



**HAL**  
open science

# Fonctions L en géométrie rigide I: F-modules convergents ou surconvergents et conjecture de Dwork

Jean-Yves Etesse

► **To cite this version:**

Jean-Yves Etesse. Fonctions L en géométrie rigide I: F-modules convergents ou surconvergents et conjecture de Dwork. 2009. hal-00425929v2

**HAL Id: hal-00425929**

**<https://hal.science/hal-00425929v2>**

Preprint submitted on 21 Jan 2010 (v2), last revised 16 Dec 2010 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Fonctions $L$ en géométrie rigide I : $F$ -modules convergents ou surconvergents et conjecture de Dwork

Jean-Yves ETESSE<sup>1</sup>

## Sommaire

0. Introduction
1. Relèvements de Teichmüller
2. Fonctions  $L$  des  $F$ -modules convergents
3. Fonctions  $L$  des  $F$ -modules surconvergents
4. Formule des traces de Monsky généralisée
5. Conjecture de Dwork pour les  $F$ -modules surconvergents

---

1. (CNRS - IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu - 35042 RENNES Cedex France)  
E-mail : Jean-Yves.Etesse@univ-rennes1.fr

## Résumé

Cet article est le premier d'une série de trois articles consacrés aux fonctions  $L$ . Dans celui-ci nous définissons les fonctions  $L$  des  $F$ -modules convergents ou surconvergents à l'aide des relèvements de Teichmüller et nous établissons la méromorphie des fonctions  $L$  des  $F$ -modules convergents dans le disque unité fermé. Alors que Wan a établi la conjecture de Dwork dans une série de trois articles [W 2, W 3, W 4] nous donnons ici une preuve qui ne repose que sur la formule des traces de Monsky généralisée de Wan et sur un théorème d'isogénie de Katz. Dans le deuxième article nous donnerons une définition des fonctions  $L$  des  $F$ -(iso)cristaux par voie cohomologique et nous montrerons comment elle rejoint celle donnée ici : elle redonne celle utilisée en cohomologie cristalline par Katz [K 1] ou [Et 1], ou celle en cohomologie rigide de [E-LS 1], ou celle utilisée par Wan [W 2] ; le but est alors de donner une preuve de la conjecture de Katz sur les zéros et pôles unités  $p$ -adiques de ces fonctions  $L$  en utilisant la cohomologie rigide. Dans le troisième article nous explicitons ces résultats pour les schémas abéliens ordinaires .

## Abstract

This article is the first one of a series of three articles devoted to  $L$ -functions. In this one we define the  $L$ -functions of convergent or overconvergent  $F$ -modules with the help of Teichmüller liftings and we establish the meromorphy of the  $L$ -functions of convergent  $F$ -modules in the closed unit disk. Whereas Wan established Dwork conjecture in a series of three articles [W 2, W 3, W 4], we give here a proof relying only on the generalized Monsky's trace formula of Wan and on an isogeny theorem of Katz. In the second article we'll give a definition of the  $L$ -functions of  $F$ -(iso)crystals by cohomological means and we'll show how it matches with the one given here : it gives back the one used in crystalline cohomology by Katz [K 1] or [Et 1], or the one used in rigid cohomology by [E-LS 1], or the one used by Wan [W 2] ; the aim is then to give a proof of Katz conjecture on  $p$ -adic unit roots and poles of these  $L$ -functions using rigid cohomology. In the third article we give an explicit form of these results for ordinary abelian schemes.

2010 Mathematics Subject Classification : 11F85, 11G40, 11L, 11M38, 11S40, 14F30, 14G10, 14G15, 14G22.

Mots clés : algèbres de Monsky-Washnitzer, fonctions  $L$ ,  $F$ -modules (sur)convergentes, formule des traces, méromorphie  $p$ -adique.

Key words : Monsky-Washnitzer algebras,  $L$  functions, (over)convergent  $F$ -modules, trace formula,  $p$ -adic meromorphy.

