrocedere così all'infinito, e dovremmo prima o poi spiegare che cosa sia una struttura e in quale senso esista senza ricorrere a altre strutture e alla loro esistenza. Questo è il problema.

Prima di vedere come Shapiro propone di risolverlo, è utile aprire una breve parentesi. Si potrebbe pensare che per rispondere al dilemma di Benacerraf e risolvere il problema di Platone basti fare un'ammissione significativamente più debole di quella che le strutture esistono indipendentemente dai sistemi che le esemplificano. Abbiamo già osservato che per Shapiro (1997, p. 143) "lo strutturalismo è (solo) un resoconto perspicuo della maggior parte della matematica moderna", o persino solo della sua parte essenziale. Se è così, non si potrebbe forse ammettere che la matematica pre-moderna, o qualche parte speciale della matematica moderna, presenti oggetti matematici che non sono posti di strutture, e che questi formino sistemi la cui esistenza garantisce l'esistenza delle strutture che ne sono la forma astratta? Non si potrebbe inoltre ammettere che certe strutture esistano in quanto forme astratte di sistemi composti da oggetti non matematici? Non si potrebbe allora ammettere che l'esistenza di queste strutture garantisca quella di altre? E, infine, non si potrebbe ammettere che seguendo un'opportuna catena storica e/o logica si possa così pervenire, passando da struttura a struttura, a garantire l'esistenza di tutti gli oggetti matematici voluti? Vedremo nel prossimo paragrafo che Parsons prospetta una opzione simile. Per quanto Shapiro sembri implicitamente fare entrambe le ammissioni precedenti, egli non fa invece alcuno sforzo per chiarirle, e non sceglie affatto questa strada.

Egli suggerisce piuttosto di adottare una vera e propria teoria delle strutture volta nello stesso tempo a chiarire la nozione di struttura e a stabilire condizioni per l'esistenza di strutture. Egli ne presenta (1997, pp. 93-95) una versione informale, modellata sulle usuali presentazioni informali della teoria degli insiemi. Forniremo solo una descrizione superficiale dei suoi otto assiomi. Il primo (assioma dell'infinito) asserisce l'esistenza di una struttura con infiniti posti. Il secondo, terzo e quarto (assiomi della sottrazione, sottoclasse e addizione) asseriscono che se esiste una struttura, allora ne esistono altre, ottenute eliminando o aggiungendo posti, funzioni, e relazioni. Il quinto (assioma della struttura potenza) asserisce che se esiste una struttura, allora ne esiste un'altra che ha almeno tanti posti quanti sono i sottoinsiemi dei posti della prima. Il sesto (assioma del rimpiazzo) asserisce che se vi è una struttura  $\Sigma$  e una funzione  $f$  che associa a ogni posto  $x$  di  $\Sigma$  un posto  $f(x)$  di una struttura  $\Sigma_x$  (si noti che quest'ultima dipende da  $x$  e non è quindi necessariamente la stessa per tutti i posti di  $\Sigma$ ), allora vi è una struttura almeno tanto estesa quanto quella ottenuta rimpiazzando ogni posto  $x$  di  $\Sigma$  con la collezione dei posti di  $\Sigma_x$ , i cui posti sono quindi dati dall'unione (insiemistica) dei posti delle strutture  $\Sigma_x$ . Questi assiomi garantiscono l'esistenza di strutture con tanti posti quanti sono richiesti da tutte le usuali teorie matematiche. I due restanti danno condizioni sufficienti per l'esistenza di strutture in generale. Il settimo (assioma della coerenza) asserisce che se  $\kappa$  è un corpo coerente di

formule in un linguaggio del secondo ordine, allora vi è una struttura che soddisfa  $\kappa$ . L'ottavo (assioma di riflessione) asserisce che se  $\kappa$  è un corpo di formule nel linguaggio della teoria delle strutture e vale che  $\kappa$ , allora vi è struttura che soddisfa i primi sette assiomi con l'aggiunta di  $\kappa$ .

Una prima cosa da dire su questi assiomi è che l'uso della terminologia insiemistica che abbiamo usato per descriverli è dispensabile. Essi possono riformularsi in un linguaggio del secondo ordine scevro da tale terminologia. Un'altra è che la richiesta inclusa nel settimo assioma, che  $\kappa$  sia un corpo di formule in un linguaggio del secondo ordine, è necessaria per garantire la categoricità (ovvero il fatto che  $\kappa$  definisca una sola struttura, o comunque che tutte le strutture definite da  $\kappa$  siano isomorfe). Una terza riguarda la condizione di coerenza: essa non può essere intesa come equivalente a quella di consistenza (la condizione che da  $\kappa$  non derivi alcuna contraddizione) per due ragioni. Una è che al secondo ordine non vi è garanzia di completezza e quindi è possibile avere teorie consistenti non soddisfacibili. Un'altra è che la condizione di consistenza può essere formulata solo in termini modali (negando la possibilità di certe deduzioni) o considerando le deduzioni come oggetti astratti e negando l'esistenza di alcune di esse: in entrambi i casi la formulazione della richiesta di consistenza richiederebbe risorse estranee alla teoria delle strutture che non potrebbero venir concesse senza ammettere l'esistenza previa di oggetti astratti, rinunciando così ai vantaggi di tale teoria. La soluzione di Shapiro è di considerare la nozione di coerenza come una nozione intuitiva, primitiva, essenzialmente informale. L'idea è che la matematica bada a se stessa e è in grado di distinguere teorie coerenti da teorie che non lo sono. Questa idea può lasciare perplessi, ma la perplessità si attenua se osserviamo che l'assenza di una prova assoluta di consistenza per l'aritmetica e la teoria degli insiemi, e quindi per tutte le teorie matematiche riconducibili a esse, non fa venir meno in molti di noi la fiducia verso tali teorie.

Il problema può tuttavia presentarsi in una forma più generale. La somiglianza fra la teoria delle strutture e la teoria degli insiemi è così stretta che è naturale domandarsi che vantaggio vi sia nel rivolgersi alla prima piuttosto che alla seconda (ammettendo che garantisca l'esistenza di un dominio di oggetti matematici primitivi dalla cui esistenza dipende quella di tutti gli altri). La sola risposta che lo strutturalista *ante rem* può plausibilmente fornire è che il richiamo alla nozione di struttura, così come essa è veicolata dalla pratica matematica — si pensi per esempio all'enciclopedia matematica di Bourbaki (EM), tutta incentrata su tale nozione — ha un potere esplicativo intrinseco. Ma allora la matematica non solo giustifica ma spiega anche se stessa. In questo senso, lo strutturalismo *ante rem* è una dichiarazione di sconfitta per la filosofia della matematica: l'impiego di raffinate risorse filosofiche conduce a articolare la tesi che il miglior resoconto della matematica è fornito dalla matematica stessa. Per quanto si possa essere simpatetici con questa conclusione, si potrebbe anche osservare che una matematica puramente strutturalista *à la Bourbaki* sembra oggi fortemente minacciata da concezioni puramente algoritmiche suggerite dal dilagare dell'informatica. Dovremmo allora suggerire la necessità di una

nuova filosofia della matematica, adeguata alla nuova forma di matematica che sembra delinearci?

Sia come sia, resta che la teoria delle strutture non è da sola sufficiente per fornire una risposta al dilemma di Benacerraf. Il problema non riguarda la verità, posto che nulla si oppone alla possibilità di definire la verità di un asserto a proposito dei posti di una struttura in modo tale che essa dipenda dalle proprietà di tale struttura, senza che tale verità perda le caratteristiche proprie della nozione usuale di verità. Il problema riguarda la conoscenza: se le strutture sono come la teoria delle strutture le definisce (implicitamente), come possiamo conoscerle? Secondo Shapiro (1997, cap. 4) questo si può fare in tre modi.

Alcune strutture di piccola dimensione possono essere conosciute attraverso un contatto percettivo con certi sistemi di oggetti concreti che le esemplificano: si tratta del fenomeno che gli psicologici cognitivi chiamano *'pattern recognition'*.

Una struttura può poi essere conosciuta attraverso un processo di astrazione linguistica: sia per estensione, eventualmente indefinita, di un processo che genera delle strutture conosciute nel primo modo; sia tramite la definizione di appropriate classi di equivalenza di oggetti già dati, le quali vengono a formare una nuova struttura. Ecco un esempio della prima possibilità (Shapiro, 1997, pp. 118-119). Supponiamo di vedere dei sistemi di barre verticali come |, ||, |||, e di riconoscere in essi degli esempi di certe strutture che chiamiamo 'uno', 'due', 'tre' (questi non sarebbero ancora dei numeri naturali, ma solo dei loro antecedenti percettivi); possiamo allora imparare a estendere tali sistemi aggiungendo | e pervenire a conoscere la struttura di progressione, in quanto struttura esemplificata dal sistema |, ||, |||, ... Vediamo un esempio della seconda possibilità. Immaginiamo che i numeri naturali siano dati, così come la relativa operazione di moltiplicazione. Possiamo allora formare delle coppie di tali numeri (in cui il secondo non sia zero) e definire su di esse una relazione di equivalenza stabilendo che  $(n, m)$  e  $(p, q)$  sono equivalenti se e solo se  $nq = mp$ . Le classi di equivalenza relative a tale relazione formerebbero una nuova struttura: quella dei numeri razionali positivi.

Infine, una struttura può essere conosciuta tramite la considerazione della sua definizione implicita fornita, in accordo con il settimo assioma della teoria delle strutture, da un opportuno sistema di assiomi.

In tutti questi casi, l'idea essenziale è che conosciamo le strutture perché siamo in grado di caratterizzarle, descriverle, ottenerle, in modo tale da poter stabilire se esse, o meglio i loro posti, hanno certe proprietà e soddisfano certe condizioni. Ammesso che si conceda tutto ciò che lo strutturalismo *ante rem* richiede, ciò è sufficiente per rispondere al dilemma di Benacerraf. Quanto alle applicazioni di una teoria matematica, esse dipenderebbero dal fatto che certi sistemi di oggetti non matematici esemplificano (parti di) certe strutture, ciò che potrebbe venir garantito da appropriati teoremi di rappresentazione.

Terminiamo segnalando una nota difficoltà che sembra colpire ogni versione dello strutturalismo non-eliminativo (Parsons, 2008, p. 107), anche se, nella sua forma più recente, è stata imputata specificatamente allo strutturalismo *ante rem*: il cosiddetto

problema dell'identità (Keränen 2001). Molte strutture matematiche presentano una simmetria interna che tecnicamente si descrive come un automorfismo (non banale): una funzione biiettiva da una struttura verso se stessa che conserva le relazioni interne (un automorfismo è banale se è dato dalla sola funzione identità e è quindi proprio a tutte le strutture). Un esempio è quello del gruppo  $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ , costituito dall'insieme dei numeri relativi  $(0, 1, 2, \dots; -1, -2, \dots)$  su cui è definita l'addizione nel modo usuale. Esso presenta un automorfismo che corrisponde al cambiamento di segno dei suoi elementi: se  $G$  è l'automorfismo che associa  $-h$  a ogni numero relativo  $h$  (ovvero:  $G(h) = -h$ ), è chiaro che per ogni coppia di numeri relativi  $h$  e  $k$ ,  $G(h+k) = G(h) + G(k)$ . Se restiamo all'interno di tale gruppo (ovvero, evitiamo di tener conto della relazione d'ordine e di ogni altra relazione o operazione non definita in  $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ ), e caratterizziamo i suoi oggetti in termini puramente relazionali, non vi è quindi modo di distinguere 1 da  $-1$ . L'asserto '1 è identico a  $-1$ ' è quindi vero. Per poter dire che è falso bisogna ricorrere a condizioni di verità extra-strutturali. Lo stesso vale per ogni struttura  $\Sigma$  sulla quale può essere definito un automorfismo (non banale)  $G$ : per poter dire che un asserto della forma 'per ogni oggetto  $x$  di  $\Sigma$ ,  $x$  è identico a  $G(x)$ ' è falso, bisogna ricorrere a condizioni di verità extra-strutturali.

Shapiro ha contribuito con tre articoli (2006a, 2006b, 2008) alla discussione suscitata da questa obiezione. Il punto essenziale della sua risposta è che lo strutturalismo *ante rem* non è affatto forzato a ammettere una qualche versione del principio di identità degli indiscernibili: può negare che se  $x$  e  $y$  sono oggetti (posti) della stessa struttura che condividono tutte le proprietà strutturali relative a tale struttura, allora  $x$  è identico a  $y$  (2008, p. 286). Torniamo al gruppo  $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ . Siccome è un gruppo, ogni elemento di  $\mathbf{Z}$  ha un inverso relativamente a  $+$ . Si consideri allora un qualsiasi elemento  $a$  di  $\mathbf{Z}$  distinto dall'elemento neutro. Si può provare facilmente che l'inverso di  $a$  è distinto da  $a$ . Denotiamolo con ' $-a$ '. Ne segue che  $a$  e  $-a$  sono distinti, anche se  $G(a) = -a$  e  $G(-a) = a$ . Ciò prova che il principio di identità degli indiscernibili è falso in  $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ :  $a$  è distinto da  $-a$  anche se è indiscernibile da esso entro la struttura. Il punto di Shapiro è quindi che è un fatto matematico che certi posti di una struttura che ammette un automorfismo (non banale) sono fra loro distinti pur essendo indiscernibili entro la struttura. Lungi dal costituire un problema per lo strutturalismo *ante rem* (e in generale per quello non-eliminativo), ciò mostra che questa posizione filosofica aderisce alla pratica matematica, in cui è corrente ammettere che degli oggetti indiscernibili sono distinti: un esempio ovvio è quello dei punti della geometria euclidea.

Un altro modo di esprimere la stessa idea, posto da Leitgeb e Ladyman (2008, pp. 389-390), consiste nel riconoscere che "l'identità [...] dei posti di una struttura non deve essere spiegata da null'altro se non dalla struttura stessa", ovvero che "la relazione di identità per posti di una struttura [...] deve essere intesa come una componente integrale della struttura, così come, per esempio, la relazione di successore è una componente integrale della struttura dei numeri naturali". Ciò significa per esempio che  $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ , è equivalente alla struttura  $\langle \mathbf{Z}, =, + \rangle$ , ovvero, dato  $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$  si può definire su  $\mathbf{Z}$  la relazione di identità e

fornire così le condizioni di identità per gli elementi di  $\mathbf{Z}$ . Ogni struttura è allora ben definita solo se l'identità fra gli elementi del suo dominio è definita in base alle condizioni imposte alle proprietà della struttura stessa. Ne segue che se  $x$  e  $y$  sono elementi distinti del dominio di una struttura allora sono discernibili entro tale struttura almeno perché non vale che  $x = y$ .

In una conferenza tenuta a Parigi nel giugno 2009, Resnik ha osservato che, seguendo la stessa ispirazione, il problema potrebbe anche risolversi, molto generalmente, ammettendo che certe proprietà dell'intera struttura possano valere come proprietà strutturali dei suoi posti, cosicché in una struttura che presenta un automorfismo  $G$ , ogni coppia di elementi  $a$  e  $G(a)$  sarebbero distinti fra loro in base a una loro proprietà strutturale che sarebbe appunto una proprietà della struttura stessa.

#### **4. Una seconda versione dello strutturalismo non-eliminativo: Parsons e il ruolo dell'intuizione**

Se in una struttura non vale che  $x = y$ , allora possiamo concludere che  $x$  e  $y$  sono distinti: ma questo non dice ancora nulla su ciò che fa sì che lo siano. Prendiamo ancora l'esempio di  $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ . Quale che sia  $a$ , posto che non sia l'elemento neutro, è un teorema della struttura che  $a \neq -a$ . Questo si può esprimere dicendo che fra  $a$  e  $-a$ , uno è positivo e l'altro è negativo. Ma non solo non si può stabilire nella struttura quale è positivo e quale negativo (il che potrebbe apparire irrilevante): non è neppure possibile dire che cosa significhi che uno è positivo e l'altro negativo. Questa è forse la ragione per cui Parsons (2008, p. 108) pensa che la risposta di Leitgeb e Ladyman non prenda l'obiezione veramente sul serio e ne suggerisce un'altra (cf. anche 2004, §IV). L'idea è che le strutture che intervengono in matematica sono di due tipi: alcune sono basilari, altre no. Le prime sono quelle che "sono assunte in matematica senza l'obbligo di costruirle entro altre strutture" (2008, p. 108). Le seconde sono costruibili solo in tal modo, ovvero sono, per essenza, posti di altre strutture. L'idea è allora che le strutture basilari a partire dalle quali tutte le altre strutture richieste in matematica sono costruite non presentino automorfismi (non banali), mentre quelle che li presentano sono così costruite che gli oggetti distinti ma indiscernibili entro di essi sono discernibili in base a proprietà delle strutture basilari a partire dalle quali esse sono costruite.

Si può dubitare che tutte le strutture richieste in matematica possano effettivamente essere costruite a partire da strutture basilari che non presentino automorfismi (non banali). Parsons stesso riconosce che il caso del piano euclideo potrebbe farlo dubitare. Resta che questa risposta segnala il punto cruciale in cui lo strutturalismo non-eliminativo di Parsons differisce da quello *ante rem*. Nel seguito ci atteniamo a Parsons (2008), che riunisce parti o versioni modificate di alcuni degli articoli dedicati da Parsons all'argomento a partire dai primi anni '80.

Per Parsons, non tutti gli oggetti matematici sono intrinsecamente posti di strutture. Quelli che lo sono esistono perché esistono le strutture di cui sono posti. L'esistenza di

queste ultime è a sua volta garantita dall'esistenza di altre strutture. Ma fra queste ultime, alcune esistono grazie all'esistenza di certi oggetti matematici che non sono intrinsecamente posti di strutture. Dire che certi oggetti matematici non sono intrinsecamente posti di strutture non significa dire che non occupano posti di strutture, ma solo che la loro natura e esistenza non dipendono dal loro occupare tali posti. Vediamo innanzitutto come Parsons rende conto della matematica strutturalista (introduciamo questa espressione per brevità), ovvero di quelle porzioni della matematica i cui oggetti sono intrinsecamente posti di strutture.

L'idea fondamentale non differisce in modo essenziale da quella di Shapiro (*ib.*, p. 100): gli asserti della matematica possono essere intesi come asserti a proposito di oggetti anche senza che venga richiesto di “considerare come oggettivamente determinato a proposito degli oggetti di cui [essi] parla[no] più di quanto [...] [essi stessi] specifichi[no]”. : In altri termini: questi asserti possono parlare di oggetti le cui proprietà e relazioni sono tutte e sole quelle che essi assegnano loro. La matematica strutturalista realizza questa possibilità e i suoi asserti devono quindi essere intesi, in accordo alla loro forma grammaticale apparente, come asserti a proposito di oggetti. Per quanto Parsons, come Shapiro, non insista sulla loro verità, l'idea è affine a quella sottesa alla tesi di Frege. Parsons rende manifesta questa affinità insistendo sul fatto che “la caratterizzazione generale della nozione di oggetto utilizzabile [in filosofia della matematica] viene dalla *logica*”, ovvero identificando gli oggetti con i riferimenti dei termini singolari (1982, p. 492; 2008, p. 3). Un resoconto della matematica strutturalista non implica quindi alcuna ipotesi su ciò che gli oggetti sono al di fuori di determinati contesti. Tuttavia, gli asserti della matematica strutturalista parlano propriamente di oggetti in strutture e non di strutture, eccetto ovviamente nel caso i cui gli oggetti rilevanti sono a loro volta strutture (2008, p. 111). L'aritmetica — almeno quella ordinaria che segue dall'insieme degli assiomi di Peano e dalla definizione delle usuali operazioni aritmetiche (torneremo più avanti sulla possibilità di considerare una porzione ristretta di tale aritmetica come non strutturalista) — è per Parsons parte della matematica strutturalista. Non vi sono quindi i numeri naturali in quanto tali — intesi come oggetti dell'aritmetica ordinaria — se non in quanto sono considerati identici ai posti della struttura di progressione. Nessuna tesi come quella che i naturali sono essenzialmente degli ordinali piuttosto che dei cardinali, o viceversa, deve quindi essere parte di tale resoconto (2008, p. 101). Come vedremo, vi possono tuttavia essere delle strutture — che Shapiro chiamerebbe piuttosto ‘sistemi’ — che includono oggetti determinati indipendentemente da esse e che svolgono in esse il ruolo di numeri naturali, dando così luogo a asserti di identità contestualmente determinati quali ‘ $3 \text{ è } \alpha$ ’, dove  $\alpha$  è uno di tali oggetti.

Parsons delinea un quadro pluralista, che contempla diversi tipi di strutture, ottenute e pensate in modo diverso, e con ruoli diversi. Esso richiede una nozione di struttura più generale di quella di Shapiro. Parsons (2004, pp. 62-63; 2008, pp. 111-112) suggerisce una nozione “metalinguistica”, secondo cui il dominio è specificato da un predicato (monadico)

e le relazioni e funzioni definite su di esso lo sono da altri predicati o lettere funzionali (o funtori, nella terminologia di Parsons). Egli descrive due modi di ottenere una struttura (2008, p. 112):

Il modo più concreto di dare una struttura sarebbe tramite predicati e funtori che sono interpretati antecedentemente, in modo che vi sia qualche verifica indipendente delle proposizioni fondamentali a proposito della struttura (per esempio degli assiomi della teoria di una struttura di questo genere). Si potrebbe considerare che Brouwer e Hilbert abbiano tentato qualcosa di simile con la loro descrizione delle basi intuitive della matematica. Un caso meno problematico, ma anche filosoficamente meno interessante ha luogo quando un genere di struttura è definito in astratto e poi ne sono dati degli esempi presi da differenti branche della matematica, ma in questo caso le “realizzazioni” di un genere di struttura sono semplicemente fondate in un'altra struttura.

Il primo di questi modi sarebbe illustrato dall'aritmetica; il secondo dalla teoria degli insiemi. Il punto cruciale della proposta di Parsons è che il primo modo fornisce le basi non strutturaliste della matematica strutturalista.

L'opposizione fra matematica strutturalista e non strutturalista richiama quella di Hilbert fra matematica ideale e contentuale (cf. §II.4.3). E la descrizione fornita da Hilbert della matematica contentuale è la fonte di ispirazione per il resoconto di Parsons della matematica non strutturalista. Esso si fonda su una teoria dell'intuizione, a sua volta fondata sulla distinzione fra due generi di oggetti astratti.

A fianco degli oggetti astratti abituali, del tutto indipendenti da ogni oggetto concreto, vi sarebbero oggetti astratti “quasi-concreti”, che non sarebbero solo rappresentati da opportuni oggetti concreti, ma lo sarebbero in modo tale da essere distinguibili fra loro per il fatto di avere diverse rappresentazioni (*ib.*, p. 34). La natura della relazione di rappresentazione fra tali oggetti e gli oggetti concreti corrispondenti non deve essere intesa come chiarita e fissata in generale. Anzi Parsons insiste sul fatto che essa varia a seconda dei diversi generi di oggetti quasi-concreti. Fra questi, egli fa l'esempio (*ib.*, p. 43) delle figure geometriche, presumibilmente rappresentate da appropriati diagrammi, e degli insiemi di oggetti concreti, rappresentati ovviamente dalle collezioni di tali oggetti. I casi su cui insiste maggiormente (cf. 1979-80; 2008, cap. 5) sono tuttavia altri, in particolare i tipi di espressione (*expression types*) e soprattutto le stringe di barre verticali (*strings of strokes*), che per brevità chiameremo qui semplicemente ‘stringe’. Essi mostrano, fra l'altro, che la precedente caratterizzazione degli oggetti quasi-concreti non è intesa implicare che le condizioni di identità di questi ultimi siano tali che se  $a$  e  $b$  sono oggetti quasi-concreti rappresentati da  $a^*$  e  $b^*$ , allora  $a = b$  se e solo se  $a^* = b^*$ . Questo sembra il caso degli insiemi di oggetti concreti, e, a nostro parere, è anche quello delle figure geometriche, almeno localmente, nel caso della geometria di Euclide (Panza, cs). Ma non è il caso dei tipi di espressione e delle stringe. I primi sono *types* rappresentati dai loro *tokens*, per esempio la costante logica ‘ $\exists$ ’ o il fonema inglese [mæθmætɪks]. I secondi sono configurazioni di segni quali ‘|||’ o ‘||||’, rappresentati dalle collezioni dei *tokens* di appropriati caratteri tipografici disposti in modo appropriato. Ovviamente, né le condizioni di identità dei primi né quelli dei secondi sono *ipso facto* le condizioni di identità degli oggetti concreti che li rappresentano. Tuttavia è chiaro che noi accediamo tanto ai tipi di

espressione quanto alle stringe attraverso la percezione di questi oggetti concreti, e distinguiamo un tipo di espressione da un altro e una stringa da un'altra perché sappiamo operare appropriate distinzioni fra tali oggetti concreti. Non solo, almeno nel caso delle stringe, la nostra percezione di tali oggetti concreti ci permette di ottenere conoscenze relative agli oggetti quasi-concreti corrispondenti. Per esempio, osservando le collezioni di caratteri tipografici 'III' e 'IIII', possiamo stabilire che è possibile passare dalla stringa rappresentata dalla prima collezione a quella rappresentata dalla seconda aggiungendo una e una sola barra.

Entrambi questi esempi sono suggeriti dalla proposta di Hilbert: fatte salve banali differenze nelle convenzioni segniche, le stringe sono gli oggetti della sua aritmetica contentuale, mentre la sua metamatematica è una teoria contentuale di tipi di espressioni organizzati secondo un'appropriata sintassi. Il ruolo cruciale che questi oggetti quasi-concreti hanno in matematica è quindi manifestato (*mutatis mutandis*) dal programma di Hilbert. Parsons si limita a considerare con attenzione il solo caso delle stringe nella loro relazione con l'aritmetica.

Prima di venire a questo punto, è necessario osservare che la percezione delle rappresentazioni concrete degli oggetti quasi-concreti fornisce per Parsons l'intuizione di questi ultimi oggetti, ovvero l'intuizione di certi oggetti astratti. Questa è una forma di intuizione non proposizionale: è intuizione di oggetti (mentre l'intuizione proposizionale è intuizione che delle proposizioni sono vere). Essa è quindi apparentata all'intuizione sensibile di Kant, ma, in quanto intuizione di oggetti astratti, la prolunga al di fuori del suo dominio di azione. Per Parsons alcuni oggetti quasi-concreti, fra cui le stringe, sono degli oggetti matematici. La loro intuizione prolunga quindi l'intuizione sensibile nel dominio che per Kant compete all'intuizione pura, che non è affatto, per Kant, intuizione di oggetti. Quella che Parsons propone è quindi una concezione dell'intuizione pura diversa da quella di Kant ma ispirata alla concezione kantiana dell'intuizione sensibile (Parsons, 1979-80; 2008, cap. 5, discute ampiamente della relazione tra la sua concezione e quella di Kant — e di Husserl) Va aggiunto che l'intuizione degli oggetti quasi-concreti si associa per Parsons a una forma di intuizione proposizionale: l'intuizione che gli oggetti-quasi concreti rilevanti hanno certe proprietà e stanno in certe relazioni. Di più: per quanto mediata dall'intuizione sensibile corrispondente, l'intuizione degli oggetti quasi-concreti fornisce una giustificazione diretta per le proposizioni corrispondenti, che si presentano quindi a noi come proposizioni vere. Questa intuizione proposizionale fornisce così, a sua volta, una conoscenza intuitiva il cui contenuto è dato da proposizioni a proposito di oggetti quasi-concreti che sono spesso oggetti matematici. In certi casi tale conoscenza può perfino essere generale (Burgess 2008, p. 406): un esempio cruciale è la conoscenza che ogni stringa può essere estesa aggiungendo a essa una barra.

Basta a questo punto osservare che la relazione che lega gli oggetti quasi-concreti alle loro rappresentazioni fa sì che essi non siano intrinsecamente posti di strutture. Ciò permette di capire come Parsons articola la relazione fra la matematica strutturalista e la sua



base non strutturalista. Questa è formata da teorie matematiche di oggetti quasi-concreti che si organizzano in strutture (o sistemi, nel linguaggio di Shapiro) i cui posti sono occupati da questi stessi oggetti, che, ovviamente, sono determinati indipendentemente da esse. Queste stesse strutture costituiscono d'altra parte delle esemplificazioni di altre strutture che possono venir ottenute da queste per astrazione. Parsons considera il solo caso della struttura formata dalle stringhe ordinate secondo la relazione di successione originata dall'operazione di aggiungere una barra a una stringa data. Egli ammette non solo che questa sia un'esemplificazione della struttura di progressione, ma anche che sia possibile ottenere conoscenza intuitiva di alcune proprietà relazionali degli oggetti che la formano, e basarsi su di essa per ottenere, per astrazione, la struttura di progressione stessa. La forma di astrazione che sarebbe qui in gioco è quella che Tait (1986) chiama 'astrazione di Dedekind' (Parsons 2008, pp. 47 e 104-105). Supponiamo che una certa struttura sia stata in qualche modo descritta. Nel caso in questione, si tratta della struttura formata dalla stringa  $l$  e da tutte e sole le stringe  $ll, lll, ll ll, \text{etc.}$ , che si ottengono da essa aggiungendo  $l$  a una stringa data. È allora possibile definire una struttura "dello stesso tipo" imponendo un isomorfismo fra quest'ultima e la struttura originale. In questo caso si ottiene la struttura di progressione, che, in accordo alla nozione metalinguistica di struttura, è la struttura  $\langle N, 0, Suc \rangle$ , dove ' $N$ ' designa un predicato monadico che ne fissa il dominio (designando la proprietà di essere un numero naturale), ' $0$ ' è una costante individuale che denota il numero associato a  $l$  dall'isomorfismo costitutivo della struttura stessa, e ' $Suc$ ' designa la relazione di successione associata da questo isomorfismo alla relazione che lega ogni stringa a quella che si ottiene da essa aggiungendo  $l$ . Dal fatto che la prima struttura sia una struttura di oggetti quasi-concreti non segue che anche la seconda lo sia: il fatto di essere ottenuta per astrazione suggerisce anzi che non lo sia.

Lo suggerisce ma non lo stabilisce. Si potrebbe argomentare infatti che la stessa struttura può essere ottenuta anche via l'intuizione dei suoi elementi, ovvero che gli stessi numeri naturali siano, come tali, oggetti quasi-concreti. Per chiarire questo punto, occorrerebbe comprendere bene le condizioni di identità imposte alle strutture dalla nozione metalinguistica di Parsons. Egli non chiarisce questo punto, ma dedica l'intero capitolo 6 del suo libro a argomentare a favore della tesi che, per quanto si possa pervenire ai numeri naturali anche in altri modi, nessuno di questi può richiamarsi al solo uso dell'intuizione di oggetti quasi-concreti. In altri termini, per Parsons, i numeri naturali, come tali, non sono oggetti quasi-concreti.

Da qui non segue che l'aritmetica, *ipso facto*, non includa conoscenze intuitive e quindi sia nel suo insieme parte della matematica strutturalista. Potrebbe infatti darsi che la conoscenza intuitiva di certe proprietà delle stringhe si traduca in qualche modo in una conoscenza aritmetica intuitiva. Questo sembra essere escluso dalla semplice osservazione che ciò richiederebbe la conoscenza che la struttura di progressione è esemplificata dalla struttura delle stringhe, la quale non sembra poter essere a sua volta una conoscenza intuitiva (almeno se l'astrazione di Dedekind non è controllata dalla sola intuizione di

oggetti quasi-concreti e la struttura di progressione non può essere ottenuta via l'intuizione dei suoi elementi).

Parsons non ammette tuttavia questo argomento e affronta di petto il problema di comprendere se via sia un'aritmetica intuitiva sufficientemente estesa. Un modo per ottenerla potrebbe essere di elaborare una teoria delle stringhe fino a ottenere una porzione significativa dell'aritmetica. Hilbert sembra non dubitare di questa possibilità. L'aritmetica contentuale è infatti per lui una tale teoria. Ma a ben guardare la possibilità di una teoria simile non segue affatto dalla possibilità di avere una conoscenza intuitiva di alcune proprietà delle stringe. Hilbert non va però molto in là nel descrivere la sua aritmetica contentuale direttamente in termini di stringe, e è perfettamente plausibile che tale conoscenza intuitiva sia solo sufficiente a fornire la base per l'astrazione di Dedekind, ma non possa condurre al di là della relazione di successore definita sulle stringhe, fino a definire le usuali operazioni aritmetiche come operazioni relative a esse. Per valutare tale possibilità, Parsons considera una versione indebolita dell'aritmetica del primo ordine detta 'PRA' (per 'aritmetica primitiva ricorsiva'), proposta da Thoralf Skolem (1923), il cui linguaggio non contiene quantificazioni e in cui l'assioma di induzione è rimpiazzato da uno schema di regole di inferenze. PRA è generalmente considerata la più appropriata formalizzazione dell'aritmetica finitista, e se l'aritmetica contentuale di Hilbert è in qualche modo formalizzabile, PRA è il candidato più naturale per fornirne la formalizzazione. Parsons si chiede allora se dal fatto che le stringe forniscono un modello di PRA segua che i suoi teoremi esprimano conoscenze intuitive. Egli chiama la risposta positiva a questa domanda 'tesi di Hilbert', e la discute nel capitolo 7 del suo libro. La tesi è rigettata, ma si mostra che una larga parte di PRA — che include ciò che dipende dalle operazioni di addizione e moltiplicazione, ma non da quella di esponenziazione — esprime delle conoscenze intuitive.

Se Parsons ha ragione, ha risposto al dilemma di Benacerraff per questa parte di PRA. Per sapere se questa risposta vale anche per quelle parti di ogni versione dell'aritmetica che corrispondono a questa parte di PRA, in particolare tutti i teoremi relativi solo a addizione, moltiplicazione e relazione d'ordine, occorrerebbe addentrarsi in problemi complessi a proposito delle relazioni ontologiche e epistemologiche fra diverse versioni dell'aritmetica, in particolare fra PRA e altre versioni più ricche. Parsons evita di affrontarli e si limita a suggerire che le parti restanti di PRA, come di ogni altra versione dell'aritmetica, debbano essere incluse nella matematica strutturalista, e che questo valga ovviamente anche per l'analisi e per la teoria degli insiemi. Apparentemente Parsons ritiene che i legami che nella sua posizione questa matematica intrattiene con quella intuitiva siano sufficienti a delinearne una epistemologia appropriata. Siccome (cf. §3) è facile definire la verità di un asserto a proposito dei posti di una struttura in modo tale che essa dipenda dalle proprietà di tale struttura, questa epistemologia basterebbe da sola a rispondere al dilemma anche per la matematica non intuitiva.

Parsons non è tuttavia affatto esplicito su questo punto. Nell'ultimo capitolo del suo

libro si limita a descrivere rapidamente come la “ragione” conduce all’edificazione di aritmetica e teoria degli insiemi. Parsons distingue la ragione come facoltà o forma dell’attività intellettuale (che chiama ‘Reason’, con la maiuscola) dalle diverse ragioni cui ci si richiama nel corso dell’esercizio di tale attività. Per Parsons, “la Ragione è in gioco quando delle azioni che comprendono asserzioni o atti linguistici correlati sono supportate o giustificate da delle ragioni” (2000, p. 299; 2008, p. 317). Parsons indica cinque caratteristiche tipiche della ragione (2000, p. 299-304; 2008, pp. 317-325): le ragioni che intervengono in essa sono a loro volta supportate da ragioni; il regresso delle ragioni si arresta, quando si incontrano ragioni considerate “intrinsecamente plausibili”; le ragioni tendono a sistematizzarsi; la loro sistematizzazione dà luogo a una gerarchia di livelli; la ragione è l’ultimo tribunale a cui potersi appellare nella formazione di nostri giudizi (anche nei giudizi basati sulla percezione, la ragione decide se o no e come dare credito alle evidenze rilevati). Il termine ‘ragione’ appartiene al lessico kantiano, ma questi caratteri sembrano delineare una sorta di fenomenologia della *dianoia* platonica (cf. §I.1). Di più, secondo Parsons, la ragione, così descritta, è assai prossima all’intuizione che, secondo Gödel, interviene nella teoria degli insiemi (cf. §II.5). Se si vuole continuare a chiamarla ‘intuizione’ e si vuole intendere alcune delle ragioni che intervengono in essa come intuitive, occorre quindi distinguerla tanto dall’intuizione di oggetti quasi-concreti che dall’intuizione proposizionale fondata su quest’ultima. La differenza fondamentale è che l’ammissione delle ragioni intrinsecamente plausibili su cui si fonda la ragione non richiede l’intervento di alcun evento esterno, come avviene invece per la percezione su cui si fondano queste forme di intuizione (2000, p. 310; 2008, p. 326). Per quanto Parsons non lo espliciti, ciò sembra sufficiente a suggerire che il platonismo di Gödel non possa essere inteso che come un’esaltazione delle capacità che un matematico competente avrebbe di distinguere ragioni intrinsecamente plausibili da altre che non lo sono. Per evitare un tale impoverimento della risposta fornita al problema di Platone e al dilemma di Benacerraff, occorre quindi poter ancorare queste ragioni a una base diversa, anche se, in ultima istanza, riconosciuta rilevante solo in base a altre ragioni: questo è proprio ciò che, secondo Parsons, è reso possibile dall’intuizione di oggetti quasi-empirici. Il suo strutturalismo non-eliminativo sembra d’altra parte render conto delle forme tipiche di sistematizzazione e gerarchizzazione che caratterizzano la ragione nel suo esercizio matematico.

È chiaro dunque che la forza della proposta di Parsons sta nel legame che identifica fra una concezione strutturalista (non-eliminativista) della matematica e una teoria dell’intuizione di certi oggetti astratti. Tale legame sembra non solo poter render conto delle teorie formali della matematica moderna, in cui un trattamento strutturalista degli oggetti si accompagna a una pratica simbolica che sembra fondarsi proprio sull’intuizione di tipi di espressioni. Ma sembra anche poter spiegare in parte l’evoluzione storica della matematica, in particolare il processo che ha condotto a una matematica strutturalista passando attraverso forme di matematica diverse. E forse potrebbe anche render conto di una forma di matematica nuova, anch’essa poco incline a adattarsi ai dettami strutturalisti,

che sta nascendo sotto la spinta delle capacità di calcolo garantite dai progressi informatici. Se anche fosse così, le idee di Parsons non costruirebbero che un punto di partenza per indagini ulteriori, la cui complessità filosofica, logica, storica, e anche propriamente matematica è facilmente immaginabile.

## VI

### L'ARGOMENTO DI INDISPENSABILITÀ: STRUTTURA E NOZIONI FONDAMENTALI

Il dibattito tra platonisti e nominalisti in filosofia della matematica sembra spesso culminare in una posizione di stallo. Da una parte i platonisti sono vittime, secondo i nominalisti, di una mitologia ingiustificabile da un punto di vista epistemologico. Dall'altra parte i nominalisti, secondo i platonisti, sono immotivatamente scettici, perché rifiutano di trarre le conseguenze ontologiche che il nostro linguaggio sembra implicare.

Molte delle risposte al problema di Platone che abbiamo discusso nei capitoli precedenti cercano di superare questa situazione di stallo seguendo, pur diversamente, una direzione ben identificabile, tentando cioè di giustificare la presunta ontologia platonista attraverso una chiarificazione della nozione di oggetto matematico. La strategia che discuteremo nei capitoli VI e VII segue invece una direzione diversa, incentrata sul cosiddetto argomento di indispensabilità ('AI', d'ora in poi), attualmente oggetto di un vasto dibattito.

Uno degli aspetti che fanno di AI un argomento particolarmente potente è infatti certamente la sua neutralità rispetto alla questione della natura degli oggetti matematici. Un altro è che AI promette di fornire una giustificazione per l'esistenza di oggetti matematici, o almeno per la verità di teorie matematiche, basandosi su premesse che, almeno a prima vista, sembrano accettabili anche per un nominalista, come la semplice constatazione che certe teorie matematiche intervengono nella formulazione di teorie scientifiche<sup>1</sup>. AI ambisce dunque a basarsi su considerazioni *a posteriori*, risultando così particolarmente congeniale a coloro che, particolarmente se di impostazione empirista, bandiscono i ragionamenti *a priori* dal dibattito in ontologia.

L'argomento viene generalmente attribuito a Quine e a Putnam, anche se alcuni ne vedono formulazioni antecedenti in Frege, Von Neumann, Carnap e Gödel<sup>2</sup>. Negli scritti di Quine non se ne trova una formulazione esplicita, anche molti passaggi ne suggeriscono la struttura essenziale, in parte grazie al fatto esso sembra seguire in modo naturale da alcune delle tesi filosofiche che Quine promuove. La prima formulazione esplicita si deve invece a Putnam (1971).

Questo capitolo avrà un carattere in parte diverso dagli altri. Discuteremo inizialmente AI indipendentemente dalle versioni comunemente discusse, cercando di mostrarne la struttura essenziale, le possibili formulazioni alternative, e il rapporto che esse intrattengono con le versioni abituali e con le tesi di Quine. Questo servirà a rendere espliciti alcuni aspetti spesso dati per scontati, a approfondire le nozioni fondamentali a cui l'argomento sembra richiamarsi, e a fornire una mappa utile per orientarsi nel dibattito in corso, del quale renderemo invece conto nel capitolo VII.

---

<sup>1</sup>Sul problema di rendere conto dell'applicabilità della matematica nelle scienze empiriche, cf. Steiner (1989; 1998).

<sup>2</sup>Abbiamo accennato a quella di Gödel (1947/64) nel §II.5. Sulle altre, che non discuteremo qui, cf. Frege (1893-1903), §91 (su cui cf. Garavaso, 2005); Von Neumann (1947, p. 6).

## 1. La struttura dell'argomento e le sue diverse versioni possibili

Supponiamo che vi siano teorie scientifiche vere, o almeno teorie scientifiche che siamo giustificati a ritenere vere. In queste teorie si attribuiscono certe proprietà e relazioni a determinati oggetti. In astronomia, per esempio, si attribuiscono ai pianeti le relazioni descritte dalle leggi di gravitazione. Ammettiamo che una teoria scientifica sia vera solo se gli oggetti di cui essa tratta esistono (cf. cap. III, n.5). È un fatto che molte fra le teorie scientifiche accettate impiegano porzioni di matematica e contemplano asserti che non solo trattano di oggetti concreti, come i pianeti, ma includono anche termini che designano presunti oggetti astratti, quali i numeri o gli insiemi, o variabili che sono supposte variare su di essi. Ammettiamo che fra le teorie scientifiche vere, o che siamo giustificati a ritenere vere, alcune siano così. Sembra naturale concedere che esse sono vere solo se gli oggetti astratti di cui trattano esistono. Siccome abbiamo ammesso che queste teorie sono vere, o siamo almeno giustificati a ritenerle tali, possiamo concludere che quegli oggetti esistono, o almeno che siamo giustificati a ritenere che esistano. Questo è, in estrema sintesi, il ragionamento alla base di AI.

Perché dunque parlare di indispensabilità? La ragione è semplice: un nominalista potrebbe cercare di rigettare l'argomento appena descritto sostenendo che l'impiego della matematica nelle teorie scientifiche rilevanti non è indispensabile, ovvero che in queste teorie potrebbero non comparire affatto asserti che includono termini che designano cose come numeri o insiemi, o variabili che sono supposte variare su di essi. Il nominalista potrebbe cioè sostenere che ciò che queste teorie dicono del mondo e degli oggetti concreti che lo popolano potrebbe anche essere detto senza richiamarsi a oggetti matematici astratti. Per evitare questa contromossa, chi sostiene AI deve allora assicurarsi che l'impiego della matematica nelle teorie scientifiche rilevanti sia indispensabile.

Lo sforzo di chiarimento che il platonista richiede al nominalista che intende rigettare AI, e quello parallelo che il nominalista richiede al platonista che intende giustificare tutte le sue premesse, costituiscono uno degli aspetti filosoficamente più interessanti del dibattito su questo argomento.

Abbiamo già detto che AI, al contrario degli argomenti per il platonismo visti fin qui, non richiede che la natura dei presunti oggetti matematici si chiarisca al di là di certi limiti. Inoltre, AI è applicabile a qualunque teoria matematica sia ritenuta indispensabile per delle teorie scientifiche, e è sufficientemente generale da essere applicabile qualunque natura si ritenga che gli oggetti matematici di cui si parla in quelle teorie abbiano. AI sarebbe quindi perfettamente accettabile per un nominalista che ritenga che la matematica verte su oggetti concreti. Visto però che pochi adottano una posizione simile, AI si presenta come un'arma potente nelle mani del platonista che asserisce l'esistenza di oggetti astratti e come un pericolo temibile per il nominalista che la nega. Per precisione, comunque, nel formulare l'argomento parleremo di 'oggetti matematici' e non di 'oggetti astratti'.

Consideriamo la seguente inferenza:

- i) Vi sono teorie vere così e così.

ii) Fra queste, alcune sono vere solo se esistono oggetti così e cosà.

[1] -----

iii) Questi oggetti esistono.

Questo è uno schema di argomenti che può essere specificato fissando le teorie e gli oggetti rilevanti per le sue premesse. La sua forma logica è quella di un *modus ponens*, e gli argomenti così ottenuti sono tutti validi. Nulla garantisce però che siano corretti: in alcune specificazioni dello schema vi potrebbero essere premesse false. Vi sono infatti teorie della cui verità possiamo dubitare, come possiamo dubitare che la loro verità richieda l'esistenza di determinati oggetti (come risulta evidente se si specifica la premessa (1.ii) come 'Le teorie biologiche sono vere solo se esiste l'anima').

Restringiamo l'attenzione alle teorie scientifiche, e ammettiamo per il momento che si possa sensatamente attribuire loro la proprietà di essere vere. Ciò non implica di per sé che alcune di esse lo siano (cf. §VII.3.2), ma supponiamo che sia così, e ammettiamo quindi la premessa (1.i) specificata come: 'Vi sono teorie scientifiche vere'. Se questa supposizione appare troppo impegnativa, possiamo adottarne una più debole come: 'siamo giustificati a ritenere vere certe teorie scientifiche'. Per quanto riguarda la seconda premessa, invece, restringiamo la nostra attenzione agli oggetti matematici. Abbiamo allora i due argomentati seguenti:

i) Vi sono teorie scientifiche vere.

ii) Fra queste, alcune sono vere solo se esistono certi oggetti matematici.

[2a] -----

iii) Questi oggetti esistono.

i) Siamo giustificati a ritenere vere certe teorie scientifiche.

ii) Fra queste, alcune sono vere solo se esistono certi oggetti matematici.

[2b] -----

iii) Siamo giustificati a ritenere che questi oggetti esistono.

In questi argomenti la nozione di indispensabilità non compare. Essa serve a precisare a cosa si deve la condizione di necessità espressa in (2a.ii) e (2b.ii). Queste premesse non spiegano infatti perché l'esistenza di certi oggetti sia una condizione necessaria per la verità delle teorie in questione. Per spiegarlo si dovranno considerare caso per caso queste teorie e gli oggetti rilevanti, e il tipo di giustificazione per accettare (2a.ii) e (2b.ii) varierà di conseguenza. Si può pensare che una spiegazione vada trovata nella struttura stessa delle teorie considerate, più precisamente nel fatto che queste non possano venire formulate senza richiamarsi a determinati oggetti. Supponiamo che una determinata teoria scientifica *s* non possa essere formulata senza impiegare il linguaggio di una qualche teoria matematica *m*, in particolare senza far ricorso ai termini singolari che in una tale teoria sono intesi riferirsi a oggetti matematici e/o senza ammettere che delle variabili quantifichino su un dominio che si suppone composto da tali oggetti. Potremmo esprimere questa condizione dicendo che *s* ricorre a *m* in modo indispensabile, e basarci su di essa per asserire che *s* è

vera solo se è vera  $m$ . Ma, si potrebbe continuare, una teoria come  $m$  non può essere vera se non esistono gli appropriati oggetti matematici: chiamiamoli ‘oggetti di  $m$ ’, o ‘ $O_{[m]}$ ’. Ne segue che l’esistenza degli  $O_{[m]}$  è una condizione necessaria per la verità di  $s$ . L’assunzione che una teoria come  $m$  non possa essere vera se non esistono appropriati oggetti matematici può essere messa in dubbio: abbiamo già visto nei §§ IV.2 e IV.3 come essa sia per esempio rigettata dal finzionalismo e dallo strutturalismo eliminativo. Nelle versioni che seguono questa assunzione verrà quindi resa esplicita.

