



Dérivation des surfaces convexes de $BbbR^3$ dans l'espace de Lorentz et étude de leurs focales

Yves Martinez-Maure

► To cite this version:

Yves Martinez-Maure. Dérivation des surfaces convexes de $BbbR^3$ dans l'espace de Lorentz et étude de leurs focales. 2009. hal-00432273v1

HAL Id: hal-00432273

<https://hal.science/hal-00432273v1>

Preprint submitted on 15 Nov 2009 (v1), last revised 13 May 2010 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉRIVATION DES SURFACES CONVEXES DE $\mathbb{R}^3$ DANS L'ESPACE DE LORENTZ ET ÉTUDE DE LEURS FOCALES

YVES MARTINEZ-MAURE

Dedicated to the memory of Heliodoro Martinez.

ABSTRACT. Introducing an appropriate notion of derivative of closed convex surfaces of $\mathbb{R}^3$ in the Lorentz-Minkowski space $\mathbb{R}^{3,1}$, we give a natural three-dimensional equivalent of an upper bound of the isoperimetric deficit in terms of the signed area of the evolute of a closed convex curve of $\mathbb{R}^2$. Furthermore we establish a series of geometric inequalities for focals of closed convex surfaces.

1. Introduction et majoration du déficit isopérimétrique dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathcal{K}$ un corps convexe de classe C_+^4 dans le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$. Paramétré par son vecteur normal sortant, le bord de $\mathcal{K}$ est un hérisson $\mathcal{H}_h$ de fonction de support définie sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$ par : $\forall u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{S}^1$, $h(\theta) = \max_{x \in \mathcal{K}} \langle x, u(\theta) \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$. La développée (resp. la développée seconde) de $\mathcal{H}_h$ est encore un hérisson $\mathcal{H}_{\partial h}$ (resp. $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$) de fonction de support $(\partial h)(\theta) = h'(\theta - \frac{\pi}{2})$ (resp. $(\partial^2 h)(\theta) = -h''(\theta)$). L'aire $a(h)$ et la longueur $l(h)$ de $\mathcal{H}_h$, l'aire $a(\partial h)$ de sa développée $\mathcal{H}_{\partial h}$ et l'aire mixte $a(h, \partial^2 h)$ de $\mathcal{H}_h$ et de sa développée seconde $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ vérifient [3, Prop. 6] :

$$(1) \quad 0 \leq \frac{l(h)^2}{4\pi} - a(h) \leq -a(\partial h) = -a(h, \partial^2 h).$$

La première inégalité n'est autre que l'inégalité isopérimétrique. La seconde majore le déficit $l(h)^2 - 4\pi a(h)$ à l'aide des "courbes dérivées" $\mathcal{H}_{\partial h}$ et $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ de $\mathcal{H}_h$. Dans cette Note, nous prouvons que (1) admet un équivalent naturel en dimension 3.

Soit $\mathcal{K}$ un corps convexe de classe C_+^4 dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$. Paramétré par son vecteur normal sortant, le bord de $\mathcal{K}$ est un hérisson $\mathcal{H}_h$ de fonction de support définie sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ par : $\forall u \in \mathbb{S}^2$, $h(u) = \max_{x \in \mathcal{K}} \langle x, u \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^3$. La développée moyenne de $\mathcal{H}_h$ est l'enveloppe des plans médiateurs des segments focaux $\sigma_h(u) = [c_h^1(u), c_h^2(u)]$, où $c_h^1(u), c_h^2(u)$ sont les centres de courbure principaux de $\mathcal{H}_h$ au point de vecteur normal sortant u . Cette développée moyenne est un hérisson $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ de fonction de support $(\partial^2 h)(u) = -\frac{1}{2}(\Delta h)(u)$, où $(\Delta h)(u)$ est la somme des valeurs propres $\lambda_1(u), \lambda_2(u)$ du hessien sphérique de h en u . L'intégrale $m(h)$ de la courbure moyenne de $\mathcal{H}_h$, son aire $s(h)$ et l'aire mixte $s(h, \partial^2 h)$ de $\mathcal{H}_h$ et de sa développée moyenne $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ (aire mixte définie en polarisant la forme quadratique $h \mapsto s(h)$ sur $C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$) sont données par [3] :

Key words and phrases. Evolute, focal surface, hedgehog, isoperimetric deficit, Lorentz space. MSC (2010): 52A38, 52A15, 52A40, 51B15.