## 0. Introduction

**Notations :** Sauf mention du contraire, on suppose dans cet article que  $k$  est un corps fini,  $k = \mathbb{F}_q$ ,  $q = p^a$ ,  $\mathcal{V}$  est un anneau de valuation discrète complet, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et corps résiduel  $k = \mathbb{F}_q$ . On suppose le corps des fractions  $K$  de  $\mathcal{V}$  de caractéristique 0, on fixe une uniformisante  $\pi$  et on note  $e$  l'indice de ramification. On relève la puissance  $q$  sur  $k$  en un automorphisme  $\sigma$  de  $\mathcal{V}$ , tel que  $\sigma(\pi) = \pi$ , suivant la méthode de [Et 3, I 1.1] : on note encore  $\sigma$  son extension à  $K$ .

Cet article est le premier d'une série de trois articles consacrés à l'étude des fonctions  $L$  qui apparaissent en cohomologie rigide, par exemple comme facteurs dans la fonction zêta d'une variété  $X$  paramétrée par une autre variété  $S$  au-dessus du corps fini  $k$ . Les «coefficients» qui apparaissent alors sont les images directes par  $f : X \rightarrow S$  du faisceau structural, et la question est de savoir si ces **images directes** sont adaptées à la cohomologie rigide, i.e. si ce sont des  $F$ -isocristaux surconvergents, question qui a été abordée dans [Et 7] et [Et 9] : lorsque c'est le cas, ces fonctions  $L$  sont méromorphes [E-LS 1], et même rationnelles grâce à Kedlaya [Ked]. L'un des buts de ces trois articles est de décomposer ces fonctions  $L$ , lorsqu'elles sont méromorphes, en produits de facteurs  $L_\alpha$  de «pentes»  $\alpha$  rationnelles différentes, liés aux **conjectures de Dwork et de Katz**, de démontrer celles-ci et de donner une **description explicite de ces facteurs**  $L_\alpha$  en termes de fonctions  $L$  usuelles.

Plus précisément, soient  $S$  une  $k$ -variété (i.e. un  $k$ -schéma séparé de type fini) et  $f : X \rightarrow S$  un morphisme de  $k$ -variétés. Si l'on désigne par  $|X|$  l'ensemble des points fermés de  $X$ , la fonction zêta de  $X$  est définie par

$$Z(X, t) = \prod_{x \in |X|} \det(1 - t^{\deg x})^{-1}, \text{ où } \deg x = [k(x) : k],$$

et l'on sait par Grothendieck [G 2] que pour  $\ell$  premier distinct de  $p$  cette expression est donnée par

$$Z(X, t) = \prod_i \det(1 - t F | H_{\text{ét},c}^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}} \quad (1),$$

où  $X_{\bar{k}}$  est l'image inverse de  $X$  sur une clôture algébrique  $\bar{k}$  de  $k$ , et les  $H_{\text{ét},c}^i$  sont des  $\mathbb{Q}_\ell$ -espaces vectoriels de dimension finie sur lesquels le Frobenius  $F$  agit.

On peut aussi fibrer la situation au-dessus de  $S$  :

$$Z(X, t) = \prod_{s \in |S|} Z(X_s, t^{\deg s}), \text{ où } X_s = f^{-1}(s) \text{ et } \deg s = [k(s) : k] ;$$

et l'on sait encore par Grothendieck [G 2] que l'on a les expressions

$$\begin{aligned} Z(X, t) &= \prod_{s \in |S|} \prod_i \det(1 - t^{\deg s} F_s^{\deg s} | (R^i f_{ét, c*} \mathbb{Q}_\ell)_{\bar{s}})^{(-1)^{i+1}} \\ &= \prod_i L(S, \mathcal{F}^i, t)^{(-1)^i} \text{ où } \mathcal{F}^i = R^i f_{ét, c*} \mathbb{Q}_\ell \\ &= \prod_{i, j} \det(1 - t F | H_{ét, c}^j(S_{\bar{k}}, \mathcal{F}^i))^{(-1)^{i+j+1}} \quad (2) , \end{aligned}$$

où  $\bar{s}$  est un point géométrique au-dessus de  $s$ ,  $S_{\bar{k}}$  est l'image inverse de  $S$  sur une clôture algébrique  $\bar{k}$  de  $k$ , et les  $H_{ét, c}^i$  sont des  $\mathbb{Q}_\ell$ -espaces vectoriels de dimension finie sur lesquels le Frobenius  $F$  agit.