Il ragionamento precedente suggerisce dunque la seguente formulazione di AI (indichiamo fra parentesi quadre un’esemplificazione dell’argomento relativa a due particolari teorie  $s$  e  $m$ ):

[AI non epistemico per il platonismo]

- i) Vi sono teorie scientifiche vere [ $s$  è una teoria scientifica vera].
- ii) Fra queste, alcune sono tali da ricorrere a delle teorie matematiche in modo indispensabile [ $s$  ricorre a  $m$  in modo indispensabile].
- iii) Queste teorie scientifiche sono vere solo se lo sono queste teorie matematiche [ $s$  è vera solo se lo è  $m$ ].
- iv) Una teoria matematica è vera solo se esistono i suoi oggetti matematici [ $m$  è vera solo se esistono gli oggetti di  $m$ ].

[3a] -----

- v) Esistono gli oggetti delle teorie matematiche menzionate in (ii) e (iii) [gli oggetti di  $m$  esistono].

Questo argomento riguarda degli oggetti matematici specifici solo nella versione relativa alle teorie  $s$  e  $m$ . Nella sua versione generale, esso conduce a asserire l’esistenza di oggetti matematici senza specificare di che oggetti si tratti. Esso lascia quindi aperta la possibilità che si possa non venire mai a sapere quali oggetti matematici esistono. Seppur generica, una simile conclusione sarebbe comunque sufficiente per consentire al platonista di mostrare la falsità del nominalismo. Anche a proposito di particolari esemplificazioni dell’argomento si può comunque sostenere che AI soffra di un limite analogo. Abbiamo visto nei capitoli precedenti come spesso il linguaggio di una teoria matematica possa essere ridotto al linguaggio di un’altra teoria. Per esempio si può ridurre il linguaggio dell’aritmetica a quello della teoria degli insiemi asserendo che i numeri naturali sono (identici a) certi insiemi. Il problema è che in molti casi questa riduzione si può condurre in modi diversi, come mostra il primo argomento di Benacerraf (cf. §III.1). Nulla (se non, eventualmente, ragioni di natura non strettamente aritmetica: cf. §V.I) vieta di sostenere che i numeri naturali sono gli insiemi di Zermelo piuttosto che quelli di von Neumann. Supponiamo dunque di accettare [3a] in una sua esemplificazione in cui il posto di  $m$  è preso dall’aritmetica, e ammettiamo che i numeri naturali siano (identici a degli) insiemi. Possiamo concludere che esistono certi insiemi: ma non possiamo stabilire di quali insiemi si tratta. Come ha sostenuto Baker (2003a, pp. 55-57), questa osservazione non blocca AI,



ma ne mostra solo i limiti. Sempre secondo Baker (*ib.*, pp. 57-58), però, il problema appare più serio se si osserva che la teoria degli insiemi non è l'unica teoria entro la quale è possibile riformulare l'aritmetica o altre teorie matematiche applicabili nelle scienze empiriche, o su cui queste teorie possono essere fondate. La teoria delle categorie (cf. Mac Lane, 1997) fornisce per esempio una fondazione alternativa a quella della teoria degli insiemi. AI non sarebbe quindi comunque in grado di stabilire se esistano insiemi o categorie. In generale, come nota anche Colyvan (2001, p. 142), AI non specifica quale natura abbiano gli oggetti matematici di cui si intende dimostrare l'esistenza, e quindi è compatibile con molte versioni del platonismo.

In [3a] non compaiono nozioni di natura epistemica: si parla direttamente la verità di certe teorie matematiche e dell'esistenza dei loro oggetti, piuttosto che della nostra giustificazione nel ritenere che tali teorie siano vere o che i loro oggetti esistano. Non è tuttavia difficile modificare l'argomento in termini epistemici. In questo caso sembra naturale doversi riferire a certe teorie specifiche: mentre infatti è possibile sostenere che vi siano teorie vere (come nella premessa (3.i)) senza dover precisare quali esse siano (potrebbero esserci ma essere in linea di principio inaccessibili per noi), appare implausibile asserire di essere giustificati a ritenere vere certe teorie scientifiche senza specificare in qualche modo la loro natura. L'argomento che si ottiene è allora il seguente:

[AI epistemico per il platonismo]

- i) Siamo giustificati a ritenere vere certe teorie scientifiche.
- ii) Fra queste alcune sono tali da ricorrere a certe teorie matematiche in modo indispensabile.
- iii) Siamo giustificati a ritenere vere queste teorie scientifiche solo se lo siamo a ritenere vere queste teorie matematiche.
- iv) Siamo giustificati a ritenere vera una teoria matematica solo se lo siamo a ritenere che esistano i suoi oggetti.

[3b] -----

- v) Siamo giustificati a ritenere che esistano gli oggetti delle teorie matematiche menzionate in (ii) e (iii).

Una ragione per cui l'argomento è presentato spesso in una versione epistemica è che la premessa (3a.i) è molto forte e controversa. Un'altra ragione è che molti concepiscono l'ontologia come una disciplina normativa, il cui scopo è dirci ciò che siamo giustificati a ritenere che esista, piuttosto che dirci ciò che esiste (Colyvan, 2001, p. 11). Si tratta di un'opzione legittima, ma discutibile per almeno due motivi. Primo, il problema di stabilire ciò che esiste sembra ben diverso da quello di stabilire ciò che siamo giustificati a ritenere che esista, e, a meno di non ritenerlo insensato, va comunque distinto da quest'ultimo. Secondo, la nozione di giustificazione ammette diverse chiarificazioni, e alcune di queste potrebbero essere talmente deboli che anche un nominalista potrebbe ammettere che siamo giustificati a ritenere che esistono oggetti astratti. Se si impiegasse una nozione così debole

di giustificazione, l'argomento [3b] sarebbe poco significativo.

Le conclusioni di [3a] e [3b] riguardano l'esistenza di oggetti matematici, mentre le premesse (3a.i)-(3a.iii) e (3b.i)-(3b.iii) riguardano esclusivamente la verità di certe teorie scientifiche e matematiche. Sono (3.iv) e (4.iv) che consentono il passaggio da quelle premesse alle conclusioni sull'esistenza di oggetti matematici. Come vedremo (3.iv) e (4.iv) possono essere messe in dubbio in più modi. Ma anche in loro assenza le premesse (3a.i)-(3a.iii) e (3b.i)-(3b.iii) sono sufficienti a giustificare conclusioni filosoficamente rilevanti, che non riguardano più l'esistenza di oggetti matematici, ma la verità di teorie matematiche. I nuovi argomenti così ottenuti non sono più argomenti a favore del platonismo, quanto piuttosto argomenti a favore del realismo semantico (cf. Introduzione, §1.7) relativamente agli asserti delle teorie matematiche in questione:

[AI non epistemico per il realismo semantico]

- i) Vi sono teorie scientifiche vere [s è una teoria scientifica vera].
- ii) Fra queste, alcune sono tali da ricorrere a delle teorie matematiche in modo indispensabile [s ricorre a M in modo indispensabile].
- iii) Queste teorie scientifiche sono vere solo se lo sono queste teorie matematiche [s è vera solo se lo è M].

[4a] -----

- iv) Le teorie matematiche menzionate in (ii) e (iii) sono vere [M è vera]

[AI epistemico per il realismo semantico]

- i) Siamo giustificati a ritenere vere certe teorie scientifiche.
- ii) Fra queste alcune sono tali da ricorrere a certe teorie matematiche in modo indispensabile.
- iii) Siamo giustificati a ritenere vere queste teorie scientifiche solo se lo siamo a ritenere vere queste teorie matematiche.

[4b] -----

- v) Siamo giustificati a ritenere vere le teorie matematiche menzionate in (ii) e (iii).

Certo è possibile sostenere che non vi è alcun modo legittimo di intendere la verità di una teoria matematica per cui essa non dipenda dall'esistenza dei suoi oggetti. In particolare, qualcuno potrebbe voler dire che non è possibile sostenere che un asserto sia vero senza al tempo stesso sostenere che esistano gli oggetti che le costanti individuali che occorrono in quell'asserto sono intese designare, o su cui sono intese variare le variabili su cui si quantifica in quell'asserto. Qualcuno potrebbe sostenere per esempio che tutti i tentativi di intendere gli asserti matematici non letteralmente sono inadeguati, e quindi che l'unico modo corretto di intenderli è quello che per cui essi trattano di appropriati oggetti matematici. Chi adottasse questa posizione non potrebbe accettare AI (epistemico o no) per il realismo senza al tempo stesso accettare AI per il platonismo, visto che il secondo argomento sarebbe per lui una conseguenza del primo. Nella nostra esposizione terremo comunque i due argomenti distinti, e discuteremo le opinioni di chi accetta il primo ma non

il secondo (per esempio Putnam, cf. §VII.2.2).

Abbiamo così quattro versioni diverse di AI, due per il platonismo e due per il realismo semantico, e per ciascuna coppia rispettivamente una versione non epistemica e una epistemica. Nel dibattito su AI si trovano tuttavia formulazioni anche molto diverse tra loro, tanto da chiedersi se si tratti davvero di versioni diverse di uno stesso argomento o di argomenti fra loro differenti. In parte, questa è una questione puramente terminologica, e come tale poco interessante. Più interessante è invece chiedersi se vi siano tratti comuni alle diverse formulazioni, e se sì, quali. La nostra risposta è illustrata dagli argomenti [3a]-[4b]: questi argomenti sono versioni minimali di AI preso nelle sue quattro forme principali, e forniscono a nostro parere l'ossatura essenziale che ogni versione di AI, epistemico o no, a favore del platonismo o del realismo semantico, dovrebbe rispettare. Su questa ossatura, si possono poi innestare altri ingredienti, come di fatto è avvenuto e come vedremo nel seguito.

## 2. L'argomento Quine-Putnam e quello di Colyvan

Cominciamo con due formulazioni dell'argomento che, per ragioni tanto storiche che teoriche, sono particolarmente rilevanti.

### 2.1. L'argomento Quine-Putnam

Abbiamo già detto che Quine suggerisce in più punti un argomento a favore del platonismo matematico basato sull'idea che le nostre teorie scientifiche ricorrano in modo indispensabile a certe teorie matematiche<sup>3</sup>. Non considereremo qui nello specifico i testi di Quine, ma cominceremo invece col considerare il passo di Putnam che è unanimemente<sup>4</sup> ritenuto il punto di partenza obbligato per ogni discussione su AI, e che si intende come la prima formulazione precisa dell'argomento suggerito da Quine, tanto da rendere comune l'espressione 'argomento di indispensabilità Quine-Putnam' (Putnam, 1971, p. 65):

Fin qui ho sviluppato un'argomentazione a favore del realismo approssimativamente lungo le seguenti linee: la quantificazione su entità matematiche è indispensabile per la scienza sia essa formale o fisica; quindi dobbiamo accettare tale quantificazione; ma questo ci impone l'accettazione dell'esistenza delle entità matematiche in questione. Questo tipo di argomentazione discende, senza dubbio, da Quine che per anni ha sottolineato sia la necessità della quantificazione su entità matematiche, sia la disonestà intellettuale di negare l'esistenza di ciò che quotidianamente si presuppone.

Impiegando la forma espositiva già impiegata in precedenza, l'argomento che questo passo suggerisce sembra il seguente:

[AI Quine-Putnam secondo Putnam]

- i) Vi sono teorie scientifiche vere.
- ii) Fra queste, alcune sono tali che la quantificazione su certe entità matematiche è indispensabile per la loro formulazione.

---

<sup>3</sup>Cf. Quine (1948), pp. 256-259; (1951a), pp. 62-64; (1954a), p. 185-186; (1966b), p. 302; (1969c), p. 120; (1981c), pp. 149-150. Cf. anche n.10.

<sup>4</sup>Steiner (1978, pp. 19-20) si distanzia da molte delle versioni di AI che daremo in quanto interpreta invece l'argomento di Quine come un argomento trascendentale: "non possiamo dire come sarebbe il mondo senza numeri, perché descrivere qualunque esperienza pensabile (escluse vuote banalità) presuppone la loro esistenza".

*iii)* Esistono le entità su cui la quantificazione è indispensabile per la formulazione delle teorie scientifiche vere.

[5] -----

*iv)* Esistono gli oggetti che forniscono i valori delle variabili quantificate che intervengono nei teoremi delle teorie matematiche menzionate in (*iii*).

Si tratta di un argomento non epistemico per il platonismo<sup>5</sup>. Putnam parla di “realismo”, ma sembra farlo nel senso che noi abbiamo finora assegnato al termine ‘platonismo’. Questo richiede una breve spiegazione.

Come detto nell’Introduzione, ci sono modi diversi di parlare di realismo in filosofia della matematica. Spesso si parla di realismo per indicare semplicemente la tesi secondo cui i teoremi della matematica (gli asserti matematici di teorie accettate) sono veri. In una seconda nozione di realismo, promossa da Michael Dummett (cf. 1978b, p. 146; cf. anche Cozzo, 2008, capp. II e VII), essere realisti riguardo a un particolare ambito del discorso, per esempio quello della matematica, significa ritenere che il valore di verità degli asserti che appartengono a tale ambito dipenda da una realtà esterna al soggetto, e che questi asserti siano veri o falsi (si tratta del cosiddetto principio di bivalenza), anche in casi in cui non è in linea di principio possibile determinare se siano veri o falsi. Il terzo luogo, si usa spesso il termine ‘realismo’ — a volte seguito dall’aggettivo ‘ontologico’, che altre volte è lasciato sottinteso — per indicare la tesi che esistono certi oggetti: se il termine è usato in questo senso, il realismo matematico è la tesi che esistono oggetti matematici e coincide quindi con il platonismo (cf. per esempio Field, 1989b, p. 228).

Mentre il realismo ontologico è una tesi che riguarda oggetti, le prime due nozioni di realismo riguardano asserti. Nel nostro libro usiamo il termine ‘realismo semantico’ per indicare la prima fra le tre tesi precedenti, e il termine ‘platonismo’ per indicare la terza. Non trattiamo invece (per ragioni di spazio e perché essa interviene raramente nel dibattito che ricostruiamo) della seconda.

Putnam ha manifestato nel corso della sua carriera opinioni che possono far pensare a interpretazioni diverse di  $A_i$ , a volte come un argomento a favore del solo realismo semantico, altre come un argomento a favore del platonismo (cf. Liggins, 2007). Il contesto della citazione precedente suggerisce tuttavia che il termine ‘realismo’ sia usato per indicare il realismo ontologico o platonismo. Questa interpretazione è confortata dal fatto che Quine, al quale Putnam si richiama qui, intendeva certamente  $A_i$  come un argomento per il platonismo. Questo non significa che Putnam sia un sostenitore del platonismo; torneremo su questo nel §VII.2.2.

Decisamente vicino alle idee di Quine è anche il ricorso alla nozione di quantificazione tanto nelle premesse (5.*ii*)-(5.*iv*) quanto nella conclusione (5.*v*). Esso permette di chiarire cosa si intende dicendo che una teoria ricorre a un’altra in modo indispensabile, e specifica nel contempo quali sono gli oggetti rilevanti per la conclusione dell’argomento: sono quelli

---

<sup>5</sup>Scegliamo qui una formulazione non epistemica perché ci sembra più in linea con il contesto della discussione di Putnam. A seconda di come si intenda l’espressione di Putnam ‘dobbiamo accettare’, tuttavia, è possibile optare per una versione epistemica (cf. cap. VII, n.23).

che apparterebbero al dominio di quantificazione delle due teorie.

## 2.2 L'argomento di Colyvan

Un'altra formulazione di AI spesso considerata nel dibattito, e ritenuta affine a quelle di Quine e Putnam, è la seguente, offerta da Mark Colyvan (Colyvan 1998, p. 40; 2001, p. 11):

[AI Quine-Putnam secondo Colyvan]

- i) Dovremmo ritenerci ontologicamente impegnati verso tutte e sole quelle entità che sono indispensabili per le nostre migliori teorie scientifiche.
- ii) Le entità matematiche sono indispensabili per le nostre teorie scientifiche migliori.

[6] -----

- iii) Dovremmo ritenerci ontologicamente impegnati verso entità matematiche.

La premessa (6.ii) di questo argomento corrisponde, nel linguaggio di Colyvan, alle premesse (3a.ii) e (3b.ii). La premessa (6.i) sembra invece doversi intendere come un bicondizionale quantificato universalmente: 'Per ogni entità  $x$ , dovremmo ritenerci ontologicamente impegnati verso  $x$  se e solo se  $x$  è indispensabile per le nostre migliori teorie scientifiche'. L'implicazione espressa da 'solo se' (la condizione necessaria che stabilisce che non dovremmo impegnarci verso alcuna entità che non sia indispensabile) è espressa nella formulazione di Colyvan dall'aggettivo 'sole'. L'implicazione espressa da 'se' (la condizione sufficiente che stabilisce che per ogni entità  $x$ , se  $x$  è indispensabile per le nostre migliori teorie scientifiche, allora dovremmo ritenerci ontologicamente impegnati verso  $x$ ), corrisponde all'aggettivo 'tutte' nella formulazione di Colyvan. Ma se accettiamo questa interpretazione, riconoscendo in [6] la forma logica di un *modus ponens*, allora per stabilire la conclusione (6.iii) la prima implicazione (quella espressa da 'sole') è chiaramente superflua, come lo stesso Colyvan (2001, p. 12) d'altra parte sembra ammettere (torneremo su questo nel §5).

La premessa (6.i) mostra che [6] è un argomento epistemico (stabilisce a cosa "dovremmo ritenerci impegnati"), mentre la conclusione (6.iii) chiarisce che si tratta di un argomento per il platonismo. Sembra quindi che [6] sia una versione dell'argomento [3b]. Tuttavia, la premessa (6.i) è significativamente più ricca di ogni premessa di [3b], facendo intervenire — utilmente o meno, ma comunque a detta dello stesso Colyvan — due ingredienti teorici, tipicamente quineani, che non intervengono in nessuno degli argomenti [3a]-[4b]: il naturalismo, da cui, secondo Colyvan (2001, p. 12), seguirebbe l'implicazione espressa da 'sole'; e l'olismo della conferma, da cui seguirebbe l'implicazione espressa da 'tutte' (*ib.*, p. 13). Discuteremo questi due ingredienti nei §§ 6 e 7. Ma è già chiaro da quanto detto sopra che il primo è superfluo per la validità di [6]. Gli argomenti [3a]-[4b], suggeriscono comunque che vi sono versioni valide di AI che possono fare a meno anche del secondo.

Il naturalismo è una tesi che riguarda il rapporto tra filosofia e scienze empiriche; l'olismo della conferma sembra essere invece una tesi a proposito della giustificazione delle

teorie scientifiche. Queste tesi sono parte di un complesso di posizioni filosofiche sostenute da Quine che hanno costituito il contesto teorico nel quale AI è stato originariamente concepito<sup>6</sup>. Bastano tuttavia le poche considerazioni precedenti per comprendere che la rilevanza di queste due tesi per AI non è scontata. Le ragioni di Colyvan per formulare l'argomento servendosi di esse non sono tuttavia solo di carattere storico. In molti ritengono infatti che naturalismo e olismo della conferma possano servire a giustificare adeguatamente alcune delle premesse di AI (in una sua qualche versione), o persino che sia opportuno contarle tra le sue premesse. Altri cercano invece di offrire formulazioni che evitino una o l'altra tesi, o anche entrambe. Altri ancora criticano AI concentrandosi proprio su difficoltà proprie al naturalismo e/o dall'olismo della conferma, suggerendo quindi, in negativo, che esse compaiano fra le sue premesse.

Tutto ciò non può essere compreso adeguatamente se non alla luce di una discussione che affianchi queste tesi a due altri ingredienti teorici che invece svolgono senza dubbio un ruolo essenziale negli argomenti [3a]-[6]: la nozione di indispensabilità, e il criterio di impegno ontologico.

### **3. (In)dispensabilità**

Per chiarire la nozione di indispensabilità è necessario rispondere a due domande: *a*) che cosa, esattamente, deve essere considerato indispensabile in AI, e per che cosa deve essere considerato indispensabile? *b*) che cosa significa che qualcosa è indispensabile per qualcos'altro?

#### *3.1 Che cosa è indispensabile e per che cosa ?*

Cominciamo con la domanda (*a*). Finora, tanto nelle nostre ricostruzioni di AI che nelle citazioni che abbiamo fatto, l'aggettivo 'indispensabile' e i suoi derivati sono apparsi nel contesto di cinque diverse formulazioni. Si è detto che: l'impiego della matematica in certe teorie scientifiche è indispensabile; delle teorie matematiche sono (ritenute) indispensabili per delle teorie scientifiche; una teoria scientifica ricorre a una teoria matematica in modo indispensabile; la quantificazione su entità matematiche è indispensabile per la scienza; certe entità sono indispensabili per delle teorie scientifiche.

Tutte queste formulazioni concordano nel suggerire che ciò che deve essere preso come indispensabile deve esserlo per certe teorie scientifiche (o almeno per la loro formulazione). Che cosa faccia di una data teoria una teoria scientifica, e che cosa la distingua da una teoria matematica, sono questioni complesse che nel dibattito su AI non sono generalmente affrontate. Non le affronteremo neppure qui. È tuttavia naturale ammettere che una teoria scientifica possa contenere asserti in cui occorrono componenti mutuati da un linguaggio

---

<sup>6</sup>Altre tesi di Quine, come l'imperscrutabilità del riferimento e l'indeterminatezza della traduzione (cf. Quine, 1960) o la nozione di relatività ontologica (Quine, 1968) non sembrano avere rapporti diretto con AI anche se vi è chi ha sostenuto che alcune di esse sono in conflitto con esso (cf. Bueno, 2003). Inoltre, Quine ha talvolta suggerito posizioni che si avvicinano a una interpretazione strutturalista dell'aritmetica (cf. 1960, §54), ha offerto una propria interpretazione della teoria degli insiemi (1937), e una proposta per evitare, sotto opportune condizioni, il riferimento a classi (Quine, 1963, cap. I; 1970, pp. 68-76). Non consideriamo qui nello specifico la filosofia della matematica di Quine, introducendo solo gli elementi che necessari per comprendere l'attuale dibattito su AI.

matematico o comunque non specificatamente scientifico. Se ciò non fosse possibile, AI risulterebbe semplicemente insensato o almeno apertamente implausibile.

Mentre vi è unanimità sulla risposta alla seconda parte delle domanda (a), lo stesso non sembra accadere relativamente alla prima, ovvero a proposito di ciò che deve essere preso come indispensabile per certe teorie scientifiche. Possiamo distinguere cinque casi diversi, in cui, rispettivamente, si considerano come indispensabili per certe teorie scientifiche: *i*) delle altre teorie (ovvero dei corpi di asserti); *ii*) la quantificazione su un determinato dominio di entità o oggetti; *iii*) delle entità o oggetti; *iv*) il riferimento supposto o apparente a certi oggetti; *v*) certi termini singolari e/o certe costanti predicative o funzionali, o, più generalmente, un certo linguaggio, o meglio ancora un certo vocabolario.

Consideriamo dapprima l'opzione (*iii*), esemplificata nell'argomento [6]. Qui l'indispensabilità è ascritta direttamente a ciò di cui, nelle versioni di AI per il platonismo, ci si propone di stabilire l'esistenza. In questo caso (come in tutti quelli che considereremo), le entità in questione sono oggetti matematici (esistenti o presunti che siano). Useremo qui il termine 'entità' come sinonimo di 'oggetto' (anche se lo manterremo talvolta in seguito per restare fedeli a un uso corrente). Il problema relativo all'opzione (*iii*) è allora di capire in che senso si possa dire che certi oggetti sono indispensabili. Per capirlo occorre riflettere su ciò che significa 'certi' in 'certi oggetti'. Se si suppone che tali oggetti siano quelli di cui tratta una certa teoria, sembra anche naturale supporre che essi siano identificati in modo considerato appropriato tramite un corpo di asserti di questa teoria (questo vale in particolare per gli oggetti matematici che certo non possono essere identificati in modo ostensivo). In generale, dire che certi oggetti (matematici o meno) sono indispensabili è quindi analogo, nel contesto della nostra discussione, a dire che lo sono gli oggetti caratterizzati da una certa teoria.

Data una certa teoria  $\tau$ , quale che sia la sua natura, dire che gli  $O_{[\tau]}$ , o degli  $O_{[\tau]}$ , sono indispensabili per una teoria  $s$ , scientifica o meno, significa dire:  $\alpha$ ) o che in certi asserti di  $s$  occorrono in modo indispensabile termini singolari che sono intesi denotare gli  $O_{[\tau]}$  o variabili che sono intese variare sugli  $O_{[\tau]}$ , anche se  $\tau$  non è inclusa in  $s$ . o è solo parzialmente inclusa in  $s$ , ma la sua parte che è inclusa in  $s$  non è sufficiente per caratterizzare gli  $O_{[\tau]}$ ;  $\beta$ ) o che  $s$  include in modo indispensabile  $\tau$ , o solo una parte di  $\tau$  sufficiente però a caratterizzare gli  $O_{[\tau]}$  (ciò può avvenire se  $\tau$  contiene più asserti di quelli sufficienti per caratterizzare gli  $O_{[\tau]}$ , come, per esempio, nel caso in cui questi siano i numeri naturali e  $\tau$  l'aritmetica in una sua qualche forma). Ovviamente se  $s$  è una teoria formale, solo il caso ( $\beta$ ) è possibile. Non deve stupire che si usi qui l'espressione 'in modo indispensabile'. Non si tratta infatti ancora di rispondere alla domanda (b), ma solo alla (a). Vedremo nel prossimo §3.2 come questa espressione si debba intendere.

Alla luce di questa chiarificazione dell'opzione (*iii*), appare subito che le opzioni restanti non differiscono sostanzialmente da essa, anche se alcune sono più generali.

Lo stesso Colyvan suggerisce, in primo luogo, che la (*iv*) sia un caso particolare della (*iii*). Prima di formulare l'argomento [6], che si richiama a quest'ultima opzione, egli

formula infatti come segue quello che chiama ‘argomento di indispensabilità scientifico’ (2001, p. 7):

[*Al scientifico (secondo Colyvan)*]

[7] Se il riferimento apparente a certe entità (o classi di entità)  $\xi$  è indispensabile per le nostre migliori teorie scientifiche, allora dovremmo credere nell’esistenza di  $\xi$ .

Qui il riferimento apparente non è chiaramente che l’impiego, negli asserti delle teorie scientifiche rilevanti, di certi termini singolari che sono intesi denotare degli  $O_{[\tau]}$ .

Anche l’opzione (ii) è un caso particolare della (iii). Mentre la (iv) insiste sul ruolo assunto in  $s$  dai termini singolari che sono intesi denotare degli  $O_{[\tau]}$ , la (ii) insiste sul ruolo svolto in  $s$  da asserti quantificati il cui dominio di quantificazione è inteso includere degli  $O_{[\tau]}$ .

Vediamo ora l’opzione (v). In generale, quando si parla di linguaggio ci si riferisce non solo alle parole o ai simboli impiegati per formulare certi asserti, ma anche alle regole secondo le quali tali parole o simboli si combinano formando questi ultimi. Anche se l’impiego di parole e simboli di un certo linguaggio in un altro va spesso insieme all’accettazione di regole di composizione (o buona formazione) del primo linguaggio, si può voler tenere le cose separate, supponendo che il secondo abbia le proprie regole di composizione che si possono applicare anche a parole o simboli del primo evitando di importarne altre. È inoltre possibile che il secondo linguaggio accolga solo alcune tra le parole o i simboli del primo, sia perché già ne possiede altri — per esempio certe costanti logiche o variabili il cui dominio non è esplicitamente ristretto in modo da escludere che esse possano fungere anche come variabili del secondo linguaggio —, sia perché non se ne serve affatto. Per questo, invece di parlare di linguaggio di una certa teoria, si parla spesso del suo vocabolario, riferendosi alle parole o ai simboli del suo linguaggio (o solo a una selezione di essi) con l’esclusione delle sue costanti logiche e delle sue variabili. In breve, il vocabolario di una certa teoria è così l’insieme delle costanti non logiche (siano esse individuali, predicative o funzionali) del linguaggio di tale teoria<sup>7</sup>. Così si dirà, per esempio, che la teoria newtoniana della gravitazione impiega il vocabolario dell’analisi, per dire che essa impiega termini atti a designare numeri reali o costanti predicative o funzionali atte a designare proprietà di, o relazioni fra, numeri reali e funzioni definite su numeri reali o che prendono valori fra essi.

Dire che il vocabolario di una teoria  $\tau$  è indispensabile per una teoria  $s$  significa allora dire:  $\alpha$ ) o che il vocabolario di  $s$  include in modo indispensabile delle costanti mutuate da quello di  $\tau$ , che sono intese in  $s$  con il significato che è fissato in  $\tau$ , anche se  $\tau$  non è inclusa in  $s$  (o è solo parzialmente inclusa in  $s$ , ma la sua parte che è inclusa in  $s$  non è sufficiente

---

<sup>7</sup>Immaginiamo qui per semplicità che il dominio delle variabili dei linguaggi che considereremo non sia ristretto in base a stipulazioni che intervengono già nella fissazione del linguaggio, come avviene per esempio nelle teorie di ordine superiore al primo, in cui vi sono diversi tipi di variabili, alcune della quali variano su oggetti e altre su insiemi (o, se si preferisce, su proprietà o relazioni). Questo autorizza a stabilire che il vocabolario di una teoria non contenga variabili. Il caso diverso, che include per esempio tutte le teorie del secondo ordine o di ordini superiori, o i cosiddetti linguaggi multi-sortali (che contengono diversi tipi di variabili per diversi tipi di individui) può essere ridotto a questo tramite accorgimenti su cui non ci soffermeremo.



per fissare tale significato);  $\beta$ ) o che il vocabolario di  $s$  include in modo indispensabile delle costanti il cui significato è fissato da una parte degli asserti di  $s$  che formano la teoria  $\tau$ , che è in tal caso inclusa in  $s$  (in tal caso il vocabolario di  $\tau$  è composto dalle costanti non logiche che occorrono in tali asserti). Di nuovo, se  $s$  è una teoria formale, solo il caso ( $\beta$ ) è possibile.

Ne segue che le opzioni (*ii*), (*iii*) e (*iv*) sono casi particolari dell'opzione (*v*). Non sembra infatti possibile supporre che delle variabili che occorrono negli asserti di  $s$  varino su degli  $O_{[\tau]}$  se il vocabolario di  $s$  non include delle costanti non logiche il cui significato è fissato dagli asserti di  $\tau$  (sia questa o no inclusa in  $s$ ).

A sua volta, l'opzione (*v*) è del tutto analoga all'opzione (*i*), posto che quando si dice che una certa teoria  $\tau$  è indispensabile per un'altra teoria  $s$ , non si può che voler dire:  $\alpha$ ) o che degli  $O_{[\tau]}$ , sono indispensabili per  $s$ ;  $\beta$ ) o, più in generale, che il vocabolario di  $\tau$  è indispensabile per  $s$ , in quanto  $s$  integra in sé stessa in modo indispensabile se non tutta  $\tau$ , almeno certi suoi asserti, o comunque certi asserti in cui occorrono costanti non logiche proprie del linguaggio di  $\tau$  prese con il significato che esse hanno in  $\tau$ .

Queste considerazioni mostrano che la sola differenza rilevante fra le cinque opzioni precedenti è che mentre le opzioni (*ii*), (*iii*) e (*iv*) specificano che l'indispensabilità per  $s$  di  $\tau$  o del suo vocabolario coinvolge degli oggetti (gli  $O_{[\tau]}$ ), le opzioni (*i*) e (*v*) non lo fanno. Queste ultime sono quindi più appropriate a versioni di AI per il realismo semantico. Esse possono comunque essere intese in modo che l'indispensabilità per  $s$  di  $\tau$  o del suo vocabolario coinvolga degli oggetti, ammettendo cioè che una teoria  $\tau$  di cui ci si chiede se è indispensabile per una teoria scientifica  $s$  caratterizzi certi oggetti (gli ' $O_{[\tau]}$ ' appunto). Questo è il modo in cui quelle opzioni sono di fatto generalmente intese quando a essere in discussione è AI per il platonismo. Quando tratteremo di quest'ultimo, dunque, ci limiteremo per semplicità a considerare l'opzione (*i*).

Prima di passare alla domanda (*b*), è opportuno spendere qualche parola per giustificare l'enfasi sulla quantificazione propria dell'opzione (*ii*), che riguarda di fatto la quantificazione esistenziale, e si si deve a idee di Quine su cui torneremo nel §4, ma di cui conviene anticipare qualche elemento. Consideriamo l'asserto '2 è un numero primo'. In esso intervengono il termine singolare '2' e la costante predicativa monadica 'numero primo'. Ma da tale asserto, per generalizzazione esistenziale, possiamo derivare l'altro asserto quantificato 'esiste almeno un oggetto che è un numero primo'. Si può operare analogamente con asserti in cui intervengono costanti predicative a più posti, come l'asserto '2 è maggiore di 1', da cui possiamo derivare 'esistono due oggetti di cui uno è maggiore dell'altro'. Quine (1948, pp. 247-248) ha inoltre suggerito un modo per evitare del tutto l'impiego di costanti individuali, rimpiazzandole con costanti predicative introdotte in modo opportuno. Si tratta di associare a ogni termine singolare una costante predicativa introdotta *ad hoc*: se vogliamo eliminare il termine singolare 'Pegaso', possiamo introdurre una costante predicativa primitiva 'è-Pegaso', o 'pegasizza', e considerare il termine singolare come derivato. 'Pegaso' sarebbe quindi solo

un'abbreviazione della descrizione definita 'la cosa che è-Pegaso', o 'la cosa che pegasizza', e l'asserto 'Pegaso esiste' sarebbe un'abbreviazione dell'asserto 'Esiste uno e un solo oggetto che è-Pegaso' (o 'che pegasizza'). Se accettiamo questa procedura, ciò che conta sono ovviamente solo gli asserti di  $s$  quantificati esistenzialmente in cui le sole costanti non logiche che occorrono sono costanti predicative del vocabolario di  $s$  o i cui quantificatori hanno un dominio che è inteso includere gli  $O_{[\tau]}$ . Chi voglia, nel formulare AI, mantenersi il più vicino possibile all'originale ispirazione di Quine dovrebbe quindi propendere per l'opzione (ii), come è d'altra parte avviene generalmente.

### 3.2 *Che cosa significa essere (in)dispensabile?*

Alla luce della riposta che abbiamo dato alla domanda (a), la domanda (b) può formularsi come segue: che cosa significa che una certa teoria è indispensabile per una teoria scientifica?

Come le considerazioni precedenti dovrebbero suggerire, la risposta appropriata a questa domanda non dipende dal fatto che la prima teoria sia matematica. D'altra parte, per poter rendere conto degli argomenti [6]-[7] non possiamo limitarci a questo solo caso, posto che in essi l'indispensabilità non concerne solo oggetti o termini matematici. Per evitare complicazioni superflue, supporremo che la seconda teoria sia scientifica, anche se si potrebbe pensare che ciò non sia necessario per rispondere alla nostra domanda.

Consideriamo allora due teorie distinte  $s$  e  $\tau$ , la prima delle quali è una teoria scientifica mentre la seconda può non esserlo: potrebbe trattarsi di una teoria matematica, logica, metafisica, o che dir si voglia, o anche di una teoria scientifica distinta da  $s$ . Pur essendo distinta da  $s$ ,  $\tau$  potrebbe essere inclusa totalmente o parzialmente in  $s$  (anzi, come abbiamo già osservato, se  $\tau$  e  $s$  sono teorie formali, se così non fosse  $\tau$  non potrebbe essere indispensabile per  $s$ ). Siccome è ovvio che qualcosa è indispensabile se e solo se non è dispensabile, potremmo invertire la domanda e domandarci che cosa significa che  $\tau$  è dispensabile per  $s$ .

Da quanto detto nel §3.1 segue che se  $s$  non contenesse asserti che impiegano il vocabolario di  $\tau$ , allora  $\tau$  sarebbe senz'altro dispensabile per  $s$ . Supponiamo quindi che  $s$  contenga simili asserti che, mutuando e adattando una terminologia di Thomas Hofweber (2007), potremmo dire 'τ-ontologicamente carichi'. L'idea è che  $\tau$  è dispensabile per  $s$  se possiamo eliminare da  $s$  tutti i suoi asserti τ-ontologicamente carichi, sostituendoli con altri asserti non τ-ontologicamente carichi, ottenendo così una nuova teoria  $s^*$  la quale sia equivalente a  $s$  in qualche senso rilevante. Supponiamo, per fare un esempio, che  $\tau$  sia l'analisi e  $s$  la teoria della gravitazione newtoniana come essa si presenta abitualmente. Diremo che la prima è dispensabile per la seconda se possiamo rimpiazzare tutti gli asserti di quest'ultima in cui occorrono termini che sono intesi designare numeri reali o loro proprietà o reazioni, o in cui occorrono dei quantificatori il cui dominio sia inteso includere i o dei numeri reali, ottenendo così una nuova teoria  $s^*$  che sia considerata equivalente a  $s$  in un senso rilevante. Nel §IV.1 abbiamo visto come Field propone di compiere una simile operazione.

Il problema è allora quello di specificare un'opportuna relazione di equivalenza fra  $s$  e  $s^*$  cui si possa fare appello per spiegare che cosa significa che  $\tau$  è (in)dispensabile per  $s$ .

### 3.2.1. IL METODO DELLA PARAFRASI

Una possibilità è quella suggerita da Quine (per esempio in 1939b, ma la stessa idea è ripresa in molti altri lavori). Supponiamo che il vocabolario di  $s$  comprenda delle costanti proprie del vocabolario di  $\tau$  che vorremmo eliminare dal vocabolario di  $s^*$ , eliminando così tutti gli asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi di  $s$ . Potremmo pensare tali costanti come se fossero state introdotte nel vocabolario di  $s$ , inizialmente privo di esse, grazie a appropriate definizioni contestuali, e richiamarci a tali definizioni per eliminarle.

Una definizione contestuale differisce in modo essenziale da una definizione esplicita. Con quest'ultima si stabilisce di utilizzare un'espressione nuova, non ancora presente nel linguaggio, come semplice abbreviazione di un'altra espressione già presente nel linguaggio. La prima espressione è quindi considerata *ipso facto* come appartenente alla stessa categoria sintattica della seconda, di cui non fa che fornire un'abbreviazione notazionale. Un esempio è la definizione con cui i neologicisti introducono la costante '0' nel linguaggio dell'aritmetica di Frege (cf. §V.I). Tramite una definizione contestuale, invece, la nuova espressione viene introdotta nel linguaggio stabilendo che essa appartenga a una determinata categoria sintattica e che un certo asserto più o meno complesso in cui essa non compare possa essere sostituito con un altro asserto, generalmente più semplice, nel quale essa compare. Un esempio è quello sotteso alla definizione dei quantificatori esistenziali numerici considerata nel §IV.1. Questi quantificatori (' $\exists_0$ ', ' $\exists_1$ ', etc.) sono introdotti tramite definizioni esplicite. Ma asserti in cui intervengono i termini '0', '1', '2', etc., o 'zero', 'uno', 'due', etc., sono rimpiazzati tramite definizioni contestuali da altri asserti, in cui occorrono i *definiens* dei quantificatori numerici. In tal modo, un asserto come 'Marte ha (esattamente) due lune' viene rimpiazzato dall'asserto 'esiste un  $x$  che è una luna di Marte, e esiste un  $y$  che è una luna di Marte, e  $x$  è distinto da  $y$ , e per ogni  $z$ , se  $z$  è una luna di Marte, allora  $z$  è identico a  $x$  o è identico a  $y$ ', in cui il termine 'due' non occorre più. Si dirà allora che gli asserti come il secondo forniscono una definizione contestuale per le costanti individuali numeriche che occorrono negli asserti come il primo. L'idea di Quine è che il secondo asserto sia una parafrasi del primo, ovvero che rimpiazzando il primo con il secondo si elimina la costante 'due' senza perdita di potere espressivo.

Basta generalizzare tale procedimento e aggiungere appropriate convezioni relative alla relazione che lega un asserto alla sua parafrasi così definita per ottenere una relazione di equivalenza fra asserti<sup>8</sup>. In base a questa relazione, si potrà poi definire una relazione di equivalenza fra teorie che potremmo chiamare 'p-equivalenza': diremo che se una teoria  $s^*$  risulta da una teoria  $s$ , rimpiazzando certi suoi asserti con una loro parafrasi ottenuta attraverso l'identificazione di opportune definizioni contestuali per determinate costanti presenti nel vocabolario di  $s$ , allora  $s^*$  è p-equivalentemente a  $s$  (e viceversa).

---

<sup>8</sup>Cf. cap. V, n.3.

Le costanti che sono pensate come se fossero state introdotte in un vocabolario tramite definizioni contestuali si comportano, in molti contesti sintattici, come tutte le altre costanti della stessa categoria sintattica di tale linguaggio. Se si tratta di costanti individuali, è tuttavia naturale richiedere che esse siano sottoposte a una restrizione cruciale: che non sia concesso inferire che esistono degli oggetti che quelle costanti denotano dalla verità di asserti (quale che sia la loro forma) in cui esse intervengono. Una costante così introdotta deve infatti essere intesa come una *façon de parler* (Quine, 1939, pp. 708-709), che serve a semplificare un asserto in cui non solo tale costante non compare, ma neppure compare alcuna altra costante individuale a cui si possa plausibilmente assegnare lo stesso significato. L'accettazione di un asserto in cui essa compare non dovrebbe quindi forzarci a ammettere l'esistenza di alcun oggetto denotato da essa per la semplice ragione che essa non è intesa denotare alcun oggetto<sup>9</sup>.

L'idea di Quine è quindi che le costanti che vorremmo eliminare da un certo linguaggio devono essere pensate come se fossero state introdotte in esso tramite definizioni contestuali. Tali definizioni stabiliscono che asserti in cui occorrono tali costanti non sono che abbreviazioni di altri asserti più complessi in cui esse non occorrono, e che valgono dunque come parafrasi dei primi.

Supponiamo ora che dal linguaggio di una teoria scientifica  $s$  si vogliano eliminare le costanti del vocabolario di un'altra teoria  $\tau$ . Si dovranno trovare delle definizioni contestuali che permettano di rimpiazzare ogni asserto  $\tau$ -ontologicamente carico di  $s$  con una sua parafrasi non  $\tau$ -ontologicamente carica. Si otterrà allora una nuova teoria  $s^*$   $p$ -equivalente a  $s$  che preserverà tutto il potere espressivo di  $s$ . Ci si potrà allora richiamare alla relazione di  $p$ -equivalenza per chiarire la nozione di (in)dispensabilità. In particolare si dirà che se una teoria  $s$  che include asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi ammette una teoria  $s^*$   $p$ -equivalente a essa che non contiene tali asserti, allora  $\tau$  è dispensabile per  $s$ .

Se si adotta questa nozione di (in)dispensabilità, e si vuole ammettere che AI sia corretto, si deve quindi sostenere che vi sono almeno una teoria matematica  $m$  e una teoria scientifica  $s$  tali che  $s$  contiene asserti  $m$ -ontologicamente carichi e che non vi è alcuna teoria  $s^*$   $p$ -equivalente a essa che non contiene asserti  $m$ -ontologicamente carichi. Se così fosse,  $m$  sarebbe infatti indispensabile per  $s$ .

Questa strategia non è priva di difficoltà, relative in particolare al modo in cui si debba intendere precisamente una parafrasi. Ma la sua principale difficoltà sta altrove. Quine ha per un certo tempo aderito a un programma radicalmente nominalista, la cui formulazione più chiara si trova in Goodman e Quine (1947). Lo scopo di questo programma era di liberare tanto le teorie scientifiche quanto quelle matematiche da ogni coinvolgimento con oggetti astratti, mostrando come riformularle rimpiazzando in esse gli asserti che sembrano vertere su oggetti astratti con loro parafrasi che vertono solo su oggetti concreti. Ben presto,

---

<sup>9</sup>Questo modo di ragionare è abbastanza naturale e sembrerebbe doversi applicare in generale anche a casi simili ma forse non perfettamente equivalenti a quello delle definizioni contestuali intese alla maniera di Quine, per esempio a definizioni implicite come HP, preso nel contesto di FA. Nel §V.1 abbiamo visto tuttavia che i neologicisti pensano che, una volta introdotta in FA la costante funzionale '#' tramite HP, le costanti individuali che denotano i valori della funzione # possono intervenire in certi asserti dalla cui verità segue che esistono oggetti denotati da tali costanti.

Quine si rese tuttavia conto come non sia sempre facile — e anzi sia spesso impossibile — identificare appropriate parafrasi per molti degli asserti delle teorie matematiche e scientifiche correnti. Egli abbandonò quindi un tale programma, e storicamente, fu proprio questa svolta che lo spinse progressivamente verso posizioni platoniste<sup>10</sup>. Nonostante il fallimento di questa strategia, è possibile rifiutare che vi siano teorie matematiche indispensabili per certe teorie scientifiche chiarendo la nozione di (in)dispensabilità in modi diversi.

### 3.2.2. EQUIVALENZA OSSERVATIVA

Un modo spesso suggerito per farlo è il seguente (cf. per esempio Colyvan, 2001, pp. 76-77; l'interpretazione seguente della nozione di (in)dispensabilità è comunque molto diffusa). Supponiamo di poter separare il vocabolario di una teoria scientifica  $s$  in due parti complementari: un sotto-vocabolario  $\Omega$  detto 'osservativo', che comprende sole e tutte le costanti di tale vocabolario che sono intese denotare oggetti osservabili o designare proprietà di, e relazioni tra, tali oggetti, o funzioni definite su di essi e con valori in essi (in generale si potrebbero identificare queste costanti con quelle ammissibili entro un certo linguaggio nominalista, su cui cf. §IV.1); e un sotto-vocabolario  $\Theta$ , detto 'teorico', che comprende invece tutte le altre costanti del vocabolario di  $s$ . Diciamo 'osservativi' gli asserti di  $s$  in cui occorrono solo costanti non logiche che appartengono a  $\Omega$ . Potremmo allora dire che due teorie scientifiche sono o-equivalenti se hanno gli stessi asserti osservativi, e impiegare la relazione di o-equivalenza per chiarire la nozione di (in)dispensabilità.

Prima di procedere è opportuno osservare che vi sono varie ragioni per dubitare che il vocabolario di una teoria scientifica possa essere effettivamente scisso in due sotto-vocabolari come  $\Omega$  e  $\Theta$ , almeno se si ritiene che la partizione colga il senso comunemente attribuito agli aggettivi 'teorico' e 'osservativo'. L'obiettivo di ottenere questa partizione è stato al centro del programma del positivismo logico (cf. §II.4.1), ma ha successivamente ricevuto dure critiche, sia perché in quel programma la distinzione era strettamente legata a quella tra asserti analitici e sintetici, sia per ragioni indipendenti — cf. per esempio Putnam (1962); per un resoconto generale della discussione, cf. Suppe (1977). Nonostante ciò, nel dibattito su AI sembra spesso darsi per scontata la possibilità di distinguere adeguatamente fra asserti osservativi e teorici — o, analogamente, nominalisti e non nominalisti — di una teoria scientifica (valga per tutti l'esempio di Field, cf. §IV.1). In particolare, si assume che sia possibile distinguere fra asserti che impiegano il vocabolario di una teoria matematica, e contano quindi come teorici, e asserti osservativi che non lo impiegano. Ai fini della discussione su AI, il problema di come sia possibile tracciare adeguatamente questa distinzione può quindi essere accantonato, a patto di ammettere una distinzione chiara tra

---

<sup>10</sup>Una delle dichiarazioni più esplicite dell'adesione di Quine al platonismo si trova in Quine (1960, cap. 7, n.5). AI — in particolare nella formulazione [6\*] che vedremo nel §5 — rappresenta bene, anche se schematicamente, il percorso che ha portato Quine da una iniziale adesione al nominalismo fino a una seppur riluttante accettazione del platonismo dovuto al fallimento della strategia della parafrasi. I dubbi di Quine su tale strategia e in generale del programma nominalista di Goodman e Quine (1947) risalgono tuttavia a molto prima del 1960: Mancosu (2008c) li rintraccia nei manoscritti di Quine già a partire dal 1948.

vocabolari matematici e vocabolari non matematici.