$$m(h) = \int_{\mathbb{S}^2} h d\sigma, \quad s(h) = \int_{\mathbb{S}^2} R_h d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} h R_{(1,h)} d\sigma \quad \text{et} \quad s(h, \partial^2 h) = \int_{\mathbb{S}^2} (\partial^2 h) R_{(1,h)} d\sigma$$

où σ est la mesure de Lebesgue sphérique et R_h (resp. $R_{(1,h)}$) la fonction de courbure (resp. le rayon de courbure moyen) de $\mathcal{H}_h$, c'est-à-dire le produit $R_1 R_2$ (resp. la moyenne $\frac{1}{2}(R_1 + R_2) = h + \frac{1}{2}\Delta h$) des rayons de courbure principaux $R_1 := \lambda_1 + h$ et $R_2 := \lambda_2 + h$ de $\mathcal{H}_h$.

Théorème 1. *Soit $\mathcal{K}$ un corps convexe de classe C_+^4 de $\mathbb{R}^3$ et soit $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$ sa fonction de support. La courbure moyenne $m(h)$ du hérisson $\mathcal{H}_h$, son aire $s(h)$ et l'aire mixte $s(h, \partial^2 h)$ de $\mathcal{H}_h$ et de sa développée moyenne $\mathcal{H}_{\partial^2 h}$ vérifient :*

$$(2) \quad 0 \leq \frac{m(h)^2}{4\pi} - s(h) \leq -s(h, \partial^2 h).$$

L'encadrement (2) est vérifié pour tout hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$, où $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$. Si $\mathcal{H}_h$ est non convexe, son aire $s(h)$ s'écrit $s_+(h) - s_-(h)$, où $s_+(h)$ (resp. $s_-(h)$) est l'aire totale de ses régions elliptiques (resp. hyperboliques). Le lecteur pourra consulter [1] pour une introduction aux hérissons et [5] pour un panorama récent.

Preuve. La première inégalité est bien connue pour $\mathcal{H}_h$ convexe (e.g. [6, p. 322]). Le cas général est traité dans [3]. Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\frac{m(h)^2}{4\pi} - s(h) \leq \int_{\mathbb{S}^2} (R_{(1,h)}^2 - R_h) d\sigma.$$

En utilisant la relation de Stoker [7] $\int_{\mathbb{S}^2} R_h d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} h R_{(1,h)} d\sigma$ et l'expression $R_{(1,h)} = h + \frac{1}{2}\Delta h$, nous en déduisons immédiatement que le second membre de cette inégalité n'est autre que l'opposé de $s(h, \partial^2 h)$. $\square$

La comparaison des encadrements (1) et (2) nous suggère l'existence d'une "surface dérivée" $\mathcal{H}_{\partial h}$ dont l'aire $s(\partial h)$ devrait vérifier :

$$(2) \quad 0 \leq \frac{m(h)^2}{4\pi} - s(h) \leq -s(\partial h) = -s(h, \partial^2 h).$$

Une telle notion de surface dérivée ne peut être définie dans $\mathbb{R}^3$ et c'est sans aucun doute ce qui explique que son existence soit passée inaperçue jusqu'à ce jour. Cette surface $\mathcal{H}_{\partial h}$ est en effet à chercher dans l'espace de Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. C'est en effet ce que nous suggère le fait que l'intégrale

$$-s(h, \partial^2 h) := \int_{\mathbb{S}^2} (R_{(1,h)}^2 - R_h) d\sigma = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^2} (R_1 - R_2)^2 d\sigma$$

soit l'aire de Laguerre du hérisson $\mathcal{H}_h$ paramétré par la réciproque $x_h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $u \mapsto \nabla h(u) + h(u)u$ de son application de Gauss (e.g. [2, 8]) :

$$L(x_h) := \int_{\mathbb{S}^2} \frac{H^2 - K}{K} d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} (R_{(1,h)}^2 - R_h) d\sigma,$$

où H (resp. K) est la courbure moyenne (resp. de Gauss) de $\mathcal{H}_h$. Autrement dit, l'intégrale $-s(h, \partial^2 h)$ est égale à l'aire de la surface décrite dans l'espace $\Sigma \approx \mathbb{R}^{3,1}$ des sphères orientées de $\mathbb{R}^3$ par la sphère moyenne $S(\frac{1}{2}(c_h^1 + c_h^2)(u); -R_{(1,h)}(u))$ orientée par u au point $x_h(u)$. Nous verrons que cette surface peut s'interpréter comme une surface dérivée $\mathcal{H}_{\partial h}$ de fonction de support $\partial h = (dh)/\sqrt{2}$ et que $s(h, \partial^2 h)$ n'est autre que son aire $s(\partial h)$ dans $\mathbb{R}^{3,1}$. En passant, nous venons de donner une interprétation géométrique de l'aire de Laguerre dans $\mathbb{R}^3$.