On obtient ainsi par voie  $\ell$ -adique la rationalité de la fonction zêta (formule (1)) de même que celle de chacune des fonctions  $L$  qui apparaissent dans la fibration de  $X$  au-dessus de  $S$  (formule (2)).

La première preuve  $p$ -adique de rationalité de la fonction zêta avait été obtenue antérieurement par Dwork [Dw 1], mais par une voie «précohomologique». Pour avoir une preuve cohomologique de l'analogie  $p$ -adique de la formule (1) il faudra attendre les travaux de Monsky et Washnitzer [M-W] pour une variété  $X$  affine et lisse sur  $k$  (la cohomologie de Monsky-Washnitzer remplace la cohomologie étale  $\ell$ -adique dans la formule (1)) ou la cohomologie cristalline de Berthelot pour une variété  $X$  propre et lisse sur  $k$  (la cohomologie cristalline à coefficients dans le faisceau structural remplace la cohomologie  $\ell$ -adique dans la formule (1)). Pour une variété  $X$  quelconque la cohomologie rigide de Berthelot est utilisée pour établir la rationalité de la fonction zêta dans le cas général [E-LS 1].

Si l'on veut un **analogie  $p$ -adique de la formule (2)**, on peut dans un premier temps envisager le cas où  $S$  est propre et lisse sur  $k$  et  $\mathcal{F}^i$  correspond à un  $F$ -cristal localement libre de type fini : c'est la situation étudiée dans [Et 1]. Mais si l'on souhaite considérer une variété  $S$  quelconque sur  $k$  il faut remplacer la cohomologie  $\ell$ -adique à supports compacts de (2) par la cohomologie rigide à supports compacts de  $S$ , avec des coefficients adaptés à la cohomologie rigide, à savoir des  $F$ -isocristaux surconvergens. On est donc

amené à introduire l'analogie «rigide» des  $\mathcal{F}^i$ , autrement dit les **images directes du faisceau structural**

$$E^i := R^i f_{rig*}(\mathcal{O}_{X/K}) ,$$

où  $K$  désigne le corps des fractions de l'anneau  $W(k)$  des vecteurs de Witt de  $k$ , et voir **dans quelles conditions on obtient leur surconvergence** : cette surconvergence est vraie lorsque  $X/S$  est un schéma abélien [Et 4] ; l'objet de [Et 7], [Et 9] est l'obtention d'autres conditions de surconvergence pour ces images directes. Le cas d'un  $f$  propre et lisse quelconque reste ouvert malgré des résultats de Shiho [Shi 2], [Shi 3], et constitue une conjecture de Berthelot. Lorsque ces conditions de surconvergence sont satisfaites on obtient alors grâce à [E-LS 1] la méromorphie de  $L(S, E^i, t)$  et même sa rationalité en prenant en compte la finitude de la cohomologie rigide à coefficients prouvée par Kedlaya [Ked], ce qui fournit l'analogie  $p$ -adique de (2).

Une fois connue la rationalité (ou la méromorphie) de la fonction zêta ou des fonctions  $L$  précédentes, on se pose la question de connaître la partie constituée des zéros et pôles unités  $p$ -adiques de ces fonctions : c'est l'objet des **conjectures de Dwork et de Katz**.

Reprenons l'exemple de la situation relative  $f : X \rightarrow S$  au-dessus de  $k$ . La fonction zêta-unité de  $X/S$  est définie par Dwork et Sperber dans [Dw-S] par

$$Z_u(X/S, t) = \prod_{s \in |S|} Z_u(X_s, t^{\deg s}) ,$$

où  $Z_u(X_s, T)$  est obtenue à partir de la fonction zêta de  $X_s$ ,  $Z(X_s, T)$ , en ne conservant dans cette fraction rationnelle que les facteurs  $(1 - aT)^{+/-}$  avec  $|a|_p = 1$ .