Sia allora  $s$  una data teoria scientifica, il cui vocabolario include il (o parte del) vocabolario di un'altra teoria  $\tau$ . Supponiamo che gli asserti osservativi di  $s$  siano tutti non  $\tau$ -ontologicamente carichi (e quindi quelli  $\tau$ -ontologicamente carichi non siano osservativi). Potremmo allora dire che  $\tau$  è dispensabile per  $s$  se vi è un'appropriata teoria  $s^*$  o-equivalente a  $s$  che non contiene asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi. Se così fosse,  $s^*$  conterrebbe gli stessi asserti osservativi di  $s$  (ma potrebbe contenere anche qualche altro asserto di  $s$  che, pur non essendo  $\tau$ -ontologicamente carico, non sia nemmeno osservativo).

Se ammettiamo che ogni sistema di asserti sia una teoria, è sufficiente prendere l'insieme di tutti e soli gli asserti osservativi di  $s$  per avere un'altra teoria, diciamo  $s_\Omega$ , o-equivalente a  $s$ , i cui asserti siano tutti non  $\tau$ -ontologicamente carichi. Ma è chiaro che questa teoria potrebbe non essere appropriata. Immaginiamo (come è presumibile) che alcuni asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi di  $s$  siano impiegati in  $s$  per derivare asserti osservativi di  $s$  stessa, asserti che sono quindi anche asserti di  $s_\Omega$ . Se tali asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi fossero semplicemente eliminati da  $s$ , questi ultimi asserti osservativi di  $s$  non potrebbero più essere derivati come lo sono in  $s$ , e potrebbero non essere derivabili affatto. Potrebbe quindi accadere che  $s_\Omega$ , presa da sola, includa molti asserti privi di giustificazione, e perfino che questi asserti siano tutti indipendenti gli uni dagli altri. Di più, se ammettiamo che  $s$  sia deduttivamente chiusa, l'insieme (infinito) dei suoi asserti osservativi è dato dalla chiusura deduttiva di alcuni asserti di  $s$ , e se questi ultimi asserti includono degli asserti non osservativi, allora è possibile che  $s_\Omega$  non sia affatto la chiusura deduttiva di un insieme di asserti osservativi di  $s$ . Ne seguirebbe che non si potrebbe determinare l'insieme di tutti gli asserti osservativi di  $s$ , ovvero  $s_\Omega$ , indipendentemente dalla considerazione dei suoi asserti non osservativi (o comunque di alcuni di essi)<sup>11</sup>. È quindi chiaro che la condizione di appropriatezza di  $s^*$  inserita nella chiarificazione precedente della nozione di (in)dispensabilità è essenziale.

Si tratta di capire come essa possa a sua volta essere chiarita. A questo punto è utile prendere in considerazione un noto teorema provato da William Craig (1953; 1956; cf. anche Putnam, 1965). Sia  $v$  una teoria chiusa sotto appropriate regole deduttive che includono le regole deduttive usuali della logica proposizionale (in realtà, perché il teorema valga, è sufficiente che fra queste regole vi siano le regole di introduzione e eliminazione della congiunzione), il cui linguaggio sia tale da poter distinguere precisamente in esso un vocabolario composto da costanti non logiche. Supponiamo che i teoremi di  $v$  possano essere enumerati in modo effettivo, ovvero ordinati in un'unica successione  $\tau_1, \tau_2, \dots$  che possa essere effettivamente ottenuta elemento dopo elemento (anche se, nel caso in cui tale successione sia infinita, questo non significa che si possa effettivamente ottenerla tutta). Un qualsiasi insieme i cui elementi possono essere ordinati in questo modo è detto 'ricorsivamente enumerabile'. Si potrà allora dire che  $v$  è ricorsivamente enumerabile. Supponiamo anche che il vocabolario di  $v$  possa essere suddiviso in due sotto-vocabolari

---

<sup>11</sup>Melia (2000) contiene un esempio di questa situazione; cf. §VII.1.

complementari  $\Phi$  e  $\Psi$ , in modo tale che possa essere determinato un sottoinsieme  $v_\Phi$  di  $v$  che include tutti e soli i teoremi di  $v$  che impiegano il solo sotto-vocabolario  $\Phi$ . In quanto insieme di asserti,  $v_\Phi$  è una teoria, in particolare una sotto-teoria di  $v$ . Il teorema di Craig assicura che, quale che sia il modo in cui la partizione del vocabolario di  $v$  nei due sotto-vocabolari  $\Phi$  e  $\Psi$  è fatta,  $v_\Phi$  ammette un sistema di assiomi tale che per ogni formula ben formata del linguaggio di  $v$  è possibile stabilire se essa è o no uno di tali assiomi. In termini tecnici, si dirà che tale sistema di assiomi è (un insieme) ricorsivo, e che  $v_\Phi$  è una teoria ricorsivamente assiomatizzabile<sup>12</sup>.

Chiariamo il contenuto di questo teorema.  $v$  è per ipotesi ricorsivamente enumerabile. A *fortiori*, essa ammette quindi un sistema di assiomi ricorsivamente enumerabile<sup>13</sup>. Sia ora  $A$  un qualche sistema di assiomi ricorsivamente enumerabile di  $v$  (ovvero un sistema di assiomi di  $v$  dato da un insieme di asserti ricorsivamente enumerabile). Non è affatto detto che  $A$  sia ricorsivo, ovvero tale che per ogni formula ben formata del linguaggio di  $v$  sia possibile stabilire se essa è o no un elemento di  $A$ . Sia data infatti una tale formula. Essa è un elemento di  $A$  se e solo se è un elemento di una certa successione  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  di asserti che può essere effettivamente ottenuta elemento dopo elemento. Se scorrendo (o ottenendo uno dopo l'altro) gli elementi di tale successione arriviamo a incontrare la formula data, è allora chiaro che essa è un elemento di  $A$ , ma se non la incontriamo, e tale successione è infinita<sup>14</sup>, non abbiamo modo di sapere quanto dobbiamo continuare a scorrere gli elementi di tale successione per incontrare tale formula o essere sicuri che essa non possa essere incontrata. Il teorema di Craig segue da un lemma che assicura che almeno uno degli insiemi di assiomi di  $v$  è ricorsivo, ovvero che se  $v$  è ricorsivamente enumerabile, è anche ricorsivamente assiomatizzabile. Il teorema estende poi questo risultato alla sotto-teoria  $v_\Phi$ , assicurando, come detto, che se  $v$  è ricorsivamente enumerabile, allora  $v_\Phi$  è ricorsivamente assiomatizzabile.

Supponiamo ora che la nostra teoria scientifica  $s$  soddisfi le assai deboli condizioni imposte a  $v$  nel teorema di Craig. Messa da parte la condizione che essa sia deduttivamente chiusa — che, presumibilmente, una teoria scientifica dovrebbe comunque soddisfare — e quelle imposte al suo vocabolario — che comunque abbiamo ammesso nella nostra discussione —, esse si limitano a imporre che  $s$  sia ricorsivamente enumerabile, ovvero che i suoi assiomi (che potrebbero anche coincidere con tutti i suoi teoremi) possano venir contati in qualche modo. E anche questa sembra una condizione che una teoria scientifica dovrebbe comunque soddisfare. Supponiamo allora che il vocabolario di  $s$  possa essere scisso in due sotto-vocabolari complementari  $\Omega$  e  $\Theta$ , il primo osservativo e il secondo

<sup>12</sup>L'aggettivo 'ricorsivo' e l'avverbio 'ricorsivamente' hanno qui un significato non equivalente a quello suggerito dalla n.25, cap. III: essi indicano la disponibilità di una procedura di decisione effettiva.

<sup>13</sup>Lo stesso insieme dei teoremi di  $v$  può infatti, al limite, essere preso come un tale sistema di assiomi. Data una teoria assiomatizzata, quali che siano i suoi assiomi, essa ammette un sistema di assiomi alternativo se fra i suoi teoremi se ne possono scegliere alcuni da cui tutti gli assiomi originali sono deducibili. Siccome gli assiomi sono teoremi, l'insieme dei teoremi di una teoria contiene senz'altro i suoi assiomi originali, quali che essi siano, e questi sono quindi banalmente deducibili da tale insieme. Ne segue che se  $v$  è ricorsivamente enumerabile, l'insieme dei suoi teoremi è un sistema di assiomi per  $v$  e è ricorsivamente enumerabile.

<sup>14</sup>Per esempio, l'insieme degli assiomi dell'aritmetica di Peano al primo ordine è infinito. Quindi lo è anche quello di tutte le teorie scientifiche che includono l'aritmetica di Peano al primo ordine.

teorico. Supponiamo anche che, come abbiamo detto sopra, il vocabolario di  $s$  includa il (o parte del) vocabolario di un'altra teoria  $\tau$ , e che gli asserti osservativi di  $s$  siano tutti non  $\tau$ -ontologicamente carichi. Dal teorema di Craig segue allora che vi è senz'altro una teoria ricorsivamente assiomatizzabile  $s_\Omega$  che include tutti e soli gli asserti osservativi di  $s$ , che è quindi o-equivalente a  $s$  e non contiene alcun asserto  $\tau$ -ontologicamente carico.

È allora naturale domandarsi se dal solo fatto che  $s_\Omega$  sia ricorsivamente assiomatizzabile segua che essa sia appropriata nel senso richiesto sopra per chiarire la nozione di (in)dispensabilità in base alla o-equivalenza. Se così fosse, ci sarebbe senz'altro un'appropriata teoria  $s^*$  o-equivalente a  $s$  i cui asserti siano tutti non  $\tau$ -ontologicamente carichi, e  $\tau$  sarebbe quindi senz'altro dispensabile da  $s$ . Infatti, il teorema di Craig vale per ogni partizione del vocabolario di  $s$  in due sotto-vocabolari complementari. Se ammettessimo che dal fatto che  $s_\Omega$  sia ricorsivamente assiomatizzabile segua *ipso facto* che essa sia appropriata nel senso richiesto, allora dal teorema di Craig seguirebbe che (ammesse le deboli condizioni precedenti) qualsivoglia teoria  $\tau$  sarebbe dispensabile per qualsivoglia teoria  $s$ : quali che fossero  $s$  e  $\tau$ , sarebbe sempre possibile isolare dal vocabolario di  $s$  un sotto-vocabolario  $\Omega$  tale che gli asserti di  $s$  che impiegano solo tale sotto-vocabolario siano tutti non  $\tau$ -ontologicamente carichi e che  $s_\Omega$  sia ricorsivamente assiomatizzabile.

Tuttavia, il fatto che  $s_\Omega$  sia ricorsivamente assiomatizzabile non garantisce affatto che gli assiomi di  $s_\Omega$  si possano fissare in maniera tale da rendere  $s_\Omega$  appropriata nel senso richiesto. Per vederlo, si può considerare la prova data da Craig. L'idea è la seguente. Dal fatto che  $v$  è ricorsivamente numerabile segue che anche  $v_\Phi$  lo è. Quindi  $v_\Phi$  ammette un sistema di assiomi ricorsivamente numerabile. Siano  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  tali assiomi. Ma allora  $\beta_1, \beta_2 \wedge \beta_2, \beta_3 \wedge \beta_3 \wedge \beta_3, \dots$  sono assiomi alternativi per  $v_\Phi$  e formano un sistema di assiomi ricorsivo per tale teoria (in quanto per ogni formula ben formata del linguaggio di  $v$  è facile stabilire se essa sia o no una congiunzione contenente un numero  $i$  di congiunti della forma ' $\beta_i \wedge \beta_i \wedge \dots \wedge \beta_i$ ' per qualche numero naturale  $i$ ). Quindi  $v_\Phi$  è ricorsivamente assiomatizzabile. Ma, come lo stesso Craig (1956, p. 49) ammette, gli assiomi  $\beta_1, \beta_2 \wedge \beta_2, \beta_3 \wedge \beta_3 \wedge \beta_3, \dots$  non sono "psicologicamente o matematicamente più perspicui" degli assiomi  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ , e questo si deve principalmente "alla maniera meccanica e artificiale in cui sono prodotti". Questo suggerisce che dal fatto che  $s_\Omega$  sia ricorsivamente assiomatizzabile non segue che  $s_\Omega$  sia appropriata nel senso richiesto, e che non è quindi sufficiente appellarsi al teorema di Craig per rigettare AI.

Se volessimo comunque sostenere che la nozione di (in)dispensabilità basata sulla o-equivalenza è quella adeguata, dovremmo specificare la condizione di appropriatezza che  $s^*$  deve soddisfare in maniera tale che il suo essere ricorsivamente assiomatizzabile non sia sufficiente a renderla appropriata. Field (1980, pp. 8 e 41) richiede per esempio che  $s^*$  debba essere "ragionevolmente attraente". Colyvan (2001, p.77) richiede che essa sia "preferibile" a  $s$ . Resterebbe certo da chiarire quando una teoria è sufficientemente attraente



o preferibile a un'altra. A questo scopo ci si potrebbe richiamare a virtù quali la proprietà di ammettere un'assiomatizzazione adeguata, la capacità di fornire una spiegazione unitaria di certi fenomeni altrimenti esplicabili solo grazie a teorie diverse, la semplicità, la capacità di spiegare gli stessi fenomeni richiamandosi all'esistenza di un numero minore di oggetti (la cosiddetta parsimonia ontologica), l'eleganza formale, la capacità di predizione di fenomeni nuovi, la capacità di permettere la formulazione di nuove ipotesi, etc.

Ammettiamo allora di poter selezionare un adeguato criterio di virtuosità. Potremmo chiarire la nozione di (in)dispensabilità stabilendo che una teoria  $\tau$  è dispensabile da  $s$  se vi è una teoria  $s^*$  o-equivalente a  $s$  ugualmente virtuosa o più virtuosa di  $s$  secondo il criterio selezionato e che non contiene asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi. Per sostenere che AI sia corretto si dovrebbe quindi sostenere che vi sono almeno una teoria matematica  $m$  e una teoria scientifica  $s$  tali che  $s$  contiene asserti  $m$ -ontologicamente carichi, e che non vi è alcuna teoria  $s^*$  o-equivalente a essa e ugualmente virtuosa o più virtuosa di essa che non contiene asserti  $m$ -ontologicamente carichi. Se così fosse,  $m$  sarebbe infatti indispensabile per  $s$ .

Questo non esaurisce ancora i problemi relativi alla possibilità di specificare la nozione di (in)dispensabilità in base alla o-equivalenza. Un problema di assai più difficile soluzione, cui abbiamo già accennato nel §IV.1, rimarrebbe aperto. Sia  $s$  una teoria scientifica effettiva, ovvero una delle nostre migliori teorie scientifiche. Ammettiamo che il vocabolario di  $s$  includa il (o parte del) vocabolario di un'altra teoria  $\tau$  e che nel vocabolario di  $s$  si possa identificare un sotto-vocabolario  $\Omega$  osservativo e uno teorico  $\Theta$ . Ammettiamo anche che vi sia una teoria  $s^*$  o-equivalente a  $s$  ugualmente virtuosa o più virtuosa di  $s$ , secondo un criterio di virtuosità giudicato adeguato, che non contiene asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi. Il fatto che  $s^*$  sia o-equivalente a  $s$  non garantisce affatto che essa includa tutti gli asserti di  $s$  che sono per noi empiricamente significativi, ovvero, come si dice spesso, che il contenuto empirico di  $s$  sia interamente fornito dai suoi asserti osservativi. Fra gli asserti di  $s$  potrebbe esservene uno come 'l'accelerazione di gravità ai poli terrestri è uguale a  $9,823 \text{ m/s}^2$ ' in cui occorre una costante individuale che designa un numero razionale, costante che appartiene dunque a  $\Theta$  (e forse anche 'l'accelerazione di gravità' dovrebbe appartenere a  $\Theta$ ). Supponendo che  $\tau$  sia in questo caso l'analisi matematica (o una qualunque teoria in cui vi siano espressioni per designare numeri razionali), quell'asserto sarebbe  $\tau$ -ontologicamente carico: non sarebbe osservativo, e non potrebbe essere parte di  $s^*$ . Tuttavia, esso contribuisce a fornire il contenuto empirico di  $s$ , dal momento che ci dice qualcosa di rilevante a proposito delle proprietà fisiche dei poli terrestri. Ne segue che se la nostra teoria scientifica  $s$  è tale che il suo contenuto empirico non è interamente fornito dai suoi asserti osservativi, è implausibile ammettere che una teoria  $s^*$ , o-equivalente a  $s$  che non contiene asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi, sia davvero equivalente a  $s$  nella maniera appropriata richiesta sopra. Il fatto che due teorie siano o-equivalenti non sarebbe dunque in generale sufficiente a garantire che esse siano empiricamente equivalenti, e la disponibilità di una teoria  $s^*$  o-equivalente a  $s$  e ugualmente

virtuosa o più virtuosa di  $s$  che non contiene asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi potrebbe non essere sufficiente a garantire che  $\tau$  sia dispensabile per  $s$  in un senso appropriato: il contenuto empirico di  $s^*$  potrebbe essere più povero di quello di  $s$ .

Tre strade sembrano qui aperte. La prima è rifiutare che la relazione di o-equivalenza sia adeguata per specificare la nozione di (in)dispensabilità. La seconda è accettare che lo sia, ma precisare il criterio di virtuosità in modo tale che  $s^*$  possa essere ugualmente o maggiormente virtuosa di  $s$  solo se ne conserva l'intero contenuto empirico. Questa seconda strada dovrebbe affrontare il problema già menzionato: come sia possibile in generale per  $s^*$  conservare l'intero contenuto empirico di  $s$  pur non contenendo asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi. Questo suggerisce una terza strada: si potrebbe sostenere che la nozione di (in)dispensabilità basata sulla o-equivalenza è adeguata se e solo se la si applica a teorie scientifiche riformulate in maniera tale che il loro contenuto empirico sia interamente fornito dai loro asserti osservativi. Se volessimo sostenere che una teoria matematica  $m$  è dispensabile per una teoria scientifica  $s$  in base a questa nozione, dovremmo prima riformulare  $s$  in modo che il suo contenuto empirico sia fornito interamente e senza perdite da asserti osservativi, e solo dopo mostrare che  $m$  è dispensabile per questa riformulazione di  $s$ . Come si desume dal §IV.1, e come vedremo nel §VII.1, questa è la strategia suggerita da Field (1980).

Quale che sia la strada scelta, resta che il contenuto empirico di una teoria deve in generale essere tenuto distinto dal contenuto dei suoi asserti osservativi, almeno se questi sono definiti come abbiamo detto fin qui, come asserti formulati in un vocabolario osservativo, e non semplicemente, per esempio, come asserti che riguardano fenomeni osservabili. Abbiamo preferito esplicitare la distinzione tra equivalenza osservativa e equivalenza empirica poiché, stranamente, pur essendo cruciale, essa è spesso sottaciuta o nascosta dietro un uso ambiguo di espressioni come 'asserto osservativo'.

### 3.2.3. (IN)DISPENSABILITÀ E SPIEGAZIONE

Le cosiddette entità teoriche della fisica, quali le stringhe o certe particelle sub-atomiche non osservabili, presentano problemi simili a quelli posti dagli oggetti matematici: la giustificazione nella loro esistenza non può infatti basarsi sull'osservazione diretta. Ciò potrebbe dipendere da limiti contingenti: quello che non è ora osservabile potrebbe diventarlo in futuro. Ma questa possibilità non elimina il problema di come giustificare l'esistenza di tali entità, visto che comunque nulla al momento garantisce l'osservabilità il linea di principio di ciò che ora non è osservabile.

Un argomento spesso utilizzato in filosofia della scienza per giustificare la credenza nell'esistenza di entità teoriche è la cosiddetta inferenza alla spiegazione migliore (cf. Lipton, 2002): siamo giustificati a ammettere l'esistenza di certe entità se la loro postulazione ci permette di offrire la migliore spiegazione di cui potremmo disporre al momento per determinati fenomeni. L'inferenza alla spiegazione migliore è uno degli argomenti più utilizzati da chi vuole sostenere la tesi detta 'realismo scientifico', secondo la quale le nostre teorie scientifiche (o almeno alcune di esse) descrivono la realtà fisica come

essa in effetti è, anche quando trattano di fenomeni o entità non osservabili (cf. §VII.3.2). I realisti si oppongono a chi ritiene (per esempio Bas Van Fraassen, 1980) che le teorie scientifiche possano solo aiutarci a descrivere e prevedere fenomeni osservabili, e che il giusto atteggiamento nei confronti delle loro parti che trattano di fenomeni e entità non osservabili sia l'agnosticismo: possiamo considerarle come strumenti utili per descrivere fenomeni osservabili, ma non abbiamo ragioni per poter dire né che sono vere, né che sono false (cf. §VII.4.2).

L'inferenza alla spiegazione migliore impiegata per giustificare l'esistenza delle entità teoriche della scienza è per molti aspetti simile a AI per il platonismo. Molti, e per certi versi lo stesso Quine (1981c, pp. 149-150), suggeriscono che AI renda il platonismo equiparabile al realismo scientifico. L'idea è che chi ammette l'inferenza alla spiegazione migliore come una forma valida di argomento nel caso delle entità teoriche della scienza, dovrebbe fare lo stesso nel caso degli oggetti matematici, visto che le migliori spiegazioni in nostro possesso per molti fenomeni osservabili sono date da teorie scientifiche che trattano di oggetti matematici. Ciò suggerisce che AI possa essere compreso appieno solamente considerando un elemento che non abbiamo finora introdotto: la spiegazione.

La natura della spiegazione scientifica costituisce un problema classico per la filosofia della scienza<sup>15</sup>. Ciò che ci interessa qui è che si è spesso sostenuto sia che vi siano spiegazioni anche in matematica sia che la matematica possa fornire spiegazioni di fenomeni empirici. Tutto ciò ha suscitato un vasto dibattito (cf. Mancosu 2008b) che, soprattutto per il secondo aspetto, si è in parte sovrapposto al dibattito su AI (Baker 2001, Colyvan, 2002; Melia, 2002; Baker, 2005). Molti ritengono che se la migliore spiegazione che abbiamo di un certo fenomeno empirico dipende da una certa teoria matematica  $M$ , allora  $M$  debba considerarsi "esplicativamente indispensabile" per le teorie scientifiche che trattano di quel fenomeno, e che questo sia sufficiente per concludere che esistano gli  $O_{[M]}$ , o almeno degli  $O_{[M]}$ . Secondo Baker (2009, p. 613), ciò fornisce una versione "migliorata [enhanced]" dell'argomento [6] (che riportiamo con leggere modifiche):

[AI migliorato (secondo Baker)]

- i) Dovremmo ritenerci giustificati a ritenere che esista qualunque entità che svolge un ruolo esplicativamente indispensabile nelle nostre migliori teorie scientifiche.
- ii) Gli oggetti (o almeno certi oggetti) matematici svolgono un ruolo esplicativamente indispensabile nelle nostre migliori teorie scientifiche..

[8] -----

- iii) Siamo giustificati a ritenere che esistano oggetti matematici (o almeno questi oggetti).

Un esempio di spiegazione matematica di un fenomeno empirico proposto da Baker (2005) è costituito dal ciclo vitale di una particolare specie di cicala che vive un numero primo di anni: 13 o 17 anni. È stato proposto di spiegare tale fenomeno osservando che, data la non

<sup>15</sup>Cf. Salmon (1989), Kitcher e Salmon (1989), Fano (2005), Woodward (2009).

scomponibilità fattoriale dei numeri primi, una durata di un numero primo di anni del ciclo vitale di queste cicale minimizza la possibilità di sovrapposizione con i cicli vitali di altre specie predatrici. Questa spiegazione si richiama all'aritmetica. Se si ammette che questa spiegazione è la migliore, se ne deve allora concludere che l'aritmetica (o almeno una sua parte relativa alle scomposizioni in fattori primi) sia esplicativamente indispensabile per la teoria che studia i cicli vitali di queste cicale: si potrebbe dunque applicare l'argomento [8] e concludere che esistono dei numeri naturali<sup>16</sup>.

Questa versione di AI è molto controversa e il dibattito è a questo riguardo in pieno svolgimento (cf. Baker, 2009)<sup>17</sup>. Tra i vari problemi che l'approccio di Baker presenta, il più manifesto riguarda la necessità di chiarire come la capacità esplicativa (in particolare, quella di fornire la migliore spiegazione), che può essere influenzata da fattori soggettivi che dipendono dai limiti delle nostre capacità cognitive, possa intervenire in argomenti che dovrebbero condurre a conclusioni di natura ontologica..

#### 3.2.4. UNA CHIARIFICAZIONE GENERALE DELLA NOZIONE DI (IN)DISPENSABILITÀ

Da quanto detto nei §§ 4.2.2 e 4.2.3 ci pare possibile pervenire a una chiarificazione generale e schematica della nozione di (in)dispensabilità:

[(In)dispensabilità]

Una teoria  $\tau$  è dispensabile per una data teoria scientifica  $s$  se e solo se vi è una teoria scientifica  $s^*$  che non include asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi che è:

- i)  $\epsilon$ -equivalente a  $s$ , dove la  $\epsilon$ -equivalenza è una appropriata relazione di equivalenza;
- ii) ugualmente virtuosa o più virtuosa di  $s$  in base a un appropriato criterio di virtuosità.

Se  $s$  include degli asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi e non vi è alcuna teoria scientifica  $s^*$  che soddisfa tali condizioni, allora  $\tau$  è indispensabile per  $s$ .

Proprio in quanto schematica, questa chiarificazione suggerisce che parlare di (in)dispensabilità *tout-court* sia largamente impreciso. Occorrerebbe invece specificare a quale relazione di equivalenza ci si riferisce implicitamente, perché essa è giudicata appropriata, e quali condizioni si richiedono per la virtuosità di  $s^*$ . Si dovrebbe inoltre chiarire se queste condizioni, una volta specificate, si applichino in qualunque caso o solo in caso  $s$  sia stata previamente riformulata in maniera opportuna.

Siano ora  $m$  e  $s$  due teorie, la prima matematica e la seconda scientifica. Si supponga che una parte  $m'$  di  $m$  sia indispensabile per  $s$  in base a [(In)dispensabilità]. Da ciò non segue che l'intera  $m$  lo sia. Se  $m''$  fosse il complemento di  $m'$  rispetto a  $m$  potrebbe infatti darsi che  $m''$  non sia indispensabile per  $s$ , perché  $s$  non contiene asserti  $m''$ -ontologicamente carichi o

<sup>16</sup>Un problema connesso a questo esempio è quello di stabilire di quali e quanti oggetti di una teoria matematica dobbiamo riconoscere l'esistenza se solo alcuni fra gli oggetti della teoria si rivelano indispensabili per una certa spiegazione (in questo caso, basterebbe considerare i numeri 13 e 17 e mostrare che essi non hanno divisori diversi da 1 e da loro stessi; d'altra parte sembra plausibile sostenere che l'argomento possa condurre a concludere che esistono infiniti oggetti astratti, cioè tutti i numeri naturali). Questo è un caso particolare di un problema generale che riguarda la nozione di (in)dispensabilità, comunque essa venga precisata. Secondo Peressini (1997), si tratta del problema di stabilire ciò che costituisce "l'unità di misura dell'indispensabilità".

<sup>17</sup>Per critiche all'idea che l'inferenza alla spiegazione migliore possa essere impiegata per giustificare l'esistenza di oggetti matematici, cf. §VII.4.2, Leng (2005b), Saatsi (2007).

perché vi è una teoria  $s^*$  che soddisfa le clausole (i) e (ii) di [(In)dispensabilità] che non li contiene. Impiegando [(In)dispensabilità] si possono identificare quali parti di una teoria data sono indispensabili per una certa teoria scientifica e quali non lo sono. Tuttavia si potrebbe dubitare che dal fatto che la sola  $M'$  sia indispensabile per  $s$  segua che  $M'$  sia accettabile indipendentemente dall'intera  $M$  (supponendo che  $M$  lo sia). Da quanto detto nel §3.1 segue che  $M'$  deve comunque essere tale da caratterizzare in modo appropriato gli  $O_{[M']}$ , e/o da fissare in modo appropriato il significato delle costanti incluse nel suo vocabolario. Fra gli  $O_{[M']}$  potrebbero esservene alcuni di cui gli asserti  $M'$ -ontologicamente carichi di  $s^*$  non trattano, e/o il vocabolario di  $M'$  potrebbe includere costanti che non occorrono in quegli asserti, che potrebbero per esempio riguardare solo certi numeri naturali. Questi, tuttavia, non potrebbero essere caratterizzati in maniera appropriata se non come elementi dell'intera progressione dei numeri naturali. Se una teoria matematica è indispensabile per una teoria scientifica vera, dunque, è naturale richiedere che essa debba essere in un qualche senso accettabile, almeno in quanto corpo di asserti in grado di caratterizzare appropriatamente certi oggetti o a fissare appropriatamente il significato di certe costanti.

#### **4. Il criterio di impegno ontologico di Quine**

Perché AI possa essere impiegato a sostegno del platonismo, esso deve non solo ammettere una premessa che afferma che una teoria è vera solo se esistono certi oggetti, ma anche integrare un criterio che permetta di stabilire quali siano gli oggetti la cui esistenza segue dalla verità di una teoria. A questo proposito si parla comunemente di 'criterio di impegno ontologico'.

Il termine 'impegno ontologico' riferito a una certa teoria è generalmente impiegato per denotare il dominio degli oggetti la cui esistenza è una condizione necessaria per la verità della teoria: il criterio serve a stabilire di che oggetti si tratta. Alle volte si parla, come nell'argomento [6], di impegno ontologico in senso epistemico, come ciò a cui dovremmo ritenerci ontologicamente impegnati (intendendo con questo che siamo non solo giustificati ma anche tenuti a ritenere che certi oggetti esistano). Altre volte si parla dell'impegno ontologico di un soggetto, cioè del dominio degli oggetti che un certo soggetto di fatto riconosce che esistano in quanto accetta una certa teoria. Quest'ultimo uso non è rilevante per la discussione su AI, e non lo considereremo qui.

È importante chiarire che il criterio di impegno ontologico non è un criterio volto a stabilire che cosa esiste, ma solo ciò che una teoria dice che esiste (Quine 1948, pp. 255-256). Esso si applica a qualunque teoria, vera o falsa che sia: la teoria della combustione dei materiali formulata nel XVII secolo ha un determinato impegno ontologico (che include il flogisto) anche se sappiamo che è falsa. Stabilire se una teoria è vera è una questione ben diversa da quella di identificare gli oggetti la cui esistenza è una condizione necessaria per la verità della teoria. Il criterio riguarda solo la seconda questione. Il criterio non va nemmeno identificato con la tesi secondo cui se una teoria è vera, allora esistono certi oggetti (quelli di cui essa apparentemente tratta). Il criterio è appunto un criterio, non una

tesi: esso serve solo a stabilire, una volta assunta la tesi precedente, quali sono gli oggetti rilevanti.

#### 4.1 *Il criterio di Quine*

Il criterio di impegno ontologico suggerito da Quine (1939b, 1948) come uno strumento per confrontare e valutare in maniera perspicua gli impegni ontologici di teorie alternative ha un ruolo cruciale in molti discussioni in ontologia, così come nel dibattito su AI<sup>18</sup>, essendo di fatto il criterio abitualmente adottato nel formulare AI per il platonismo. Quine (1939b, p. 708; 1948, p. 253) riassume il suo criterio con uno slogan che è diventato celebre: “essere è essere il valore di una variabile”. Nella sua apparente semplicità, questo slogan nasconde un criterio complesso la cui formulazione precisa deve tener conto di diverse condizioni.

La prima condizione riguarda la natura logica del linguaggio in cui la teoria rilevante è formulata<sup>19</sup>. Quine (come molti prima e dopo di lui) ritiene che l’impegno ontologico di una teoria non possa essere correttamente determinato se di questa ci limitiamo a considerare una formulazione nel linguaggio naturale. La “notazione canonica” (Quine 1960, cap. V) nella quale riformulare una teoria affinché si possa correttamente esprimere la struttura semantica dei suoi asserti e il suo impegno ontologico si ottiene invece per Quine riformulando la teoria in un linguaggio predicativo del primo ordine<sup>20</sup>. Quine ritiene infatti che la logica del primo ordine consenta la formulazione ontologicamente più neutra degli asserti di una teoria, la più adatta a mostrarne le implicazioni ontologiche. Altri linguaggi formali, come quelli della logica modale o della logica del secondo ordine, hanno invece secondo Quine implicazioni ontologiche proprie, che si aggiungono a quelle degli asserti formulati attraverso di essi. Abbiamo già visto il caso esemplare della logica del secondo ordine (cf. cap. II, n.12; §IV.3)<sup>21</sup>.

La seconda condizione è che il linguaggio del primo ordine in cui viene riformulata una teoria sia anche quello ontologicamente più elementare fra i linguaggi di quel tipo in cui la teoria può essere riformulata. La teoria deve cioè essere considerata in una sua riformulazione ottenuta dopo opportune parafrasi dei suoi asserti volte a eliminare tutte le costanti non logiche che possono venir eliminate in favore di altre considerate, in base a opportuni criteri, ontologicamente più elementari. La scelta dei criteri da adottare dipenderà da varie considerazioni di carattere filosofico, ma sarà comunque necessario richiedere che

---

<sup>18</sup>Per esempio in Carnap (1950a), Alston (1958); Church (1958), Jackson (1980); Hodes (1990), Hofweber (2005b), Melia (1995), Azzouni (1998), Yablo (1998), (2001), Alspektor-Kelly (2001). Per un’altra presentazione, cf. Carrara e Spolaore (2008).

<sup>19</sup>Quine parla talvolta dell’impegno ontologico di un asserto. Tuttavia, anche per ragioni che hanno a che vedere con l’olismo del significato (cf. §6), è chiaro che il suo interesse riguarda l’impegno ontologico di un asserto solo in quanto parte di una teoria di cui quell’asserto fa parte, e quindi, in ultima istanza, l’impegno ontologico di una teoria.

<sup>20</sup>Per come lo intendiamo qui, un linguaggio predicativo del primo ordine è un linguaggio i cui diversi componenti atomici sono assegnati a un numero finito di categorie sintattiche prestabilite — costanti logiche (connettivi, quantificatori e, se vogliamo, parentesi), costanti e variabili individuali, costanti predicative e funzionali a uno o più posti — e sono sottoposti a regole di composizione esplicite che permettono di ottenere dei componenti non atomici ben formati. Ciò che è particolarmente rilevante nel caso in discussione è la presenza di quantificatori intesi come operatori.

<sup>21</sup>Resta naturalmente da determinare se tutto ciò che può essere espresso in un linguaggio del secondo ordine può esserlo senza perdite rilevanti anche in un linguaggio del primo ordine, e se sia quindi possibile riformulare qualunque teoria al primo ordine.

ciascun criterio permetta di determinare in maniera univoca un certo linguaggio considerato il più elementare ontologicamente .

La terza condizione impone un vincolo relativo al modo in cui una data teoria scientifica informale deve essere riformulata in un linguaggio predicativo del primo ordine. Supponiamo che tale teoria sia appunto informale (come lo sono la maggior parte delle teorie matematiche e scientifiche nella loro formulazione usuale) e includa degli asserti, generalmente detti ‘esistenziali’ della forma ‘esiste (almeno) un  $F$ ’, ‘ci sono degli  $F$ ’, etc., dove ‘ $F$ ’ sta per un’opportuna espressione che identifica certe proprietà o condizioni (esempi dall’aritmetica informale possono essere: ‘vi è un numero primo pari’, ‘vi sono numeri perfetti maggiori di 496’, o ‘vi sono delle triple di numeri naturali  $x, y, z$ , tali che  $x^2 + y^2 = z^2$ ’). Secondo Quine, questi asserti, indipendentemente dal tipo di teoria in questione, devono essere resi tramite asserti di un linguaggio predicativo del primo ordine della forma ‘ $\exists x[\mathcal{A}_F(x)]$ ’, dove ‘ $\mathcal{A}_F(x)$ ’ è una formula aperta relativamente alla variabile individuale ‘ $x$ ’ che rende in quel linguaggio la condizione espressa da ‘ $F$ ’ nel linguaggio della teoria data.

Queste condizioni possono essere riassunte dicendo che se si vuole stabilire quale sia l’impegno ontologico di una teoria  $\tau$ , è dapprima necessario passare da  $\tau$  a una teoria  $\tau_0^{[P1]}$  univocamente determinata, formulata in un linguaggio predicativo del primo ordine e considerata come la riformulazione canonica di  $\tau$  il cui vocabolario è quello giudicato ontologicamente più elementare fra quelli di tutte le possibili riformulazioni di  $\tau$  in un tale linguaggio (ovviamente  $\tau_0^{[P1]}$  può coincidere con  $\tau$ , se  $\tau$  possiede già le caratteristiche richieste). Qui diremo che  $\tau_0^{[P1]}$  è la riformulazione canonica ontologicamente minimale di  $\tau$ .

L’impegno ontologico di  $\tau$  coinciderà allora per definizione con quello della sua riformulazione canonica ontologicamente minimale  $\tau_0^{[P1]}$ . Data una teoria  $\tau$ , per determinare il suo impegno ontologico, si dovrà quindi determinare l’impegno ontologico della sua riformulazione canonica ontologicamente minimale  $\tau_0^{[P1]}$ . Vediamo come questo deve essere fatto secondo Quine.

Sia ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’ una formula aperta relativamente alla variabile ‘ $x$ ’ di un linguaggio predicativo del primo ordine. Potrebbe sembrare scontato ammettere che un asserto della forma ‘ $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ’ sia vero se e solo se esiste un oggetto che soddisfa ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’, ovvero un oggetto ‘ $a$ ’ tale che ‘ $\mathcal{A}(a)$ ’ sia vero. Ma questo nasconde in realtà una tesi forte: la tesi per cui gli asserti del linguaggio in questione devono essere intesi in accordo con la loro forma grammaticale apparente e valutati semanticamente relativamente a un dominio di oggetti che è tale che si possa dire che un certo oggetto esiste se e solo appartiene a tale dominio. Per brevità, diciamo ‘diretta’ l’interpretazione degli asserti della forma ‘ $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ’ da cui segue che tale asserto è vero se e solo se esiste un oggetto che soddisfa ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’.

Se quest’ultima è una formula della riformulazione ontologicamente minimale  $\tau_0^{[P1]}$  di una qualche teoria  $\tau$ , Quine ammette l’interpretazione diretta degli asserti della forma

‘ $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ’. Più precisamente, Quine ritiene che dire di un oggetto che esiste non significa dire altro se non che esso soddisfa una formula come ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’ che interviene in un asserto della forma ‘ $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ’ incluso fra le conseguenze della riformulazione ontologicamente minimale  $T_0^{[P1]}$  di una qualche teoria vera  $T$  (cosa che è equivalente a dire che tale oggetto fornisce un valore per la variabile ‘ $x$ ’ che rende ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’ un asserto vero). L’esistenza di un oggetto che soddisfa ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’ è quindi una condizione necessaria<sup>22</sup> per la verità di ‘ $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ’; Quine identifica dunque l’impegno ontologico di quest’ultimo asserto con il dominio composto da un oggetto che soddisfa ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’.

A seconda della natura di questa formula, può essere possibile o meno specificare in modo univoco un oggetto che soddisfa ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’. Sarà possibile farlo se ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’ non può che essere soddisfatta da un unico oggetto: l’impegno ontologico di ‘ $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ’ sarà allora il dominio composto dal solo oggetto che soddisfa ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’, per esempio dalla Luna se ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’ è ‘ $x$  è il satellite della terra’ o se è ‘ $x$  è identico alla Luna’. Non sarà invece possibile farlo se ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’ può essere soddisfatta da più oggetti: l’impegno ontologico di ‘ $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ’ sarà allora il dominio composto da un oggetto che soddisfa ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’ e che risulta altrimenti indeterminato, per esempio da un qualche pianeta se ‘ $\mathcal{A}(x)$ ’ è ‘ $x$  è un astro che ruota intorno al sole’. Dato un corpo  $\kappa$  di asserti della forma ‘ $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ’ della riformulazione ontologicamente minimale  $T_0^{[P1]}$  di una teoria  $T$ , l’impegno ontologico di  $\kappa$  è dato dagli oggetti, univocamente determinati o meno, che soddisfano tutte le formule aperte che occorrono in tali asserti dopo il prefisso ‘ $\exists x$ ’, oggetti la cui esistenza è una condizione necessaria per la verità degli asserti di  $\kappa$ , posto che tali asserti siano intesi secondo l’interpretazione diretta.

Ora, data una teoria  $T$ , è possibile che la sua riformulazione ontologicamente minimale  $T_0^{[P1]}$  non contenga solo asserti della forma ‘ $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ’. In particolare, alcuni di questi asserti saranno tali che in essi occorrono termini singolari. Abbiamo tuttavia indicato sopra come Quine propone di eliminare i termini singolari dal vocabolario di una teoria, rimpiazzando ciascuno di essi con una apposita costante predicativa (cf. §3.1). In questo modo, ogni asserto di  $T_0^{[P1]}$  in cui occorre un termine singolare è rimpiazzato da un asserto in cui le sole costanti non logiche che occorrono sono predicative. Si supponga per esempio che  $T_0^{[P1]}$  contenga un asserto della forma ‘ $F(a)$ ’. Applicando tale procedimento otteniamo l’asserto ‘ $\exists x[A(x) \wedge F(x)]$ ’ dove ‘ $A$ ’ è la costante predicativa che rimpiazza il termine singolare ‘ $a$ ’. Se non si accettasse questa procedura, si potrebbe pervenire allo stesso risultato ammettendo una appropriata versione della regola di generalizzazione esistenziale che permette di trasformare certi asserti non quantificati in appropriati asserti quantificati esistenzialmente, e la cui applicazione agli asserti di  $T_0^{[P1]}$  sarebbe per Quine legittimata dal

<sup>22</sup>Ricordiamo che una condizione necessaria non è altro che una condizione espressa da un’implicazione: dire che  $A$  è condizione necessaria per  $B$  è la stessa cosa che dire che  $B$  implica  $A$ . Quindi dire che l’esistenza di un oggetto è una condizione necessaria per la verità di un asserto è la stessa cosa che dire che se tale asserto è vero, allora tale oggetto esiste.



solo fatto che  $\tau_0^{[P1]}$  è la riformulazione ontologicamente minimale di  $\tau$  (indipendentemente dal modo in cui la si sia ottenuta). Quale che sia, tra queste due strategie, quella che si intende applicare, è sufficiente ammettere che  $\tau_0^{[P1]}$  sia chiusa rispetto alle trasformazioni o deduzioni che esse impongono, per concludere che l'impegno ontologico di  $\tau_0^{[P1]}$  è semplicemente dato dal corpo delle sue conseguenze della forma ' $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ '. Il criterio di Quine è quindi il seguente:

[*Criterio di impegno ontologico di Quine*]

L'impegno ontologico di una teoria  $\tau$  coincide con l'impegno ontologico del corpo di conseguenze della forma ' $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ' della riformulazione canonica ontologicamente minimale  $\tau_0^{[P1]}$  di  $\tau$ , ovvero è il dominio composto dagli oggetti che soddisfano tutte le formule aperte che occorrono in tali asserti dopo il prefisso ' $\exists x$ ' (la cui esistenza è una condizione necessaria per la verità di tali asserti, posto che essi siano intesi in accordo con l'interpretazione diretta).

Quanto detto sopra — in particolare riguardo alla terza condizione elencata — dovrebbe avere già suggerito il fatto che Quine ha una concezione dell'esistenza tale da fargli rigettare (cf. Quine 1935, 1951b, 1954a) l'idea che sia legittimo, o anche solo sensato, parlare di esistenza interna e esterna come suggerito da Carnap (cf. §II.4.1). Posto che il linguaggio di una teoria sia stato opportunamente depurato fino a ottenerne una riformulazione canonica ontologicamente minimale, dire che un oggetto esiste significa per Quine sempre e comunque dire che tale oggetto fornisce un valore per la variabile ' $x$ ' il quale soddisfa la formula aperta ' $\mathcal{A}(x)$ ' che occorre in un asserto vero della forma ' $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ '. Questo punto di vista a proposito della nozione di esistenza è cruciale tanto per la giustificazione del criterio di impegno ontologico quanto per suo impiego per AI. Se vi è infatti un solo senso in cui si possa dire di un oggetto che esiste, allora, in vista della determinazione dell'impegno ontologico di una certa teoria  $\tau$ , non è affatto necessario distinguere, nel vocabolario della sua riformulazione  $\tau_0^{[P1]}$ , fra costanti relative a oggetti di genere diverso, per esempio fra costanti relative a oggetti concreti e costanti relative a oggetti astratti. E senza tale distinzione non vi è neppure necessità di introdurre specificazioni o restrizioni per quanto concerne l'applicabilità dell'interpretazione diretta a asserti di  $\tau_0^{[P1]}$  della forma ' $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ' e delle regole deduttive che si applicano a tali asserti.

Se si rigettasse tuttavia la concezione dell'esistenza di Quine, e la legittimità dell'interpretazione diretta, si potrebbe reagire al modo in cui il criterio viene giustificato in almeno due modi diversi. Si può in primo luogo ritenere che il ragionamento con cui Quine giustifica il criterio debba essere rimpiazzato da un ragionamento che tenga conto di distinzioni opportune fra le costanti del vocabolario di  $\tau_0^{[P1]}$  e pervenga quindi a stabilire un criterio essenzialmente diverso del precedente, che potrebbe non adattarsi a AI. In secondo luogo, si potrebbe negare che se presunti oggetti matematici sono inclusi nell'impegno ontologico di una teoria scientifica vera, allora essi esistano nello stesso senso in cui

esistono gli oggetti concreti su cui verte tale teoria scientifica, come richiede il sostenitore di AI per il platonismo. Entrambe queste strategie porterebbero o a rigettare AI per il platonismo (sostenendo che esso si basa, in ultima analisi, su di una premessa almeno tanto forte e controversa quanta la tesi che vuole sostenere), o a richiedere che esso venga essenzialmente modificato (e trasformato in un argomento che può al più permettere di concludere che gli oggetti matematici esistono in un senso distinto da quello in cui esistono gli oggetti concreti su cui vertono le teorie scientifiche vere). Non discuteremo queste possibili obiezioni visto che esse non vengono prese significativamente in considerazione nel dibattito su AI. È tuttavia importante tenere presente che, nonostante l'apparente semplicità del ragionamento che lo motiva, il criterio di Quine dipende da una serie di condizioni e di posizioni teoriche che potrebbero essere considerate controverse.

#### 4.2 *Una generalizzazione del criterio di Quine*

Il criterio di Quine riduce l'impegno ontologico di una teoria all'impegno ontologico di un corpo di conseguenze di un'appropriata riformulazione di tale teoria, richiedendo poi di intendere queste conseguenze in accordo con l'interpretazione diretta. Ciò suggerisce una possibile generalizzazione di tale criterio:

*[Criterio di impegno ontologico generalizzato]*

L'impegno ontologico di una teoria  $\tau$  coincide con l'impegno ontologico di una teoria  $\tau^{\wedge_0}$  il cui vocabolario sia quello giudicato ontologicamente più elementare fra quello di tutte le teorie  $\tau^{\wedge \epsilon}$ -equivalenti a  $\tau$  e ugualmente virtuose o più virtuose di  $\tau$ , posto che siano dati una appropriata relazione di equivalenza e un appropriato criterio di virtuosità, ovvero è il dominio degli oggetti la cui esistenza è una condizione necessaria per la verità di  $\tau^{\wedge_0}$ , in accordo con un'interpretazione giudicata adeguata dei suoi asserti.