2. Développement des hérissons de $\mathbb{R}^3$ dans l'espace de Lorentz $\mathbb{R}^{3,1}$

Reprenons les notations de la première section. Notons $\mathbb{R}^{3,1}$ l'ensemble $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ muni de la pseudo-métrique de Lorentz définie par : $\forall ((x; t), (x'; t')) \in (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})^2$,

$$\langle (x; t), (x'; t') \rangle_{3,1} = \langle x, x' \rangle - t t'.$$

L'interprétation de $-s(h, \partial^2 h)$ comme aire de Laguerre $L(x_h)$ de $x_h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nous suggère d'identifier pour tout $u \in \mathbb{S}^2$, la normale à $\mathcal{H}_h$ en $x_h(u)$, à savoir $N_h(u) := \{\nabla h(u)\} + \mathbb{R}u$, à la droite $L_h(u) := \{(\nabla h(u); -h(u))\} + \mathbb{R}(u; 1)$ de $\mathbb{R}^{3,1}$ via l'application $\nabla h(u) + tu \mapsto (\nabla h(u); -h(u)) + t(u; 1)$. L'hypersurface réglée de $\mathbb{R}^{3,1}$ dont les génératrices sont ces droites $L_h(u)$ n'est autre que l'enveloppe $\mathcal{L}_h$ de la famille d'hyperplans d'équation

$$\langle (x; t), u_L \rangle_{3,1} = \frac{h(u)}{\sqrt{2}}, \quad \text{où } u_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(u; 1).$$

Cette enveloppe $\mathcal{L}_h$ jouit d'une forme de "caractère hérisson" dans la mesure où u_L reste $\langle \cdot, \cdot \rangle_{3,1}$ -orthogonal à l'espace tangent à $\mathcal{L}_h$ tout le long de $L_h(u)$. Si l'on ne définit $\mathcal{L}_h$ qu'à translation temporelle près (ce qui revient à considérer la famille de hérissons parallèles $(\mathcal{H}_{h+t})_{t \in \mathbb{R}}$ dans son ensemble), il est naturel de définir sa "fonction de support" comme étant $\partial h = (dh)/\sqrt{2}$. L'identification des normales $N_h(u)$ aux génératrices $L_h(u)$ de $\mathcal{L}_h$ fait alors correspondre à la surface moyenne $\mathcal{M}_h = c_h(\mathbb{S}^2)$, où $c_h(u) = \frac{1}{2}(c_h^1 + c_h^2)(u) = x_h(u) - R_{(1,h)}(u)u$, une surface $\mathcal{H}_{\partial h}$ définie à translation temporelle près dans $\mathbb{R}^{3,1}$. La paramétrisation $x_{\partial h} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{L}_h$, $u \mapsto x_{\partial h}(u) = (\nabla h(u); -h(u)) + (y; s) \in L_h(u)$ de $\mathcal{H}_{\partial h}$ est donnée par :

$$\langle (y; s), v_L \rangle_{3,1} = -\frac{\Delta h(u)}{\sqrt{2}} = \delta(\partial h)(u), \quad \text{où } v_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(u; -1),$$

(δ étant la codifférentiation), c'est-à-dire $x_{\partial h}(u) = (\nabla h(u); -h(u)) - \frac{\Delta h(u)}{2}(u; 1)$. Un calcul direct sans difficulté prouve que l'aire de $\mathcal{H}_{\partial h}$ est donnée par $-s(h, \partial^2 h)$. L'élément d'aire $\frac{1}{4}(R_1 - R_2)(u)^2 d\sigma(u)$ n'est autre que la projection orthogonale sur le plan médiateur du segment focal $\sigma_h(u)$ de l'élément d'aire correspondant sur la surface moyenne $\mathcal{M}_h$. Comme la composée de l'application tangente $T_u x_{\partial h} : T_u \mathbb{S}^2 \rightarrow T_{x_{\partial h}(u)} \mathcal{L}_h$ avec la projection de $T_{x_{\partial h}(u)} \mathcal{L}_h = (T_u \mathbb{S}^2 \times \{0\}) \oplus \mathbb{R}(u; 1)$ sur $T_u \mathbb{S}^2 \times \{0\} \approx T_u \mathbb{S}^2$ inverse l'orientation, l'aire algébrique de la surface dérivée $\mathcal{H}_{\partial h}$ est définie par : $s(\partial h) := s(h, \partial^2 h)$. Notons que l'ensemble des surfaces dérivées $\mathcal{H}_{\partial h}$ forment un espace vectoriel sur lequel $\partial h \mapsto \sqrt{-s(\partial h)}$ définit une norme associée à un produit scalaire que l'on peut interpréter comme une aire mixte.