Initialement **la conjecture de Dwork** consistait à se demander si  $Z_u(X/S, t)$  était  $p$ -adiquement méromorphe [Dw 2] [Dw 3]. Or il a été établi dans [E-LS 2] que

$$Z_u(X/S, t) = L(S, \mathbb{R}f_! \mathbb{Q}_p) := \prod_i L(S, R^i f_{ét, c*} \mathbb{Q}_p)^{(-1)^i}$$

où les  $\mathcal{G}^i := R^i f_{ét, c*} \mathbb{Q}_p$  sont des faisceaux  $p$ -adiques constructibles. Les  $\mathcal{G}^i$  peuvent être associés à des  $F$ -isocristaux convergents, mais pas surconvergents en général comme le prouve un exemple de Crew [C] : par conséquent on ne peut utiliser la cohomologie rigide et espérer obtenir la rationalité de ces fonctions  $L$  via [E-LS 1] et donc de  $Z_u(X/S, t)$ , sauf si  $S$  était propre sur  $k$  [E-LS 1] ou si  $S$  était propre et lisse sur  $k$  [Et 1]. Dans le cas général d'une variété

$S$  quelconque Wan a même démontré [W 1] que de telles fonctions  $L$  (associées à des  $F$ -isocristaux convergents) ne sont pas nécessairement  $p$ -adiquement méromorphes. Intermédiaire en un certain sens entre  $F$ -isocristaux convergents et surconvergents se trouve la notion de  $F$ -modules surconvergents [cf §3] : on oublie la connexion et sa surconvergence pour ne garder que la surconvergence du Frobenius ; pour de tels  $F$ -modules surconvergents  $\mathcal{H}$  sur  $S$  affine et lisse sur  $k$ , Wan a alors défini les fonctions  $L(S, \mathcal{H}, t)$  et prouvé leur méromorphie (cf [W 1], [W 2], [Dw-S]). De plus Wan définit dans ce nouveau contexte [W 2] la partie  $L_\alpha(S, \mathcal{H}, t)$  de pente  $\alpha \in \mathbb{Q}$  de  $L(S, \mathcal{H}, t)$  et la nouvelle formulation de la conjecture de Dwork consiste à dire que  $L_\alpha(S, \mathcal{H}, t)$  est  $p$ -adiquement méromorphe : grâce à la surconvergence du Frobenius, Wan prouve alors la méromorphie de  $L_\alpha$  ([W 3], [W 4]). Dans ce **premier article** consacré au cas affine et lisse, nous donnons [§5] une nouvelle preuve de la conjecture de Dwork, plus courte que celle de Wan, basée uniquement sur la formule des traces de Monsky généralisée et un théorème d'isogénie de Katz : au passage [§4] nous prouvons que la fonction  $L$  d'un  $F$ -module convergent est méromorphe dans le disque unité fermé .

Le **deuxième article** [Et 10] est consacré aux fonctions  $L$  des  $F$ -(iso)cristaux : nous globalisons les définitions et résultats précédents au cas de variétés non nécessairement affines avec pour coefficients des  $F$ -isocristaux Dwork-surconvergents et nous prouvons la **conjecture de Dwork** dans ce contexte. En utilisant la cohomologie rigide nous prouvons également la **conjecture de Katz** relative aux zéros et pôles unités  $p$ -adiques de la fonction  $L$  d'un  $F$ -cristal unité.

En faisant une hypothèse supplémentaire sur  $f$  dans le **troisième article** [Et 11] , à savoir si  $X/S$  constitue un schéma abélien ordinaire, **nous explicitons dans la fraction rationnelle**  $L(S, R^i f_{rig*}(\mathcal{O}_{X/K}))$  (c'est une fraction rationnelle grâce à la surconvergence des images directes  $R^i f_{rig*}(\mathcal{O}_{X/K}$  [Et 4]) **la partie  $L_\alpha$  de pente  $\alpha \in \mathbb{Q}$  comme une fonction  $L$  usuelle** d'un certain  $F$ -cristal localement libre de type fini associé au cristal de Dieudonné du schéma abélien : ceci nécessite au préalable une caractérisation détaillée des schémas abéliens ordinaires en termes du cristal de Dieudonné du groupe  $p$ -divisible associé au schéma abélien. Si  $S$  est propre sur  $k$  il résulte alors de [E-LS 1] (ou de [Et 1] si  $S$  est propre et lisse sur  $k$ ) que ces fonctions  $L_\alpha$  sont en fait rationnelles.