Si tratta di un criterio generalizzato in quanto è indipendente dalla specifica proposta di Quine sul modo canonico di riformulare una teoria, e sul ruolo assegnato agli asserti quantificati esistenzialmente entro la riformulazione adeguata. Questo criterio, come la condizione *[(In)dispensabilità]*, si presenta sotto forma di uno schema che può essere esemplificato in modo diverso. Il criterio di Quine si ottiene specificando lo schema in modo opportuno.

Se adottiamo entrambi gli schemi *[(In)dispensabilità]* e *[Criterio di impegno ontologico generalizzato]*, e supponiamo che essi siano specificati richiamandosi alla stessa relazione di equivalenza e allo stesso criterio di virtuosità, e che  $s$  e  $\tau$  siano due teorie la prima delle quali è scientifica, allora possiamo ragionare come segue. Se  $\tau$  è dispensabile per  $s$  e il criterio di elementarità ontologica che interviene in *[Criterio di impegno ontologico generalizzato]* è tale per cui  $s^{\wedge_0}$  non contiene asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi e rispetta quindi le condizioni imposte a  $s^*$  da *[(In)dispensabilità]*, allora l'impegno ontologico di  $s$  non include gli  $O_{[\tau]}$ . Viceversa, se  $\tau$  è indispensabile per  $s$ , allora non vi è alcuna teoria che soddisfi le condizioni imposte a  $s^{\wedge}$  e che non contenga asserti  $\tau$ -ontologicamente carichi, e quindi anche  $s^{\wedge_0}$  contiene tali asserti e l'impegno ontologico di  $s$  include gli  $O_{[\tau]}$ , almeno se

l'interpretazione ammessa per gli asserti di  $s^{\wedge}_0$  richiede che tali asserti siano intesi in accordo con la loro forma grammaticale apparente (cosa perfettamente naturale, posto che il passaggio da  $s$  a  $s^{\wedge}_0$  è appunto motivato dall'obiettivo di garantire la legittimità di una tale interpretazione). Quindi, se le condizioni indicate relative alla specificazione dei due schemi sono soddisfatte,  $\tau$  è indispensabile per  $s$  se e solo se l'impegno ontologico di  $s$  include gli  $O_{[\tau]}$ .

Supponiamo ora che si sia stabilito che una teoria matematica  $m$  è indispensabile per una teoria scientifica  $s$  e torniamo ai due argomenti [3a] e [3b]. Secondo la premessa (3a.iii), se  $s$  è vera allora anche  $m$  lo è, mentre secondo la premessa (3b.iii), se siamo giustificati a ritenere  $s$  vera, allora lo siamo anche a ritenere vera  $m$ . Ciò posto, se  $s$  è vera la premessa (3a.iv) ci permette di concludere che esistono gli  $O_{[m]}$ , mentre se se siamo giustificati a ritenere  $s$  vera, la premessa (3b.iv) ci permette di concludere che siamo giustificati a ritenere che esistono gli  $O_{[m]}$ , cioè gli oggetti inclusi nell'impegno ontologico di  $m$ . Quindi gli argomenti [3a] e [3b] suggeriscono di applicare il criterio di impegno ontologico a  $m$  per identificare gli oggetti inclusi nel suo impegno ontologico e concludere, posto che  $s$  sia vera o che siamo giustificati a ritenerla tale, che essi esistono o che siamo giustificati a ritenere che esistono.

Ma se le condizioni precedenti relative alla specificazione di [(In)dispensabilità] e [Criterio di impegno ontologico generalizzato] sono soddisfatte, allora gli  $O_{[m]}$  sono anche inclusi nell'impegno ontologico di  $s$ . Potremmo quindi applicare il criterio di impegno ontologico direttamente a  $s$ , come invitano a fare gli argomenti [5], [6] e [7]. Quindi:

se  $m$  è indispensabile per  $s$  e  $s$  è vera, allora esistono degli  $O_{[m]}$

Da qui, ammettendo che dal fatto che se  $s$  è vera allora esistono degli  $O_{[m]}$  segua che se siamo giustificati a ritenere che  $s$  è vera allora lo siamo anche a ritenere che *esistano degli*  $O_{[m]}$  (ciò che sembra naturale ammettere, anche nel caso in cui si voglia negare che la giustificazione razionale sia, in generale, chiusa sotto la conseguenza logica)<sup>23</sup>, segue che:

se  $m$  è indispensabile per  $s$  e siamo giustificati a ritenere che  $s$  è vera,  
allora siamo giustificati a ritenere che esistono degli  $O_{[m]}$

La prima di queste condizioni è equivalente alla premessa (5.iii), mentre la seconda è equivalente tanto all'implicazione che nella premessa (6.i) è espressa da 'tutte' (che è la sola necessaria perché l'argomento [6] sia valido) — almeno se ammettiamo, come sembra naturale fare, che le "nostre migliori teorie scientifiche" sono quelle che siamo giustificati a ritenere vere —, quanto all'intero argomento [7].

Gli argomenti [5], [6] e [7] differiscono quindi dagli argomenti [3a] e [3b] in quanto non contengono nessuna premessa analoga alle premesse (3a.iii) e (3b.iii) e basano direttamente la loro conclusione sulle teorie scientifiche rilevanti (piuttosto sulle teorie

<sup>23</sup>Non tutti accetterebbero questa assunzione. Per il rapporto tra giustificazione e conseguenza logica, cf. Luper, 2005 Moruzzi e Zardini, 2007). Qui diremo solo che per alcuni dal fatto che se  $p$  allora  $q$ , e che siamo giustificati a ritenere che  $p$ , non segue che siamo giustificati a ritenere che  $q$ . Per esserlo, dovremmo anche essere giustificati a ritenere che se  $p$  allora  $q$ . Tuttavia, in generale, anche nelle versioni epistemiche di AI la condizione di indispensabilità è lasciata libera da operatori epistemiche, ciò che suggerisce che se ammettiamo che  $m$  è indispensabile per  $s$  se e solo se l'impegno ontologico di  $m$  include gli  $O_{[m]}$  e che  $m$  è indispensabile per  $s$ , allora dovremmo anche ammettere che siamo giustificati a ritenere che se  $m$  è vera allora esistono gli  $O_{[m]}$ .

matematiche che sono indispensabili per esse). Due osservazioni sono necessarie in merito a questo punto. Primo, la mancanza di premesse simili a (3a.iii) e (3b.iii) negli argomenti [5], [6] e [7] sembra dovuta solamente al fatto che tali premesse siano lasciate implicite. Infatti, una premessa di quel tipo è necessaria per derivare come conclusione di AI almeno la verità delle teorie matematiche (quindi il realismo semantico). Dal momento che è altamente implausibile sostenere una versione di AI per il platonismo che non derivi da una forma di realismo semantico, sembra che i proponenti degli argomenti [5], [6] e [7] dovrebbero accettare implicitamente premesse come (3a.iii) e (3b.iii). Secondo, affinché le conclusioni degli argomenti [5], [6] e [7] possano basarsi direttamente sulle caratteristiche delle teorie scientifiche rilevanti, si deve ammettere che lo stesso criterio di impegno ontologico che si applica a una teoria matematica si possa applicare a una teoria scientifica, e che tale criterio, applicato a una teoria scientifica *s* per cui una teoria matematica *m* è indispensabile identifichi, come parte dell'impegno ontologico di *s*, gli stessi  $O_{[m]}$  che identifica se applicato alla sola *m*. Si noti che, sebbene tutto ciò sembri essere garantito dal criterio di Quine, potrebbe non esserlo sulla base di criteri alternativi.

## 5. Naturalismo

A un estremo livello di generalità, una posizione si definisce naturalista se richiede che nell'analisi di un determinato problema filosofico si presti un'attenzione particolare ai risultati e alle metodologie delle scienze naturali. Questo atteggiamento generale può poi essere declinato in molti modi (cf. Papineau 1993, 2007; Agazzi e Vassallo 1998; Maddy 2007). Una forma radicale di naturalismo richiederebbe per esempio che le dispute filosofiche vengano interamente ridotte a, e quindi rimpiazzate da, dispute scientifiche, lasciando alla filosofia il solo ruolo di chiarire alcuni aspetti concettuali della metodologia scientifica. Una forma meno radicale di naturalismo ammette la legittimità di dispute genuinamente filosofiche, pur assegnando alla scienza il compito di fornire l'evidenza necessaria a darne una soluzione. In questo senso, sono naturalisti tutti quei programmi che cercano di risolvere problemi tradizionalmente considerati filosofici, o studiare fenomeni tradizionalmente studiati con strumenti filosofici, riducendoli a problemi o fenomeni empirici.

Il naturalismo è associato al pensiero di Quine in modi diversi. Quine (1969b) propone per esempio una concezione naturalizzata dell'epistemologia in cui la tradizionale nozione di giustificazione è rimpiazzata da nozioni della psicologia empirica (in particolare di impostazione comportamentista). Quello che più ci interessa qui è tuttavia un'accezione più generale del naturalismo che Quine pure adotta e promuove. Nelle parole di Quine (1981b, p. 72), essa consiste nell'abbandono dell'idea che vi sia una "filosofia prima", un punto di vista esterno e superiore all'impresa scientifica da cui giudicarla e giustificarla. Da empirista quale è, Quine ritiene che l'unica evidenza possibile su cui basare la nostra conoscenza sia di natura empirica, e che spetti esclusivamente alla scienza — e non a argomenti filosofici *a priori* — fornire questa evidenza e spiegare come essa possa essere

acquisita.

Una conseguenza di ciò è che “i problemi ontologici sono sullo stesso piano dei problemi delle scienze naturali” (Quine 1951a, p. 64). Secondo Quine, dunque, il fatto che l’evidenza su cui basarsi per rispondere a domande filosofiche sia fornita dalle nostre teorie scientifiche vale in particolare quando si tratta di stabilire che cosa esiste.

Abbiamo già detto nel precedente paragrafo che per Quine domandarsi quali oggetti esistono si riduce a domandarsi quali asserti della forma ‘ $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ’ sono inclusi fra le conseguenze della riformulazione ontologicamente minimale  $\tau_0^{[P1]}$  di una qualche teoria vera  $\tau$ . E posto che le regole deduttive sono fissate e che  $\tau_0^{[P1]}$  è una teoria del primo ordine (cosa che garantisce la coestensività di conseguenze sintattiche e semantiche: cf. §IV.1), questo si riduce ancora a chiedersi quali sono le teorie vere e quali sono le loro riformulazioni ontologicamente minimali. La risposta di Quine è che solo l’indagine scientifica, ovvero l’indagine empirica condotta attraverso una appropriata metodologia scientifica, consente di stabilire se una teoria è vera. Ne segue che le teorie rilevanti non sono per Quine tanto le teorie scientifiche vere, ma tutte le teorie vere in generale. Si capisce così in che senso Quine sostenga che il suo criterio di impegno ontologico fornisce “ragioni essenzialmente scientifiche” per rispondere a problemi ontologici (Quine, 1969c, p. 120)<sup>24</sup>.

Questa posizione non conduce a ritenere che: *i*) una teoria è vera se e solo se è scientifica, o che: *ii*) siamo giustificati a ritenerla vera se e solo se essa è scientifica o siamo giustificati a ritenerla tale. Da una parte, è ovvio che sostenere che se una teoria è scientifica allora è vera imporrebbe di considerare come non scientifiche teorie, come quella della combustione dei materiali formulata nel XVII secolo, che sappiamo essere false. Inoltre, sostenere che se una teoria è vera allora è una teoria scientifica renderebbe AI un argomento implausibile o addirittura insensato. Per rigettare (*i*) e (*ii*), si deve ammettere che ciò che rende scientifica una teoria è indipendente dal suo valore di verità e/o dalla nostra disponibilità di una giustificazione per essa (può per esempio essere la sua forma).

Il naturalismo di Quine stabilisce che il solo modo per giudicare della verità di una teoria scientifica è di sottoporla al vaglio dell’indagine scientifica, e il solo modo di giudicare della verità di una teoria non scientifica, in particolare matematica, è di sottoporre al vaglio di una tale indagine una teoria scientifica per cui essa è indispensabile. Si tratta di una posizione che è compatibile con la possibilità di avere teorie non scientifiche vere, ma che richiede che il giudizio sulla verità di qualsiasi teoria dipenda dal giudizio sulla verità di teorie scientifiche, le sole a poter essere ammesse direttamente al vaglio di una simile indagine.

Bastano queste considerazioni per comprendere che il naturalismo di Quine assegna un

---

<sup>24</sup>Questa posizione soffre di un rischio di circolarità. È parte fondante della metodologia scientifica che i nostri giudizi sulla verità, o almeno sulla conferma, di una teoria si basino sull’esito di esperimenti. Visto però che l’esito che assegniamo a qualunque esperimento si basa su giudizi di fatto, questa posizione sembra richiedere che possa render conto della verità degli asserti che esprimono tali giudizi senza richiamarsi a condizioni di natura esistenziale. Il modo in cui Quine propone di evitare questa difficoltà dipende dal ruolo particolare che egli assegna agli asserti osservativi. Qui ci limitiamo a fare notare il problema (sul quale si può vedere Quine 1960, §2.10; 1969b; 1981e, cap. 2; 1993; Quine, Ullian 1975, cap I).

ruolo cruciale a AI, o comunque a argomenti che ne condividono la struttura (senza essere necessariamente ristretti a teorie matematiche): AI rappresenta così la forma generale degli unici argomenti di cui è possibile disporre per stabilire se una teoria non scientifica è vera. Ne segue che per Quine questi sono anche gli unici argomenti di cui è possibile disporre per stabilire se certi oggetti esistono, siano essi concreti o astratti. Domande come ‘esistono oggetti fisici o solo dati sensoriali soggettivi?’, ‘esistono oggetti non osservabili (quali stringhe o gravitoni) oltre a quelli osservabili?’, ‘esistono oggetti astratti (quali numeri o insiemi) oltre a quelli concreti?’ sono per Quine domande dello stesso tipo. Ogni oggetto, sia esso concreto o astratto, è per Quine un *posit*: un’entità postulata dalle nostre teorie (Quine 1995, pp. 62-3; 1955; 1981a; 1960 cap. 7). Un *posit* può esistere o meno: esiste se e solo se queste teorie sono vere, e solo l’indagine scientifica può giustificare i nostri giudizi circa la verità di tali teorie.

Anche se per Quine vi sono strettissimi legami tra il naturalismo e la concezione dell’esistenza che abbiamo presentato, il primo può, di per sé, essere sostenuto da chi abbia una concezione dell’esistenza diversa da quelle di Quine. Per ragioni di chiarezza, conviene quindi distinguere un aspetto del naturalismo che riguardi solo la verità:

[*Naturalismo semantico*]

Le sole teorie non scientifiche che siamo giustificati a ritenere vere sono quelle indispensabili per le teorie scientifiche che riteniamo vere; e siamo giustificati a ritenere queste ultime vere solo in base all’indagine scientifica.

Da [*Naturalismo semantico*] segue che gli unici argomenti di cui è possibile disporre per giustificare i nostri giudizi sulla verità di teorie non scientifiche, in matematiche, sono quelli che condividono la struttura di AI per il realismo semantico. Questo non obbliga a assumere questa tesi come premessa (implicita o esplicita) di qualunque versione di AI. Questo è un problema aperto, che tuttavia viene comunemente discusso in relazione a AI per il platonismo richiamandosi a una versione del naturalismo che concerne direttamente l’esistenza di oggetti. Possiamo formulare questa versione di naturalismo, in modo tale che essa resti vicina alle idee di Quine ma che risulti tuttavia indipendente dalla sua particolare concezione dell’esistenza, nel modo seguente:

[*Naturalismo ontologico*]

Siamo giustificati a ritenere che esistano solo gli oggetti inclusi nell’impegno ontologico delle teorie che siamo giustificati a ritenere vere in base a [*Naturalismo semantico*].

Questa versione del naturalismo ontologico non è quella più forte fra quelle possibili. Un’altra versione è espressa da quello che Colyvan (2001, cap. 3) chiama ‘principio eleatico’, e suggerita anche da Weir (2005). Secondo questa concezione, esistono solo gli oggetti che hanno efficacia causale. L’idea è che le scienze empiriche si occupano della realtà fisica, e che quindi ammettere che solo l’indagine scientifica può giustificare i nostri giudizi di esistenza equivale a ammettere che i soli oggetti che potrebbero esistere sono quelli che possono entrare in relazione causale con la realtà fisica. Questa conclusione non

segue di per sé da [*Naturalismo ontologico*], a meno che la nozione di (in)dispensabilità che occorre in [*Naturalismo semantico*] venga specificata (attraverso una specificazione dello schema [(*In*)dispensabilità]) in maniera tale che teorie che trattano di oggetti privi di efficacia causale non possano risultare indispensabili per alcuna teoria scientifica. Ma, come nota lo stesso Colyvan, se il naturalismo fosse inteso in questo modo non vi sarebbe alcuna speranza che AI (formulato con il naturalismo) possa risultare corretto, a meno che non si ammettesse anche che gli oggetti matematici possano avere efficacia causale, cosa che è comunemente negata. Conviene quindi mantenersi su versioni più deboli del naturalismo ontologico.

Poiché riguarda la giustificazione dei nostri giudizi di verità e esistenza, il naturalismo può al più intervenire in versioni epistemiche di AI. E se restiamo a AI per il platonismo, la stessa possibilità di formulare l'argomento nelle versioni [3.a] o [7] sembra già un'evidenza sufficiente per concludere che esso possa evitare di richiamarsi a qualche versione del naturalismo. Entrambi quegli argomenti non ricorrono al naturalismo: l'argomento [3.a] è una versione non epistemica di AI, mentre l'argomento [7] (che è equivalente alle seconda delle due condizioni che abbiamo ottenuto alla fine del precedente §4.2), pur essendo epistemico, non sembra farne comunque ricorso.

Il caso dell'argomento [6] è più problematico. Siano gli  $O_{[v]}$  gli oggetti di  $v$ . [*Naturalismo ontologico*] asserisce che siamo giustificati a ritenere che gli  $O_{[v]}$  esistono solo se essi:  $\alpha$ ) o sono inclusi nell'impegno ontologico di una qualche teoria non scientifica  $u$  indispensabile per una qualche teoria scientifica  $s$  che siamo giustificati a ritenere vera in base all'indagine scientifica;  $\beta$ ) o sono inclusi nell'impegno ontologico di  $s$ . Ammettiamo allora gli schemi [(*In*)dispensabilità] e [*Criterio di impegno ontologico generalizzato*] e specificiamoli come suggerito nel §4.2, in modo che una teoria  $\tau$  è indispensabile per  $s$  se e solo se l'impegno ontologico di  $s$  include gli  $O_{[\tau]}$ . Richiedere che la condizione ( $\alpha$ ) sia soddisfatta è allora equivalente a richiedere che gli  $O_{[v]}$  siano inclusi nell'impegno ontologico di una qualche teoria non scientifica  $u$  tale che gli  $O_{[v]}$  siano inclusi nell'impegno ontologico di  $s$ . Ma gli  $O_{[v]}$  e gli  $O_{[u]}$  sono per definizione gli oggetti che compongono gli impegni ontologici di  $v$  e  $u$ , rispettivamente. Quindi richiedere che la condizione sia soddisfatta equivale a richiedere che lo sia la condizione ( $\beta$ ). D'altra parte — se [(*In*)dispensabilità] e [*Criterio di impegno ontologico generalizzato*] sono specificati come detto — richiedere che quest'ultima condizione sia soddisfatta equivale a sua volta a richiedere che  $v$  sia indispensabile per  $s$ . Quindi [*Naturalismo ontologico*] asserisce che siamo giustificati a ritenere che gli  $O_{[v]}$  esistono solo se  $v$  è indispensabile per una qualche teoria scientifica  $s$  che siamo giustificati a ritenere vera in base all'indagine scientifica. Ne segue che — se ammettiamo che le “nostre migliori teorie scientifiche” sono quelle che siamo giustificati a ritenere vere — [*Naturalismo ontologico*] è equivalente all'implicazione che nella premessa (6.i) è espressa da 'sole'.

A queste condizioni, [*Naturalismo ontologico*] non si limita quindi a motivare (6.i), come suggerisce Colyvan, ma ne costituisce una parte propria. Se ammettiamo che il

naturalismo sia correttamente espresso da [*Naturalismo ontologico*] dobbiamo concludere che esso interviene in [6] come premessa.

Resta tuttavia che l'implicazione che in (6.i) è espressa da 'sole' non è affatto richiesta affinché, congiuntamente a (6.ii), segua la conclusione (6.iii). La sua presenza sarebbe necessaria se [6] fosse così modificato:

[*AI Quine-Puntam secondo Colyvan, modificato*]

- i) Siamo giustificati a ritenere che esistano tutti gli oggetti indispensabili per le teorie scientifiche che siamo giustificati a ritenere vere.
- ii) Siamo giustificati a ritenere che esistono solo gli oggetti indispensabili per le teorie scientifiche che siamo giustificati a ritenere vere.
- iii) Certi oggetti matematici sono indispensabili per le teorie scientifiche che siamo giustificati a ritenere vere.

[6\*] -----

- iv) Siamo giustificati a ritenere che tali oggetti matematici esistono, ma non lo siamo a ritenere che ne esistono altri.

Se ammettiamo [6\*] come una versione di AI epistemico per il platonismo, allora il naturalismo — in quanto espresso da [*Naturalismo ontologico*] — vi interviene come premessa. È facile poi capire come modificare [6\*] per ottenere un corrispondente argomento epistemico per il realismo semantico in cui interviene una versione puramente semantica del naturalismo:

[*AI Quine-Puntam secondo Colyvan, modificato e limitato al realismo semantico*]

- i) Siamo giustificati a ritenere vere tutte le teorie indispensabili per le teorie scientifiche che siamo giustificati a ritenere vere.
- ii) Siamo giustificati a ritenere vere solo le teorie indispensabili per le teorie scientifiche che siamo giustificati a ritenere vere.
- iii) Certe teorie matematiche sono indispensabili per le teorie scientifiche che siamo giustificati a ritenere vere.

[6\*\*] -----

- iv) Siamo giustificati a ritenere vere tali teorie matematiche, ma non lo siamo a ritenerne vere altre.

Le conclusioni di questi due argomenti non forniscono solo condizioni sufficienti per la giustificazione nell'esistenza di oggetti matematici o nella verità di teorie matematiche, ma anche condizioni necessarie: data una teoria matematica  $M$ , siamo giustificati a ritenere che gli  $O_{[M]}$  esistono e/o che  $M$  è vera solo se  $M$  è indispensabile per una qualche teoria scientifica  $s$  che siamo giustificati a ritenere vera. Questo è perfettamente in linea con lo spirito del naturalismo di Quine.

Molti, nel dibattito attuale, ritengono che si debba intendere AI in questo modo. Per esempio, Shapiro (2005, p. 13-15) vede alla base di AI l'idea che "la matematica è



«confermata» nella misura in cui [*to the extent that*] la scienza lo è”, e aggiunge che tale argomento costituisce un “anatema” per coloro che ritengono che la matematica è “assolutamente necessaria e/o analitica e/o conoscibile *a priori*”.

Ma è dubbio che AI, anche nelle sue versioni epistemiche, debba necessariamente essere formulato in modo tale da fornire condizioni necessarie per la giustificazione nella verità di teorie matematiche o nell’esistenza di oggetti matematici. Gli argomenti [3b], [4b] e [7] costituiscono un’evidenza che AI epistemico può essere formulato in modo da non dare tali condizioni (il caso di [8] più controverso e non lo consideriamo qui). Vi sono inoltre almeno due ragioni per pensare che queste condizioni siano di per sé implausibili.

La prima è che sostenere che la giustificazione nella verità di teorie matematiche o nell’esistenza dei loro oggetti debba, e non solo possa, derivare dalla giustificazione della verità di teorie scientifiche conduce a ammettere che la prima di tali giustificazioni non possa che dipendere, come la seconda, da ragioni contingenti (sembra infatti naturale concedere che potremmo avere avuto teorie scientifiche molto diverse da quelle che abbiamo, oppure potremmo non averne avute affatto). Alcuni hanno anche ritenuto che sostenere questo conduca perfino a ammettere che la verità delle teorie matematiche, e l’esistenza dei loro oggetti, siano esse stesse contingenti. Vi è chi ha accettato questa conseguenza<sup>25</sup>. Il dibattito è particolarmente complesso perché, come si dice in inglese, *one’s modus ponens is another’s modus tollens*: come [6\*] e [6\*\*] sono un anatema per chi pensa che la verità della matematica sia necessaria, la convinzione che sia così è un anatema per chi pensa che quegli argomenti siano corretti.

La seconda ragione è che se fossimo giustificati a ritenere che una teoria matematica è vera e che i suoi oggetti esistono solo a condizione che essa sia indispensabile per una qualche teoria scientifica che siamo giustificati a ritenere vera, non potremmo essere giustificati a ritenere vere quelle teorie, o porzioni di teorie, che non trovano applicazione nelle scienze, né a ritenere che esistano i loro oggetti. Quine ha accettato questa conseguenza, arrivando a sostenere (1986, p. 400) che le teorie matematiche non applicate siano una semplice “ricreazione matematica”, e che i loro oggetti siano “privi di diritti ontologici” (Quine, 1995, pp. 55-56; 1990, pp. 94-95, ha parzialmente modificato la sua posizione, senza però alterarne il punto essenziale). Torneremo su questo punto controverso §VII.3.1.

## 6. Olismo della conferma

L’olismo della conferma è una tesi a proposito del modo in cui l’evidenza empirica conferma un’ipotesi scientifica all’interno di una teoria, ovvero, intuitivamente, consolida la nostra fiducia nella correttezza di tale ipotesi. Quine (1951a, p. 59) la riassume in un noto slogan : “le nostre asserzioni sul mondo esterno [affrontano] il tribunale dell’esperienza sensibile non individualmente, ma soltanto come un corpo unico”.

---

<sup>25</sup>Cf. Colyvan, (2000), (2001), pp. 134-140. Per ragioni in parte connesse, tale posizione è attribuita a Field in Hale (1987, cap. 5), Wright (1988b), Hale e Wright (1992); Field (1992) la difende, ma ulteriori critiche sono in Hale e Wright (1994).

È necessario distinguere due diverse dottrine che questa affermazione può suggerire: l'olismo del significato e l'olismo della conferma. La prima asserisce che non si possono assegnare significati a singole parole prese isolatamente o anche nel contesto di un asserto o di un corpo di asserti particolare, poiché occorre invece considerare l'intero linguaggio a cui esse appartengono; la seconda asserisce che l'evidenza empirica non conferma né infirma singole ipotesi in isolamento, ma solo le teorie complesse in cui intervengono.

In entrambi i casi, le riflessioni di Quine muovono da una critica serrata a alcuni "dogmi dell'empirismo" logico. Quine (1951a) critica: l'idea che qualunque asserto possa essere ridotto a asserti che vertono solo su evidenze empiriche (questa forma di riduzionismo è l'altro "dogma" dell'empirismo che Quine attacca); l'idea che il significato di un asserto possa essere individuato singolarmente, indipendentemente dai rapporti che esso intrattiene con gli altri enunciati del linguaggio cui appartiene; l'idea che si possa distinguere, nel significato di un asserto, gli apporti dell'esperienza da quelli delle convenzioni linguistiche, e quindi distinguere tra verità analitiche e verità sintetiche. L'immagine del linguaggio che emerge da queste critiche è quella di una rete, o meglio di una ragnatela, in cui ogni asserto deve il suo significato agli innumerevoli legami che intrattiene con altri asserti. Non è semplice precisare in che rapporto stiano fra loro olismo del significato e della conferma. La prima è una tesi molto controversa. Meno lo è la seconda, suggerita fra l'altro in origine da Duhem (1906, p. 225) indipendentemente dalle idee di Quine sul significato. Ci limiteremo qui a discutere quest'ultima, più rilevante per AI.

Diamone dapprima un'illustrazione sommaria richiamandoci a un esempio dello stesso Quine (1990, p. 9-10; per approfondimenti, cf. Fodor, Lepore, 1991, cap. 2; Resnik, 1997, cap. 7; 2005; Boniolo, Vidali, De Anna, 2003, §5.8; Pavan, 2008).

Supponiamo che uno studioso di mineralogia abbia scoperto un minerale sconosciuto, chiamandolo 'litolite', e distinguendolo da altri solo sulla base di macro-proprietà osservative (forma caratteristica, colore, etc.). Il mineralogista fa alcune ipotesi sulla struttura chimica del minerale. Da queste segue che un frammento di litolite dovrebbe emettere acido solfidrico se scaldato a 180°C. Il mineralogista cercherà dunque di creare le condizioni sperimentali per valutare se questa circostanza si verifica. Prenderà campioni di litolite scaldandoli a 180°C. Secondo Quine, il mineralogista non testa tuttavia solo l'ipotesi relativa alla litolite, ma l'intera teoria chimica di cui dispone, assieme a altre conoscenze di sfondo. Supponiamo che tale teoria sia data dal corpo di asserti  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , che  $h$  sia l'ipotesi da testare e che  $\gamma$  sia l'asserto 'se un campione di litolite raggiunge i 180°C emette acido solfidrico'. Per Quine, l'esperimento del mineralogista testa di fatto l'implicazione seguente:

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge h) \Rightarrow \gamma$$

e non:

$$h \Rightarrow \gamma$$

La conferma funziona dunque per Quine secondo un modello ipotetico-deduttivo: una certa evidenza conferma un'ipotesi se (l'asserto che esprime l'aver luogo del) la prima segue

logicamente dal(l'asserto che esprime) la seconda. Si tratta di un'idea diffusa, che pone tuttavia molti e noti problemi, ma che Quine accetta (cf. §VII.4).

Può verificarsi che il mineralogista riscontri sempre un'emissione di acido solfidrico quando scalda i campioni di litolite fino a 180°C. Ma può darsi che, in almeno un'occasione, ciò non avvenga. Supponiamo di essere nel primo caso. Secondo Quine, ciò che è confermato è l'intera congiunzione ' $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge h$ '. Supponiamo ora di essere nel secondo caso.  $C$  è dunque falso. Ancora una volta, questo non infirma  $h$  di per sé, e tanto meno la falsifica. Infirma piuttosto l'intera congiunzione ' $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge h$ '. Il mineralogista può dire di aver infirmato solo  $h$  solo se ha ragioni indipendenti per ritenere veri  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ . Per l'olista questa è solo una scelta pragmatica, non una conseguenza logica dell'esito del test. Nulla, in linea di principio, ci impedisce di mantenere  $h$  e rigettare uno o più asserti tra  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ . È possibile però che gli asserti  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  siano stati accettati sulla base di evidenza raccolta nel tempo, o che abbiano implicazioni anche in altre teorie, e rigettarli può comportare un'ampia serie di aggiustamenti teorici. Per questo si tenderà a seguire quella che Quine (1990, pp. 14-15) chiama 'massima della mutilazione minima', tendendo a ritenere falsificati o infirmati quegli asserti la cui falsità comporta la quantità minore di modifiche interne alla teoria. In particolare, si tenderà a non rinunciare mai ai principi logici o ai teoremi delle teorie matematiche. Ma, al di là di ragioni pragmatiche, nulla impedisce di rigettare qualunque asserto della teoria, compresi questi ultimi.

Immaginiamo che qualcuno, in disaccordo con quanto detto, sostenga che la conferma si estende solo quella parte di una teoria scientifica che riguarda oggetti o fatti empirici, e non, per esempio, alle sue parti matematiche, logiche, o eventualmente metafisiche. I test del mineralogista confermerebbero o infirmerebbero allora non l'intera congiunzione ' $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge h$ ', ma solo quegli asserti di tale congiunzione che riguardano oggetti o fatti empirici. Un olista *à la* Quine ribatterebbe che è un'illusione che si possa sempre distinguere tra componenti empiriche e componenti non empiriche di una teoria scientifica, e che tale illusione deriva proprio dall'assunzione che le teorie non empiriche non possano venir infirmate o falsificate dall'esperienza: solo una petizione di principio potrebbe quindi giustificare una simile posizione.

Torniamo ora all'argomento [6]. Quando Colyvan sostiene che l'implicazione espressa da 'tutte' nella premessa (6.i) segue dell'olismo, si riferisce all'idea che parti empiriche e non empiriche di una teoria scientifica si comportino allo stesso modo rispetto alla conferma della teoria (Colyvan, 2001, pp. 13, 33-37). La nozione di conferma non interviene però esplicitamente nell'argomento [6], e si tratta di capire come possa intervenire implicitamente in [6] o in altre versioni epistemiche di AI. Sembra infatti chiaro che, in quanto nozione epistemica, la nozione di conferma (e di conseguenza l'olismo della conferma) non possa intervenire in versioni non epistemiche di AI.

È naturale ammettere che la conferma sia un aspetto della nostra giustificazione di teorie scientifiche. Quando asseriamo — come nelle premesse (3b.i) e (4b.i) —, che siamo giustificati a ritenere vere certe teorie scientifiche, stiamo anche (ma verosimilmente non

solo) dicendo che quelle teorie sono confermate. Nella terminologia di Colyvan, ciò corrisponde a dire che le “nostre migliori teorie scientifiche” sono tali (almeno in parte) perché sono confermate. Se restiamo tuttavia al semplice fatto che siamo giustificati a ritenere vere certe teorie scientifiche, il modo in cui si ottiene la conferma non è influente. Lo diventa invece se si ammette che esso comporti la trasmissione della giustificazione da queste teorie scientifiche verso le teorie matematiche che sono per esse indispensabili, o con il passaggio dalla conferma delle prime alla giustificazione dei nostri giudizi sull’esistenza degli oggetti delle seconde. Chi vuole sostenere che l’olismo della conferma interviene in (una qualche versione di) AI epistemico deve allora sostenere che il carattere olistico della conferma delle teorie scientifiche comporti che la giustificazione prodotta dalla conferma si trasmetta alle teorie matematiche che sono per esse indispensabili, o produca una giustificazione per credere che esistano i loro oggetti.

Ora, la funzione di *[(In)dispensabilità]* in AI è quella di separare, in una data teoria scientifica, componenti che sono presenti nella teoria solo accidentalmente in ragione del modo particolare in cui essa è formulata, da altri che sono necessari e tali che nessuna riformulazione adeguata può eliminarli. Se l’olismo della conferma riguardasse tutte le componenti di qualunque teoria, comunque sia formulata (quindi incluse le componenti indispensabili), sarebbe dunque incompatibile con AI. Si può però sostenere che la separazione tra componenti indispensabili e componenti dispensabili di una teoria scientifica coincida proprio con la separazione fra componenti della teoria che sono congiuntamente confermati o infirmati da un test, e altri che, in quanto accidentali, non sono toccati dall’esito del test, se non marginalmente. Se si assume questo e si ammette che ciò che vale per la conferma di una teoria scientifica vale anche per la sua giustificazione, se ne conclude che la giustificazione di una teoria scientifica si trasmette direttamente alla giustificazione di tutte le teorie per essa indispensabili. Limitato alle componenti indispensabili di una teoria scientifica, l’olismo della conferma può dunque servire a motivare le premesse (3*b.iii*) e (4*b.iii*) delle nostre versioni di AI epistemico. Non solo, a seconda di come si specifichi *[(In)dispensabilità]* e dei legami che si ammettono fra giustificazione e conferma di una teoria scientifica, esso potrebbe anche mostrarsi equivalente a quelle premesse. Resta aperto il problema di stabilire se l’olismo della conferma ammetta o meno una tale interpretazione restrittiva. Se la risposta è negativa, allora esso è chiaramente incompatibile con AI epistemico.

Una seconda riflessione riguarda il passaggio dalla giustificazione della verità delle teorie alla giustificazione dell’esistenza dei loro oggetti. Nel §4.2 abbiamo visto che da *[(In)dispensabilità]* e [*Criterio dell’impegno ontologico generalizzato*], opportunamente specificati, è possibile derivare una condizione equivalente tanto all’implicazione espressa da ‘tutte’ nella premessa (6*i*), quanto all’intero argomento [7]. Questi ultimi possono dunque essere motivati senza richiamarsi all’olismo. Si può tuttavia pensare che l’olismo abbia un qualche ruolo nella giustificazione del criterio di impegno ontologico generalizzato, e nelle specificazioni di *[(In)dispensabilità]* e [*Criterio dell’impegno*

*ontologica generalizzato*] che permettono di concludere che una teoria  $\tau$  è indispensabile per una teoria scientifica  $s$  se e solo se l'impegno ontologico di  $s$  include gli  $O_{[\tau]}$ . Nel §4.1 abbiamo sottolineato come la giustificazione del criterio di impegno ontologico di Quine dipenda dall'idea che vi sia un solo senso in cui si possa dire di un oggetto, concreto o astratto che sia, che esiste. Ma ci si potrebbe voler richiamare in qualche modo all'olismo per giustificare che l'unico senso in cui si può dire che un oggetto esiste possa estendersi effettivamente a ogni tipo di oggetto.

Si noti infine che l'olismo della conferma potrebbe avere un ruolo anche nel motivare le premesse come (3*b.iii*) nell'argomento epistemico [3*b*] per il platonismo (o di premesse simili in argomenti simili), che portano dalla giustificazione della verità di certe teorie scientifiche alla giustificazione della verità delle teorie matematiche che sono per esse indispensabili.

## VII

### L'ARGOMENTO DI INDISPENSABILITÀ: IL DIBATTITO

Il precedente capitolo dovrebbe aver chiarito che è possibile accettare o rigettare AI in base a motivazioni molto diverse tra loro, a seconda della formulazione che si considera e delle nozioni che, più o meno esplicitamente, si ritiene che essa coinvolga. Dedichiamo questo capitolo alle numerose obiezioni rivolte contro AI e alle possibili risposte dei suoi sostenitori.

#### 1. Contro l'indispensabilità

Cominciamo considerando la premessa che asserisce l'indispensabilità della matematica per la scienza, ovvero che vi sono teorie matematiche indispensabili per certe teorie scientifiche vere o che siamo giustificati a ritenere vere. Chiamiamola per brevità 'premesse di indispensabilità'.

Il principale attacco contro di essa è stato mosso da Field, nel contesto della posizione già discussa nel §IV.1. Qui insisteremo sulla sua critica a AI. Field riconosce AI come un argomento valido, anzi, come il solo argomento non circolare a favore del platonismo di cui si dispone (Field 1980, p. 4). Lo considera tuttavia scorretto, proprio perché ritiene falsa la premessa di indispensabilità.

Per Field la "buona" matematica, ovvero quella ammissibile, è conservativa rispetto a ogni corpo consistente di asserti nominalisti. Nel §IV.1 abbiamo spiegato che cosa questo significhi, come egli argomenti a favore di questa tesi, e come, basandosi su di essa, renda conto dell'utilità della matematica nella scienza senza richiedere la sua verità. Vediamo qui più da vicino quali sono le relazioni fra questa tesi e la premessa di indispensabilità.

Sia  $s$  una teoria scientifica consistente assiomatizzata e deduttivamente chiusa del primo ordine (per la ragione di questa limitazione si veda la critica di Shapiro a Field discussa nel §IV.1). Scindiamo l'insieme  $A$  degli assiomi di  $s$  in due insiemi complementari  $A_N$  e  $A_M$ , il primo composto dagli assiomi nominalisti, e il secondo da quelli che impiegano il vocabolario di una teoria matematica ammissibile  $M$ . Dalla conservatività della buona matematica rispetto a ogni corpo consistente di asserti nominalisti segue che un asserto nominalista  $\varphi$  è un teorema di  $s$  se e solo se è deducibile da  $A_N$ . La sotto-teoria  $s_N$  i cui assiomi sono quelli inclusi in  $A_N$  include quindi tutti i teoremi nominalisti di  $s$  e solo questi. Ne segue che se la relazione di o-equivalenza è definita in modo tale che due teorie scientifiche che hanno gli stessi teoremi nominalisti sono o-equivalenti (ovvero se identifichiamo i teoremi osservativi di  $s$  con i suoi teoremi nominalisti), allora  $s$  e  $s_N$  sono o-equivalenti. Non solo, gli assiomi di  $s_N$  sono esattamente gli assiomi nominalisti di  $s$  e quindi sembra naturale ammettere che  $s_N$  sia almeno ugualmente virtuosa di  $s$ , secondo

qualsiasi criterio di virtuosità appropriato. Ne segue che la sotto-teoria  $s_M$  di  $s$ , i cui assiomi sono quelli inclusi in  $A_M$ , e, *a fortiori*, la stessa teoria  $M$ , sono dispensabili per  $s$  in base a ogni specificazione di [(In)dispensabilità] in cui il posto della  $\varepsilon$ -equivalenza è preso dalla  $\varepsilon$ -equivalenza.

Si potrebbe pensare che questo argomento mostri che dalla conservatività della matematica ammissibile rispetto a ogni corpo consistente di asserti nominalisti segua che essa è senz'altro dispensabile per la scienza. Al contrario, per Field la matematica ammissibile potrebbe essere indispensabile per la scienza pur essendo conservativa rispetto a ogni corpo consistente di asserti nominalisti, come mostrano le citazioni seguenti (1982, p. 50; 1989, p. 44):

[...] ci sono due modi prima facie possibili perché la matematica possa essere utile, a dispetto della sua conservatività: potrebbe essere utile per facilitare inferenze (fra premesse nominaliste e conclusioni nominaliste) e potrebbe anche essere utile perché è teoricamente indispensabile (ovvero richiesta nelle premesse di qualche teoria importante).

La conservatività della matematica non mostra in se stessa che non ci possano essere ragioni per credere nella matematica: come ho ripetutamente sottolineato dal tempo del mio libro *Science Without Numbers*, per combattere l'argomento in favore del platonismo si deve anche mostrare che la matematica è dispensabile.

La ragione per cui, secondo Field, la conservatività della matematica ammissibile rispetto a ogni corpo consistente di asserti nominalisti non è sufficiente per assicurarne la dispensabilità per la scienza non è certamente che l'argomento precedente non si applica a certi casi rilevanti visto che: *i*) esso riguarda solo teorie scientifiche del primo ordine; *ii*) assume che tali teorie siano assiomatizzate e deduttivamente chiuse; *iii*) richiede che l'insieme degli assiomi di  $s$  possa essere scisso in due insiemi di asserti complementari come  $A_H$  e  $A_M$ . Infatti: *i*\*) nel §IV.1 abbiamo indicato come Field pensa di poter rispondere all'obiezione di Shapiro che motiva la restrizione a teorie del primo ordine; *ii*\*) tutte le teorie possono essere intese come assiomatizzate<sup>1</sup>, le teorie scientifiche effettive sono senz'altro deduttivamente chiuse, e quest'ultima condizione può d'altra parte essere facilmente omessa modificando opportunamente l'argomento precedente; *iii*\*) Field non sembra dubitare affatto della possibilità di separare entro il vocabolario di una teoria scientifica un sotto-vocabolario nominalista da un sotto-vocabolario matematico. La vera ragione sembra piuttosto la seguente (1989b, p. 243; cf. anche 1982, 50 e 55-56):

[...] la matematica [...] sembra essere teoricamente indispensabile, cioè, sembra che sia richiesta tra le premesse di teorie importanti, incluse teorie empiriche. (La conservatività della matematica non esclude che questo di verifici: la conservatività della matematica dice qualcosa su come si può usare la matematica quando abbiamo una teoria nominalista, ma la questione qui è se siano disponibili teorie nominalistiche sufficientemente potenti).

Field si riferisce ovviamente a teorie scientifiche. Si tratta ora di capire come si debba intendere la possibilità che non siano disponibili teorie scientifiche “nominalistiche sufficientemente potenti”.

Innanzitutto osserviamo che l'argomento di Field per concludere che la matematica ammissibile è conservativa rispetto a ogni corpo consistente di asserti nominalisti può

---

<sup>1</sup>Cf. n.13.

essere generalizzato facendo prendere a corpi consistenti di asserti non matematici in generale il ruolo che in esso svolgono i corpi consistenti di asserti nominalistici. Ne seguirebbe che una teoria matematica ammissibile  $M$  (sia essa pura o impura, quale che sia la natura della sua impurità, ovvero quale che sia il vocabolario non matematico aggiunto a quello matematico) è conservativa rispetto a ogni corpo consistente di asserti non matematici. Quindi se l'argomento di Field è corretto, lo è anche l'argomento analogo ma più generale secondo cui se  $M$  è una qualsiasi teoria matematica ammissibile (pura o impura),  $H$  un qualsiasi corpo consistente di asserti non matematici, e  $\alpha$  è una conseguenza non matematica di  $M+H$ , allora  $\alpha$  è una conseguenza di  $H^2$ .

Se  $s$  è una teoria scientifica consistente assiomatizzata e deduttivamente chiusa del primo ordine, l'insieme dei cui assiomi si scinde in due insiemi complementari  $A_H$  e  $A_M$ , il primo composto dagli assiomi non matematici, e il secondo da quelli che impiegano il vocabolario di  $M$ , allora possiamo ragionare come sopra e concludere che la sotto-teoria  $s_M$  di  $s$  i cui assiomi sono gli asserti di  $A_M$ , e, *a fortiori*, la stessa teoria  $M$ , sono dispensabili per  $s$  in base a ogni specificazione di [(In)dispensabilità] in cui il posto della  $\epsilon$ -equivalenza è preso da una relazione di equivalenza tale per cui due teorie scientifiche sono fra loro equivalenti se e solo se contengono gli stessi asserti non matematici.

Se Field considera la possibilità che non siano disponibili teorie scientifiche nominalistiche sufficientemente potenti, non è quindi perché consideri la possibilità che tutte le teorie scientifiche di cui disponiamo, a fianco di asserti nominalisti, oltre a asserti matematici, anche altri asserti non matematici, che si richiamano per esempio a "entità teoriche" non nominaliste (ovvero non caratterizzabili tramite un vocabolario nominalista), o che impiegano un vocabolario espressamente metafisico. Se anche così fosse, la conservatività della matematica ammissibile rispetto a ogni corpo consistente di asserti non matematici garantirebbe infatti che ogni teoria matematica ammissibile sarebbe dispensabile per tali teorie scientifiche, secondo una specificazione di [(In)dispensabilità] in cui il posto della  $\epsilon$ -equivalenza è preso da una relazione di equivalenza come quella richiamata sopra.

Il suo punto è quindi un altro, e dipende da una circostanza già richiamata nel §IV.1 e illustrata nel §VI.3.2.2. Fra i teoremi empiricamente rilevanti di una teoria scientifica potrebbero esservene alcuni che non sono asserti nominalisti: il contenuto empirico di una teoria scientifica non sarebbe allora interamente fornito dai suoi asserti osservativi, e la relazione di o-equivalenza non sarebbe appropriata per specificare [(In)dispensabilità].

Se però fosse possibile riformulare le nostre (migliori) teorie scientifiche in modo che il loro contenuto empirico sia interamente fornito da asserti nominalisti, si potrebbe sostenere che, in quanto conservativa rispetto a ogni corpo consistente di asserti nominalisti, la matematica ammissibile è anche dispensabile per tali teorie, in base a una qualche specificazione di [(In)dispensabilità] in cui il posto della  $\epsilon$ -equivalenza è preso dalla o-equivalenza (definita in modo tale che due teorie scientifiche che hanno gli stessi teoremi

<sup>2</sup>Naturalmente occorre richiedere che anche fra gli asserti di  $M$  e  $H$  sia rispettata la condizione di separabilità richiesta nel §IV.1 per gli asserti matematici e nominalisti.



nominalisti sono o-equivalenti)<sup>3</sup>. Se le nostre (migliori) teorie scientifiche coincidono con quelle che siamo giustificati a ritenere vere, ciò sarebbe sufficiente a negare la premessa di indispensabilità di ogni versione di AI epistemico e per rendere perlomeno ingiustificata questa stessa premessa per ogni versione di AI non epistemico: come giustificare infatti che la matematica sia indispensabile per delle teorie scientifiche vere se non lo è per le teorie scientifiche che siamo giustificati a ritenere vere?