3. Des inégalités de type Brunn-Minkowski pour les surfaces focales.

Soit $\mathcal{H}_h$ un hérisson de $\mathbb{R}^3$ de fonction de support $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$. Sa focale $\mathcal{F}_h$ est définie comme le lieu de ses centres de courbure principaux (ou, ce qui est équivalent, comme l'enveloppe de ses normales). Définissons le volume de $\mathcal{F}_h$ par :

$$v(\nabla h) = \int_{\mathbb{R}^3} i_{\mathcal{F}_h}(x) dx,$$

où $i_{\mathcal{F}_h}(x)$ est le nombre de normales orientées à $\mathcal{H}_h$ passant par x . La notation $v(\nabla h)$ s'explique par le fait que $\mathcal{F}_h$, et donc son volume, ne dépendent que de ∇h .

Théorème 2. *Soit $\mathcal{H}_h$ un hérisson de $\mathbb{R}^3$ de fonction de support $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$. Le volume de la focale $\mathcal{F}_h$ de $\mathcal{H}_h$ est donné par :*

$$v(\nabla h) = \frac{1}{6} \int_{\mathbb{S}^2} |R_1 - R_2|^3 d\sigma = \frac{4}{3} \int_{\mathbb{S}^2} \left(R_{(1,h)}^2 - R_h \right)^{\frac{3}{2}} d\sigma,$$

où R_1 et R_2 désignent les rayons de courbures principaux de $\mathcal{H}_h$.

Preuve. On exprime $v(\nabla h)$ comme une intégrale sur $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$ en notant que $i_{\mathcal{F}_h}(x) = \text{Card}[\gamma_h^{-1}(\{x\})]$, où $\gamma_h : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, t) \mapsto tc_h^1(u) + (1-t)c_h^2(u)$, $c_h^1(u)$, $c_h^2(u)$ désignant les centres de courbure principaux de $\mathcal{H}_h$ en $x_h(u)$. $\square$

Corollaire 1. *Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel réel des familles de hérissons parallèles de classe C^4 de $\mathbb{R}^3$. L'application $v : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\nabla h \mapsto v(\nabla h)^{\frac{1}{3}}$ est une norme.*

En majorant $|s(\partial h)|$ à l'aide de l'inégalité de Hölder avec $(p, q) = (3/2, 3)$, il vient :

Corollaire 2. *Soit $\mathcal{H}_h$ un hérisson de $\mathbb{R}^3$ de fonction de support $h \in C^4(\mathbb{S}^2; \mathbb{R})$. L'aire de la surface dérivée $\mathcal{H}_{\partial h}$ et le volume de la focale $\mathcal{F}_h$ vérifient*

$$4|s(\partial h)|^3 \leq 9\pi v(\nabla h)^2.$$

REFERENCES

- [1] R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg, Hérissons et multihérissons, (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss), in: Singularities, Warsaw, 1985, in: Banach Center Publ. 20, PWN, Warsaw, 1988, pp. 245-253.
- [2] T. Li, Laguerre geometry of surfaces in $\mathbb{R}^3$. Acta Math. Sin., Engl. Ser. 21 (2005), 1525-1534.
- [3] Y. Martinez-Maure, De nouvelles inégalités géométriques pour les hérissons. Arch. Math. 72 (1999), 444-453.
- [4] Y. Martinez-Maure, Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 332 (2001), 41-44.
- [5] Y. Martinez-Maure, New notion of index for hedgehogs of $\mathbb{R}^3$ and applications, in: Rigidity and related topics, à paraître dans Eur. J. Comb..
- [6] R. Schneider, Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. 44. Cambridge: Cambridge University Press. 1993.
- [7] J. J. Stoker, On the uniqueness theorems for the embedding of convex surfaces in three-dimensional space. Comm. Pure Appl. Math. 3 (1950), 231-257.
- [8] C. Wang, Weierstrass representations of Laguerre minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$. Result. Math. 52 (2008), 399-408.

Y. MARTINEZ-MAURE, 1, RUE AUGUSTE PERRET, F-92500 RUEIL-MALMAISON,
E-mail address: martinez@math.jussieu.fr