# 1. Relèvement de Teichmüller

Dans ce §1 on supposera simplement que  $k$  est un corps parfait de caractéristique  $p > 0$ . Soit  $X = \text{Spec } A_0$  un  $k$ -schéma lisse. Pour  $x \in |X| = \{\text{points fermés de } X\}$ , soit  $i_x = \text{Spec } k(x) \hookrightarrow X$  l'immersion fermée canonique :  $k(x) = A_0/\mathfrak{m}_x$  est une extension finie étale de  $k$  de degré  $\deg x = [k(x) : k]$ . Notons  $W = W(k)$  (resp.  $W(x) = W(k(x))$ ) l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$  (resp.  $k(x)$ ),

$$\mathcal{V}(x) = W(x) \otimes_W \mathcal{V} \simeq W(x)[\pi] ,$$

$K_0 = \text{Frac } W$ ,  $K_0(x) = \text{Frac}(W(x))$ ,  $K(x) = \text{Frac}(\mathcal{V}(x))$ ,  $\sigma_x$  la puissance  $p^a$  sur  $k(x)$ ,  $\sigma_{W(x)} = W(\sigma_x)$  le relèvement canonique de  $\sigma_x$  à  $W(x)$ ,  $\sigma_{\mathcal{V}(x)} = \sigma_{W(x)} \otimes_W \mathcal{V}$  et  $\sigma_{K(x)}$  (resp.  $\sigma_{K_0(x)}$ ) son extension naturelle à  $K(x)$  (resp.  $K_0(x)$ ) définie par  $\sigma_{K(x)}(u/v) = \sigma_{\mathcal{V}(x)}(u)/\sigma_{\mathcal{V}(x)}(v)$  (resp.  $\sigma_{K_0(x)}(u/v) = \sigma_{W(x)}(u)/\sigma_{W(x)}(v)$ ). Le morphisme  $\sigma_{K(x)}$  coïncide, d'après [Et 4, I.1.1] et [B-M, (1.2.7) (ii)], avec le morphisme  $\sigma' : K' \rightarrow K'$  (au-dessus de  $\sigma : K \rightarrow K$ ) de [Et 4, I.1.1] pour  $k' = k(x)$ .

Soit  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$  et fixons une présentation  $A = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_d]/(f_1, \dots, f_\epsilon)$ . On désigne par  $\hat{A}$  ((resp.  $A^\dagger$ ) le séparé complété (resp. le complété faible)  $\mathfrak{m}$ -adique de  $A$  : on a des isomorphismes

$$\hat{A} \simeq \mathcal{V}\{t_1, \dots, t_d\}/(f_1, \dots, f_\epsilon) ,$$

$$A^\dagger \simeq \mathcal{V}[t_1, \dots, t_d]^\dagger/(f_1, \dots, f_\epsilon) .$$

Soient  $P$  le complété formel de la fermeture projective de  $\mathcal{X} = \text{Spec } A$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^d$ ,  $P_1 = \text{Spf}(\mathcal{V}(x))$ ,  $X_1 = \text{Spec}(k(x))$ . D'après [Et 4, (1.2.1)] il existe un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}(x) =: A^\dagger(x) & \xrightarrow{F_{A^\dagger(x)}} & A^\dagger(x) \\ \uparrow & & \uparrow \\ A^\dagger & \xrightarrow{F_{A^\dagger}} & A^\dagger \end{array}$$

au-dessus du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(x) & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{V}(x)}} & \mathcal{V}(x) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{\sigma_{\mathcal{V}}} & \mathcal{V} \end{array} ,$$

où  $F_{A^\dagger}$  est un relèvement à  $A^\dagger$  du Frobenius (puissance  $q$ ) de  $A_0$ ; d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V}(x) & \longrightarrow & A^\dagger(x) & \longrightarrow & \hat{A}(x) := \hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}(x) \\ \sigma_{\mathcal{V}(x)} \downarrow & & F_{A^\dagger(x)} \downarrow & & \downarrow F_{\hat{A}(x)} \\ \mathcal{V}(x) & \longrightarrow & A^\dagger(x) & \longrightarrow & \hat{A}(x) \end{array} .$$