Dopo aver argomentato che la matematica ammissibile è conservativa rispetto a ogni corpo consistente di asserti nominalisti, per Field è quindi sufficiente mostrare che le nostre (migliori) teorie scientifiche possono essere appropriatamente riformulate in modo che il loro contenuto empirico sia interamente fornito da asserti nominalisti per rigettare la premessa di indispensabilità in AI.

Nel §IV.1 abbiamo indicato a grandi linee come Field procede per mostrare che sia così, attraverso l'esempio, ritenuto paradigmatico, della teoria della gravitazione newtoniana (in una sua versione moderna), che egli mostra come riformulare in un vocabolario puramente nominalista.

È però importante notare qui che la riformazione che egli propone è, per così dire, una riformulazione globale: non prevede che ogni teorema della versione di partenza dalla teoria della gravitazione newtoniana in cui intervengano costanti matematiche sia rimpiazzato da un teorema della nuova versione che impieghi solo un vocabolario nominalista e che valga come parafrasi del primo, secondo un qualche modo di intendere la nozione di parafrasi (Field 1980, p. 1; 1989, pp. 6-7). Egli si discosta quindi da Quine in quanto non pensa che la riformulazione di una teoria scientifica debba ottenersi parafrasando i suoi teoremi uno per uno. Per garantire che la nuova teoria sia equivalente alla teoria originale in un senso appropriato, e quindi possa valere come una sua riformulazione, Field si avvale di teoremi di rappresentazione: teoremi che stabiliscono che certe proprietà strutturali del presunto sistema composto da oggetti matematici e concreti descritto dalla teoria nella sua versione originale sono anche proprietà strutturali di un nuovo sistema composto solo da oggetti concreti che è descritto dalla nuova teoria. Possiamo dire che ciò Field intende mostrare tramite questi teoremi è che l'impegno ontologico della nuova teoria, costituito solo da oggetti concreti, forma un sistema strutturalmente equivalente (ovvero isomorfo) al sistema formato dall'impegno ontologico della teoria originale, costituito da oggetti concreti e da presunti oggetti matematici.

---

<sup>3</sup>Si noti che se così fosse, l'eventuale presenza in tali teorie di asserti né nominalisti né matematici (asserti formulati impiegando un vocabolario né nominalista né matematico, eventualmente insieme a un vocabolario nominalista o matematico) non impedirebbe di concludere che, in quanto conservativa rispetto a ogni corpo consistente di asserti nominalisti, la matematica ammissibile è dispensabile per queste teorie in base a ogni specificazione di  $\{(In)dispensabilità\}$  in base alla o-equivalenza. Sia infatti  $s$  una teoria scientifica consistente assiomatica e deduttivamente chiusa del primo ordine, l'insieme dei cui assiomi si scinde in tre insiemi complementari  $A_N$ ,  $A_M$  e  $A_{NM}$ , il primo composto dagli assiomi nominalisti, il secondo da quelli che impiegano il vocabolario di una teoria matematica ammissibile  $M$ , e il terzo da quelli che impiegano un qualche vocabolario né nominalista, né matematico. Dalla conservatività della matematica ammissibile rispetto a ogni corpo consistente di asserti non nominalisti segue che un asserto nominalista  $\varphi$  è un teorema di  $s$  se e solo se è deducibile da  $A_N + A_{NM}$ . Quindi la sotto-teoria  $S_{NM}$  i cui assiomi sono gli asserti di  $A_{NM}$  include tutti i teoremi nominalisti di  $s$  e nessun altro teorema nominalista. Essa è allora o-equivalente a  $s$  (posto che la o-equivalenza sia definita in modo tale che due teorie scientifiche che hanno gli stessi teoremi nominalisti sono o-equivalenti), e i suoi assiomi non matematici sono esattamente gli assiomi non matematici di  $s$ , ciò che fa sì che essa sia almeno ugualmente virtuosa.

Dal momento che lo scopo della riformulazione non è quello di mostrare la dispensabilità della matematica per la teoria newtoniana della gravitazione, ma piuttosto quello di catturare l'intero contenuto empirico di tale teoria tramite asserti nominalisti, non è affatto necessario che la sua nuova versione sia scevra da teoremi matematici. Quello che conta è che gli eventuali teoremi matematici che questa nuova versione presenta non contribuiscano a fornirne il contenuto empirico. E, in guisa di esempio, lo stesso Field mostra (1980, p. 60) che non tutte le proprietà che, nella versione originale della teoria, sono proprie della funzione temperatura (che è una funzione matematica definita su  $\mathbf{R}^4$  e con valori in  $\mathbf{R}$ : cf. §IV.1) sono espresse, nella riformulazione di tale teoria, attraverso asserti nominalisti. Solo le proprietà che hanno “una qualche rilevanza fisica” lo sono.

Sembra quindi che nel suo argomento contro AI Field, implicitamente, si richiami a due diverse relazioni di equivalenza fra teorie: la o-equivalenza, in base alla quale valutare la (in)dispensabilità della matematica per le teorie scientifiche adeguatamente riformulate; e un'altra relazione che lega la teoria della gravitazione newtoniana alla sua riformulazione, la quale è garantita dalla possibilità di provare dei teoremi di rappresentazione<sup>4</sup>. Questa seconda relazione di equivalenza è inoltre connessa con la spiegazione: la riformulazione deve infatti essere tale da poter spiegare ogni fenomeno empirico già spiegato dalla teoria newtoniana nella sua versione originale. Secondo Field, la spiegazione originale è “estrinseca”, in quanto utilizza un linguaggio matematico, mentre quella propria della sua riformulazione è “intrinseca” in quanto utilizza solo un linguaggio nominalista (e quindi, secondo Field, non fa appello a entità che non contribuiscono direttamente a costituire i fatti che la teoria newtoniana intende spiegare). Il suo scopo è proprio mostrare che per ogni spiegazione estrinseca è possibile ottenerne una intrinseca (1980, pp. 41-44; 1989, 14-20). E questo è esattamente ciò che la seconda relazione di equivalenza dovrebbe garantire<sup>5</sup>.

Dovrebbe quindi risultare chiaro che l'argomento di Field contro la premessa di indispensabilità si compone di due argomenti indipendenti. Il primo — che è inteso mostrare che la matematica ammissibile è conservativa rispetto a ogni corpo consistente di asserti nominalisti — è di natura generale: se esso è corretto, allora si applica a tutti i casi possibili e stabilisce ciò che intende stabilire in modo definitivo. Il secondo — che è inteso mostrare che le nostre (migliori) teorie scientifiche possono essere appropriatamente riformulate in modo che il loro contenuto empirico sia interamente fornito da asserti nominalisti — comprende invece un argomento particolare, relativo al solo caso della teoria della gravitazione newtoniana, e una ipotetica generalizzazione a ogni teoria scientifica rilevante per AI che sembra supportata soltanto dalla supposizione che la teoria newtoniana possa venir presa come un caso paradigmatico. Vi è quindi un ovvio modo per opporsi alla

---

<sup>4</sup>Pincock (2004) presenta una critica a AI per il platonismo che richiama da vicino l'impiego di Field dei teoremi di rappresentazione, anche se non si basa su una critica alla premessa di indispensabilità. Egli suggerisce quello che chiama “*mapping account*”, secondo cui l'applicabilità della matematica nella scienza è dovuta alla possibilità di correlare (mappare) fra loro modelli fisici e modelli matematici. Questo permetterebbe di sostenere che se anche la matematica è indispensabile, dalla sua indispensabilità non segue l'esistenza di oggetti matematici (per discussioni cf. Bueno e Colyvan, cs, e Batterman, cs).

<sup>5</sup>I teoremi di rappresentazione che devono essere provati per specificare la seconda delle relazioni di equivalenza menzionate dovranno necessariamente essere provati in una meta-teoria platonista. Abbiamo già toccato questo punto e i problemi che esso pone nel §IV.1.

critica di Field contro AI, pur concedendogli tanto che la matematica ammissibile è conservativa rispetto a ogni corpo consistente di asserti nominalisti, quanto che la teoria della gravitazione newtoniana può essere riformulata come egli suggerisce. È sufficiente presentare un esempio di una teoria scientifica, rilevante per qualche versione di AI, che contenga una parte matematica e che non possa essere riformulata in modo tale che il suo contenuto empirico sia interamente fornito da asserti nominalisti. Questo si può fare in due modi: sia considerando il caso di una teoria scientifica corrente, accettata dalla comunità scientifica; sia richiamandosi a una teoria scientifica elaborata *ad hoc*, ipotizzando che essa possa essere accettata.

La prima strategia è stata seguita da David Malament (1982), che ha considerato il caso della meccanica quantistica. Non potendo entrare nei dettagli di questo argomento, ci limitiamo a segnalarlo (Balaguer, 1996,a-b, tenta di rispondere alle obiezioni di Malament; per altre considerazioni connesse in generale a questa prima strategia, cf. Meyer, 2009).

La seconda strategia sembra non essere mai stata applicata in modo esplicito. Melia (2000) discute tuttavia il caso di una teoria che impiega un linguaggio nominalista mereologico del primo ordine, ma include anche la teoria degli insiemi ZF, la quale possiederebbe almeno una conseguenza che non segue dalla sua parte nominalista e che, pur non essendo a sua volta nominalista, è senza dubbio empiricamente rilevante, in quanto riguarda il “mondo concreto” (*ib.*, p. 458).

Sarebbe un errore screditare l'esempio di Melia (o altri simili) sulla base del suo carattere artificiale. Anche se la teoria nell'esempio non è una delle nostre “migliori” teorie scientifiche, l'esempio è infatti sufficiente a mostrare che vi è una teoria scientifica che potremmo essere giustificati a ritenere vera per la quale vale comunque la premessa di indispensabilità. Resta naturalmente che si potrebbe sostenere che la teoria in questione non è vera, o che non siamo giustificati a ritenerla tale. In questo caso l'esempio di Melia sarebbe più debole, e si limiterebbe a mostrare che è quantomeno possibile che la strategia di Field non sia generalizzabile a qualunque teoria che potremmo dire scientifica.

Vediamo l'esempio di Melia (*ib.*, pp. 459-461)<sup>6</sup>. La teoria in questione, chiamiamola ‘MerZF’, include due insiemi di assiomi. Il primo, chiamiamolo ‘ $A_N^{[Mer]}$ ’ include un’infinità di assiomi non logici. Due di essi introducono una costante predicativa binaria ‘*Par*’, che designa la relazione di essere parte di (considerando che ogni oggetto è parte di sé stesso), stabilendo che essa determina un ordine parziale sugli oggetti considerati nella teoria. In particolare, tali assiomi stabiliscono che tale relazione è transitiva (per ogni  $x, y$  e  $z$ , se  $Par(x,y)$  e  $Par(y,z)$ , allora  $Par(x,z)$ ) e antisimmetrica (per ogni  $x, y$ , se  $Par(x,y)$  e  $Par(y,x)$ , allora  $x = y$ ). Un altro assioma introduce la costante individuale ‘*u*’, che denota la somma mereologica di tutti gli oggetti, stabilendo che per ogni oggetto  $x$ ,  $Par(x,u)$ . Due altri assiomi introducono la costante predicativa unaria ‘*At*’ che designa la proprietà di essere un atomo, stabilendo che un atomo non ha parti (per ogni  $x$ ,  $At(x)$  se e solo ogni  $y$  tale che  $Par(x,y)$  è identico a  $x$ ), e che ogni oggetto ammette (almeno) un atomo come parte (per

---

<sup>6</sup>Modifichiamo leggermente la notazione di Melia per ragioni espositive.

ogni  $x$  vi è un  $y$ , tale che  $Par(y,x)$  e  $At(y)$ ). Vi sono poi infiniti assiomi del tipo seguente: uno stabilisce che vi sono un oggetto  $x$  e un oggetto  $y$ , distinti fra loro e tali che  $At(x)$  e  $At(y)$ ; un altro stabilisce che vi sono un oggetto  $x$ , un oggetto  $y$  e un oggetto  $z$  distinti fra loro e tali che  $At(x)$ ,  $At(y)$  e  $At(z)$ ; e così via. In tal modo l'esistenza di infiniti atomi è stabilita senza ricorrere a un vocabolario matematico. Infine  $A_N$  include uno schema di assiomi di comprensione che assicura l'esistenza e fissa le proprietà delle somme mereologiche distinte da  $\mathcal{U}$ . Intuitivamente, tale schema di assiomi stabilisce che se  $F$  è una proprietà monadica e vi sono degli  $F$ , allora vi è la regione<sup>7</sup>  $S_F$  che contiene tutti gli  $F$ , e che è tale che qualunque cosa abbia una parte in comune con  $S_F$  ha una parte in comune con un  $F$ .

Il secondo insieme di assiomi della nostra teoria chiamiamolo ' $A_M^{[Mer]}$ ', include tutti gli assiomi di ZF più infinite leggi-ponte che includono: *i*) tutti gli esempi dello schema di assiomi di comprensione incluso in  $A_N^{[Mer]}$  in cui  $F$  è una proprietà designata da costanti predicative del vocabolario di ZF; *ii*) un assioma che stabilisce che esiste l'insieme di tutti gli oggetti non matematici di MerZF (ovvero gli oggetti denotati da costanti individuali incluse nel solo vocabolario nominalista di MerZF, e quindi non incluse nel vocabolario di ZF); *iii*) un'infinità di assiomi che stabiliscono che vi sono infiniti atomi che non sono insiemi (i cosiddetti urelementi).

Il punto di Melia è il seguente. Si prova (*ib.*, p. 475-476) che gli assiomi di  $A_N^{[Mer]}$  ammettono un modello che include un'infinità numerabile di atomi, e in cui vi sono infinite regioni ognuna delle quali include un numero finito di atomi o è tale che il suo complemento include un numero finito di atomi. Quest'ultimo non è tuttavia un modello di MerZF, in quanto dagli assiomi di  $A_N^{[Mer]}+A_M^{[Mer]}$  segue che esistono regioni che includono infiniti atomi e sono tali che il loro complemento include infiniti atomi, regioni che Melia chiama 'infinite e co-infinite'. La prova è assai semplice. Siccome in ZF è possibile definire i numeri ordinali, e gli oggetti non matematici di MerZF formano un insieme, esiste una funzione che associa a ogni oggetto non matematico di MerZF uno e un solo numero cardinale finito. Quindi, in base allo schema di assiomi di comprensione esteso a tutto il linguaggio di MerZF, esiste una regione  $S_{PN}$  che contiene esattamente tutti gli oggetti non matematici di MerZF associati a un numero cardinale finito pari. E tale regione è ovviamente infinita e co-infinita.

Comunque sia definito, il predicato ' $PN$ ' non è certamente incluso nel vocabolario nominalista di MerZF. Pur seguendo da  $A_N^{[Mer]}+A_M^{[Mer]}$ , l'asserto che asserisce l'esistenza di  $S_{PN}$  nel linguaggio di MerZF non è quindi una conseguenza nominalista di questa teoria. Da tale asserto segue, per generalizzazione esistenziale, un altro asserto, diciamo ' $\psi_{IC}$ ', che asserisce, sempre nel linguaggio di MerZF, l'esistenza di una regione infinita e co-infinita non altrimenti specificata. Pare difficile negare che tale asserto fornisca parte del contenuto empirico di questa teoria, posto che esso asserisce l'esistenza di almeno una regione di

<sup>7</sup>Essendo concreta, una somma mereologica viene solitamente identificata con la regione dello spazio che essa occupa.

oggetti concreti non altrimenti caratterizzata se non dicendo di essa che è infinita e co-infinita. È però chiaro che, quale che sia il modo il cui lo si voglia formulare  $\psi_{ICI}$  non include solo costanti del vocabolario nominalista di MerZF, visto che tale vocabolario non include risorse sufficienti per definire un predicato che esprima la condizione che una certa regione sia infinita e co-infinita. Dobbiamo quindi concludere che  $\psi_{ICI}$  segue da  $A_N^{[Mer]}$  +  $A_M^{[Mer]}$  ma non da  $A_N^{[Mer]}$ : non è una conseguenza nominalista di MerZF, ma fornisce parte del contenuto empirico di MerZF.

L'argomento di Melia non contraddice quindi la conservatività della teoria matematica (impura) i cui assiomi sono quelli di  $A_M^{[Mer]}$  relativamente al corpo delle conseguenze nominaliste di  $A_N^{[Mer]}$ . In generale, esso non fornisce nessun contro-esempio alla tesi di Field sulla conservatività della matematica. Esso esibisce tuttavia il caso di una teoria che include una teoria matematica (impura) e che è tale da impiegare questa teoria matematica per trarre conseguenze che forniscono parte del suo contenuto empirico e che non possono essere tratte altrimenti.

Di per sé ciò non comporta che vi siano teorie matematiche indispensabili per teorie scientifiche vere o che siamo giustificati a ritenere tali, e che quindi l'argomento di Field contro la premessa di indispensabilità fallisce. Si può negare che MerZF sia vera o sia tale che siamo giustificati a ritenerla tale; oppure sostenere che MerZF potrebbe essere riformulata in modo che quella parte del suo contenuto empirico che è fornita da  $\psi_{ICI}$  sia fornita da un asserto nominalista (tratto dall'insieme di assiomi nominalisti che rimpiazza  $A_N^{[Mer]}$  nella riformulazione in questione).

Melia non presenta argomenti per negare la seconda possibilità, ma avanza ragioni per essere scettici su di essa (*ib.* pp. 461-463). Qui basta osservare che l'argomento di Field a proposito della teoria della newtoniana della gravitazione non sembra suggerire nessun modo per ottenere una riformulazione appropriata di MerZF. Melia non presenta neppure argomenti per negare la prima possibilità, ovvero per convincerci che MerZF sia, se non vera, almeno tale che siamo giustificati a ritenerla tale. Egli osserva *en passant* che la teoria il cui insieme di assiomi è fornito da  $A_N^{[Mer]}$  “dice molto poco sugli atomi”, posto che “tutto quanto essa ci dice su tali oggetti è che essi sono semplici e vi è un numero infinito di essi” (*ib.*, p. 464). Ma questo è ben lungi dall'essere poco. Per fornire un esempio di una teoria che possiamo essere giustificati a ritenere vera, Melia dovrebbe quantomeno offrire qualche argomento in favore dell'esistenza di un numero infinito di atomi (comunque siano concepiti).

Questo a parte, Melia pensa di aver mostrato che AI non può essere attaccato negando la premessa di indispensabilità. Melia prova (*ib.*, pp. 476-478) infatti che le conseguenze nominaliste di MerZF sono esattamente le conseguenze di  $A_N^{[Mer]}$ , e da questo conclude che un nominalista non può negare la premessa di indispensabilità di AI limitandosi a quella che egli chiama “stratega banale [*trivial*]”, cioè suggerendo che una teoria scientifica che ne impiega una matematica possa sempre essere rimpiazzata dalla teoria costituita dal corpo delle sue conseguenze nominaliste: in tal modo si rischierebbe infatti di ottenere una teoria

con un contenuto empirico più povero rispetto alla teoria data. In altre parole, Melia pensa di aver rigettato con il suo esempio l'idea che la dispensabilità di una teoria matematica per una teoria scientifica possa venir stabilita servendosi di una esemplificazione di [(In)dispensabilità] che si richiama alla o-equivalenza (definita in modo tale che due teorie scientifiche che hanno gli stessi teoremi nominalisti sono o-equivalenti). Lasciamo al lettore di valutare l'efficacia dell'argomento di Melia. Notiamo comunque che la sua conclusione sembra già implicita nell'esigenza avanzata da Field di affiancare, nella sua critica a AI, il proprio argomento a favore della conservatività della matematica con il suo secondo argomento relativo alla teoria newtoniana della gravitazione, e può quindi essere motivata anche indipendentemente dal suo specifico argomento.

## 2. Contro il criterio di impegno ontologico

Un'altra possibile seconda critica verso AI per il platonismo riguarda la premessa che asserisce che se una certa teoria matematica  $M$  è vera o è indispensabile per una certa teoria scientifica vera, allora esistono degli oggetti matematici. La maggior parte delle critiche non si sono tuttavia rivolte tanto alla tesi espressa da questa premessa, quanto piuttosto ai criteri di impegno ontologico proposti per identificare gli oggetti in questione, in particolare a quello di Quine (si noti che se un certo criterio porta a concludere che l'impegno ontologico di una determinata teoria è vuoto, sostenere che quel particolare criterio, e non altri, è quello corretto, equivale a sostenere che dalla verità della teoria data non segue l'esistenza di alcun oggetto).

Queste critiche hanno seguito due strategie principali. Alcune si sono direttamente rivolte al criterio di impegno ontologico, in particolare nella versione di Quine, anche se molte potrebbero applicarsi anche alla sua versione generalizzata. Altre si sono concentrate su alcuni presupposti del criterio di Quine, in particolare: *a*) l'idea che vi sia un solo senso in cui si possa dire di un oggetto che esiste; *b*) l'idea che tutti gli asserti della forma 'esiste (almeno) un  $F$ ', 'ci sono degli  $F$ ', etc., di una teoria informale data possano e debbano sempre essere resi da asserti della forma ' $\exists x[\mathcal{A}_F(x)]$ ' di un linguaggio predicativo del primo ordine<sup>8</sup>.

Qui ci limiteremo a presentare alcune delle critiche che riteniamo più rilevanti per il dibattito su AI. È importante distinguere le critiche esplicitamente rivolte al criterio di Quine da altre posizioni alle quali abbiamo già variamente accennato, e che potrebbero venir confuse con le prime. In particolare, non contano come critiche al criterio di Quine: *i*) tutte le proposte di reinterpretazione degli asserti della matematica fondate sull'idea che essi non debbano essere intesi secondo la loro forma grammaticale apparente, secondo le quali, nonostante l'apparenza superficiale, nessun asserto della matematica deve essere

---

<sup>8</sup>Questi presupposti non sono equivalenti, neanche se si ammette, come Quine, che asserti della forma ' $\exists x[\mathcal{A}_F(x)]$ ' di un linguaggio predicativo del primo ordine rendano l'unico senso in cui si possa dire di un oggetto che esiste. Primo, potrebbe darsi che alcuni degli asserti considerati in (*b*) resistano a una riduzione in un linguaggio predicativo del primo ordine. Secondo, si potrebbe pensare che le locuzioni 'esiste', 'ci sono' etc. in tali asserti sono solo modi di dire che non rinviano affatto all'esistenza di certi oggetti, o comunque non rinviano all'esistenza di oggetti che soddisfano la corrispondente formula aperta ' $\mathcal{A}_F(x)$ ' di un linguaggio del primo ordine.

inteso come un asserto che quantifica esistenzialmente su un dominio di oggetti matematici (come la proposta di Hellman, cf. §IV.3, o di Chihara, 1990); *ii*) tutte le posizioni che negano che gli oggetti matematici siano oggetti astratti la cui esistenza è indipendente dall'attività dei soggetti cognitivi, essendo piuttosto delle costruzioni mentali (come nell'intuizionismo di Brouwer, cf. §II.4.5) o degli oggetti concreti (come già sostenuto da Mill, 1843 e riproposto da Maddy, cf. §IV.3). Le prime sono compatibili con il criterio di Quine e portano solo alla conclusione che tale criterio conduce a stabilire che l'impegno ontologico delle teorie matematiche è vuoto oppure non comprende oggetti matematici. Le seconde riguardano solamente la natura degli oggetti matematici che compongono l'impegno ontologico delle teorie matematiche. I sostenitori di queste posizioni, dunque, possono anche rigettare il criterio di Quine, ma non sono forzati a farlo dalle loro stesse posizioni.

Consideriamo dunque alcune delle principali critiche rivolte contro il criterio di impegno ontologico e i suoi presupposti (a) e (b). Cominceremo, per ragioni cronologiche, con alcune che ne attaccano i presupposti.

### 2.1 *Esistenza e ontologia: la critica di Carnap*

Una tra le critiche più note è quella che Carnap (1950a) rivolge al presupposto (a). Essa si fonda sulla tesi, già considerata nel §II.4.1, secondo cui è sensato rispondere alle domande relative all'esistenza di un determinato tipo di entità solo all'interno di un determinato *framework* linguistico, da cui segue che tali domande possono essere intese in modi diversi.

Uno di questi modi è per esempio quello interno al *framework* dell'aritmetica. In questo senso, un asserto come 'Esistono numeri primi maggiori di 2' è la risposta a una domanda che riguarda tale teoria. Questa risposta dipende solo dalla prova di un teorema nella teoria, i cui assiomi altro non sono che definizioni implicite che fissano il significato delle costanti non logiche primitive della teoria. Possiamo così asserire che l'esistenza di numeri primi maggiori di 2 è una conseguenza delle regole del *framework* che abbiamo adottato. Così intesa, tale asserzione non è una genuina affermazione ontologica. Intenderla in quest'ultimo modo è per Carnap illegittimo, poiché confonde tra un'asserzione relativa a un dato *framework* e un'asserzione esterna a ogni particolare *framework*.

Al di fuori di ogni particolare *framework*, possiamo dire che vi sono ragioni per adottare certi *framework* (come per esempio quello dell'aritmetica, dell'analisi, dei punti dello spazio-tempo, o degli oggetti materiali) in certe circostanze o per certi scopi. Ciò non ha però nulla a che vedere con "la realtà delle entità" (*ib.*, p. 339) in questione in questi *frameworks*, ma solo con considerazioni di natura pragmatica e contingente.

Carnap avanza queste considerazioni a pochi anni di distanza dall'apparizione di "On What There Is" (Quine, 1948) in cui Quine presenta il proprio criterio di impegno ontologico, e, a tratti, sembra volere mediare tra le sue posizioni e quelle del suo ex allievo. Non solo dichiara (1950, p. 339, n.1) che "Quine fu il primo a riconoscere l'importanza dell'introduzione di variabili come indice dell'accettazione di entità", ma, pur ammettendo che quest'ultimo non condivide la sua distinzione tra domande interne e domande esterne,

aggiunge (*ib.*, p. 340, n.2):

Quanto all'atteggiamento fondamentale da prendere nello scegliere una forma linguistica (una «ontologia», secondo la terminologia di Quine, che però mi sembra fuorviante) pare che ora vi sia accordo fra noi: «il consiglio ovvio è tolleranza e uno spirito sperimentale» [si tratta di una citazione da Quine (1948), p. 259].

In realtà il contrasto è molto più forte di quanto Carnap non voglia far sembrare. Per essere d'accordo con Quine non basta riconoscere l'importanza delle variabili quantificate “come indice dell'accettazione di entità”. Tutt'al più ciò conduce a ammettere che, data una qualsivoglia teoria, il suo impegno ontologico si determina come [*Criterio di impegno ontologico di Quine*] stabilisce che si debba determinare l'impegno ontologico di una teoria già ridotta alla sua riformulazione canonica ontologicamente minimale. Il punto cruciale della proposta di Quine è tuttavia che il suo criterio non conduce semplicemente a “accettare delle entità” entro un certo *framework*, ma piuttosto a stabilire che esse esistono nel solo senso in cui si possa dire di un oggetto che esiste. Per Quine non vi è spazio per alcun senso debole di intendere l'espressione ‘accettare un'entità’.

La tolleranza suggerita da Quine ne passo richiamato da Carnap riguarda più che altro l'atteggiamento da tenere nell'esplorare teorie alternative con impegni ontologici diversi. Ma una volta stabilito (supponendo idealmente che lo si possa fare<sup>9</sup>) quale di esse siamo giustificati a ritenere vera, non vi è più alcuno spazio, per Quine, per negare la “realtà delle entità” sulle quali tale teoria quantifica, come invece vorrebbe fare Carnap.

## 2.2 Oggettività senza oggetti: Putnam sulle descrizioni equivalenti

Una critica al presupposto (b) si deve a Putnam (1967). Putnam si richiama alla ben nota dualità onda-corpuscolo relativa al comportamento delle particelle elementari della materia: tale comportamento può essere descritto alternativamente in termini ondulatori e in termini corpuscolari, anche se queste due descrizioni della realtà fisica richiamano alla mente immagini apparentemente incompatibili tra loro. Secondo Putnam possiamo dire che le due descrizioni hanno lo stesso potere esplicativo, ma non che gli asserti dell'una e dell'altra abbiano lo stesso significato. Né possiamo dire che una di esse sia più fondamentale dell'altra, né quindi che una possa essere ridotta all'altra. Siamo piuttosto di fronte a due “descrizioni equivalenti” (*ib.* p. 65; l'espressione è di Hans Reichenbach, 1951, p. 131-132).

Putnam ritiene che una situazione simile si verifichi anche per la matematica. Nel descriverla possiamo evocare due immagini alternative: quella della “matematica come teoria degli insiemi”, e quella della “matematica come logica modale”. Nella prima immagine, gli asserti della matematica sono intesi come se descrivessero un dominio di oggetti e le loro proprietà. Nella seconda, sono intesi invece come se ci dicessero semplicemente “che cosa segue da che cosa” (*ib.* p. 67).

Per chiarire con un esempio la situazione Putnam si considera l'ultimo teorema di Fermat, secondo il quale, se  $n$  è un numero naturale maggiore di 2, non esistono triple di

---

<sup>9</sup>E fatti salvi i problemi connessi alla relatività ontologica indicati in Quine (1968).



numeri naturali positivi che forniscano una soluzione per l'equazione  $x^n + y^n = z^n$ . All'epoca in cui Putnam scriveva, si trattava in realtà solo di una congettura; una prova è stata data quasi vent'anni più tardi (Wiles, 1995). L'argomento di Putnam è tuttavia del tutto indipendente dal fatto che questa prova non fosse stata ancora trovata. Al più lo è la forma retorica in cui è presentato, che dipende dal dubbio, allora ancora presente, che l'ultimo teorema di Fermat fosse davvero un teorema. Per semplicità manteniamo questa forma retorica.

Sia ' $\neg\text{Fermat}$ ' il seguente asserto dell'aritmetica di Peano al primo ordine:

$$\exists x,y,z,n[n > 2 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0 \wedge x^n + y^n = z^n]$$

dove le variabili sono intese variare sui numeri naturali. Questo asserto ci dice che vi è (almeno) una tripla di numeri naturali positivi che forniscono una soluzione per l'equazione di Fermat, e quindi un contro-esempio al suo ultimo teorema. Se  $\neg\text{Fermat}$  fosse un teorema dell'aritmetica di Peano al primo ordine, allora sarebbe deducibile da un sottoinsieme facilmente determinabile dei suoi teoremi<sup>10</sup>. Sia ' $AX_{AP1}$ ' un'abbreviazione per la congiunzione degli assiomi di Peano al primo ordine, allora l'ultimo teorema di Fermat sarebbe falso, ovvero avrebbe un contro-esempio se e solo se valesse che:

$$\Box[AX_{AP1} \Rightarrow \neg\text{Fermat}]$$

Se questo asserto fosse vero, dice Putnam, allora lo sarebbe anche l'asserto:

$$\Box[AX^* \Rightarrow \neg\text{Fermat}^*]$$

in cui ' $AX^*$ ' e ' $\neg\text{Fermat}^*$ ' denotassero le formule ottenute da  $AX_{AP1}$  e  $\neg\text{Fermat}$  sostituendo in esse le costanti proprie del vocabolario dell'aritmetica di Peano al primo ordine che vi occorrono con lettere schematiche appartenenti, rispettivamente, alle stesse categorie sintattiche delle prime. Il primo di questi asserti sarebbe infatti vero se e solo se l'implicazione ' $AX_{AP1} \Rightarrow \neg\text{Fermat}$ ' valesse necessariamente, e tale necessità è mantenuta sotto la sostituzione indicata. Ma, proprio in quanto il secondo asserto presenta lettere schematiche, esso non è altro che uno schema di asserti e è vero se e solo se è una verità della logica modale del primo ordine (e quindi né dell'aritmetica, né di nessun'altra particolare teoria).

Secondo Putnam (*ib.*, pp. 66-67), il "contenuto matematico" di ' $\Box[AX^* \Rightarrow \neg\text{Fermat}^*]$ ' è lo stesso di quello di  $\neg\text{Fermat}$ . Tuttavia, "le immagini richiamate alla mente da questi due modi di formulare quella che si potrebbe anche considerare come la stessa affermazione matematica possono essere del tutto diverse". Infatti mentre  $\neg\text{Fermat}$  suggerisce che la matematica descrive particolari oggetti "esterni", ' $\Box[AX^* \Rightarrow \neg\text{Fermat}^*]$ ' suggerisce che essa tratta di implicazioni fra asserti, e che quindi non riguarda altri oggetti se non certi

<sup>10</sup>La prova di Wiles non è interna all'aritmetica di Peano (sia essa del primo o del second'ordine), poiché impiega varie altre teorie matematiche. Anche se all'epoca in cui scriveva Putnam questa prova non era nota, nessuno immaginava ragionevole, come nessuno lo immagina oggi, che vi sia una prova interna all'aritmetica di Peano accessibile con i mezzi di computazione disponibili (e niente assicura d'altra parte che gli assiomi dell'aritmetica di Peano siano sufficientemente forti perché tale prova sia possibile). Al contrario, per dimostrare  $\neg\text{Fermat}$  basterebbe dimostrare una formula della forma  $a^n + b^n = c^n$  in cui  $a, b, c$  e  $p$  sono dei numeri naturali dati (da cui ovviamente seguirebbe  $\neg\text{Fermat}$ ): una formula che, se dimostrabile, sarebbe deducibile da un insieme di teoremi relativi ai quattro numeri  $a, b, c$  e  $p$ .

asserti. Non solo: ognuno di questi due “modi di guardare alla matematica può essere usato per chiarificare l’altro”. Se qualcuno avesse perplessità riguardo all’utilizzo di operatori modali, potrebbe essere confortato dall’idea che la stessa affermazione matematica può venir intesa in termini insiemistici. Se qualcuno condividesse le critiche al platonismo avanzate da Benacerraff (1965), potrebbe essere confortato dall’idea che i numeri naturali possono essere visti come oggetti solo nel senso in cui essi sono intesi come “cose su cui si può quantificare”, ogni “fatto” a proposito delle quali potrebbe essere inteso come un fatto a proposito di ogni progressione. Da ciò seguirebbe infatti che i numeri naturali esistono, ma che “tutto ciò a cui questo conduce, perlomeno per la matematica” è che le progressioni sono possibili e vi sono delle verità necessarie della forma ‘se  $\alpha$  è una progressione, allora...’.

Tutto questo potrebbe venir reso compatibile con il criterio di impegno ontologico generalizzato (se non con quello di Quine). Putnam, ammette infatti la possibilità che in ‘ $\Box[AX^* \Rightarrow \neg Fermat^*]$ ’ il simbolo ‘ $\Box$ ’ possa essere interpretato come un predicato che si applica a asserti, in modo che questo asserto dica che l’asserto ‘ $AX^* \Rightarrow \neg Fermat^*$ ’ ha una certa proprietà; e riconosce che, in tal caso, si potrebbe dire che l’accettazione di ‘ $\Box[AX^* \Rightarrow \neg Fermat^*]$ ’ ci forza a ammettere l’esistenza dell’asserto ‘ $AX^* \Rightarrow \neg Fermat^*$ ’. Ma, chi accettasse l’argomento di Putnam, non potrebbe certamente accettare il presupposto (b)<sup>11</sup>.

Secondo questo argomento, l’asserto informale che asserisce l’esistenza di quattro numeri naturali che forniscono un contro-esempio al teorema di Fermat — ovvero l’asserto informale che esprime quella che per Putnam “si potrebbe [...] considerare come la stessa affermazione matematica” — può essere infatti reso tanto da  $\neg Fermat$ , ovvero dalla negazione di un asserto della forma ‘ $\exists x[\mathcal{A}_F(x)]$ ’ di un linguaggio predicativo del primo ordine, quanto da un asserto modale come ‘ $\Box[AX^* \Rightarrow \neg Fermat^*]$ ’. Non solo. Putnam è convinto che il suo esempio mostri che si possano avere descrizioni equivalenti dello stesso “fatto matematico” (1967, p. 66). Infatti, sia che si ammetta che l’impegno ontologico di ‘ $\Box[AX^* \Rightarrow \neg Fermat^*]$ ’ è vuoto, sia che si ammetta che il suo impegno ontologico è l’asserto ‘ $AX^* \Rightarrow \neg Fermat^*$ ’, esso avrà un impegno ontologico diverso da  $\neg Fermat$  se questo è inteso come un asserto della forma ‘ $\exists x[\mathcal{A}_F(x)]$ ’, e non sarebbe quindi possibile ridurre l’impegno ontologico dell’uno a quello dell’altro, nonostante essi esprimano “la stessa affermazione matematica”. Se un matematico asserisse che esistono quattro numeri naturali che forniscono un contro-esempio al teorema di Fermat, non sarebbe comunque forzato a ammettere l’esistenza di certi oggetti piuttosto che di altri, contro il presupposto (b).

<sup>11</sup>Si potrebbe pensare che anche il presupposto (a) sia messo in dubbio dall’idea che “tutto ciò a cui conduce, per la matematica”, l’ammissione che esistono numeri è che si verificano certi fatti modali a proposito delle progressioni. Analogamente si potrebbe pensare che l’idea che asserti della forma ‘ $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ ’ di un linguaggio predicativo del primo ordine non possono che venir intesi in base all’interpretazione diretta è contraddetta dall’idea che  $\neg Fermat$  e ‘ $\Box[AX^* \Rightarrow \neg Fermat^*]$ ’ abbiano lo stesso “contenuto matematico”. Il modo in cui Putnam interpreta le espressioni ‘per la matematica’ e ‘contenuto matematico’ sembra tuttavia permettere delle conclusioni diverse. Ciò che pare comunque indiscutibile (anche in base al resto di Putnam, 1976, e a quello che si trova in Putnam, 2004, cap. II) è piuttosto che il suo argomento mette in dubbio il presupposto (b).

La posizione di Putnam presenta molti problemi, fra tutti quello di non chiarire adeguatamente in che senso si possa parlare di fatti matematici, di contenuto matematico, e di descrizioni equivalenti di un fatto matematico<sup>12</sup>. Un altro problema è che Putnam non sviluppa in tutti i dettagli la sua idea della “matematica come logica modale” al di là dell’esempio che abbiamo considerato per l’aritmetica di Peano al primo ordine (anche se suggerisce brevemente come essa potrebbe estendersi al caso della teoria degli insiemi, *ib.* pp. 75-79). Tale idea è comunque servita come ispirazione per la posizione più elaborata di Hellman (cf. §IV.3).

Resta da capire se e come esso possa venir conciliato con l’adesione di Putnam a AI (cf. §VI.2.1). Diverse risposte sono possibili. Un modo di rendere le due cose compatibili è sostenere che la matematica è indispensabile per le nostre teorie scientifiche quale che sia la descrizione dei fatti matematici rilevanti che venga scelta, fra tutte quelle equivalenti fra loro. Di per sé questo renderebbe tuttavia la posizione di Putnam compatibile solo con AI per il realismo semantico. Perché essa possa esserlo anche con AI per il platonismo, occorrerebbe anche ammettere, almeno, che tutte queste descrizioni siano in qualche modo associate con lo stesso impegno ontologico che include oggetti matematici, o almeno con impegni ontologici diversi ma tali che ognuno di essi include degli oggetti matematici. Ma ciò è incompatibile con quanto Putnam dice a proposito dell’impegno ontologico di ‘ $\Box[AX^* \Rightarrow \neg Fermat^*]$ ’. È tuttavia difficile negare che la versione di AI contenuta nella citazione discussa nel §VI.2.1 (Putnam, 1971, p. 65) sia un argomento per il platonismo. Quando formula tale versione di AI, Putnam non rinnega la sua teoria delle descrizioni equivalenti. Burgess e Rosen (2001, p. 201) suggeriscono che se Putnam avesse considerato in quella stessa sede anche tale teoria, avrebbe ammesso l’indispensabilità della matematica per la scienza ma non per questo che la verità delle teorie scientifiche implichi l’esistenza di oggetti matematici, rigettando di fatto AI per il platonismo. Una conclusione simile può sembrare suggerita anche in Putnam (1975), e Putnam l’ha certamente riproposta in (2004, p.102)<sup>13</sup>.

### 2.3 La “strada facile” per rigettare AI

In anni recenti vari autori hanno mosso critiche a AI per il platonismo che si basano esplicitamente su una critica al criterio di Quine. Per ragioni di spazio, non ci sarà possibile considerarle nel dettaglio, ma vogliamo qui menzionare per completezza. Tutte queste proposte hanno un aspetto in comune (che condividono anche con la posizione di Carnap): la loro critica alla tesi che esistano (o che siamo giustificati a ritenere che esistano) gli oggetti matematici delle teorie indispensabili per le nostre teorie scientifiche vere (o che siamo giustificati a ritenere tali) non si basa, come è invece il caso per Field, sul tentativo di

---

<sup>12</sup>Per ulteriori chiarimenti su come, secondo Putnam, due teorie con impegni ontologici differenti possono essere equivalenti, cf. Putnam (1983).

<sup>13</sup>È più recentemente anche in una conferenza tenuta a Berkely nell’ottobre del 2007 (comunicazione personale di P. Mancosu; cf. anche il resoconto di Kenny Easwaran in <http://antimeta.wordpress.com/2007/10/29/putnam-on-indispensability/>). Per una interpretazione diversa da quella esposta qui delle posizioni di Putnam, cf. Liggins (2007).

riformulare queste teorie scientifiche avvalendosi solo di un vocabolario nominalista. Questi autori ritengono semplicemente che anche se nella versione ontologicamente minimale di tali teorie matematiche occorrono asseriti della forma  $\exists x[\mathcal{A}(x)]$ , in cui il posto della variabile vincolata è presto da termini intesi denotare oggetti matematici, questo non comporta che tali oggetti esistano (o che siamo giustificati a ritenere che esistano). Questi autori non rigettano quindi la premessa di indispensabilità in AI, ma ritengono che da tale indispensabilità non segua che esistono (o che siamo giustificati a ritenere che esistano) oggetti matematici. Dal momento che le loro critiche non si basano sul tentativo di riformulazione in un vocabolario nominalista delle teorie scientifiche, quanto piuttosto su argomenti filosofici più generali, sta diventando comune nel dibattito riferirsi a tali posizioni (e pure a quella di Yablo, che vedremo separatamente) come quelle che scelgono la “strada facile” (Balaguer, 2008) per sostenere il nominalismo. Proposte simili posizioni sono avanzate per esempio da Melia (1995, 2000) e da Jody Azzouni (1997a-b, 1998, 2004). Balaguer (1996b, 1998, 2009) ha sostenuto una versione di finzionalismo che è accomunata per molti versi alle posizioni precedenti, anche se non si basa su una critica esplicita al criterio di Quine. Per alcune obiezioni all’idea che si possa rigettare AI attraverso la “strada facile” suggerita da queste posizioni, cf. Colyvan (cs).

#### 2.4 Il finzionalismo come risposta a AI

Secondo il finzionalismo, se la verità di un asserito matematico, tanto puro quanto impuro, è correttamente intesa, ovvero è intesa come verità-nella-finzione della matematica, essa non ha alcuna conseguenza ontologica al di fuori di tale finzione, cosa che da sola blocca AI.

Cominciamo con il considerare il finzionalismo di Field. Abbiamo già osservato (cf. §§ IV.1 e VII.1), che, al di là dell’interesse che il suo finzionalismo può rivestire, la critica che Field rivolge a AI non si basa tanto su di esso, quanto sulla confutazione della premessa di indispensabilità. È comunque opportuno osservare che la posizione di Field è perfettamente compatibile con l’accettazione del criterio di Quine e con i presupposti (a) e (b).

Come Quine, e in accordo con il presupposto (a), Field non distingue tra sensi diversi in cui si possa dire di un oggetto che esiste. Infatti, anche se accettiamo che vi siano due sensi in cui si possa parlare di verità per un asserito matematico — uno per cui esso non è vero, in quanto non è vero *simpliciter*, e l’altro per cui esso lo è, in quanto è vero-nella-storia — non ne segue che ci richiamiamo a due distinte nozioni di esistenza. I predicati ‘vero *simpliciter*’ e ‘vero-nella-storia’, pur condividendo alcune importanti caratteristiche, dovrebbero infatti essere intesi come due predicati diversi. Quindi, quando il finzionalista sostiene che un asserito come ‘esistono infiniti numeri naturali’ non è vero *simpliciter*, ma è vero-nella-storia dell’aritmetica, non ascrive ai numeri naturali una sorta di esistenza-nella-storia in quanto contrapposta all’esistenza nella realtà. Per Field, tutto ciò che si può dire a proposito dell’esistenza dei numeri naturali è che essi non esistono. E che l’asserito ‘esistono infiniti numeri naturali’ sia vero-nella-storia dell’aritmetica non è un fatto che riguardi la loro esistenza, ma è solo un fatto che riguarda tale asserito e che dipende in

particolare dal fatto che esso segue dagli assiomi dell'aritmetica.

Field accetta anche il presupposto (*b*), e anzi, proprio per questo, ritiene che asserti matematici della forma 'esiste (almeno) un *F*', 'ci sono degli *F*', etc., non siano veri *simpliciter*. Come abbiamo visto nel §IV.2, se egli sostiene poi che questi asserti sono veri-nella-storia, non è perché ritiene che essi debbano essere intesi in qualche maniera alternativa.

Ma possiamo dire che il finzionalismo di Field è in contrasto con il criterio di Quine? Dal momento che, come abbiamo già detto, per Field l'unico argomento in favore della verità della matematica sarebbe sarebbe AI, e che Field rigetta AI refutando la premessa di indispensabilità, ne segue che per Field non c'è ragione di ritenere veri gli asserti della matematica. In questo argomento, la tesi finzionalista che gli asserti della matematica possano essere ritenuti veri-nella-storia non gioca alcun ruolo. È solo una volta che ha mostrato che non vi è ragione di ritenere quegli asserti veri *simpliciter*, che Field adotta il finzionalismo. Il finzionalismo di Field, dunque, non solo non costituisce il suo argomento contro AI; non costituisce nemmeno un argomento contro il criterio di Quine, né ha bisogno di esserlo: esso è un modo per sostenere che vi è un qualche senso in cui gli asserti della matematica sono (non vacuamente) veri solo dopo che è già stato dato un argomento indipendente per mostrare che essi non sono veri *simpliciter*.

Il finzionalismo di Field appare più dunque come una componente accessoria nella sua posizione complessiva, utile per rendere conto di certe implausibilità (mostrare che vi è un qualche senso in cui possiamo dire che un asserto matematico è — non vacuamente — vero), ma non rilevante per rigettare AI.

Il motivo per cui, al contrario, Yablo può presentare il suo finzionalismo come una critica al criterio di Quine è proprio perché egli non mette in discussione la premessa di indispensabilità in AI. Vediamo in che misura Yablo metta in discussione il criterio di Quine o i suoi presupposti.

Riprendiamo l'asserto 'il numero delle lune di Marte è 2' (chiamiamolo  $\phi$ ). Nel §IV.2 abbiamo detto che per Yablo il contenuto letterale di questo asserto è che il numero naturale 2 è il numero delle lune di Marte. Ammettiamo che da tale asserto segua l'asserto 'esiste un oggetto che è un numero naturale e che è il numero delle lune di Marte', che secondo il presupposto (*b*) dovremmo intendere come ' $\exists x[NN(x) \wedge M(x)]$ ' dove '*NN*' e '*LM*' sono i predicati 'essere un numero naturale' e '*M*' è il predicato che esprime la proprietà di essere il numero delle lune di Marte. Supponiamo inoltre che si ammetta che questi predicati non siano eliminabili via appropriate definizioni contestuali. Possiamo allora derivare ' $\exists x[NN(x)]$ '. Se  $\phi$  è allora un teorema di una teoria informale, dovremmo dire che l'impegno ontologico della teoria include i numeri naturali.

Un modo per bloccare questo argomento senza rigettare il presupposto (*b*) è implicito nella stessa posizione di Yablo. È sufficiente ammettere che è il contenuto reale, e non quello letterale, di  $\phi$  che deve essere considerato per determinare l'impegno ontologico di una teoria in cui  $\phi$  compare.

Un argomento analogo potrebbe applicarsi anche a asserti di natura diversa da  $\phi$ , per esempio a asserti direttamente esistenziali come ‘esiste un oggetto che è un numero naturale e che è il numero delle lune di Marte’, o a asserti matematici puri come ‘vi è un solo numero primo pari’. In questi casi, come in tutti gli altri, il punto di Yablo sembra essere che se il criterio di Quine è applicato al contenuto reale degli asserti matematici, esso non conduce alla conclusione che esistono oggetti matematici.

Il problema di questa posizione è quello di determinare il contenuto reale di tutti gli asserti matematici. Ciò suggerisce che la parte principale del lavoro che deve essere compiuto su una teoria data per determinarne l’impegno ontologico in base al criterio di Quine non sia tanto compiuto dal criterio stesso, quanto da una valutazione previa, largamente motivata dall’adozione di un’opzione filosofica piuttosto che di un’altra, la quale decide della natura della riformulazione canonica ontologicamente minimale di questa teoria. È così la speranza di poter determinare tale riformulazione in modo univoco, e quindi di fornire uno strumento per condurre le dispute ontologiche in maniera indipendente da ogni incerta presupposizione filosofica, a essere messa in dubbio.

Resta tuttavia che Yablo non pensa affatto che per ogni asserto matematico sia possibile determinarne il contenuto reale. Se così fosse, fra l’altro, la sua critica a AI consisterebbe semplicemente nel negare la premessa di indispensabilità offrendo una riformulazione nominalista di una qualunque teoria matematica: il finzionalismo di Yablo risulterebbe quindi una componente accessoria di una più generale posizione nominalista, in un senso molto simile a quello che abbiamo visto poco sopra per Field<sup>14</sup>.

Il fatto che non sia sempre possibile specificare il contenuto reale di un asserto matematico si spiega per Yablo notando che in molti casi avvalersi di un linguaggio metaforico o figurativo, quale quello proprio delle finzioni matematiche, sembra non solo utile, ma necessario per poter comunicare un contenuto che, se pure concerne il mondo reale, non potrebbe essere comunicato se non avvalendosi di tali finzioni.

Il fatto che vi siano metafore ineliminabili è secondo Yablo evidente nel caso del linguaggio ordinario, in particolare in quello poetico. Se prendiamo per esempio l’asserto ‘Giulietta è il sole’, si può forse sostenere che vi è un senso in cui capiamo ciò che questo asserto vuole comunicare, anche se, come è noto, non vi è un singolo asserto che possiamo produrre come sua parafrasi che ne colga completamente il contenuto. Ma vi sono anche casi meno astratti. Supponiamo per esempio che una teoria scientifica (per esempio la demografia) contenga come asserto ‘la famiglia media ha 2,3 figli’ (per esempi simili, cf. Yablo, 1998, pp. 250-251, e Yablo 2001, pp. 93-97, per una discussione). Inteso letteralmente, questo asserto, della forma ‘ $F(a)$ ’, avrebbe come conseguenza che esiste un oggetto, una famiglia, che ha la strana proprietà di essere media, e che ha 2.3 figli. È ovvio che non è il contenuto letterale di tale asserto che si vuole comunicare, perché nessuno ritiene che esista una famiglia media, né tanto meno che abbia 2,3 figli! Quello che si vuole

---

<sup>14</sup>Si tratterebbe di un senso simile, e non identico, perché mentre per Field la riformulazione nominalista concerne solamente gli asserti di una teoria scientifica che impiega una teoria matematica, ma non la teoria matematica stessa, per Yablo concernerebbe più in generale gli asserti di una qualunque teoria matematica.

comunicare con tale asserto è che il numero delle famiglie, diviso per il numero dei figli, è 2,3. Tuttavia, secondo Yablo, per esprimere il contenuto reale di questo asserto senza avvalerci di un vocabolario matematico, dovremmo ricorrere a una disgiunzione infinita (espressa tramite quantificatori numerici): ‘ci sono 10 famiglie e 23 figli, oppure 20 famiglie e 43 figli, oppure...’<sup>15</sup>. È chiaro che non è tuttavia possibile comunicare impiegando asserti di lunghezza infinita. Introdurre un linguaggio figurativo nel quale non solo vi sono famiglie medie, ma anche numeri (introdurre cioè una finzione matematica) consente di esprimere questo contenuto, che a detta di Yablo non potrebbe essere espresso altrimenti.

Resta il fatto che, soprattutto per quanto riguarda il caso delle teorie scientifiche, gli esempi offerti da Yablo non sembrano sufficienti a determinare una posizione complessivamente convincente. In primo luogo, se si accetta che il contenuto reale è ciò che realmente asseriamo, allora nei casi in cui il linguaggio metaforico o figurativo è ineliminabile non vi sarebbe modo di specificare ciò che asseriamo realmente. E se questa sembra una condizione accettabile in alcuni contesti, come quello del linguaggio poetico, è difficile accettare che lo sia in casi come quello delle teorie scientifiche. In secondo luogo, nonostante la posizione di Yablo sia motivata da un’intuizione stimolante, essa dovrebbe essere ampliata e precisata per poter giudicare se è in grado di applicarsi adeguatamente a teorie matematiche di qualsivoglia natura (anche nei casi semplici come quello visto precedentemente si potrebbe dubitare che, per esprimere il contenuto reale degli asserti in questione senza impiegare vocabolario matematico, sia davvero necessario ricorrere a congiunzioni infinite di asserti).

Al di là di questo, il punto di Yablo, se accettato, potrebbe costituire effettivamente una critica al criterio di Quine. Yablo (1998) ritiene che la presenza di metafore ineliminabili sia il sintomo dell’impossibilità di determinare un criterio generale uniforme che permetta di individuare e eliminare gli aspetti figurativi del linguaggio, sia nel linguaggio ordinario che in quello scientifico. Se così fosse, sarebbe messa in discussione la stessa possibilità di determinare la riformulazione canonica ontologicamente minimale  $\tau_0^{[P1]}$  di una data teoria  $\tau$  (o, più in generale, la teoria  $\tau^{\wedge}_0$  che interviene nel criterio generalizzato).

In accordo con l’aspetto del finzionalismo di Yablo che concerne l’atteggiamento proposizionale (cf. §IV.2), le asserzioni fatte attraverso asserti che impiegano indispensabilmente il linguaggio figurativo di una finzione matematica sarebbero quindi prodotte, sia in contesti ordinari sia in contesti scientifici, all’interno di un gioco di fare finta. Abbiamo già osservato che la distinzione tra l’atteggiamento proposizionale della simulazione e quello della credenza richiama secondo Yablo la distinzione di Carnap fra esistenza interna e esistenza esterna. Ciò sembra quindi suggerire una critica al presupposto (a): vi sarebbero due modi di intendere uno stesso asserto esistenziale, uno in base al quale il suo contenuto letterale è genuinamente creduto vero, l’altro in base al quale esso è

---

<sup>15</sup>Perché l’esempio sia credibile bisogna supporre che l’asserto ‘la famiglia media ha 2,3 figli’ sia inteso in questo caso non come: dato questo preciso numero di famiglie, e questo preciso numero di figli, una famiglia ha in media  $n$  figli; ma invece come un asserto che riguarda ciò che sembra avvenire in generale indipendentemente dal particolare numero di famiglie e di figli considerati.

solamente simulato. Abbiamo già indicato i problemi di questa posizione, che in più sembra riguardare il criterio di Quine solo quando esso è inteso — al contrario di come l’abbiamo presentato in questo capitolo — come un criterio per stabilire non ciò a cui un asserto di una teoria si impegna, ma ciò a cui crede di impegnarsi un soggetto che lo asserisca.

Abbiamo anche già detto che questa interpretazione del criterio di Quine ci sembra poco rilevante per AI, anche se può esserlo più in generale per comprendere il modo in cui certi recenti dibattiti ontologici vengono condotti<sup>16</sup>. Il precedente argomento di Yablo suggerisce comunque una possibile posizione epistemica secondo la quale saremmo giustificati a ritenere vera una teoria scientifica  $s$  per cui è indispensabile una certa teoria matematica  $m$ , pur non essendo giustificati a ritenere che  $m$  è vera e che esistono gli  $O_{[m]}$ . Sarebbe infatti sufficiente sostenere che gli asserti  $m$ -ontologicamente carichi rilevanti di  $s$  intervengono in tale teoria in modo tale che la loro asserzione, qualunque sia il loro contenuto reale, si accompagna solo alla quasi-asserzione del loro contenuto letterale, cosa che comporterebbe ovviamente che gli  $O_{[m]}$  non sono inclusi nell’impegno ontologico di  $s$ .

### 3. Contro il naturalismo e contro il realismo scientifico

Nel §VI.5, abbiamo mostrato sotto quali condizioni si può sostenere che AI epistemico si richiami a una qualche forma di naturalismo. Abbiamo anche visto che il naturalismo (in una qualche versione) risulta comunque necessario solo in versioni di AI epistemico particolarmente forti, come [6\*] e [6\*\*], che forniscono non solo condizioni sufficienti per la nostra giustificazione nell’esistenza di oggetti matematici e nella verità di teorie matematiche, ma anche condizioni necessarie, e che potrebbero, proprio per questo, apparire inaccettabili. Ciò nonostante, fra i diversi ingredienti teorici connessi a AI, il naturalismo è quello che meno è stato fatto oggetto di critiche. Una ragione sta nel fatto che si concepisce spesso AI come un argomento tipicamente quineano: essendo sicuramente Quine promotore di una filosofia naturalista, si accetta dunque facilmente che il naturalismo debba comparire, implicitamente o esplicitamente, in qualunque versione di AI. Un’altra ragione è sicuramente che il naturalismo è una posizione filosofica molto diffusa, largamente accettata e discussa indipendentemente da AI.

#### 3.1 Il naturalismo di Maddy

Una critica alle versioni di AI che integrano il naturalismo è comunque venuta da Maddy (1990, 1992, 2005). Maddy sottolinea in primo luogo che l’idea avanzata da Quine secondo cui le teorie, o porzioni di teorie, che non trovano applicazione nella scienza si possano etichettare come pura “matematica ricreativa”, e gli oggetti di cui esse sembrano trattare come “privi di diritti ontologici” (cf. §VI.5), è apertamente in contraddizione con la pratica matematica.

Maddy concorda con Quine nel sostenere che le questioni ontologiche debbano essere affrontate e risolte richiamandosi all’indagine scientifica, e che nel caso emerga un

---

<sup>16</sup>Lo stesso vale per Eklund (2005), Melia (1995, 2000), Azzouni (1998), Hofweber (2005a, 2007) e altri. Cf. Morena (2007).



contrasto tra risultati scientifici e tesi filosofiche, siano le seconde a dover essere abbandonate o modificate. Maddy condivide con Quine l'idea che almeno una delle principali ragioni per essere giustificati nella verità di teorie matematiche, e nell'esistenza dei loro oggetti, si debba all'applicazione che tali teorie trovano nelle scienze empiriche. Quello che Maddy invece non condivide con Quine è l'idea che l'applicazione nelle scienze empiriche sia l'unica fonte per una simile giustificazione.

Per Maddy il filosofo naturalista, anche se vuole in qualche modo sostenere AI, non può ignorare che i metodi con cui i matematici pervengono a elaborare le loro teorie e le ragioni per cui le accettano o le rigettano hanno spesso poco o nulla a che vedere con le applicazioni nelle scienze empiriche, pur dovendosi certamente considerare (almeno nella generalità dei casi) come esempi di rigore argomentativo a cui la comunità scientifica nel suo insieme dovrebbe ispirarsi, come di fatto spesso avviene. Tuttavia, chi sostenesse argomenti quali [6\*] e [6\*\*] si troverebbe nella inaccettabile situazione di dover invece rigettare come illegittima questa pratica di ricerca al pari delle più astruse riflessioni metafisiche.

Se si vuole comunque adottare una versione di AI pur continuando a sostenere una posizione naturalista, si deve allora, secondo Maddy, concepire il naturalismo in una forma adeguata, che non renda AI un argomento apertamente implausibile. Ecco come Maddy si esprime (1992, p. 279-80):

Potremmo per prima cosa sostenere, sul fronte puramente ontologico, che la riuscita applicazione della matematica ci fornisce buone ragioni per credere che vi siano delle entità matematiche. Poi, posto che esistono delle entità matematiche, ci domandiamo: quali sono i metodi migliori con i quali poter determinare precisamente quali entità matematiche esistono e di quali proprietà tali entità godono? A questo, la nostra esperienza fino a oggi risponde a chiare lettere: attraverso metodi matematici, gli stessi usati dai matematici; tali metodi sono stati efficaci nel produrre tutta la matematica, compresa quella parte di essa che è attualmente applicata nella fisica.

Questa citazione suggerisce una versione di AI epistemico per il platonismo per così dire in due tempi. Inizialmente, un argomento come [6] (ma formulato senza il 'sole' nella premessa (6.i)) potrebbe essere utilizzato per derivare la conclusione molto generale che siamo giustificati a ritenere che esistano degli oggetti matematici, basandosi sulla premessa che certe teorie matematiche, o certe porzioni delle nostre teorie matematiche, sono indispensabili per certe teorie scientifiche che siamo giustificati a ritenere vere. Poi dovremmo domandarci se l'ammissione che tali oggetti esistono sia compatibile, secondo argomenti matematici accettati dalla stessa comunità matematica, con la negazione dell'esistenza di altri oggetti matematici, o se non ne suggerisca invece l'esistenza. La massima naturalista che sarebbe integrata da AI sarebbe più o meno la seguente: siamo giustificati a ritenere che esistano solo: *a*) gli oggetti inclusi nell'impegno ontologico delle teorie scientifiche che siamo giustificati a ritenere vere in base all'indagine scientifica; oppure *b*) quelli la cui esistenza è suggerita, in base all'esistenza dei primi, da appropriate argomentazioni matematiche.

In accordo con questa formulazione, il naturalismo ammette che la stessa pratica matematica pura possa partecipare a pieno titolo alla giustificazione delle nostre credenze

ontologiche, almeno di quelle relative alla matematica stessa (e quindi anche dei nostri giudizi a proposito della verità delle nostre teorie matematiche). Ma riconosce alla pratica matematica questo potere solo in quanto, preventivamente, l'esistenza di almeno alcuni oggetti matematici sia stata garantita da considerazioni di carattere empirico. Tutto ciò è perfettamente conseguente alle tesi di Maddy espone nel §IV.4<sup>17</sup>, e è una posizione che Maddy difende e sviluppa in numerose occasioni (1994, 1997, 2007), in quanto parte integrante della sua visione naturalista della matematica. Vi è tuttavia chi, come Burgess e Rosen (1997, p. 212), considererebbe anche quella di Maddy una concezione ancora troppo timida, in quanto “un naturalista compiuto [*thoroughgoing*]” dovrebbe considerare il fatto che la matematica stessa si serve usualmente del riferimento a oggetti astratti come una ragione sufficiente per acquisire una giustificazione per la loro esistenza (su questo cf. anche Maddy, 2005). Un naturalista di questo tipo sarebbe in realtà sarebbe ben diverso da Quine o da coloro che, come Quine, ritengono che l'unica giustificazione possibile per la nostra credenza nella verità di teorie matematiche e nell'esistenza dei loro oggetti derivi dall'indispensabilità di quelle teorie per le scienze empiriche, e non dovrebbe quindi tenere AI in grande considerazione, a meno che non lo intenda in un senso intra-matematico, ovvero come un argomento che afferma che esistono tutti gli oggetti astratti che sono indispensabili per la teorie matematiche accettate dalla comunità matematica: un punto di vista che, sia pure in un contesto filosofico differente, riecheggia l'idea propria dello strutturalismo *ante rem* che la matematica bada a se stessa (cf. §V.3).

### 3.2 *Contro il realismo scientifico*

Per quanto AI possa (e forse debba) formularsi indipendentemente dal richiamo a qualche forma di naturalismo, esso deve necessariamente integrare una premessa che asserisce che certe teorie scientifiche sono vere o che siamo giustificati a ritenerle tali. Non è certamente necessario essere naturalisti per ammettere una premessa simile, ma sicuramente farlo presuppone una una forma di realismo scientifico che è, per certi versi, prossima al naturalismo: un naturalista potrebbe infatti difficilmente negare, se non che certe teorie scientifiche siano vere, almeno siamo giustificati a ritenerle tali.

Strettamente parlano, la condizione [*Naturalismo semantico*] non richiede che si ammetta che siamo giustificati a ritenere vere le nostre teorie scientifiche, e neppure che vi siano (anche solo in linea di principio) teorie scientifiche che siamo giustificati a ritenere vere: [*Naturalismo semantico*] infatti fornisce semplicemente le condizioni necessarie per le giustificazioni in questione, ma di per sé non asserisce che tali condizioni si diano. Negare che si diano, tuttavia, significherebbe ammettere che, pur essendo l'indagine scientifica l'unica fonte di giustificazione per i nostri giudizi relativi alla verità delle nostre teorie, essa non sia di fatto in grado di giustificare nessuno di quei giudizi, e che questi siano (o perfino debbano essere) tutti ingiustificati. E questa è una conclusione scettica che, per quanto compatibile alla lettera con [*Naturalismo semantico*], è evidentemente in contrasto con lo spirito del naturalismo.

---

<sup>17</sup>Cf. cap. IV, n.30.

Il realismo scientifico è tuttavia una posizione tutt'altro che semplice. Possiamo dire sommariamente che un realista scientifico pensa che le nostre teorie scientifiche mirino a fornire una descrizione letteralmente vera della realtà, e che accettare una teoria scientifica significhi credere nella sua verità, in particolare nel fatto che i suoi asserti sia osservativi che teorici, presi alla lettera, siano veri (e non, per esempio, credere solo ai suoi asserti osservativi). Più precisamente, Psillos (1999, p. xix) definisce il realismo scientifico come la congiunzione di tre tesi, una metafisica, una semantica, e una epistemica. La prima asserisce che il "mondo" ha una struttura definita e indipendente dall'attività cognitiva dei soggetti umani. La seconda asserisce che le teorie scientifiche devono essere intese letteralmente, che esse devono essere valutate in termini di verità e di falsità e possono essere vere o false, e che i termini che nei loro asserti (intesi letteralmente) sembrano denotare oggetti, siano essi osservabili o teorici, effettivamente sono intesi farlo; questi oggetti sono quindi postulati da tali teorie, e "popolano il mondo" se esse sono vere. La terza asserisce che le teorie scientifiche "mature" che hanno un potere predittivo attestato devono essere ritenute confermate e "approssimativamente vere," così che gli oggetti da esse postulate, o almeno oggetti molto simili a essi, "si trovano nel mondo".

Tutte e tre queste tesi sono controverse. Alcune delle posizioni discusse nel §2 possono intendersi come obiezioni alla seconda tesi. Altre obiezioni sono quelle che derivano da posizioni anti-realiste come quella di Van Fraassen (1980), su cui torneremo nel §4.2. Questo a parte, vi sono varie obiezioni per mettere in dubbio le tesi precedenti.

Si potrebbe per esempio osservare che la nozione di teoria scientifica matura è assai vaga e comunque molto delicata, dal momento che la sua chiarificazione dipende dalla possibilità di tracciare una distinzione adeguata fra teorie scientifiche buone e altre che non lo sono. Questo è un punto cruciale per AI: chi vuole asserire che AI è un argomento corretto deve senz'altro accettare che sia possibile, almeno in linea di principio, tracciare questa distinzione, oppure deve fare appello alla supposizione vi siano certamente teorie scientifiche vere o almeno giustificate, anche se noi non siamo in grado di identificarle con sufficiente sicurezza.

Si potrebbe poi pensare che, per quanto rigorosamente condotte, le nostre osservazioni sperimentali sono necessariamente influenzate da fattori soggettivi, sociologici, o comunque da certi presupposti metafisici o anche solo da degli schemi concettuali che sono imposti da noi, e che quindi esse non possano servire a giustificare teorie che pretendono di essere "approssimativamente vere" in quanto descrizioni di un mondo indipendente dalle nostre attività cognitive. Questa posizione può declinarsi in vari modi, alcuni dei quali possono risultare più plausibili di altri per chi crede comunque che la scienza abbia molte virtù. Fra questi ultimi sarebbe sufficiente citare Karl Popper (1934) e la sua nozione di "metafisica influente" (su cui cf. Watkins, 1958).

Si potrebbe ancora insistere sul fatto che le teorie scientifiche sono sotto-determinate dall'evidenza empirica: vi potrebbero essere (e vi sono di fatto) numerose teorie scientifiche differenti e incompatibili tra loro e tuttavia empiricamente equivalenti. Per

qualcuno questa semplice osservazione di per sé implausibile l'idea che le nostre teorie mature siano anche solo approssimativamente vere (una posizione attribuita per esempio a Duhem, 1908, e sostenuta tra gli altri dagli stessi Putnam 1983, Quine, 1975, e Van Fraassen, 1980).

Infine si potrebbero portare molti esempi per mostrare come la storia sia costellata di teorie che si sono ritenute empiricamente adeguate ai loro scopi in una certa epoca, ma che sono poi state rigettate come palesemente false. Il cosiddetto argomento dell'induzione pessimista (cf. Laudan, 1981) potrebbe allora farci pensare che anche le teorie scientifiche considerate oggi migliori, per quanto mature (in qualche senso) e ben giustificate, subiranno lo stesso destino, e che quindi non abbiamo ragioni per sostenere di disporre, o anche solo di poter disporre in linea di principio, di descrizioni approssimativamente vere del "mondo".

Questi pochi accenni non rendono certo giustizia di un dibattito vastissimo in filosofia della scienza (Per una panoramica delle questioni più rilevanti, cf. Boy, 1991, Psillos, 1999, e Boyd, 2002). Quello che ci preme notare è che vi sono numerosi modi di mettere in discussione il realismo scientifico, e che molti di essi possono valere come obiezioni contro la premessa di AI che asserisce che certe teorie scientifiche sono vere o che siamo giustificati a ritenerle tali. Si potrebbe reagire almeno a alcune di queste obiezioni, indebolendo in modo appropriato la nozione di giustificazione per difendere la versione epistemica di tale premessa nelle versioni epistemiche di AI. Il rischio sarebbe tuttavia quello di indebolire troppo tale nozione, fino al punto di mettere in pericolo la correttezza altre premesse di tale argomento, quelle che asseriscono che siamo giustificati a ritenere vere delle teorie scientifiche solo se lo siamo a ritenere vera le eventuali teorie matematiche indispensabili per esse, e che siamo giustificati a ritenere che esistano gli oggetti di queste ultime.

#### **4. Contro l'olismo della conferma**

Nel §VI.7 abbiamo osservato che, in quanto nozione epistemica, la nozione di conferma può al più intervenire in versioni epistemiche di AI, e che lo stesso vale per l'olismo della conferma. Abbiamo visto inoltre che l'olismo della conferma è rilevante per AI solo se si ammette che il carattere olista della conferma delle teorie scientifiche faccia sì che la giustificazione prodotta dalla conferma empirica si trasmetta alle teorie matematiche che sono per esse indispensabili, o produca una giustificazione per la credenza che esistono gli oggetti di queste ultime teorie. Abbiamo infine mostrato sotto quali condizioni questo possa venir ammesso. Qui considereremo alcune modalità per criticare AI a partire da una critica al modello olista della conferma, che possiamo classificare in tre categorie di critiche, incentrate rispettivamente su: *a*) il modello ipotetico-deduttivo della conferma, che lo stesso Quine adotta; *b*) la plausibilità di una concezione olista della conferma; *c*) la possibilità di formulare AI senza fare appello all'olismo della conferma.

##### *4.1 Le critiche al modello ipotetico-deduttivo della conferma*

Non ci pare il caso di dedicare molto spazio al punto (a), dal momento che la discussione sul modo in cui una teoria scientifica possa essere confermata è stata, a partire dalla metà del secolo scorso, estremamente ampia e, in generale, indipendente da AI.

È tuttavia importante sottolineare che già ai tempi di Quine il modello ipotetico-deduttivo era sottoposto a pesanti critiche, sollevate in particolare da Carl Gustav Hempel (1945). È infatti noto che tale modello, almeno nella versione semplice in cui lo abbiamo presentato nel §VI.7 — secondo la quale un'evidenza  $e$  conferma un'ipotesi  $h$  se  $e$  segue logicamente da  $h$  (quali che siano  $e$  e  $h$ ) — dà luogo a numerosi paradossi, cercando di risolvere i quali sono stati gradualmente elaborati modelli alternativi assai più sofisticati (rassegne di questa discussione si trovano in Glymour, 1980 e Earman e Salmon, 1999).

Quine era ben consapevole di questi problemi e, anche se non ha mai offerto una vera e propria teoria originale della conferma (come egli stesso dichiara, cf. 1981d, p. 453), ha tentato di apportare alcuni accorgimenti al modello ipotetico-deduttivo nel tentativo di bloccare i suddetti paradossi (Quine e Ullian, 1978). Questi tentativi sono stati comunque sottoposti a critica da parte di Chihara (1981).

Resta che il carattere olistico della conferma non dipende dal fatto che questa soddisfi il modello ipotetico-deduttivo. È ovvio che tale modello non impone l'olismo della conferma. Viceversa, quest'ultimo può essere difeso anche senza adottare tale modello (per esempio come sostenuto in Hellman, 1999, sulla base di un modello probabilistico della conferma). Ne segue che i punti (b) e (c) sono di gran lunga più rilevanti del punto (a) per la nostra discussione di AI.

#### 4.2 *L'empirismo contrastivo di Sober*

La principale critica a AI fra quelle che riguardano il punto (b) — ovvero prendono le mosse dalla negazione del carattere olistico della conferma — è stata mossa da Elliot Sober (1993), secondo il quale l'evidenza empirica che conferma le nostre teorie scientifiche non conferma alcuna teoria matematica, né giustifica alcuna nostra credenza quanto all'esistenza dei loro oggetti. Anche nel caso in cui vi siano certe teorie matematiche indispensabili per delle teorie scientifiche, la conferma di queste ultime non può quindi trasferirsi alle prime teorie, né produrre una giustificazione per la nostra credenza nell'esistenza dei loro oggetti.

La posizione di Sober si richiama esplicitamente all' "empirismo costruttivo" che Van Fraassen (1980) ha esplicitamente contrapposto al realismo scientifico. Conviene quindi esporre brevemente le idee di quest'ultimo.

Secondo Van Fraassen, lo scopo principale delle nostre teorie scientifiche non è quello di giungere a una descrizione vera (anche solo approssimativamente) complessivamente del mondo, ma è piuttosto quello di render conto in modo corretto dei soli fenomeni osservabili. Per farlo, possiamo postulare entità fisiche non osservabili o richiamarci a presunti oggetti matematici, ma quello che diciamo a proposito di tali entità o oggetti non può in nessun modo implicare alcuna giustificazione per la loro esistenza. Accettare una teoria scientifica, per Van Fraassen, non equivale a credere nella verità di tutti gli asserti

della teoria, intesi letteralmente, ma solo a credere vero ciò che la teoria dice a proposito di oggetti e fenomeni osservabili (cioè, come si usa dire, a credere che la teoria sia empiricamente adeguata, il che non comporta di per sé che essa sia complessivamente vera).

Una tale posizione non è certo facile da articolare. Per tornare a un esempio già visto, un asserto come ‘l’accelerazione di gravità ai poli terrestri è uguale a  $9,823 \text{ m/s}^2$ ’ sembra dirci qualcosa tanto a proposito di un fenomeno osservabile (valutato tramite opportuni esperimenti), quanto di un numero razionale (e di un’entità la cui natura ontologica può essere variamente valutata, come l’accelerazione di gravità). Se accettiamo la teoria di cui esso fa parte — cioè riteniamo che essa sia empiricamente adeguata — dovremmo ritenere che questo asserto sia vero (in quanto ci dice qualcosa a proposito di oggetti osservabili, i poli appunto) oppure che non lo sia (in quanto ci dice qualcosa anche a proposito di un numero razionale)? E come sarebbe possibile scindere, in quell’asserto, una parte del suo contenuto che riguarda esclusivamente oggetti osservabili, e che potremmo ritenere quindi vera, e una parte del suo contenuto che non li riguarda? Van Fraassen ha ovviamente delle risposte a domande come queste, che qui non possiamo considerare<sup>18</sup>. Ciò che più ci importa è che egli non può ammettere l’inferenza alla spiegazione migliore (cf. §VI.3.2.3), se quest’ultima conduce a giustificare l’esistenza di entità fisiche non osservabili o di oggetti matematici<sup>19</sup>. Egli accetta che delle teorie in cui si postulano delle entità fisiche non osservabili e/o degli oggetti matematici possano consentire di spiegare efficacemente determinati fenomeni, ma ritiene che il fatto che ciò avvenga non costituisca una ragione sufficiente per ritenersi giustificati nell’ammettere l’esistenza di tali entità e oggetti, riguardo alla quale dovremmo mantenere invece una posizione agnostica.

Secondo questa presa di posizione, entità fisiche non osservabili e oggetti matematici sono analoghi da un punto di vista epistemico. Vi è quindi almeno un punto su cui l’empirismo costruttivo e olismo della conferma risultano accomunati. In entrambi i casi, la giustificazione dell’esistenza delle entità fisiche non osservabili e quella dell’esistenza degli oggetti matematici di cui una teoria scientifica tratta si comportano allo stesso modo in relazione alla conferma della teoria in questione: come per l’olista tanto l’esistenza delle prime quanto quella dei secondi è giustificata qualora la teoria sia confermata, così per van Fraassen la conferma della teoria non costituisce una giustificazione per credere all’esistenza né delle prime né dei secondi.

L’empirismo contrastivo di Sober si allontana dalla posizione di van Fraassen su questo punto preciso, ritenendo che sia un errore considerare che la giustificazione dell’esistenza delle entità fisiche non osservabili e quella dell’esistenza degli oggetti matematici di cui una teoria scientifica tratta si comportino allo stesso modo in relazione alla conferma della teoria. Per Sober, mentre l’inferenza alla spiegazione migliore è corretta quando conduce a giustificare l’esistenza di entità fisiche non osservabili, essa è scorretta quando conduce a

---

<sup>18</sup>Il dibattito sull’empirismo costruttivo è vastissimo. Cf. Churchland e Hooker (1985) e Monton (2007).

<sup>19</sup>È un punto controverso se Van Fraassen possa, o persino debba, rigettare l’inferenza alla spiegazione migliore solo nel caso in cui essa condurrebbe a giustificare l’esistenza di entità non osservabili o oggetti matematici, o se debba rigettarla in generale come un principio non valido. Cf. Psillos (1999), pp. 211-215.

giustificare l'esistenza di oggetti matematici<sup>20</sup>.

Sober ha, come altri (per esempio Carnap, 1950b, 1952, o Jaakko Hintikka, 1968) una concezione probabilistica della conferma (per un resoconto approfondito della discussione relativa all'approccio probabilista alla conferma, cf. Lakatos, 1968, Howson e Urbach, 1989, Kuipers, 1997). Secondo Sober, la conferma di una teoria dipende dal "principio di verosimiglianza": un'osservazione  $o$  conferma un'ipotesi scientifica  $h_1$  rispetto a un'altra ipotesi scientifica  $h_2$  se e solo se  $Prob.(o | h_1) > Prob.(o | h_2)$ , cioè se e solo se la probabilità che  $h_1$  conferisce a  $o$  (la probabilità che si verifichi  $o$  se  $h_1$  è vera) è maggiore di quella conferita a  $o$  da  $h_2$ , cosa che si può anche esprimere dicendo che, data  $o$ ,  $h_2$  è più verosimile di  $h_1$ .

Il principio di verosimiglianza può permettere di discriminare fra due ipotesi  $h_1$  e  $h_2$  sulla base di un'osservazione  $o$  (ciò che avviene appunto se  $Prob.(o | h_1) > Prob.(o | h_2)$ ), ma non permette in generale di discriminare tra un'ipotesi  $h$  e qualunque ipotesi alternativa: in alcuni casi infatti il confronto fra due ipotesi alternative in base a questo principio è impossibile, quale che sia l'osservazione disponibile. Un facile esempio di tale situazione è il seguente (che richiama il celebre paradosso sulla conferma di Goodman, 1954). Supponiamo che  $h_1$  sia 'Andrea, e non Marco, ha commesso il delitto',  $h_2$  sia 'Marco, e non Andrea, ha commesso il delitto', e  $h_3$  sia 'Andrea non ha commesso il delitto anche se tutta l'evidenza disponibile fa sembrare che lo abbia commesso'. Un determinato insieme di osservazioni potrà permettere di discriminare tra  $h_1$  e  $h_2$  ma nessuno sarà in grado di discriminare tra  $h_1$  e  $h_3$ .

Se si ammette, con Sober, che il principio di verosimiglianza sia il principio fondamentale che governa la conferma, ne segue che non si perviene mai a confermare una singola ipotesi (o una congiunzione di ipotesi, cioè una teoria), come tale: quale che sia tale ipotesi (o teoria), essa può, al più essere confermata solo relativamente a una o più ipotesi (o teorie) rivali che conferiscono alle osservazioni rilevanti probabilità differenti.

Secondo Sober, in questo modello della conferma è possibile confermare (o infirmare) ipotesi che asseriscono l'esistenza di entità fisiche non osservabili, ma non è possibile né confermare né infirmare teorie matematiche: anzi, in questo modello, "l'indispensabilità non è un sinonimo della conferma empirica, ma è proprio la sua antitesi" (*ib.*, p. 44).

Affinché si possa creare una situazione in cui  $M_1$  e  $M_2$  vengono rispettivamente confermata e infirmata, il principio di verosimiglianza dovrebbe assumere la seguente forma: un'osservazione  $o$  conferma un'ipotesi matematica  $M_1$  rispetto a un'altra ipotesi matematica  $M_2$ , in congiunzione con un insieme di assunzioni di sfondo  $A$ , se e solo se  $Prob_{.A}(o | M_1) > Prob_{.A}(o | M_2)$ . Per Sober, questa esemplificazione del principio di verosimiglianza è del tutto implausibile: ciò mostrerebbe che le teorie matematiche non sono il tipo di teorie che possono essere confermate, se la conferma funziona secondo il modello contrastivo.

A giustificazione di ciò, tuttavia, Sober si limita solamente a suggerire, senza

---

<sup>20</sup>Cf. cap. VI, n.17.

approfondirle, due ragioni, considerando il solo esempio dell'aritmetica. Sober ritiene (*ib.*, pp. 46):  $\alpha$ ) che l'aritmetica non ammette nessuna alternativa (con la quale poter essere eventualmente confrontata); e  $\beta$ ) che, anche se vi fosse una alternativa possibile, essa non sarebbe tale da conferire a una data osservazione  $o$  (in congiunzione con le assunzioni di sfondo  $A$ ) una probabilità diversa da quella conferita dalla stessa aritmetica. Se si accettano ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), secondo Sober, il principio di verisimiglianza, se applicato a due teorie matematiche alternative, si rivela del tutto "irrealistico" (*ib.*, p. 45). Questo mostrerebbe che, al contrario di quanto ritiene l'olista della conferma, non è in nessun senso possibile parlare di conferma empirica nel caso di teorie matematiche.

Tuttavia, non è chiaro come ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) si debbano intendere precisamente. Per quanto riguarda ( $\alpha$ ), Sober non chiarisce affatto che cosa si dovrebbe intendere come una teoria alternativa all'aritmetica, e *a fortiori* a una qualunque teoria matematica. È chiaro che in un senso molto debole è sempre possibile trovare un'alternativa a una teoria matematica semplicemente eliminando o modificando uno o più dei suoi assiomi o definizioni (fatto salvo il requisito ovvio che l'alternativa così ottenuta sia consistente): si pensi al caso delle geometrie non euclidee (cf. Palladino e Palladino, 2008).

Questo sembra dover valere anche per l'aritmetica. Per esempio se  $PA^1$  è l'aritmetica di Peano del primo ordine (come usualmente intesa), è sufficiente rimpiazzare gli assiomi (o definizioni) che introducono l'addizione con altri che introducono un'operazione diversa, per esempio non associativa, per ottenere una teoria diversa che ne è in qualche senso un'alternativa. Chiamiamola  $PA^{1*}$ . Siano ora  $s_1$  e  $s_2$  due teorie scientifiche ottenute a partire da uno stesso corpo di asseriti nominalisti (o comunque non matematici) aggiungendo a esso rispettivamente l'intera  $PA^1$  e la sola  $PA^{1*}$ . Si potrebbe supporre che vi possa essere un'osservazione  $o$  che, in congiunzione alle stesse assunzioni di sfondo, conferisce probabilità diverse a  $s_1$  rispetto a  $s_2$ , e che quindi confermi  $s_1$  rispetto a  $s_2$  e indirettamente quindi confermi  $PA^1$  rispetto a  $PA^{1*}$  (o viceversa). Per negare questa possibilità Sober potrebbe negare che  $PA^{1*}$  sia una genuina alternativa all'aritmetica, oppure fornire un argomento per mostrare che nessuna osservazione possa, relativamente alle stesse assunzioni di sfondo, conferire probabilità diverse a  $PA^1$  rispetto a  $PA^{1*21}$ . Non è tuttavia chiaro quale sia la posizione di Sober a questo proposito, e ancora meno chiaro è come egli pensa che si possa generalizzare la sua posizione al di là del caso dell'aritmetica<sup>22</sup>.

#### 4.3 Maddy e l'obiezione della pratica scientifica

Abbiamo visto (cf. §3.1) che Maddy ritiene che una qualunque versione di AI epistemico per il platonismo formulata con il naturalismo sia in contrasto con la pratica matematica,

<sup>21</sup>Non è chiaro che cosa Sober intenda parlando di assunzioni di sfondo. Sembrerebbe naturale pensare che queste includano dei principi ponte (cf. §IV.1). Ma, se così fosse, sembrerebbe implausibile pensare che due teorie scientifiche per cui due teorie matematiche diverse sono indispensabili possano essere confrontate con l'esperienza in base alle stesse assunzioni di sfondo. Per contrastare la pretesa di Lobacevski, che pensava di poter confermare sperimentalmente la geometria iperbolica, Poincaré (1902) fornisce un argomento volto a mostrare che nessuna evidenza sperimentale può favorire tale geometria rispetto a quella di Euclide. Il suo argomento gioca tuttavia proprio sul fatto che tali geometrie non possono essere confrontate con l'esperienza se non in base a principi ponte diversi.

<sup>22</sup>Per altre critiche alla posizione di Sober, cf. Resnik (1995), Hellman (1999), e Colyvan (1999; 2001 pp. 126-134). Per un'altra critica a AI che si rifà in parte anche alla posizione di Sober, cf. Vineberg (1996).



almeno se il naturalismo è formulato, fedelmente alle concezioni di Quine, come in [Naturalismo ontologico]. Maddy propone quindi una versione modificata di AI, che integra una versione modificata del naturalismo che lo renderebbe un argomento più plausibile alla luce del confronto con la pratica matematica. Questo non comporta di per sé che AI nella versione modificata sia corretto. Maddy ritiene infatti che non lo sia.

Le ulteriori critiche di Maddy, che ricadono anch'esse nella categoria (b), si devono al fatto che, anche nella versione modificata, AI per il platonismo fa comunque appello all'olismo della conferma, che secondo Maddy non rappresenta fedelmente il modo in cui effettivamente gli scienziati ritengono confermate le teorie scientifiche e le loro componenti.

Quine (1955, p. 247) suggerisce di valutare una teoria scientifica in base a cinque proprietà: semplicità, familiarità dei principi impiegati (per esempio il fatto di impiegare leggi già conosciute in altre teorie per spiegare fenomeni che necessiterebbero altrimenti di nuove leggi), "ampiezza [*scope*]" (cioè la capacità spiegare con un'unica teoria fenomeni che altrimenti necessiterebbero di teorie separate), "fecondità" (la capacità di consentire ulteriori estensioni della teoria stessa), e infine il fatto che gli esperimenti fatti per testare le conseguenze della teoria che possono venire testate sperimentalmente abbiano dato esiti positivi. Supponiamo, come Maddy stessa fa (1997, p. 133), che queste proprietà siano quelle a cui ci richiamiamo nel giustificare le nostre teorie scientifiche. Chiamiamo qui per brevità 'Q-giustificata' una teoria che è giustificata in base a esse. Maddy sembra anche ammettere (presumibilmente richiamandosi alla quinta delle precedenti proprietà) che una teoria ritenuta Q-giustificata è anche ritenuta confermata.

Maddy intende mostrare, attraverso casi concreti presi dalla storia della scienza, che l'olismo della conferma è in contrasto con la pratica scientifica: vi sono stati casi importanti in cui, anche se una certa teoria scientifica era non solo ritenuta confermata, ma più generalmente ritenuta Q-giustificata, non tutte le sue componenti erano ritenute ugualmente confermate, neppure quelle ritenute indispensabili.

Per fare un esempio, Maddy (1997, pp. 135-146) ripercorre il modo in cui l'atteggiamento della comunità scientifica si è sviluppato in riferimento all'evoluzione della chimica, rispetto all'ipotesi della costituzione atomica della materia, ovvero dell'esistenza degli atomi (la cosiddetta 'teoria atomica'). Maddy nota che, nel corso del XIX secolo, attraverso lo sviluppo della teoria chimica (grazie ai lavori di Dalton, Berzelius, Dumas, Cannizzaro, e altri), molte ipotesi della chimica vennero rafforzate dall'evidenza sperimentale richiamandosi, fra l'altro, alla stessa teoria atomica. Quest'ultima venne poi impiegata anche in altri campi, per esempio in fisica attraverso lo studio della teoria cinetica del calore. Maddy nota quindi che, intorno alla fine del XIX secolo, la teoria atomica era generalmente ritenuta indispensabile per molte teorie ritenute Q-giustificate. Tuttavia Maddy osserva che questo non impedì a molti (per esempio Duhem, Poincaré, e Mach) di rimanere scettici sull'esistenza degli atomi, o persino di non credervi affatto. Lo scetticismo era motivato dall'assenza di una "verificazione diretta" della teoria atomica, che

rendesse in un qualche senso osservabile l'esistenza degli atomi. Questo scetticismo è stato eliminato solo negli anni tra il 1908 e il 1913, quando gli esperimenti di Perrin hanno permesso di confermare la teoria atomica direttamente, e non solo indirettamente in quanto indispensabile per altre teorie ritenute Q-justificate, e quindi confermate. Dettagli a parte, questo mostrerebbe, a detta di Maddy, che anche una teoria ritenuta indispensabile per una teoria scientifica ritenuta confermata e perfino Q-justificata possa essere, e di fatto sia stata, ritenuta non confermata, contro ciò che richiede l'olismo.

Si potrebbe obiettare che ciò che la ricostruzione di Maddy mostra è che le cinque proprietà indicate da Quine non sono sufficienti a stabilire quando una teoria deve essere ritenuta giustificata, e che quindi la critica riguarda tali condizioni, e non l'olismo della conferma, né quindi AI (epistemico) formulato con l'olismo

Sembra però che l'argomento di Maddy sopravviverebbe all'obiezione. Il sostenitore di AI (epistemico) per il platonismo formulato con l'olismo ritiene che il tipo di evidenza empirica che permette di confermare una teoria scientifica permette di confermare anche tutte le teorie indispensabili per essa. Supponiamo però, come suggerisce l'esempio della teoria atomica, che per essere confermata una teoria debba essere sottoposta a un qualche tipo di verifica diretta. Se così fosse, nessun asserto che asserisce l'esistenza di entità matematiche potrebbe essere ritenuto confermato, nemmeno se esso è impiegato in maniera indispensabile in una teoria scientifica confermata. Non potremmo quindi sostenere, come fa l'olista, che è lo stesso tipo di evidenza che conferma tanto le teorie scientifiche quanto le teorie matematiche per esse indispensabili.

Maddy (1995; 1997, pp. 143-157) offre altri argomenti oltre a quello brevemente presentato. Uno, in particolare, consiste nel sostenere che, sotto opportune condizioni, molte delle idealizzazioni che si impiegano comunemente nelle scienze (piani privi di attrito, profondità infinite di masse di liquidi, etc.), dovrebbero essere considerate indispensabili per certe teorie scientifiche, e che gli asserti che trattano di simili entità idealizzate non potrebbero essere in ogni caso rimpiazzati da opportune parafrasi che non ne trattano. Ciò nonostante, nessuno crede letteralmente alla verità degli asserti che ne trattano.

Gli argomenti presentati da Maddy necessiterebbero di uno spazio molto maggiore. Resta comunque che Maddy (1995, p. 281) ritiene di poter concludere che "dobbiamo ammettere una distinzione tra parti di una teoria che sono vere, e parti che sono semplicemente utili", anche se queste parti sono indispensabili, e che quindi "l'indispensabilità della matematica in teorie scientifiche ben confermate non serve [...] a stabilire la loro verità", né l'esistenza degli oggetti di cui trattano.

#### *4.4 Resnik e AI pragmatico*

Veniamo ora alle considerazioni relative al punto (c). Molti sembrano concedere che delle versioni di AI epistemico possano evitare di richiamarsi all'olismo della conferma. Lo stesso Colyvan sembra a tratti concederlo (2001, p. 37), e altri, come Dieveney (2007), lo

hanno sostenuto<sup>23</sup>. Michael Resnik (1995; 1997, cap. 3.1), in particolare, ha suggerito una versione di AI epistemico scevra da ogni richiamo all'olismo della conferma<sup>24</sup>.

Secondo Resnik (1995, pp. 168-169) è un fatto che gli scienziati presuppongano la verità delle teorie matematiche che impiegano nelle loro teorie scientifiche, che assumano l'esistenza dei loro oggetti, e che si servano delle proprietà di questi ultimi nel descrivere i fenomeni studiati delle loro teorie scientifiche. Questo avviene, secondo Resnik, per qualunque teoria scientifica, anche se la teoria non è vera, o nemmeno confermata. Si tratta di un aspetto che riguarda la pratica scientifica stessa, e non la verità o la conferma delle teorie scientifiche. Resnik vuole mostrare che questa pratica è giustificata. Per farlo, si propone di offrire una versione di AI che non dipende dal fatto che una particolare teoria scientifica sia vera o ritenuta vera, o nemmeno confermata, ma si basa esclusivamente su fattori pragmatici. In quanto tale, esso presenta premesse molto diverse da quelle delle versioni di AI considerate finora<sup>25</sup>. L'argomento è formulato in più parti, che presentiamo assieme (con leggere modifiche) per semplicità:

[AI pragmatico]

i) Nel formulare le sue leggi e nel condurre le sue derivazioni, la scienza assume l'esistenza di molti oggetti matematici e la verità di molta matematica.

ii) Queste assunzioni sono indispensabili per la scienza; inoltre, molte importanti conclusioni che vengono tratte nella scienza non potrebbero esserlo senza considerare veri gli asserti matematici.

[9a] -----

iii) Siamo quindi giustificati a trarre conclusioni nella scienza solo se siamo giustificati a ritenere vera la matematica che è utilizzata in essa.

iv) Siamo giustificati nel fare scienza [*in doing science*].

v) L'unico modo che conosciamo di fare scienza include il fatto che si traggano conclusioni in essa.

[9b] -----

vi) Quindi siamo giustificati a ritenere vera la matematica menzionata in (iii).

[9c] -----

vii) Quindi la matematica è vera.