Par conséquent le morphisme  $s : A_0 \rightarrow k(x)$  se relève de manière unique d'après Katz [K 1] en un morphisme

$$\tau(x) : \hat{A}(x) \rightarrow \mathcal{V}(x)$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}(x) & \xrightarrow{\tau(x)} & \mathcal{V}(x) \\ F_{\hat{A}(x)} \downarrow & & \downarrow \sigma_{\mathcal{V}(x)} \\ \hat{A}(x) & \xrightarrow{\tau(x)} & \mathcal{V}(x) \end{array}$$

commute :  $\tau(x)$  est appelé le **relèvement de Teichmüller de  $s$  (ou de  $x$ ) relativement à  $F_{\hat{A}(x)}$** . Les morphismes composés

$$\hat{\tau}(x) : \hat{A} \hookrightarrow \hat{A}(x) \xrightarrow{\tau(x)} \mathcal{V}(x) ,$$

$$\tau^\dagger(x) : A^\dagger \hookrightarrow \hat{A} \xrightarrow{\hat{\tau}(x)} \mathcal{V}(x)$$

sont appelés respectivement **relèvement de Teichmüller de  $s$  (ou de  $x$ ) relativement à  $F_{\hat{A}}$  ou  $F_{A^\dagger}$  :  $\hat{\tau}(x)$  (resp.  $\tau^\dagger(x)$ ) est un point de Teichmüller de  $\hat{A}$  (resp. de  $A^\dagger$ ) relativement à  $F_{\hat{A}}$  (resp.  $F_{A^\dagger}$ ).**

Pour  $n \in \mathbb{N}$  les applications  $\hat{\tau}(x)$  et  $\tau^\dagger(x)$  donnent, en quotientant par  $\pi^{n+1}$ , une application

$$\tau_n(x) : A_n = \hat{A}/\pi^{n+1}\hat{A} = A^\dagger/\pi^{n+1}A^\dagger \rightarrow \mathcal{V}_n(x) = \mathcal{V}(x)/\pi^{n+1}\mathcal{V}(x) .$$

Au lieu de considérer  $x$  comme point fermé de  $X$  on peut aussi le considérer comme point fermé de  $\mathbb{A}_k^d = \text{Spec } k[\underline{t}]$  où  $\underline{t} = (t_1, \dots, t_d)$  : on va voir qu'alors  $\tau^\dagger(x)$  s'étend en un relèvement de Teichmüller de  $x$  à  $\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger$ . Notons  $R = \mathcal{V}[\underline{t}]$ ,  $R^\dagger$  (resp.  $\hat{R}$ ) son complété faible (resp. son séparé complété) et  $I$  le noyau de la surjection canonique

$$\mu : R^\dagger \twoheadrightarrow A^\dagger .$$

On peut relever (de manière non unique) le Frobenius  $F_{A^\dagger}$  de  $A^\dagger$  en un endomorphisme  $F_{R^\dagger}$  de  $R^\dagger$  de la façon suivante : il suffit de choisir des éléments  $F_{R^\dagger}(t_i)$  de  $R^\dagger$  tels que

$$F_{R^\dagger}(t_i) \equiv t_i^q \pmod{\pi}, \quad F_{R^\dagger}(t_i) \in \mu^{-1}(F_{A^\dagger}(\mu(t_i))) ,$$

choix qu'il est possible de faire car  $F_{A^\dagger}(\mu(t_i)) \equiv t_i^q \pmod{(\pi, I)}$ . On étend ce choix d'éléments  $F_{A^\dagger}(\mu(t_i))$  en un endomorphisme  $F_{R^\dagger}$  de la  $\mathcal{V}$ -algèbre  $R^\dagger$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^\dagger & \xrightarrow{\mu} & A^\dagger \\ F_{R^\dagger} \downarrow & & \downarrow F_{A^\dagger} \\ R^\dagger & \xrightarrow{\mu} & A^\dagger \end{array}$$

commute ; en particulier on a  $F_{R^\dagger}(I) \subset I$ .