Questo argomento differisce da tutti quelli che considerati finora perché non riguarda in senso stretto delle teorie scientifiche intese come insieme di asserti, ma la pratica scientifica

---

<sup>23</sup>Chihara (2004, §5.6), che, diversamente da quanto abbiamo suggerito noi nel §VI.2.1, legge l'argomento Quine-Putnam formulato in Putnam (1971) come un argomento epistemico, sottolinea che lo stesso Putnam non fa alcun riferimento all'olismo della conferma.

<sup>24</sup>Indipendentemente da quanto concerne AI, Resnik (1997, cap. 7) difende invece l'olismo da numerose critiche. Per una discussione cf. Peressini (2008).

<sup>25</sup>Questo argomento ricorda in parte un argomento in favore del platonismo suggerito da Burgess e Rosen (2005, pp. 515-517).

e la nostra giustificazione a condurla in un certo modo: come dice Resnik (*ib.* p. 171), esso non stabilisce che “l’evidenza per la scienza (cioè un corpo di asserti) è anche evidenza per le sue componenti matematiche (un altro corpo di asserti)”, ma che “la giustificazione per il fare scienza (cioè un atto) giustifica anche il nostro accettare come vera la matematica che la scienza impiega (un altro atto)”.

Resnik ritiene che la prima parte dell’argomento — il sotto-argomento [9a] — sia da solo sufficiente per contrastare le posizioni di chi vuole negare la verità degli asserti matematici. La conclusione (9.iii) ci dice che non ritenere vere le nostre teorie matematiche renderebbe la nostra pratica scientifica ingiustificata. La relazione deduttiva tra (9.i), (9.ii) e (9.iii) sembra tuttavia oscura. Al più si potrebbe dire che la (9.iii) segua per contrapposizione dalla seconda parte di (9.ii), quella che segue ‘inoltre’. Resnik sembra quindi semplicemente assumere che le cose stanno come questa seconda parte di (9.ii), e quindi anche (9.iii), dicono. Ma non è allora chiaro quale sia il ruolo della premessa (9.i), anche se Resnik (1992, 1995, pp. 169; 1997, pp. 43-44) insiste su di essa presentando in suo supporto alcuni casi storici presi dalla storia della biologia e dell’astronomia.

Messe a parte le difficoltà dell’argomento [9a], resta che (9.iii) è una conclusione solamente condizionale: di per sé non ci dice che siamo giustificati a ritenere vere le teorie matematiche indispensabili per la pratica scientifica. Si potrebbe infatti sostenere che non abbiamo nessuna giustificazione per il fatto che facciamo scienza (impieghiamo la stessa espressione di Resnik, pur comprendendone la vaghezza). La premessa (9.iv) assume che abbiamo una tale giustificazione, e la (9.v) specifica che l’unico modo che conosciamo di fare scienza prevede, tra le altre cose, che all’interno delle teorie scientifiche si traggano determinate conclusioni. Da questo e da (9.iii) segue che siamo giustificati a ritenere vere le teorie matematiche che impieghiamo nella scienza. Da qui Resnik pensa di poter derivare (9.vii), la conclusione del sotto-argomento [9b], che è una conclusione che non riguarda più la giustificazione di un atto (il fare scienza, o l’accettare come vera una teoria), ma riguarda direttamente una teoria, in particolare una teoria matematica. Il passaggio da (9.vi) a (9.vii), cioè il sotto-argomento [9c], è secondo Resnik giustificato dal naturalismo, che egli definisce sinteticamente (1995, p. 166; 1997, p. 45) come la tesi secondo cui “la scienza è il nostro ultimo giudice [*arbiter*] sulla verità e sull’esistenza” (formulazione che, con opportune precisazioni, sembra potersi considerare equivalente alla congiunzione di [*Naturalismo semantico*] e [*Naturalismo ontologico*]). Tuttavia, non è chiaro come il naturalismo, di per sé, possa garantire il passaggio dalla giustificazione di una teoria alla sua verità.

Per quanto la formulazione dell’argomento [9a-c] faccia sorgere questo e altri dubbi, resta il fatto che Resnik è stato il primo, nel dibattito recente, a sostenere che una qualche versione di AI potesse darsi anche senza fare appello all’olismo della conferma.

## 12. Conclusioni

Le considerazioni sistematiche a proposito di AI contenute nel capitolo VI e la

ricostruzione del dibattito accesi su tale argomento offerta in questo capitolo dovrebbero aver mostrato tanto l'interesse e i meriti di questo argomento, quanto le sue intrinseche difficoltà. I suoi meriti principali consistono, a nostro parere, nella capacità di legare due prospettive filosofiche classiche a proposito della matematica, come il realismo semantico e il platonismo, a una tematica tradizionalmente ostica per queste stesse prospettive, come quella dell'applicabilità della matematica alla scienza.

Affermando l'esistenza di un dominio incorruttibile di oggetti astratti che la matematica descrive, il platonismo è stato spesso accusato di scavare un fossato incolmabile fra la matematica stessa — pensata come disciplina ideale e immutabile, perché perfetta e necessaria — e i tentativi contorti, contingenti, e sempre perfettibili compiuti dalla scienza per dar conto del mondo materiale e corruttibile che ci circonda e di cui noi siamo parte. Questa stessa visione che separa matematica e scienza è stata spesso evocata anche dai sostenitori del platonismo per enfatizzare la purezza del loro punto di vista e lo straordinario potere del matematico, capace di dirigere la propria intuizione là dove la mortale intelligenza degli uomini comuni non potrebbe mai arrivare. Sempre in bilico fra la prima accusa infamante e la seconda irragionevole esaltazione, il platonismo ha condotto spesso con sé, verso questo stesso destino, anche il realismo semantico, trasformando agli occhi di molti, la stessa nozione di verità matematica, apparentemente più innocua e più sobria di quella di oggetto matematico, in un mistero insondabile da rifuggire o venerare.

Non solo AI promette invece di colmare il fossato fra matematica e scienza, rendendo conto delle applicazioni della prima di cui la seconda si serve in moltissime, forse nella totalità, delle sue manifestazioni, ma suggerisce anche che platonismo e realismo scientifico non sono né dei mostri da allontanare da una ragione modesta ma sicura, né dei paradisi cognitivi nei quali perdersi in beata contemplazione. Matematica e scienza appaiono per AI come frutti simili della stessa attività umana, dando corpo a un'immagine molto più rassicurante in cui le virtù della prima appaiono come una sorta di riflesso delle virtù della seconda.

Tuttavia — proprio come quelli che per qualcuno sono i meriti principali del platonismo e del realismo semantico sono per altri i loro peggiori demeriti — questo pregio di AI può anche essere visto come il suo ineliminabile difetto. Un difetto tanto grave che nessun altro potrebbe esserlo di più per un argomento filosofico: la circolarità. L'idea principale di AI, si potrebbe dire, è che matematica e osservazione empirica convivono nella scienza in modo indissolubile. Tanto indissolubile che parlare di verità o di esistenza in matematica non ha nessun senso diverso di quello che ha parlarne con riferimento agli stati di cose e agli oggetti del mondo empirico. Ma questa idea non contiene forse già, *in nuce*, la conclusione stessa a cui l'argomento vuole pervenire? In altri termini, questa conclusione non è già assunta, quando si ammette che nell'analisi di una teoria scientifica e del processo della sua giustificazione non si possono separare sensi diversi in cui si parla di verità e di esistenza? Per non prendere che il caso di AI per il platonismo, basterebbe in fondo negare dal principio che vi sia un solo senso in cui si possa dire di un oggetto che esiste — un

senso che si applichi a ogni sorta di oggetti, concreti e astratti, teorici e osservativi — per bloccare AI sul nascere e infrangere le speranze che esso alimenta.

Ma i sostenitori di AI potrebbero reagire. Potrebbero osservare che in fondo la interconnessione intima e indissolubile fra matematica e indagine empirica che essi chiamano ‘indispensabilità’, e su cui il loro argomento si basa, non è affatto il frutto di un’argomentazione sofisticata e discutibile, ma un fatto che chiunque fosse dotato di sufficiente onestà intellettuale dovrebbe costatare. Ma allora, distinguere fra diverse modalità dell’essere vero e dell’esistere — le une proprie degli asserti e degli oggetti matematici, le altre proprie degli asserti e degli oggetti empirici — non è già forse un modo di sottrarsi a un’evidenza genuina che anche il più idealista dei filosofi non dovrebbe poter contraddire? E non basta, in fondo, ammettere questo per spianare la via a AI?

È proprio qui che a nostro parere sta il cuore del problema. Se il platonismo e il realismo semantico non hanno risorse proprie per spiegare l’applicabilità della matematica alla scienza in modo da renderla compatibile con una distinzione netta (perché categoriale) fra verità e esistenza matematiche e verità e esistenza empiriche, allora il solo modo che essi hanno di salvarsi dalle critiche nominaliste è di rifugiarsi nel fortino di AI. Ma tale fortino, proprio perché così difficile da espugnare per il nominalismo, è anche una dimora scomoda per platonismo e realismo semantico: tanto più scomoda quanto tale da impedire ai sostenitori di queste posizioni di spiegare davvero il senso in cui pretendono di poter dire che un asserto matematico può essere vero (e non solo dimostrato), e di chiarire la natura stessa degli oggetti matematici. Tuttavia, per quanto nel nostro libro non ne abbiamo fatto cenno (un po’ per scelta tematica, un po’ per un’effettiva carenza a questo riguardo della discussione in corso sul problema di Platone), forse platonismo e realismo semantico posseggono altre risorse. Indicare, anche solo in modo assolutamente sommario, quali queste potrebbero essere ci pare il modo più appropriato di chiudere non solo la discussione su AI, ma l’intero nostro libro.

Vi è un modo assai semplice per spiegare certe applicazioni dell’aritmetica alla scienza. È un modo a cui abbiamo fatto cenno più volte. In molte teorie scientifiche, probabilmente in tutte, si rende conto dell’esito di certi conteggi attraverso asserti in cui intervengono nomi di numeri naturali. Si dice, per esempio, che Marte ha due lune, o che certe specie di cicale hanno un ciclo di vita di diciassette anni. Abbiamo già più volte osservato (cf. §IV.1) che è possibile riformulare asserti come questi attraverso quantificatori numerici, ovvero eliminando ogni riferimento a oggetti astratti quali i numeri naturali, e mostrando quindi che la presenza dei loro nomi in quegli asserti non è altro che il frutto di un modo di dire tanto comodo quanto filosoficamente innocuo. Un nominalista potrebbe concludere, basandosi su questa semplice constatazione, che la stessa aritmetica si lascia riformulare senza far alcun riferimento a oggetti astratti. A nostro parere si sbaglierebbe. Ciò che questa constatazione mostra, riguardo all’aritmetica, ci sembra essere soltanto che essa è una teoria di oggetti astratti generati dall’ammissione di certe stipulazioni, come gli assiomi di Peano al primo o al secondo ordine, o HP (cf. §V.1). Tali stipulazioni idealizzano una procedura

empirica codificata come quella del contare, definendo la struttura di progressione e permettendo in tal modo di dimostrare teoremi che, in quanto intrinsecamente infinitari, non hanno alcun corrispettivo in asserti che esprimo l'esito di un conteggio. Nessun conteggio può per esempio assicurare l'esistenza di infiniti numeri primi, ciò che è invece garantito da una semplice dimostrazione che tratta di numeri naturali in quanto oggetti astratti e che non potrebbe essere riformulata in modo da evitare di riferirsi a essi. Resta tuttavia che i nominalisti sembrano avere perfettamente ragione, ci pare, quando sostengono che la semplice possibilità di ricorrere a parafrasi che ricorrono a quantificatori numerici è sufficiente per mostrare che, in quanto teoria di oggetti astratti, l'aritmetica non è affatto indispensabile per molti asserti scientifici. Un platonismo di ispirazione strutturalista sembra così compatibile con un resoconto perfettamente nominalista di certe applicazioni dell'aritmetica alla scienza.

Ciò che rende questo resoconto adeguato è il fatto che gli oggetti concreti di cui trattano gli asserti a cui esso si applica, come le lune di Marte o gli anni del ciclo di vita delle cicale, possono essere facilmente distinti fra loro in base a risorse cognitive indipendenti dall'aritmetica stessa, e possono quindi essere contati. Immaginiamo ora che si dica che una certa distanza misura 7,452 metri. Sembra che qui non si abbia più a che fare con un numero naturale e un conteggio, quanto piuttosto con un numero razionale e una misura. In realtà questa misura può pensarsi come un conteggio di millimetri: anche in questo caso, il nostro asserto può intendersi come l'espressione dell'esito di un conteggio dal quale risulta che la nostra distanza può essere coperta giustappponendo l'uno all'altro 7452 campioni, ognuno della lunghezza di un millimetro. Si dirà che il conteggio è qui più faticoso e senz'altro impreciso, che esso dipende in particolare dall'assunzione che i tutti i nostri campioni siano davvero lunghi un millimetro e che la loro giustapposizione si faccia senza scarto. Ciò non ha però nulla a che vedere con la matematica. Se siamo in grado di codificare in modo ritenuto adeguato certe opportune procedure empiriche, possiamo ridurre la nostra misura a un conteggio. Che questo non possa essere perfettamente esatto non ha grande rilievo per la scienza empirica che tratta della distanza in questione, purché tali procedure siano codificate in modo che l'errore possibile sia inferiore al margine di approssimazione consentito. Il passaggio da numeri naturali a numeri razionali, e da conteggi a misure cambia quindi le cose solo in modo apparente. Lo steso resoconto precedente si applica anche in questo caso e in tutti i casi simili.

Questi due esempi dovrebbero essere sufficienti per far capire che vi è quindi una larga gamma di applicazioni della matematica di cui si può render conto attraverso una strategia eliminativista che conduce a concludere che in tali casi nessun oggetto astratto è coinvolto nell'applicazione in modo indispensabile. E quanto detto a proposito del primo esempio dovrebbe essere sufficiente per capire che una simile strategia, per quanto di ispirazione nominalista, non è per nulla incompatibile con una filosofia della matematica platonista.

Ma, si dirà, non tutti i casi di applicazione della matematica alla scienza possono essere spiegati in tal modo. Si immagini che si dica che un certo appezzamento di terreno è

quadrato e che la sua diagonale misura  $\sqrt{2}$  km. Non vi è nessun modo di intendere questa affermazione come l'espressione dell'esito di un conteggio. Il ricorso ai quantificatori numerici non permette quindi di eliminare qui il riferimento al numero reale  $\sqrt{2}$ . E sembra che nessun'altra strategia eliminativista possa essere applicata a questo caso. Ciò che si dice qui non può essere ridetto senza richiamarsi a un numero reale. Non è tuttavia altrettanto certo che quanto è stato detto riguardi davvero un oggetto empirico quale il nostro appezzamento di terreno, o almeno che lo riguardi in modo diretto. Sembra più ragionevole pensare che non si sia qui espresso l'esito di una procedura empirica applicata all'appezzamento di terreno, ma piuttosto l'esito di un argomento matematico applicato a un quadrato di cui si sia supposto che il lato misuri 1 km e che si sia inteso come un modello ideale dell'appezzamento. In altri termini, il nostro asserto non parla direttamente di nessun oggetto empirico, e se è inteso farlo è solo perché si è ammesso che gli oggetti matematici di cui esso parla forniscono una configurazione ideale che rappresenta, in modo adeguato ai nostri scopi, la configurazione di oggetti empirici rilevanti. Qui la matematica non si può eliminare. Essa è davvero indispensabile. Ma non è impiegata direttamente per parlare di oggetti concreti: l'asserto che asserisce che il nostro appezzamento di terreno è quadrato e che la sua diagonale misura  $\sqrt{2}$  km non è vero perché tale appezzamento è così e così, ma perché si è convenuto, basandosi probabilmente sul risultato di procedure empiriche simili a quelle considerate nei due esempi precedenti, che tale appezzamento è rappresentato da un certo quadrato al cui lato si è convenzionalmente assegnata la misura di 1 km.

Dovrebbe essere chiaro che AI non si applica a nessuno di questi tre casi. Non ai primi due, perché le teorie matematiche rilevanti non sono indispensabili per le teorie scientifiche in questione. Non nel terzo perché le teorie matematiche rilevanti sono sì indispensabili ma non sono impiegate per dare un resoconto empirico, quanto piuttosto per fornire un modello perfettamente astratto e puramente matematico della configurazione di oggetti empirici considerati. Nonostante le apparenze, l'asserto 'l'appezzamento di terreno al di là del fiume è quadrato e la sua diagonale misura  $\sqrt{2}$  km' è quindi un asserto della matematica pura, in quanto il termine 'appezzamento di terreno al di là del fiume' non occorre in esso per riferirsi propriamente a un certo oggetto empirico, quale un appezzamento di terreno, quanto piuttosto per riferirsi a un modello astratto, che certi principi ponte, del tutto indipendenti da tale asserto, associano a quell'appezzamento. Se è vero, questo asserto lo è quindi in base a ragioni che un platonista o un sostenitore del realismo semantico dovrebbero poter spiegare senza ricorrere alla considerazione di nessun oggetto o stato di cose non matematico.

Non possiamo qui portare ragioni per convincere il lettore che tutti i casi di applicazione della matematica alla scienza si possano intendere in uno dei due modi precedenti. Ma dovrebbe essere chiaro che basta la speranza che ciò possa essere fatto per sollevare dubbi sulla correttezza di AI, e per suggerire che il platonismo e il realismo semantico hanno altre risorse per spiegare come la matematica possa essere impiegata per



parlare del mondo concreto in cui noi tutti viviamo, o comunque possono essere sostenuti solo a patto di possederle.

## BIBLIOGRAFIA

### **Nota su Traduzioni e Convenzioni Bibliografiche**

Tutte le voci bibliografiche sono riferite alle prime edizioni dei testi, e i testi stranieri sono sempre indicati in base alla data di pubblicazione dell'originale.

Per quanto riguarda i rimandi all'interno del volume, nel caso in cui vi siano traduzioni italiane dei testi stranieri citati, abbiamo sempre fatto riferimento alla numerazione delle pagine dell'edizione italiana, che si trova indicata in Bibliografia nella relativa voce. Nel caso di testi non tradotti in italiano, i rimandi si riferiscono sempre alla numerazione delle pagine della pubblicazione originale. Per gli articoli, quindi, non si fa riferimento alla numerazione di eventuali ristampe successive o ripubblicazioni in collettanee, anche se queste vengono indicate per completezza nella relativa voce. In ogni caso in cui non sia stato possibile o opportuno seguire tali convenzioni, indichiamo con un '\*' apposto alla data di pubblicazione o alla sigla identificativa l'edizione alla quale fanno riferimento i rimandi nel testo.

Le traduzioni da testi in lingua straniera, e in particolare in lingua antica, presenti nel volume sono state sempre confrontate con le principali edizioni italiane attestate, ove disponibili. Tuttavia, nella maggior parte dei casi, le traduzioni sono state riviste e talvolta significativamente modificate rispetto alla traduzione di riferimento, sulla base del confronto con i testi originali e con altre traduzioni, italiane o straniere, che potessero suggerire utili variazioni. Questo si è verificato in particolar modo per le traduzioni dei testi classici greci. Per quanto riguarda questi ultimi, indichiamo in Bibliografia le edizioni italiane che abbiamo usato come riferimento principale. In tutti gli altri casi, le traduzioni italiane di riferimento sono indicate nelle voci relative ai singoli testi.

Per un primo approfondimento di molti temi solamente menzionati nel testo, consigliamo le voci della SEP (*Stanford Encyclopedia of Philosophy*) disponibili online, cui abbiamo rimandato esplicitamente quando abbiamo ritenuto che fosse opportuno.

- Alspector-Kelly, M. (2001), On Quine on Carnap on Ontology, *Philosophical Studies*, 102, 2001, pp. 93–122.
- Alston, W. (1958), “Ontological Commitments”, *Philosophical Studies*, 9:1-2, 1958, pp. 8-16.
- Anderson, R. L. (2008), “Comments on Wayne Martin, *Theories of Judgment*”, *Philosophical Studies*, 137: 1, 2008, pp. 91–108.
- Annas, J. (1976), *Aristotle’s Metaphysics: Books M And N*, Clarendon Press, Oxford, 1976; trad. it. *Interpretazione dei libri M-N della “Metafisica” di Aristotele: la filosofia della matematica in Platone e Aristotele*, Introduzione e traduzione dei libri M-N della “Metafisica” di Aristotele a cura di G. Reale, revisione della traduzione da parte di Julia Annas, Vita e Pensiero, Milano, 1992.
- Andrews, P. (2002), *An introduction to mathematical logic and type theory: to truth through proof*, seconda edizione, prima edizione 1986, Applied Logic Series, 27, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- Aristotele (Metaph), *La Metafisica* (Introduzione, traduzione e parafrasi di G. Reale), Rusconi, Milano, 1993.
- (Phys), *Fisica*, Introduzione traduzione e apparati a cura di L. Ruggiu, Rusconi, Milano, 1995.
- van Atten, M. (2004), *On Brouwer*, Thomson/Wadsworth, Belmont (CA), 2004.
- (2006), *Brouwer meets Husserl. On the Phenomenology of Choice Sequences*, Springer, Dordrecht, 2006
- van Atten, M., Kennedy, J. (2003), “On the Philosophical Development of Gödel”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 9: 4, 2003, pp. 425-472.
- Ayer, A. J. (1946), *Language, Truth and Logic*, Dover, New York, 1946.
- Azzouni, J. (1997a), “Applied Mathematics, Existential Commitment and the Quine-Putnam Indispensability Thesis”, *Philosophia Mathematica* (III), 5:3, 1997, pp. 193–209.
- (1997b), “Thick Epistemic Access: Distinguishing the Mathematical from the Empirical”, *The Journal of Philosophy*, 94:9, 1997, pp. 472–84.
- (1998), “On “On What There Is””, *Pacific Philosophical Quarterly*, 79:1, 1998, pp. 1-18.
- (2004), *Deflating Existential Consequence. A Case for Nominalism*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2004.
- Balaguer, M. (1996a), “Towards a Nominalization of Quantum Mechanics”, *Mind*, 105:418, pp. 209-226.
- (1996b), “A Fictionalist Account of the Indispensable Applications of Mathematics”, *Philosophical Studies* 83:3, 1996, pp. 291-314
- (1998), *Platonism and Anti-Platonism in the Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1998.
- (2008), “Fictionalism in the Philosophy of Mathematics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition)*, Edward N. Zalta (a cura di), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/fictionalism-mathematics/>>.
- (2009), “Fictionalism, Theft, and the Story of Mathematics”, *Philosophia Mathematica* (III), 17:2, 2009, pp. 131-162.
- Baker, A. (2001), “Mathematics, Indispensability and Scientific Progress”, *Erkenntnis*, 55:1, 2001, pp. 85-116.
- (2003a), “The Indispensability Argument and Multiple Foundations for Mathematics”, *The Philosophical Quarterly*, Vol. 53:210, 2003, pp. 49-67
- (2003b), “Does the Existence of Mathematical Objects Make a Difference?”, *Australasian Journal of Philosophy*, 81:2, 2003, pp. 246–264.
- (2005), “Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena?”, *Mind*, 114:454, 2005, pp. 223-238.
- (2009), “Mathematical Explanation in Science”, *The British Journal for the Philosophy of Science*, 60, 2009, pp. 611-633.
- Barkley Rosser, J. (1936), “Extensions of some theorems of Gödel and Church”, *Journal of Symbolic Logic*, 1:3, 1936, pp. 87-91.
- Baron-Cohen S, Leslie AM, Frith U (1985), “Does the autistic child have a ‘theory of mind’?”, *Cognition*, 21:1, 1985, pp. 37–46.
- Batterman, R. (cs), “On the Explanatory Role of Mathematics in Empirical Science”, in corso di stampa, Advance Access in *The British Journal for the Philosophy of Science*, 17 giugno 2009 (<http://bjps.oxfordjournals.org/cgi/content/abstract/axp018>).
- Benacerraf, P. (1965), “What Numbers Could not Be”, *The Philosophical Review*, 74:1, 1965, pp. 47-73; numerose ristampe, anche in Benacerraf e Putnam (1964), pp. 272-294.
- (1973), “Mathematical Truth”, *The Journal of Philosophy* 70:19, 1973, pp. 661-679, anche in Benacerraf e Putnam (1964), pp. 403-420.
- (1996a), “What Mathematical Truth Could Not Be - I” in A. Morton e S. P. Stich (a cura di), *Benacerraf and his Critics*, Blackwell, Oxford, 1996, pp. 9-59.
- (1996b), “Recantation or any old  $\omega$ -sequence would do after all”, *Philosophia Mathematica* (III), 4, 1996, pp.184-189.
- Benacerraf, P., Putnam, P. (1964), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.), 1964; seconda edizione 1983\*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Berto, F. (2008), *Tutti pazzi per Gödel! La guida completa al Teorema di Incompletezza*, Laterza, Roma-Bari, 2008.
- Blanchette, P. A. (1996), “Frege and Hilbert on Consistency”, *The Journal of Philosophy*, 93:7, 1996, pp. 317-336.
- Bocconi, F. (2008), “Matematica”, in Ferraris, M. (a cura di), *Storia dell’ontologia*, Bompiani, Milano, 2008, §4.8.
- Bolzano, B. (1851), *Paradoxien des Unendlichen*, (pubblicazione postuma), Meiner & Reclam, Leipzig, 1851.
- Boolos, G. (1975), “On Second-Order Logic”, *The Journal of Philosophy*, 72:16, 1975, pp. 509-527, anche in Boolos (1998), cap. 3.
- (1984), “To Be Is To Be a Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables),” *The Journal of Philosophy* 81:8, 1984, pp. 430-50; anche in Boolos (1998), cap. 4.
- (1985), “Nominalist Platonism”, *The Philosophical Review*, 94:3, 1985, pp. 327-344, anche in Boolos (1998), cap. 5.
- (1987), “The consistency of Frege’s *Foundations of Arithmetic*”, in J. Thomson (a cura di), *On Being and Saying: Essays in Honor of Richard Cartwright*, MIT Press, Cambridge (Mass.), 1987, pp. 3-20; anche in Boolos (1998), cap. 12, trad. it. in Pedferri (2005), pp. 83-101.
- (1990), “The Standard of Equality of Numbers”, in Boolos, G. (a cura di), *Meaning and Method: Essays in Honour of Hilary Putnam*, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 261-77, anche in Boolos (1998), cap.

- 13.
- (1993), “Whence the Contradiction”, *Aristotelian Society Supplementary Volume*, 67, 1993, pp. 213-233, anche in Boolos (1998), cap 14.
  - (1997), “Is Hume’s Principle Analytic?”, in Heck, R. Jnr. (a cura di), (1997), *Language, Thought and Logic*, Oxford University Press, Oxford, pp. 245-62; anche in Boolos 1998, cap. 19.
  - (1998), *Logic, Logic, and Logic*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1998.
  - Boolos, G., Heck, R. Jnr. (1998), “Die Grundlagen der Arithmetik §§ 82-3”, in Schirn (1998), pp. 407-28; anche in Boolos (1998), pp. 315-38.
  - Boolos, G., Jeffrey, R. (1989), *Computability and Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, terza edizione, 1989, prima edizione 1974.
  - Boniolo, G., Vidali, P., De Anna, G. (2003) *Introduzione alla filosofia della scienza*, Bruno Mondadori, 2003.
  - Borga, M., Palladino, D. (1997), *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, Editrice La Scuola, Brescia, 1997.
  - Bourbaki, N. (EM), *Éléments de mathématiques*. Opera collettiva redatta a partire dal 1939 sotto lo pseudonimo di Nicolas Bourbaki. L’opera consiste attualmente di 10 Voll., distribuiti dall’editore Dunod, Paris, alcuni dei quali tradotti in versione inglese e distribuiti dall’editore Springer-Verlag, Heidelberg. Maggiori dettagli si possono trovare sul sito della Association de Collaborateurs de Nicolas Bourbaki (con sede alla École Normale Supérieure di Parigi): <http://www.bourbaki.ens.fr/>.
  - Boyd, R. (1991), (a cura di), *The Philosophy of Science*, MIT Press, Cambridge (Mass.), 1991.
  - (2002), “Scientific Realism”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition)*, Edward N. Zalta (a cura di), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/scientific-realism/>>.
  - Brouwer, J. E. J. (1912), *Intuitionisme en formalisme*, Noordhoff, Groningen, 1912; anche in Brouwer J. E. J. (1913), *Wiskunde, waarheid, werkelijkheid*; trad. ing. “Intuitionism and formalism”, *Bullettin of the American Mathematical Society*, 20; anche in Brouwer (CW)\*, Vol. I, pp. 123-138; anche in Benacerraf e Putnam (1964), pp. 77-89; trad. fr. in Largeault (1992), pp. 39-53.
  - (CW), (a cura di A. Heyting), *L. E. J. Brouwer: Collected Works*, Vol. I, *Philosophy and Foundations of Mathematics*, 1975, Vol. II, *Geometry, Analysis, Topology and Mechanics*, (1976), North Holland, Amsterdam / American Elsevier, New York.
  - Brown, J. R. (1999), *Philosophy of Mathematics: An Introduction to a World of Proofs and Pictures*, Routledge, London and New York, 1999.
  - Bueno, O. (2003), “Quine’s Double Standard: Undermining the Indispensability Argument via the Indeterminacy of Reference”, *Principia* 7:1-2, 2003, pp. 17-39.
  - Bueno, O., Colyvan, M. (cs), “An Inferential Conception of the Applicability of Mathematics”.
  - Burgess, J. (1983), “Why I Am Not a Nominalist”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24:1, 1983, 93-105.
  - (2004), “Mathematics and Bleak House”, *Philosophia Mathematica* (III), Vol. 12:1, 2004, pp. 18-36.
  - (2005), *Fixing Frege*, Princeton University Press, Princeton (N. J.), 2005.
  - (2008), “Review of Charles Parsons, Mathematical Thought and Its Objects”, *Philosophia Mathematica* (III), 16:3, 2008, pp. 402-420.
  - Burgess, J.P., Hazen, A., and Lewis, D., (1991), “Appendix on Pairing,” in D. Lewis, *Parts of Classes*, Blackwell, Oxford, 1991, pp. 121-149.
  - Burgess, J., Rosen, G. (1997), *A Subject With No Object. Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1997.
  - (2005), “Nominalism Reconsidered”, in Shapiro (a cura di) 2005, pp. 515-536.
  - Burnyeat, M. F. (1987), “Platonism and Mathematics: A Prelude to Discussion”, in A. Graeser (a cura di), *Mathematics and Metaphysics in Aristotle*, Haupt, Bern e Stuttgart, 1987, pp. 213-40.
  - Cantor, G. (1872), “Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen”, *Mathematische Annalen*, 5, 1872, pp. 123-132.
  - (1874), “Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77, 1874, pp. 258-262; anche in *Gesammelte Abhandlungen*, pp. 115-118, trad. ing. “On a property of the set of real algebraic numbers”, in Ewald (1966), Vol. 2, pp. 839-843.
  - (1879-1884), “Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten”, *Mathematische Annalen* 15(1879), 1-7; 17(1880), 355-358; 20(1882), 113-121; 21(1883), 51-58 und 545-586; 23(1884), 453-488, anche in Cantor (GA), 139-145, 145-148, 149-157, 157-164, 165-208, 210-244, ristampati in *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Arbeiten zur Mengenlehre aus den Jahren 1872—1884*, Edited and with a foreword and commentary by G. Asser. Teubner-Archiv zur Mathematik, 2. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1984.
  - (1883) *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Leipzig: B. G. Teubner, 1883, anche in Cantor (GA), pp. 165-208, trad. ing. “Foundation of the theory of manifolds” *The Campaigner* (The Theoretical Journal of the National Caucus of Labor Committees), 9, (1976), pp. 69-96.
  - (1895-1897), Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, *Mathematische Annalen*, 46(1895), pp. 481-512; 49(1897), pp. 207-246, anche in Cantor (GA), pp. 282-311, trad. ing. in *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover, New York, 1952.
  - (GA), *Gesammelte Abhandlungen*, a cura di Ernst Zermelo, Springer, Berlino, 1932.
  - Carnap, R. (1931), “Die logizistische Grundlegung der Mathematik”, *Erkenntnis*, 2, 1931, pp. 91-105; trad. ing. “The Logicist Foundations of Mathematics”, in Benacerraf e Putnam (1964), pp. 41-52.
  - (1950), “Empiricism, semantics, and ontology”, *Revue Internationale de Philosophie*, 4, 1950, pp. 20-40; ristampato con modifiche in *Meaning and Necessity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1956, pp. 205-21. Questa seconda versione si trova anche in Benacerraf e Putnam (1964), pp. 241-257, trad. it. “Empirismo, semantica e ontologia”, in Carnap, R. *Significato e necessità*, La Nuova Italia, Firenze, 1976\*, pp. 325-350, anche in Linsky, L., *Semantica e filosofia del linguaggio*, Il Saggiatore, Milano, 1969, anche in Iacona A., Paganini E. (a cura di), *Filosofia del linguaggio*, Raffaello Cortina Editore, Milano 2003, pp. 87-105.
  - (1950b), *Logical Foundations of Probability*, University of Chicago Press, 1950, seconda edizione 1965, trad. it. della seconda edizione *Fondamenti logici della probabilità*, Il Saggiatore, Milano, 1975.
  - (1952), *The Continuum of Inductive Methods*, University of Chicago Press, Chicago, 1952.

- Carrara, M., Spolaore, G. (2008), "Impegno ontologico", in Ferraris, M. (a cura di), *Storia dell'ontologia*, Bompiani, Milano, 2008, §5.6.
- Casalegno, P., Mariani, M. (2004), *Teoria degli insiemi. Un'introduzione*, Carocci, Roma, 2004.
- Cassirer, E. (1918-21), *Kant Leben und Lehre*, Cassirer, 1918 e 1921, trad. it. *Vita e dottrina di Kant*, La Nuova Italia, Firenze, 1977.
- Cavaillès, J. (1938), *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, Hermann, Paris, 1938, seconda edizione in Cavaillès, J., *Philosophie mathématique*, Herman, Paris 1962, pp. 23-174, riedito da PUF, Paris, 1994; anche in Cavaillès, J. *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Hermann, Paris, 1994, pp. 205-374.
- Cassou-Noguès (2005), "Gödel and 'the objective existence' of mathematical objects", *History and Philosophy of Logic*, 26:3, 2005, pp. 211-228.
- Cellucci, C. (2007), *La filosofia della matematica del Novecento*, Laterza, Roma-Bari, 2007.
- Chang C.C., Keisler, H.J. (1973), *Model Theory*, Elsevier, Amsterdam, 1973, terza edizione riveduta 1990, trad. it. *Teoria dei modelli*, Boringhieri, Torino, 1980.
- Changeux, J. P., Connes, A. (1989), *Matière à pensée*, Odile Jacob, Paris, trad. it. *Pensiero e Materia*, Torino, Bollati Boringhieri, 1991
- Chihara, C. S. (1973), *Ontology and the Vicious-Circle Principle*. Ithaca, N. Y., Cornell University Press.
- (1981), "Quine and the Confirmational Paradoxes", in P. A. French, T. Uehling, H. Wettstein (a cura di), *The Foundations of Analytic Philosophy*, Minneapolis, University of Minnesota Press, pp. 425-452.
- (1990), *Constructibility and Mathematical Existence*. Clarendon Press, Oxford, 1990.
- (2004), *A Structural Account of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2004.
- (2005), "Nominalism", in Shapiro (2005), pp. 483-514.
- (2008), *The Worlds of Possibility Modal Realism and the Semantics of Modal Logic*, Clarendon Press, Oxford, 2008.
- Church, A. (1958), "Ontological Commitment", *The Journal of Philosophy*, 55, pp. 1008-1014.
- Churchland, P., Hooker, C. (a cura di), (1985), *Images of Science: Essays on Realism and Empiricism. With a reply from Bas C. van Fraassen*, University of Chicago Press, Chicago, 1985.
- Coffa, A. J. (1991), *The Semantic Tradition from Kant to Carnap. To the Vienna Station*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991, trad. it. *La tradizione semantica da Kant a Carnap*, Il Mulino, Bologna, 1998.
- Cohen, P. J. (1963), "The Independence of the Continuum Hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 50:6, 1963, pp. 1143-1148.
- (1966), *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, W. A. Benjamin, New York, 1966 (ristampe fino al 2008).
- Coliva, A. (2004), *I concetti*, Carocci, Roma, 2004.
- Colyvan, M. (1998), "In Defence of Indispensability", *Philosophia Mathematica* (III), 6:1, pp. 39-62.
- (1999), "Contrastive Empiricism and Indispensability", *Erkenntnis* 51, 1999, pp. 323-332.
- (2000), "Conceptual contingency and abstract existence", *Philosophical Quarterly*, 50: 198, 2000, pp. 87-91.
- (2001), *The Indispensability of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2001.
- (2002), "Mathematics and Aesthetic Considerations in Science", *Mind*, 111:141, 2000, pp. 69-74
- (cs), "There's no easy road to nominalism", in corso di stampa (anteprima online: <http://homepage.mac.com/mcolyvan/papers/noeasyrd.pdf>)
- Colyvan, M. and Zalta, E.N. (1999), "Mathematics: Truth and Fiction? Review of Mark Balaguer *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*", *Philosophia Mathematica* 7:3, 1999, pp. 336-349.
- Cook, R. (a cura di), (2007), *The Arché Papers on the Mathematics of Abstraction*, Springer, Dordrecht, 2007.
- Cozzo, C. (2008), *Introduzione a Dummett*, Laterza, Roma-Bari, 2008.
- Craig, W. (1953), "On Axiomatizability within a System", *Journal of Symbolic Logic*, 18:1, 1953, pp. 30-32.
- (1956), "Replacement of Auxiliary Expressions", *Philosophical Review*, 65, 1956, pp. 38-55.
- van Dalen, D. (1999-2005), *Mystic, Geometer, and Intuitionist. The life of L. E. J. Brouwer*, Clarendon Press, Oxford, 2 Voll., Vol I 1999, Vol. II 2005.
- Dedekind, R. (1872), *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Brunswick, 1872, anche in Dedekind, R. (1930-32), trad. ing. "Continuity and Irrational Numbers" in Dedekind (2001), pp. 1-27.
- (1888), *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Brunswick, 1888, anche in Dedekind, R. (1930-32), trad. inglese "The Nature and Meaning of Numbers", in Dedekind (1901), pp. 31-115.
- (1901), *Essays on the Theory of Numbers*, Open Court, Chicago, 1901, ristampato Dover, New York, 1963.
- (1930-32), *Gesammelte mathematische Werke*, 3 Voll, a cura di Fricke R., Noether E., Ore Ø., Vieweg, Brunswick, Vol. I 1930, Vol. II 1931, Vol. III 1932.
- De Florio, C. (2007), *Categoricità e modelli intesi. Temi di filosofia dell'aritmetica del secondo ordine*, Franco Angeli, Milano, 2007.
- Dehaene, S. (1997) *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*, Oxford University Press, New York, 1997; trad. fr. *La bosse des maths*, Odile Jacob, Paris, 1997, trad. it. *Il pallino della matematica*, Mondadori, Milano 2001.
- Demopoulos, W. (2005), "Our Knowledge of Numbers as Self-Subsistent Objects", *Dialectica*, 59:2, 2005, pp. 141-159.
- (cs), "Generality and Objectivity in Frege's *Foundations of Arithmetic*", in A. Miller (a cura di), *Logic, Language and Mathematics: Essays in Honour of Crispin Wright*, Oxford University Press, Oxford, in corso di stampa.
- Detlefsen, M. (1986), *Hilbert's Program*, Reidel, Dordrecht, 1986.
- Dieveney, P. (2007), "Dispensability in the Indispensability Argument", *Synthese*, 157:1, 2007, pp. 105-128.
- Doridot, F. e Panza, M. (2004), "À propos des apports des sciences cognitives à la philosophie des mathématiques", *Intellectica*, 39:2, 2004, pp. 263-287.
- Duhem, P. (1906), *La théorie physique. Son objet, sa structure*, Chevalier & Rivière, Paris, 1906; 12ima edizione rivista, Marcel Riviere et C.ie, 1914, trad. it. in Duhem P., *La teoria fisica*, Bologna, Il Mulino 1978.
- (1908), *SOZEIN TA PHAINOMENA. Essai sur la notion de théorie physique*, A. Hermann, Paris, 1908; trad. ingl. *To Save the Phenomena*, University Of Chicago Press, Chicago, 1969; trad. it. *Salvare i fenomeni*, Borla, Roma, 1986.
- Dummett, M. (1956), "Nominalism", *Philosophical Review*, 65:4, 1956, pp. 491-505, anche in Dummett (1978a), pp. 38-49.

- (1973), *Frege: Philosophy of Language*, Duckworth, London, 1973; seconda edizione 1981\*, trad. it. *Filosofia del linguaggio: saggio su Frege*, Marietti 1983.
- (1978a), *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, London, 1978, trad. it. parziale *Verità e altri enigmi*, Il Saggiatore, Milano, 1989.
- (1978b), “Realism”, in Dummett (1978a), pp. 145-165.
- (1991), *Frege: Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge (Mass), 1991.
- (1994), “Chairman’s Address: Basic Law V”, *Proceedings of the Aristotelian Society*, XCIV, 1994, pp. 43-251.
- Earman, J., Salmon, W. (1999), “The Confirmation of Scientific Hypothesis”, in Salmon, H. M. (a cura di) *Introduction to the Philosophy of Science*, Hackett Publishing Co., prima edizione 1992, cap. 2.
- Ebbinghaus, H-D, Flum, J., Thomas, W. (2004), *Mathematical logic*, Springer-Verlag, New-York, 2004, seconda edizione, prima edizione 1994.
- Eisler, R. (1930), *Kant Lexikon*, E. S. Mittler, Berlin, 1930.
- Eklund, M. (2005), “Fiction, Indifference, and Ontology”, *Philosophy and Phenomenological Research*, 71:3, 2005, pp. 557-79.
- Engel, P. (1995), “Platonisme mathématique et antiréalisme”, in M. Panza e J. M. Salanskis (a cura di), *L’objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles*, Masson, Paris, 1995, pp. 133-146.
- Errera, A. (1953), “Le problème du continu”, *Atti dell’Accademia Ligure di Scienze e Lettere*, 9, 1953, pp. 176-183.
- Ewald, W. B. (1996), (a cura di), *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 2 Voll., 1996.
- Fano, V. (2005), *Comprendere la scienza*, Napoli, Liguori, 2005.
- Feférmán, S. (2005), “Predicativity”, in Shapiro (2005), pp. 590-624.
- Ferreirós, J. (1999), *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, seconda edizione 2007.
- Field, H. (1974), “Quine and the Correspondence Theory” *Philosophical Review*, 83:2, 1974, pp. 200-228, ristampato con un Poscritto in Field, H., *Truth and The Absence of Fact*, Oxford University Press, Oxford, 2001, pp. 199-221.
- (1980), *Science Without Numbers*, Blackwell, Oxford, 1980.
- (1982), “Realism and Anti-Realism about Mathematics”, *Philosophical Topics*, 13, 1982, pp. 45-69; anche in Field (1989), pp. 53-78.
- (1984) “Is Mathematical Knowledge just Logical Knowledge”, *Philosophical Review*, 93:4, 1984, pp. 509-552; anche in Field (1989), pp. 79-124.
- (1985), “On Conservativeness and Incompleteness”, *The Journal of Philosophy*, 82:5, 1985, pp. 239-260, anche in Field (1989), pp. 125-146.
- (1989a), *Realism, Mathematics and Modality*, Blackwell, Oxford, 1989.
- (1989b), “Realism, Mathematics and Modality”, in Field (1989a), pp. 227-281 (versione largamente modificata dell’originale omonimo in *Philosophical Topics*, 19, 1988, pp. 57-107).
- (1993), “The conceptual contingency of mathematical objects”, *Mind* 102:406, 1993, pp. 285-299.
- (1998), “Mathematical Objectivity and Mathematical Objects” in *Contemporary Readings in the Foundations of Metaphysics*, C. MacDonald and S. Laurence (a cura di), Blackwell, Oxford, pp. 387-403.
- Fine, K. (2002), *The Limits Of Abstraction*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2002.
- (2005), “The Varieties of Necessity”, in Fine, K., *Modality and Tense*. Philosophical Papers, Clarendon Press, Oxford, 2005, pp. 235-260.
- Fodor, J, Lepore, E. (1991), *Holism, A Shopper’s Guide*, Wiley Blackwell, Oxford, 1991.
- Føllesdal, D. (1995), “Gödel and Husserl!”, in J. Hintikka (a cura di), *From Dedekind to Gödel*, Kluwer, Dordrecht, Boston, 1995, pp. 427-446.
- van Fraassen, B. (1980), *The Scientific Image*. Oxford University Press, Oxford, New York, 1980, trad. it. *L’immagine scientifica*, CLUEB, Bologna, 1985.
- Frege, G. (1879), *Begriffsschrift, eine der Arithmetischen Nachgebildete Formalsprache de reinen Denkens*, Verlag Von L. Nebert, Halle, 1879; trad. ing. “Begriffsschrift, a Formula Language, Modeled upon that of Arithmetic, for Pure Thought”, in van Heijenoort (1967), pp. 5-82, trad. it. “Ideografia, un linguaggio in formule del pensiero puro a imitazione di quello aritmetico” in Frege G., *Logica e aritmetica* (a cura di Corrado Mangione), Boringhieri, Milano 1965, pp. 103-206.
- (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logische mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Koebner, Breslau, 1884, trad. ing. di Austin, J. In Frege, G., *The Foundations of Arithmetic. A Logico-Mathematical Enquiry into the Concept of Number*, Blackwell, Oxford, 1974, trad. it. Di L. Geymonat, “I fondamenti dell’aritmetica” in Frege G., *Logica e aritmetica* (a cura di Corrado Mangione), Boringhieri, Milano 1965, pp. 207-349.
- (1893-1903), *Grundgesetze der Arithmetik*, H. Pohle, Jena, 1893-1903 (2 Voll.), trad. ing. parziale in Frege, G., *The Basic Laws of Arithmetic*, University of California Press, Berkeley, 1967, trad. it. parziale di L. Geymonat in Frege G., *Logica e aritmetica* (a cura di Corrado Mangione), Boringhieri, Milano 1965, 279-594.
- (PMC), 1976, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner, Amburgo, 1976, trad. ing. *Philosophical and Mathematical Correspondence*, a cura di by Gabriel G. et al., Blackwell, Oxford, 1980, trad. it. *Alle origini della nuova logica*, Boringhieri, Milano 1983.
- Friedman, M. (1992), *Kant and the Exact Sciences*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.), London, 1992.
- Garavaso, P. (1998), *Filosofia della matematica*, Guerini, Milano, 1998.
- (2002), “Filosofia della matematica”, in F. d’Agostini e N. Vassallo (a cura di), *Storia della filosofia analitica*, Einaudi, Torino, 2002, pp. 275-296.
- (2005), “On Frege’s Alleged Indispensability Argument”, *Philosophia Mathematica* 13:2, 2005, pp. 160-173.
- Gentzen, G. (1936), “Die Widerspruchfreiheit der reinen Zahlentheorie”, *Mathematische Annalen*, 112, pp. 493-565, trad. ing. “The consistency of elementary number theory”, in Gentzen (CW), pp. 132-213.
- (1938). “Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises fuer die reine Zahlentheorie”, *Forschungen zur logik und zur Grundlegung der exacten Wissenschaften, neue Folge*, 4, pp. 19-44, trad. ing. “New version of the consistency proof for elementary number theory”, in Gentzen (CW), pp. 252-286.
- (CW), *The collected works of Gerhard Gentzen*, a cura di M. E Szabo, North-Holland, Amsterdam, 1969.
- Gettier, E. (1963), “Is Justified True Belief Knowledge?”, *Analysis*, 23, 1963, pp. 121-23, trad. it. “È la conoscenza

- credenza vera e giustificata?” in Bottani, A., Penco, C. (a cura di), *Significato e teorie del linguaggio*, Franco Angeli, Milano 1991, pp. 268-270.
- Giaquinto, M. (1983), “Hilbert’s Philosophy of mathematics”, *British Journal for the Philosophy of Science*, 1983, 34:2, pp. 119-132.
- (2002), *The search for certainty: a philosophical account of foundations of mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 2002.
- Glymour, C. (1980), *Theory and Evidence*, Princeton University Press, Princeton, 1980.
- Gödel, K. (CW1), *Collected Works, Vol. I, Publications 1929-1936*, a cura di S. Feferman, Oxford University Press, Oxford, New York, 1986.
- (CW2), *Collected Works, Vol. II, Publications 1938-1974*, a cura di S. Feferman, Oxford University Press, Oxford, New York, 1990.
- (OP1), *Opere, Volume I, 1929-1936*, a cura di Ballo, E., Bozzi, S., Lolli, G., Mangione, C., Bollati Boringhieri, Torino, 1999, trad. it. di Gödel (CW1).
- (OP2), *Opere, Volume II, 1938-1974*, a cura di Ballo, E., Lolli, G., Mangione, C., Bollati Boringhieri, Torino, 2002, trad. it. di Gödel (CW2).
- (1930), “Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls”, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37, trad. ing. “The completeness of the axioms of the functional calculus of logic”, in Gödel (CW1), pp. 103-123 e in van Heijenoort (1967), pp. 582-591, trad. it. “La completezza degli assiomi del calcolo funzionale logico”, in Gödel (OP1), pp. 83-93.
- (1931), “Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* un verwandter Systeme I”, *Monatshefte Für Mathematik un Physik*, 38, pp. 173-198, trad. ing. “On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems I”, in Gödel (CW1), pp. 145-195, trad. it. “Proposizioni formalmente indecidibili dei *Principia Mathematica* e di sistemi affini I”, in Gödel (OP1), pp. 113-138.
- (1939a), “Consistency proof for the generalized continuum hypothesis”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 25, 1939, pp. 220-224, anche in Gödel (CW2), pp. 28-32, trad. it. in Gödel (OP2), pp. 31-35.
- (1939b), “The consistency of the generalized continuum hypothesis”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45, p. 93, anche in Gödel (CW2), p. 27, trad. it. in Gödel (OP2), pp. 30.
- (1940), “The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory”, *Annals of Mathematics Studies*, 3, Princeton University Press, Princeton (appunti delle lezioni tenute da Gödel a Princeton nell’autunno del 1938, redatti da G. W. Brown), anche in Gödel (CW2), pp. 33-101, trad. it. in Gödel (OP2), pp. 36-106.
- (1944), “Russell’s *Mathematica Logic*”, in Schlipp P. A. (a cura di), *The Philosophy of Bertrand Russell*, Northwestern University Press, Evanston (Ill.), 1944, pp. 125-153, anche in Gödel (CW2), pp. 119-141, trad. it. in Gödel (OP2), pp. 81-112.
- (1947-1964), “What is Cantor’s Continuum Problem”, versione originale in *The American Mathematical Monthly*, 54, 1947, pp. 515-525, anche in Gödel (CW2), pp. 176-187, trad. it. in Gödel (OP2), pp. 180-192, versione modificata e espansa in Benacerraf e Putnam (1964), pp. 470-485, anche in Gödel (CW2), pp. 254-270, trad. it. in Gödel (OP2), pp. 252-267.
- Goodman, N. (1951), *The Structure of Appearance*, Harvard University Press, Cambridge (Mass), 1951, seconda edizione, Bobbs-Merrill, Indianapolis, 1966, terza edizione Reidel, Boston, 1977, trad. it. *La struttura dell’apparenza*, Il Mulino, Bologna, 1985.
- (1954), “The New Riddle of Induction”, in Goodman, N., *Fact, Fiction and Forecast*, Harvard University Press, Cambridge (Mass), quarta edizione 1979, trad. it. *Vedere e costruire il mondo*, Laterza, Roma-Bari, 1988, cap. 3.
- Goodman, N., Quine, W.V. (1947), “Steps Toward a Constructive Nominalism”, *Journal of Symbolic Logic*, 12:4, 1947, pp. 105-122.
- Haddock, G.R., Hill, C.O., *Husserl or Frege?*, Open Court, La Salle (Ill), 2000
- Halbach, V., Horsten, L. (2005), “Computational structuralism”, *Philosophia Mathematica* (III), 13, 2005, pp. 174-186.
- Hale, B. (1987), *Abstract Objects*, Blackwell, Oxford, 1987.
- (1994a), “Dummett’s Critique of Wright’s Attempt to Resuscitate Frege”, *Philosophia Mathematica* (III), 2, pp. 122-147, anche in Hale e Wright (2001), pp. 189-213.
- (1994b), “Singular terms (2)”, in B. McGuinness e G. L. Oliveri, (a cura di), *The Philosophy of Michael Dummett*, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1994, pp. 17-44; anche in Hale e Wright (2001), pp. 48-71.
- (1996a), “Singular terms (1)”, in M. Schirn (a cura di), *Frege: Importance and Legacy*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1996, pp. 438-457; anche in Hale e Wright (2001), pp. 31-47.
- (1996b), “Structuralism’s Unpaid Epistemological Debts”, *Philosophia Mathematica* (III), 4, 1996, pp. 124-147.
- (1999), “Modality”, in *A Companion to the Philosophy of Language*, Hale, B. - Wright, C. (a cura di), Blackwell, Oxford, pp. 487-514.
- (2000), “Reals by Abstraction”, *Philosophia Mathematica* (III), 8:2, 2000, pp. 100-124; anche in Hale e Wright (2001), pp. 399-420, trad. it. in Pedferri (2005), pp. 157-181.
- Hale, B., Wright, C. (1992), “Nominalism and the contingency of abstract objects”, *The Journal of Philosophy* 89:3, 1992, pp. 111—135.
- (1994), “A Reductio Ad Surdum? Field on the Contingency of Abstract Objects”, *Mind*, 103:240, 1994, pp. 169-184.
- (2000), “Implicit definition and the A Priori”, in P. Boghossian e C. Peacocke (a cura di), *New Essays on the A Priori*, Clarendon Press, Oxford, 2000, pp. 286-319; in Hale e Wright (2001), pp. 117-150.
- (2001), *The Reason’s Proper Study. Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 2001.
- (2002), “Benacerraf’s Dilemma Revisited”, *European Journal of Philosophy*, 10:1, 2002, pp. 101-129.
- Hardy, T. (1940), *A Mathematician’s Apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1940, trad. it. *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano, 2002.
- Hart., W.D. (1996), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1996.
- Hebb, D. (1949), *The Organisation of Behavior*, John Wiley and Sons, New York, 1949.
- (1980), *Essay on Mind*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, 1980.

- Heck, R. Jr (1993), "The Development of Arithmetic in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*", *Journal of Symbolic Logic*, 58, pp. 579-601, anche in Demopoulos W. (a cura di), *Frege's Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge (Mass), pp. 257-294.
- Heijenoort, J. van, (a cura di), (1967), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematics, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.).
- Heinzmann, G. (1985), *Entre intuition et analyse: Poincaré et le concept de prédicativité*, A. Blanchard, Paris, 1985.
- Hellman, G. (1989), *Mathematics without numbers*. Oxford University Press, Oxford, New York, 1989.
- (1990), "Modal-Structural Mathematics", in E. Irvine (a cura di), *Physicalism in Mathematics*, Dordrecht, Kluwer, 1990, pp. 307-329.
- (1994), "Real analysis without classes", *Philosophica Mathematica* (III), 2, 1994, 228-250.
- (1996), "Structuralism without Structures", *Philosophia Mathematica* (III), 4, 1996, pp. 100-123.
- (1998), "Maoist Mathematics? Review of John P. Burgess and Gideon Rosen, *A Subject Without Object*", *Philosophia Mathematica* (III), 6:3, 1998, pp. 334-345.
- (1999), "Some ins and outs of indispensability: A modal structural perspective", in A. Cantini, E. Casari, and P. Minari (a cura di), *Logic and Foundations of Mathematics*, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1999, pp. 25-39.
- (2005), "Structuralism", in Shapiro (2005), pp. 535-562.
- Hempel, G. (1945), "Studies in the logic of confirmation", *Mind*, 54:213, 1945, pp. 1-26 e 54:214, 1945, pp. 97-121.
- Hermite, C. e Stieltjes, J. T. (Corr) *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, a cura di B. Baillaud e H. Bouget, con una prefazione di Émile Picard, Gauthier-Villars, Paris, 1905.
- Heyting, A. (1930) "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1930, pp. 42-71 e 158-169, trad. ing. parziale in Mancosu (1998), pp. 311-327.
- (1956) *Intuitionism, an Introduction*, North-Holland, Amsterdam, 1956.
- Hilbert, D. (1899), *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899, trad. ing. *The Foundations of Geometry*, Open Court, Chicago, 1902, trad. it. *Fondamenti della geometria*, Feltrinelli, Milano, 1970
- (1922), "Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung", *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität*, 1, 1922, pp. 157-77; anche in Hilbert (GA), Vol. 3, pp. 157-177; trad. ing. in Ewald (1996), pp. 1115-1134 e Mancosu (1998), pp. 198-214.
- (1926), "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, 95, 1926, pp. 161-90; anche in Hilbert, D. (1930), settima edizione di Hilbert (1899), trad. ing. *On the Infinite*, in van Heijenoort (1967), pp. 367-392, trad. it. parziale in Cellucci, C. (a cura di), *La filosofia della matematica*, Laterza, Roma-Bari, 1967, pp. 161-184.
- (GA), *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin, 1932-1935, 3 Voll., I Vol. 1932, II Vol 1933, III Vol. 1935.
- Hilbert, D., Bernays, P. (1934-1939), *Grundlagen der Mathematik*. Springer, Berlin, 2 Voll., Vol. I 1934, Vol. II 1939.
- Hintikka, J. (1968), "The Varieties of Information and Scientific Explanation", in B. van RootSelaar, J.F. Staal (a cura di), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, III, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968, pp. 311-331 trad. it. in J. Hintikka, *Induzione, accettazione, informazione*, M. Mondadori e P. Parlavaccchia (a cura di), Il Mulino, Bologna, 1994, pp. 211-234.
- (1996), *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator: An Ultimate Presupposition of Twentieth-century Philosophy*, Springer, Berlin, 1996.
- Hodes, H. T. (1990), "Ontological Commitments: Thick and Thin". in Boolos, G. (a cura di) *Meaning and Method: Essays in Honor of Hilary Putnam*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, pp. 347-407.
- Hodges, W. (1993), *Model theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, versione ridotta: *A shorter model theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- Hofweber, T. (2005a), "A puzzle about ontology", *Noûs*, 39:2, 2005, pp. 256-283.
- (2005b), "Number Determiners, Numbers, and Arithmetic", *The Philosophical Review*, 114:2, 2005, pp. 179-225.
- (2007), "Innocent Statements and Their Metaphysically Loaded Counterparts", *The Philosophers' Imprint*, 7:1, 2007, pp. 1-33.
- Horwich, P. (1991), "On the Nature and Norms of Theoretical Commitment", *Philosophy of Science*, 58:1, 1991, pp. 1-14.
- Howson, C., Urbach, P. (1989), *Scientific Reasoning. The Bayesian Approach*, Open Court, La Salle, 1989.
- Hughes, G., Cresswell, M. (1968), *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London, 1968.
- Hussey, E. (1991), "Aristotle on Mathematical Objects", *Apeiron*, 24:4, 1991 pp.105-134.
- Irvine, A. (1990), (a cura di), *Physicalism in Mathematics*, Kluwer A. P., Dordrecht, Boston, London, 1990.
- Jacob, P. (1980), *L'Empirisme logique*, Editions de Minuit, Paris, 1980.
- Jackson, F. (1980) "Ontological Commitment and Paraphrase," *Philosophy*, 55, 1980, pp. 303-315.
- Kalderon, M. E. (2005), (a cura di), *Fictionalism in Metaphysics*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2005.
- Kanamori, A. (2004). *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Springer, Berlin (seconda edizione ampliata e corretta), prima edizione 1994.
- Kant, I. (AK), *Gesammelte Schriften*, hrsg. von der Königlich Preussischen (Deutschen) Akademie der Wissenschaften, Berlin-Leipzig, 1900-sgg., 29 Voll.
- (KRV), *Kritik der reinen Vernunft*, prima edizione [A] 1781 in Kant (AK), Vol. IV, seconda edizione [B] 1787 in Kant (AK), Vol. III; anche in *Kritik der reinen Vernunft* [edizioni A e B], hrsg. von Ingeborg Heidemann, Reclam, Stuttgart 1995. Tra le varie traduzioni italiane disponibili, abbiamo impiegato *La critica della Ragion Pura*, traduzione e cura di Giorgio Colli, Adelphi, Milano 1995.
- (LB), *Logik Blomberg*, in Kant (AK), Vol. XXIV (1-2), *Vorlesungen über Logik*.
- (LJ) *Logik. Ein Handbuch zu Vorlesungen (Logik Jäsche)*, in Kant (AK), Vol. IX, *Logik*, tr. it. *Logica*, a cura di L. Amoroso, Laterza, Roma-Bari, 1995.
- (WL), *Wiener Logik*, in Kant (AK), Vol. XXIV (1-2), *Vorlesungen über Logik*, trad. it *La logica di Vienna*, a cura di B. Bianco, Franco Angeli, 2000.
- Keränen, J. (2001), "The Identity Problem of Realist Structuralism", *Philosophia Mathematica* (III), 9:3, 2001,



- pp. 308-30.
- Kenny, A. (1995), *Frege*, Penguin Books, London, 1995, trad. it. *Frege. Un'introduzione*, Einaudi, Torino, 2000.
- Kitcher, P. (1983), *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1983.
- Kitcher, P., Salmon, W (a cura di), (1989), *Scientific Explanation, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Vol 13*, University of Minnesota Press, Minneapolis, 1989.
- Kleene, S. C. (1967), John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967, ristampato Dover, New York, 2002.
- Klein, J. (1934-36), "Die griechischste Logistik und die Entstehung der Algebra", *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B, Studien*, 3:1, 1934, 18–105, e 3:3, 1936, 122–235, trad. ing. leggermente modificata di E. Brann, *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, MIT Press, Cambridge (Mass), 1967\*.
- Kripke, S. (1980), *Naming and Necessity*. Harvard University Press, Cambridge (Mass), 1980.
- Kuipers, T. (1997), "The Carnap-Hintikka Programme in Inductive Logic," in Sintonen M. (a cura di), *Knowledge and Inquiry: Essays on Jaakko Hintikka's Epistemology and Philosophy of Science*, Poznan Studies, vol. 51, Rodopi, Amsterdam, 1997, pp. 87–99.
- Künne, W. (2003), *Conceptions of Truth*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2003.
- Lakatos, I. (1968), "Changes in the Problem of Inductive Logic", in Lakatos, I. (a cura di), *The Problem of Inductive Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1968.
- (1976), "A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics", *The British Journal for the Philosophy of Science*, 1976 27:3, pp. 201-223
- Largeault, J. (1992), (a cura di), *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Vrin, Paris, 1992.
- Laudan, L. (1981), 'A confutation of Convergent Realism', *Philosophy of Science*, 48, 1984, pp. 19-49.
- Lear, J. (1982), "Aristotle's philosophy of mathematics", *Philosophical Review*, 91:2, 1982, pp. 161-192.
- Leitgeb, H., Ladyman, J. (2008), "Criteria of Identity and Structuralist Ontology", *Philosophia Mathematica* (III), 16:3, 2008, pp. 388-396.
- Leng, M. (2005a), "Revolutionary Fictionalism: A Call to Arms", *Philosophia Mathematica* (III), 13:3, 2005, pp. 277-293.
- (2005b), "Mathematical Explanation", in Cellucci C., Gillies D. (a cura di), *Mathematical Reasoning, Heuristics and the Development of Mathematics*, King's College Publications, London, 2005, pp. 167–89.
- Leslie, A. (1987), "Pretence and Representation: The Origins of the 'Theory of Mind'", *Psychological Review*, 94:4, 1987, pp. 412-426.
- (1994), "Pretending and Believing: Issues in the ToMM", *Cognition*, 50, pp. 211-238.
- Lewis, D. (1986), *On the Plurality of Worlds*. Blackwell Press, Oxford, 1986.
- Liggins, D. (2007), "Quine, Putnam, and the 'Quine-Putnam' indispensability argument", *Erkenntnis*, 68:1, 2007, pp. 113-27.
- (cs), "The Autism Objection to Pretence Theories", *Philosophical Quarterly*, in corso di stampa.
- Linnebo, Ø. (2003), "Plural Quantification Exposed", *Nous*, 37:1, 2003, pp. 71-92.
- (2008), "Plural Quantification", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2009 Edition)*, Edward N. Zalta (a cura di), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/plural-quant/>>.
- Linsky, B. e Zalta, E. (1995), "Naturalized Platonism versus Platonized Naturalism", *The Journal of Philosophy*, 92:10, 1995, pp. 525-555.
- (2006), "What is Neologicisms?", *The Bulletin of Symbolic Logic*, 12:1, 2006, pp. 60–99.
- Lipton, P. (2002), *Inference to the Best Explanation*, Routledge, London, 2002, seconda edizione rivista e ampliata, prima edizione 1991.
- Lolli, G. (2002), *Filosofia della matematica. L'eredità del Novecento*, Il Mulino, Bologna, 2002.
- Luper, S. (2005) "The Epistemic Closure Principle", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2009 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/closure-epistemic/>>.
- MacBride, F (2003), "Speaking with Shadows: A Study of Neo-Logicism", *British Journal of Philosophy of Sciences*, 54:1, 2003, pp. 103-163
- Mac Farlane, J. (2002), "Frege, Kant, and the Logic in Logicism", *The Philosophical Review*, 111:1, 2002, 25–65.
- Mackie, J. L. (1977), *Ethics: Inventing Right and Wrong*, Penguin, 1977, trad. it *Etica: inventare il giusto e l'ingiusto*, Torino, Giappichelli, 2001.
- (2006), *How Things Might Have Been: Individuals, Kinds, and Essential Properties*. Oxford University Press, Oxford, 2006.
- Mac Lane, S. (1997), *Categories for the working mathematician*, Springer, Dordrecht, 1997.
- Maddy, P. (1980), "Perception and Mathematical Intuition", *Philosophical Review*, 89:2, 1980, pp. 163-196.
- (1989), "The Roots of Contemporary Platonism", *The Journal of Symbolic Logic*, 54:4, 1989, pp. 1121-1144.
- (1990a), *Realism in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1990.
- (1990b), "Physicalistic platonism", in Irvine A. (a cura di), *Physicalism in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 259-289.
- (1992), "Indispensability and practice", *The Journal of Philosophy* 89:6, 1992, pp. 275-289.
- (1994), "Taking naturalism seriously", in D. Prawitz, B. Skyrms, and D. Westerståhl (a cura di), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, IX, pp. 383–407.
- (1997), *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1997.
- (1998), "How to be a Naturalist about Mathematics", in H.G. Dales and G. Oliveri (a cura di), *Truth in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, pp. 161-180.
- (2005), "Three Forms of Naturalism", in Shapiro (2005), pp. 437-460.
- (2007), *Second Philosophy*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2007.
- Malament, D. (1982), "Review of Hartry Field's *Science Without Numbers*", *The Journal of Philosophy*, 79:9, 1982, pp. 523-534.
- Mancosu, P. (1998), (a cura di), *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford University Press, Oxford, New York., 1998.
- (2008a), (a cura di), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2008.
- (2008b), "Mathematical Explanation: Why it Matters", in P. Mancosu (a cura di), 2008, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford, New York.

- (2008c), “Quine and Tarski on Nominalism”, *Oxford Studies in Metaphysics*, Vol. IV, 2008, pp. 22-55, trad. it. “Quine e Tarski sul nominalismo”, *Rivista di storia della filosofia*, Vol I, 2009, pp. 33-61.
- Mariani, M. (1994) *Un'introduzione a Frege*, Laterza, Roma-Bari, 1994, terza edizione 2004.
- Martin, W. (2006), *Theories of judgment: Psychology, logic, phenomenology*, Cambridge University Press, Cambridge 2006.
- McGee, V. (1997), “How We Learn Mathematical Language”, *The Philosophical Review*, 106:1, pp. 35-68.
- McGrath, M. (2007), “Propositions”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2008 Edition)*, Edward N. Zalta (a cura di), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/propositions/>>.
- Meini, C. (2007), *Psicologi per natura*, Carocci, Roma, 2007.
- Melia, J. (1995), On What There's Not, *Analysis*, 55:4, 1995, pp. 223-229.
- (2000), “Weaseling away the indispensability argument”, *Mind*, 109:435, 2000, pp. 455-479.
- (2002), “Response to Colyvan”, *Mind*, 111:441, 2002, pp. 75-9.
- (2006), “The conservativeness of mathematics”, *Analysis*, 66:3, 2006, pp. 202-208.
- Mendelson, E. (1964), *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1964, quarta edizione 1997, trad. it. *Introduzione alla Logica Matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1972
- Meyer, G. (2009), “Extending Hartry Field's Instrumental Account of Applied Mathematics to Statistical Mechanics”, *Philosophia Mathematica (III)*, 17, 2009, pp. 273-312.
- Mill, J. S. (1843), *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive*. Longmans, London, 1843, trad. it. *Sistemi di logica deduttiva e induttiva*, UTET, Torino, 1996.
- Monton, B. (a cura di), (2007), *Images of Empiricism: Essays on Science and Stances. With a Reply from Bas C. van Fraassen*, Oxford University Press, Oxford, 2007.
- Moruzzi, S., Zardini, E. (2007), “Conseguenza logica”, in A. Coliva (a cura di), *Filosofia analitica. Temi e problemi*, Carocci, Roma, 2007, pp. 157-194.
- Mueller, I. (1970), “Aristotle on Geometrical Objects”, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 52:2, 1970, pp. 156-171.
- Nagel, E., Newman, J. R. (1992), *Gödel's Proof*, NYU Press, New York, trad. it. La prova di Gödel, Bollati Boringhieri, Torino, 1992.
- Neumann, von J. (1923), “Zur Einführung der transfiniten Zahlen”, *Acta Litterarum ac Scientiarum: Sectio Scientiarum Mathematicarum*, 1, 1923, 199-208, trad. ing. “On the Introduction of Transfinite Numbers” in van Heijenoort (1967), pp. 346-354.
- (1947), “The mathematician”, in R.B. Heywood (a cura di), *The Works of the Mind*, University of Chicago Press, Chicago, 1947, pp. 180-196, anche in *John von Neumann. Collected Works*, a cura di A. H. Taub, Pergamon Press, Oxford, 1961\*, vol. 1, pp. 1-9.
- Palladino, D. (2004) *Logica e teorie formalizzate. Completezza, incompletezza, indecidibilità*, Carocci, Roma, 2004.
- Palladino, D., Palladino, C (2008), *Le geometrie non euclidee*, Carocci, Roma, 2008.
- Panza, M. (1997), “Mathematics Acts of Reasoning as Synthetic a priori”, in Otte M., Panza M. (a cura di), *Analysis and synthesis in Mathematics*, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1997, pp. 261-326.
- (2007), “Il platonismo aritmetico”, in A. Coliva (a cura di), *Filosofia analitica. Temi e problemi*, Carocci, Roma, 2007, pp. 121-156.
- (cs), “The Twofold Role of Diagrams in Euclid's Plane Geometry”, in corso di stampa (anteprima online: [hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/21/65/PDF/KarineCUP\\_6\\_.pdf](http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/21/65/PDF/KarineCUP_6_.pdf)).
- Papineau, D. (1988), “Mathematical Fictionalism”, *International Studies in the Philosophy of Science*, 2, 1988, pp. 151-173.
- (1993), *Philosophical Naturalism*, Basil Blackwell, Oxford, 1993.
- (2007), “Naturalism”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2009 Edition)*, Edward N. Zalta (a cura di), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/naturalism/>>.
- Parrini, P. (1983), *Empirismo logico e convenzionalismo. Saggio di storia della filosofia della scienza*, Franco Angeli, Milano, 1983.
- Parsons, C. (1979-80), “Mathematical Intuition”, *Proceedings of the Aristotelian Society*, New Series, 80, 1979-80, pp. 145-168, in Hart (1996), pp. 95-113.
- (1982), “Objects and Logic”, *The Monist*, 65, 1982, pp. 491-516.
- (1983a), *Mathematics in Philosophy: Selected Essays*, Cornell University Press, Ithaca, 1983.
- (1983b), “Quine on the Philosophy of Mathematics”, in Parsons (1983a), cap. 7, anche in Hahn L., Schilpp P. (a cura di), *The Philosophy of W.V. Quine*, Open Court, La Salle, (Ill), pp. 369-395.
- (1990), “The Structuralist View of Mathematical Objects”, *Synthese*, 84:3, 1990, pp. 303-346.
- (1998), “Finitism and Intuitive Knowledge”, in Schirn (1998), pp. 251-270.
- (2000), “Reason and Intuition”, *Synthese*, 125:3, 2000, pp. 299-315.
- (2004), “Structuralism and Metaphysics”, *The Philosophical Quarterly*, 54:214, 2004, pp. 56-77.
- (2008), *Mathematical Thought and Its Objects*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- Pavan, S. (2008), “Revisione”, in Ferraris, M. (a cura di), *Storia dell'ontologia*, Bompiani, Milano, 2008, §3.5.
- Peano (1889), *Aritmetices Principia, Nova Methodo Exposita*, Bocca, Augustæ Taurinorum, 1998; anche in G. Peano, *Opere scelte*, Cremonese, Roma, 1957-59, Vol. II, pp. 20-55.
- Pedefferri, A. (2005), (a cura di), *Frege e il neologicismo*, Franco Angeli, Roma.
- Peressini, A. (1997), “Troubles with Indispensability: Applying Pure Mathematics in Physical Theory”, *Philosophia Mathematica* 5:3, 1997, pp. 210-227.
- (2008), “Confirmation Holism and its mathematical (w)holes”, *Studies in History and Philosophy of Science*, 39, pp. 102-111.
- Petitot, J. (1995), “Pour un platonisme transcendantal”, in M. Panza, J., M. Salanskis (a cura di), *L'objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles*, Masson, Paris, pp. 147-78.
- Pettigrew, R. (2009), “Aristotle on the subject matter of geometry”, *Phronesis* 54:3, 2009, pp. 239-260.
- Piazza, M. (2000), *Intorno ai numeri. Oggetti, proprietà, finzioni utili*, Bruno Mondadori, Milano, 2000.
- Picardi, E. (1994), *La chimica dei concetti*, Il Mulino, Bologna, 1994.
- Plantinga, A. (1974), *The Nature of Necessity*, Clarendon Press, Oxford, 1974.
- Platone, (Epist), *Lettere*, trad. it. a cura di Antonio Maddalena, in Platone, *Opere Complete*, Laterza, Roma-Bari, 1993, Vol. VIII.

- (Gorg), *Gorgia*, trad. it. a cura di Francesco Adorno, in Platone, *Opere Complete*, Laterza, Roma-Bari, 1993, Vol. V.
- (Men), *Menone*, trad. it. a cura di Francesco Adorno, in Platone, *Opere Complete*, Laterza, Roma-Bari, 1993, Vol. V.
- (Phaed), *Fedro*, trad. it. a cura di Piero Pucci, in Platone, *Opere Complete*, Laterza, Roma-Bari, 1993, Vol. III.
- (Rp), *La Repubblica*, trad. it. a cura di Franco Sartori, in Platone, *Opere Complete*, Laterza, Roma-Bari, 1993, Vol. VI.
- (Theat), *Teeteto*, trad. it. a cura di Franco Sartori, in Platone, *Opere Complete*, Laterza, Roma-Bari, 1993, Vol. II.
- Poincaré, H. (1900), *La valeur de la science*, Flammarion, Paris, 1900, trad. it. *Il valore della scienza*, La Nuova Italia, Firenze, 1994.
- (1902), *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902, trad. it. *La scienza e l'ipotesi*, Bompiani, Milano, 2003.
- (1906), *Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1906, trad. italiana *Scienza e metodo*, Einaudi, Torino, 1997.
- Popper, K. (1934), *Logik der Forschung*, Mohr Siebeck, Tübingen, 1934, trad. ing. *The Logic of Scientific Discovery*, Hutchinson, London, 1959, trad. it. *Logica della scoperta scientifica*, Einaudi, Torino, 1970.
- Potter, M. (2004) *Set Theory and its Philosophy. A Critical Introduction*, Oxford University Press, Oxford-New York, 2004.
- Proclo (CEM), *A commentary on the First Book of Euclid's Elements*, tradotto con introduzione e note da G. R. Morrow, con una prefazione di I. Mueller, Princeton University Press, Princeton, 1992.
- (CETP), *Commento al Primo Libro degli Elementi di Euclide*, a cura di M. Tampanaro Cardini, Giardini, Ghezzano (Pisa), 1978.
- Psillos, S. (1999), *Scientific Realism: How Science Tracks Truth*, Routledge, London, 1999.
- Putnam, H. (1962), "What Theories Are Not", in Nagel, E., Suppes, P., Tarski, A. (a cura di), *Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1960 International Congress*, Stanford University Press, Stanford CA, pp. 240-251, anche in Putnam (1975b), cap. 13.
- (1965), "Craig's Theorem", *The Journal of Philosophy*, 62:10, 1965, pp. 251-260, anche in Putnam (1975b), cap. 14.
- (1967), "Mathematics without foundations", *The Journal of Philosophy*, 64:1, 1967, pp. 5-22, anche in Putnam (1975b), cap. 3.
- (1971), *Philosophy of logic*, Harper & Row, New York, 1971, anche in Putnam (1975b), cap. 20 (non presente nella trad. it di Putnam, 1975), trad. it. *Filosofia della logica : nominalismo e realismo nella logica contemporanea*, ISEDI, Milano, 1975.
- Putnam, H. (1975b), "What is Mathematical Truth?", *Historia Mathematica*, 2, pp. 529-543, anche in Putnam (1975b), cap. 6.
- (1975b), *Mathematics Matter and Method: Philosophical Papers Vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975, seconda edizione 1985, trad. it. *Matematica, Materia e Metodo*, Adelphi, Milano 1993.
- (1983), "Equivalence", originariamente pubblicata in italiano come voce 'Equivalenza' in Enciclopedia Einaudi, Giulio Einaudi Editore, v. 547-64, anche in Putnam, H., *Realism, and Reason, Philosophical Papers*, Vol. III, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, cap. 2.
- (2004), *Ethics Without Ontology*, Harvard University Press, Cambridge, (Mass), trad. it. *Etica senza ontologia*, Bruno Mondadori, Milano, 2005.
- Quine, W. V. O. (1935), "Truth by convention", O.H. Lee (a cura di), *Philosophical Essays for A.N. Whitehead* (New York: Longmans, 1936), pp. 90-124, anche in Quine (1966), cap. 1.
- (1937), "New Foundations for Mathematical Logic". *American Mathematical Monthly* 44, pp. 70-80, anche in Quine (1953a), cap. 5.
- (1939b), "Designation and Existence", *The Journal of Philosophy*, 36:26, 1939, pp. 701-709, anche in Feigl H., Sellars, W. (a cura di), *Readings in Philosophical Analysis* (New York, Appleton-Century-Crofts, Inc).
- (1948), "On What There Is", *Review of Metaphysics*, 2, 1948, pp.21-38, anche in Quine (1953a), cap. 1, trad. it. anche in Iacona A., Paganini E. (a cura di), *Filosofia del linguaggio*, Raffaello Cortina Editore, Milano, 2003\*, pp. 241-260.
- (1950), *Methods of Logic*, Harvard University Press, Cambridge (Mass), 1950, quarta edizione 1982.
- (1951a), "Two dogmas of empiricism", *Philosophical Review*, 60:1, 1951, pp. 20-43, anche in Quine (1953a), cap. 2.
- (1951b), "On Carnap's views on ontology", *Philosophical Studies*, 2:5, 1951, pp. 65-72, anche in Quine (1966), cap. 19.
- (1953a), *From a Logical Point of View*, New York, Harper & Row, 1953, seconda edizione 1961, trad. it *Da un punto di vista logico*, Raffaello Cortina Editore, Milano 2004.
- (1953b), "Logic and the Reification of Universals", in Quine (1953a), cap. 6.
- (1954a), "Carnap and logical truth", in Schilpp P. (a cura di), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, Open Court, LaSalle, (Ill), pp. 385-406, anche in Quine (1966), cap. 12.
- (1955), "Posits and Reality", in Uyeda S. (a cura di), *Basis of Contemporary Philosophy*, Waseda University Press, Tokyo 1960, anche in Quine (1966), cap. 23.
- (1960), *Word and Object*, MIT Press, Cambridge (Mass), 1960, trad. it. *Parola e Oggetto*, Il Saggiatore, Milano, 2008.
- (1963), *Set Theory and Its Logic*. Harvard University Press, Cambridge (Mass), 1963, edizione rivista 1969.
- (1966), *The Ways of Paradox and Other Essays*, Columbia University Press, New York, 1966, seconda edizione rivista e ampliata 1976, trad. it. *I modi del paradosso e altri saggi*, Il Saggiatore, Milano, 1975
- (1966b), "The scope and language of science", in Quine (1966a), cap. 19.
- (1968), "Ontological Relativity", *The Journal of Philosophy*, 65:7, 1968, pp. 185-212 in Quine (1969a), cap. 2.
- (1969a), *Ontological Relativity and Other Essays*, Columbia University Press, New York and London, 1969, trad it. *La relatività ontologica e altri saggi*, Armando Editore, Roma, 1986.
- (1969b), "Epistemology Naturalized", in Quine (1969a), cap. 3.
- (1969c), "Existence and Quantification", *L'Âge de la Science*, 1, 1969, pp. 151-64, anche in Quine (1969a), cap. 4.
- (1970), *Philosophy of Logic*, Harvard University Press, Cambridge (Mass), 1970, seconda edizione 1986.

- (1975), “On Empirically Equivalent Systems of the World”, *Erkenntnis*, 9:3, , 1975, pp. 313-328.
- (1981a), “Things and Their Place in Theories”, in Quine (1981e), pp. 1-23.
- (1981b), “Five Milestones of Empiricism”, in Quine (1981e), pp. 67-72.
- (1981c), “Success and Limits of Mathematization”, in Quine (1981e), pp. 148-155.
- (1981d), “Reply to Chihara”, in P. A. French, T. Uehling, H. Wettstein (a cura di), *The Foundations of Analytic Philosophy*, University of Minnesota Press, Minneapolis, pp. 453-454.
- (1981e), *Theories and Things*, Harvard University Press, Cambridge (Mass), 1981.
- (1986), “Reply to Charles Parsons”, in Hahn L., Schilpp P. (a cura di), *The Philosophy of W.V. Quine*, Open Court, La Salle, (Ill), pp. 396-403.
- (1990), *Pursuit of Truth*, Harvard University Press, Cambridge (Mass), 1990, seconda edizione rivista 1992.
- (1993), “In Praise of Observation Sentences”, *The Journal of Philosophy*, 90:3, pp. 107-116.
- (1995), *From Stimulus to Science*. Harvard University Press, Cambridge (Mass), 1995, trad. it *Dallo stimolo alla scienza*, Il Saggiatore, Milano 2001.
- Quine, W. V. O., Ullian, J. S. (1978), *The Web of Belief*, , McGraw-Hill, New York, 1978.,seconda edizione 1970.
- Ramsey, F. P. (1926), “The Foundations of Mathematics”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, II, 25, 1926, pp. 338-384; anche in F. P. Ramsey, *Philosophical Papers*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 164-224.
- Reichenbach, H. (1951), *The Rise of Scientific Philosophy*, University of California Press, Berkeley-Los Angeles-London, 1951, trad. it. *La nascita della filosofia scientifica*, Il Mulino, Bologna, 2003.
- Resnik, M. D. (1981), “Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference”, *Nous*, 15, 1981, pp. 529-550.
- (1983), “Review of Hartry Field’s *Science without Numbers*”, *Noûs*, 17, 1983, pp. 514-519.
- (1985), “How Nominalist is Hartry Field’s Nominalism”, *Philosophical Studies* 47, 1985, pp. 163-181
- (1992), “Applying Mathematics and the Indispensability Argument”, in J.Echeverria, A. Ibarra, and T. Morman (a cura di), *The Space of Mathematics*, Walter de Gruyter, Berlin, pp. 115-131.
- (1995), “Scientific Vs Mathematical Realism: The Indispensability Argument”, *Philosophia Mathematica* 3:2, 1995, pp. 166-174.
- (1997), *Mathematics As A Science of Patterns*, Clarendon Press, Oxford, 1997.
- (2005), “Quine And The Web Of Belief”, in Shapiro (2005), pp. 412-437.
- Rosen, G (2001), “Abstract Objects”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2009 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/abstract-objects/>>.
- Ross, S. (1979), *A First Course in Probability Theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River (NJ), 1979, ottava edizione 2008, trad. it. *Calcolo delle Probabilità*, Apogeo, Milano, 2004.
- Rothmaler, P. (2000), *Introduction to Model Theory*, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000.
- Russell, B. (1903), *The Principles of Mathematics*, Allen & Unwin, London, 1903, seconda edizione 1938; trad. italiana (di L. Geymonat): *I principi della matematica*, Longanesi & C., Milano, 1951.
- (1905), “On Denoting”, *Mind*, 14:56, 1905, pp. 479-493.
- (1908), “Mathematical Logic as Based on the Theory of Types”, *American Journal of Mathematics*, 30, 1908, 222-262
- (1918-1919), “The Philosophy of Logical Atomism”, *The Monist*, 28 (1918) – 29 (1919), anche in Russell, B., *The Collected Papers of Bertrand Russell*, Vol. III, *The Philosophy of Logical Atomism and Other Essays*, a cura di Slater, J. G., Allen & Unwin, Londra, 1914-1919, trad. it. in *La filosofia dell’atomismo logico*, Einaudi, Torino, 2003.
- Russell, B. & Whitehead, A. N. (1910-1913), *Principia Mathematica*, 3 Voll, Cambridge, Cambridge University Press, seconda edizione, 1925 (Vol. 1), 1927 (Voll. 2, 3).
- Saatsi, J. (2007), “Living in Harmony: Nominalism and the Explanationist Argument for Realism”, *International Studies in the Philosophy of Science*, 21, 2007, pp. 19–33.
- Schirn, M. (a cura di), (1998), *Philosophy of Mathematic Today*, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- Salmon, W (1989), *Four Decades of Scientific Explanation*, University of Minnesota Press, Minneapolis, 1989.
- Shapiro, S. (1983), “Conservativeness and Incompleteness”, *The Journal of Philosophy*, 80:9, 1983, pp. 521-31.
- (1997), *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1997.
- (2000a), *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2000.
- (2000b), “Frege Meets Dedekind : A Neo-Logicist Treatment of Real Analysis”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 41, 2000, pp. 335-364.
- (2005), (a cura di), *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2005.
- (2005b), “Higher-Order Logic”, in Shapiro (2005) Oxford Handbook in Logic, chap. 25
- (2006b), “The Governance of Identity”, in F. MacBride (a cura di), *Identity and Modality*, Oxford University Press, Oxford, New York, pp. 164-173.
- (2008), “Identity, Indiscernibility, and *ante rem* Structuralisms: The Tale of *i* and *-i*”, *Philosophia Mathematica* (III), 16:3, 2008, pp. 285-309.
- Shapiro, S, Weir, A. (2000), “‘Neo-Logicist’ Logic is not Epistemologically Innocent”, *Philosophia Mathematica* (III), 8, 2000, pp. 160-189, trad. it. in Pedferri (2005) pp. 183-213.
- Shoenfield, J. R. (1967) *Mathematical logic*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1967, ristampato da AK Peters, Ltd, Natick, Massachusetts , 2001
- Skolem, T. (1923), “Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbare Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich”, *Videnskapselkapet skrifter Kristiania, I. Matematisk– naturvidenskabelig klasse*, 6, 1923, trad. ing. in van Heijenoort (1967), pp. 302-333.
- Smullyan, R. (1992), *Gödel’s incompleteness theorems*, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- Sober, E. (1993), “Mathematics and indispensability”, *The Philosophical Review*, 102:1, 35-57.
- Smith, P. (2007), *An Introduction to Gödel’s Theorem*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007, ristampa con correzioni (2008).
- Stadler, F. (1997), *Studien zum Wiener Kreis. Ursprung, Entwicklung und Wirkung des Logischen Empirismus im*

- Kontext, Suhrkamp, Frankfurt a. M., 1997, trad. ing. *The Vienna Circle. Studies in the Origins, Development and Influence of logical Empiricism*, Springer, Vienna, New York, 2001.
- Stigt, van , W. P. (1990), *Brouwer's Intuitionism*, Studies in the History and Philosophy of Mathematics, Vol. 2, North Holland, 1990
- Stanley, J. (2001), "Hermeneutic Fictionalism", *Midwest Studies in Philosophy*, XXV, 2001, 36-71.
- Steiner, M. (1978), "Mathematics, Explanation, and Scientific Knowledge", *Noûs*, 12:1, 1978, pp. 17-28.
- (1989), "The application of mathematics to natural science", *The Journal of Philosophy*, 86:9, 1989, pp. 449-480.
- (1998), *The Application of Mathematics as a Philosophical Problem*. Harvard University Press, Cambridge, (Mass), 1998.
- Stolz, O. (1885), *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, Teubner, Leipzig, 1885.
- Strawson, P. (1966), *The Bounds of Sense: An Essay on Kant's Critique of Pure Reason*, Methuen, London, 1966, trad. it. *Saggio sulla Critica della ragion pura*, Laterza, Roma-Bari, 1985 ss.
- Suppe, F. (1977), "The Search for Philosophic Understanding of Scientific Theories", in Suppe, F. (a cura di), *The Structure of Scientific Theories*, University of Illinois Press, seconda edizione rivista e ampliata, 1977, pp. 3-241, prima edizione 1974.
- Suppes, P. (1972), *Axiomatic Set Theory*, Dover, New York, 1972.
- Tait, W. W. (1986), "Truth and Proof: The Platonism of Mathematics", *Synthese*, 69:33, 1986, pp. 341-370; anche in Tait W. W., *The Provenance of Pure Reason. Essays in Philosophy of Mathematics and its History*, Oxford University Press, Oxford, New York, 2005, pp. 61-88.
- Thomas, R. (2000), "Mathematics and Fiction I: Identification", *Logique et Analyse* 43:171-172, 2000, pp. 301-340.
- (2002), "Mathematics and Fiction II: Analogy", *Logique et Analyse*, 45:177-178, 2002, pp. 185-228.
- Tieszen, R. (1992), "Kurt Gödel and Phenomenology", *Philosophy of Science*, 59:2, 1992, pp. 176-194.
- (1995), "Mathematics", in Smith, B., Smith, D.W. (a cura di), *The Cambridge Companion to Husserl*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- (2005), *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- Varzi, A. (2009), "Mereology", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2009 Edition)*, Edward N. Zalta (ed.), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/mereology/>>.
- Vineberg, S. (1996), "Confirmation and the Indispensability of Mathematics to Science", *Philosophy of Science*, 63:Supplement, pp. S256-S263.
- Volpe, G. (2005), *Teorie della verità*, Guerini e Associati, Milano, 2005.
- Walton, K. (1990), *Mimesis As Make-Believe: On the Foundations of the Representational Arts*, Harvard University Press, Harvard, 1990.
- (1993), "Metaphor and Prop Oriented Make-Believe" *European Journal of Philosophy* 1:1, pp. 39-57, anche in Kalderon (2005), pp. 65-87.
- Watkins, J. (1958), "Confirmable and Influential Metaphysics", *Mind*, n.67, pp. 344-365.
- Weir, A. (2005), "Naturalism Reconsidered", in Shapiro (2005), pp. 460-482.
- White, N. (1974), "What Numbers Are", *Synthese*, 27:1-2, 1974, pp. 111-124, anche in Giaquette, D. (a cura di), *Philosophy of Mathematics, An Anthology*, Wiley-Blackwell, Oxford, 2001, pp. 91-98.
- Wiles, A. (1995), *Modular elliptic curves and Fermat's Last theorem* *Annals of Mathematics*, 141:3, pp. 443-551.
- Woodin, H. (2001a), "The Continuum Hypothesis, Part I", *Notices of the AMS* 48:6, pp. 567-576.
- (2001b), "The Continuum Hypothesis, Part II", *Notices of the AMS* 48:7, pp. 681-690.
- Woodward, J. (2009), "Scientific Explanation", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2009 Edition)*, Edward N. Zalta (a cura di), URL = <<http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/scientific-explanation/>>.
- Wright, C. (1983), *Frege's Conception of Numbers As Objects*, Aberdeen University Press, Aberdeen, 1983.
- (1990), "Field and Fregean Platonism", in A. Irvine (1990), pp. 73-93; anche in Hale e Wright (2001), pp. 153-168.
- (1997), "On the Philosophical Significance of Frege's Theorem", in R. Heck Jr. (a cura di), *Language, Truth and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*, Clarendon Press, Oxford, 1997, pp. 201-244; anche in Hale e Wright (2001), pp. 272-306, trad. it. in Pedferri (2005), pp. 103-141.
- (1998a), "Response to Dummett", in Schirn (1998), pp. 389-405; anche in Hale e Wright (2001), pp. 256-271.
- (1998b), "Why Numbers Can Believably Be", *Revue Internationale de Philosophie*, 42, pp. 425-473.
- (1998c), "On The Harmless Impredicativity of  $N$ ", in Schirn (1998), pp. 339-68; anche in Hale e Wright (2001), pp. 229-55.
- (1998c), "Why Frege Does Not Deserve His Grain of Salt: A Note on the Paradox of "The Concept Horse" and the Ascription of *Bedeutungen* to Predicates", in *Grazer Philosophische Studien*, 55, *New Essays on the Philosophy of Michael Dummett*, a cura di Brandl, J., Sullivan, P., Rodopi, Amsterdam-Atlanta, 1998, pp. 239-263, anche in Hale e Wright (2001), pp. 72-90.
- (1999), "Is Hume's Principle Analytic?", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40:1, 1999, pp. 6-30; anche in Hale e Wright (2001), pp. 307-332.
- (2000), "Neo-Fregean Foundations for Real Analysis", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 41:4, 2000, pp. 317-334.
- Yablo, S. (1998), "Does Ontology Rest On a Mistake?", *Proceedings of the Aristotelian Society*, Supp. Vol. 72, pp. 229-261.
- (2001), "Go Figure: A Path Through Fictionalism", *Midwest Studies in Philosophy*, XXV, 2001, pp. 72-102.
- (2002), "Abstract Objects: A Case Study", in Bottani, A., Carrara, M., Giaretta, P. (a cura di) *Individuals, Essence and Identity. Themes of Analytic Metaphysics*, Topoi Library, Vol. 4, Kluwer, Dordrecht, 2002\*, pp.163-188, anche in Sosa, E., and Villanueva, E. (a cura di), *Philosophical Issues 12: Realism and Relativism*, Blackwell, Oxford, pp. 220-40.
- (2005), "The Myth of the Seventh", in Kalderon (2005), pp. 88-115.
- Zalta, E. (1983), *Abstract Objects: An Introduction to Axiomatic Metaphysics*, D. Reidel, Dordrecht, 1983.
- (1999), "Natural Numbers and Natural Cardinals as Abstract Objects: A Partial Reconstruction of Frege's *Grundgesetze* in Object Theory", *Journal of Philosophical Logic*, 28:6, 1999, pp. 619-660.

- (2000), “Neo-Logicism? An Ontological Reduction of Mathematics to Metaphysics”, *Erkenntnis*, 53:1-2, 2000, p. 219–265.
- Zermelo, E. (1908), “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I”, *Mathematische Annalen*, 65, pp. 261-281, anche in van Heijenoort (1967), pp. 199-215.