Les morphismes  $F_{R^\dagger}$  et  $F_{A^\dagger}$  sont finis et fidèlement plats puisque leur réduction mod  $\pi$  le sont [Et 3, théo 17] ; par changement de base de  $R^\dagger$  à  $\hat{R}$  appliqué au diagramme précédent on en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{R} & \xrightarrow{\hat{\mu}} & \hat{A} \\ F_{\hat{R}} \downarrow & & \downarrow F_{\hat{A}} \\ \hat{R} & \xrightarrow{\hat{\mu}} & \hat{A} \end{array}$$

Par conséquent le morphisme composé

$$k[\underline{t}] \rightarrow A_0 \xrightarrow{s} k(x)$$

correspondant au point  $x$  de  $\mathbb{A}_k^d$  se relève de manière unique [K 1] en un morphisme

$$\hat{\tau}_R(x) : \hat{R} \hookrightarrow \hat{A} \xrightarrow{\hat{\tau}(x)} \mathcal{V}(x)$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{R} & \xrightarrow{\hat{\tau}_R(x)} & \mathcal{V}(x) \\ F_{\hat{R}} \downarrow & & \downarrow \sigma_{\mathcal{V}(x)} \\ \hat{R} & \xrightarrow{\hat{\tau}_R(x)} & \mathcal{V}(x) \end{array}$$

commute :  $\hat{\tau}_R(x)$  est appelé le **relèvement de Teichmüller de  $x$  relativement à  $F_{\hat{R}}$** . Le morphisme composé

$$\tau_R^\dagger(x) : R^\dagger \hookrightarrow \hat{R} \xrightarrow{\hat{\tau}_R(x)} \mathcal{V}(x)$$

est appelé le **relèvement de Teichmüller de  $x$  relativement à  $F_{R^\dagger}$** . Par l'unicité des relèvements de Teichmüller prouvée par Katz [K 1], il y a ainsi **bijection entre les points de Teichmüller de  $A^\dagger$  relativement à  $F_{A^\dagger}$  et les points de Teichmüller de  $R^\dagger$  relativement à  $F_{R^\dagger}$  qui se réduisent mod  $\pi$  en des points de  $X$** .

De même, pour toute extension finie  $k \hookrightarrow k'$ , il y a une bijection entre les trois ensembles suivants :

- (i) l'ensemble des points  $x \in X(k') = \{\text{points de } X \text{ à valeur dans } k'\}$ ,
- (ii) l'ensemble des points de Teichmüller de  $A^\dagger$  relativement à  $F_{A^\dagger}$  à valeur dans  $\mathcal{V}(k') := W(k') \otimes_W \mathcal{V}$ ,
- (iii) l'ensemble des points de Teichmüller de  $R^\dagger$  relativement à  $F_{R^\dagger}$  à valeur dans  $\mathcal{V}(k') := W(k') \otimes_W \mathcal{V}$  qui se réduisent mod  $\pi$  en des points de  $X$  à valeur dans  $k'$ .

Les morphismes  $\hat{\tau}(x)$  et  $\tau^\dagger(x)$  (resp.  $\hat{\tau}_R(x)$  et  $\tau_R^\dagger(x)$ ) sont surjectifs car la réduction de  $\tau^\dagger(x)$  mod  $\pi$  (resp.  $\tau_R^\dagger(x)$  mod  $\pi$ ) est le morphisme surjectif  $s : A_0 \rightarrow k(x)$  de départ (resp. le morphisme surjectif  $k[\underline{t}] \rightarrow k(x)$ ) [M-W, theo 3.2]. Donc  $\mathcal{V}(x)$  est un quotient de  $\hat{A}$  et  $\mathcal{V}(x) \simeq W(x)[\pi]$ , qui est un anneau de valuation discrète, est une extension finie étale de  $\mathcal{V}$  de rang  $\deg x$ . Le noyau du morphisme

$$\hat{\tau}_K(x) := \hat{\tau}(x) \otimes_{\mathcal{V}} K : \hat{A}_K \longrightarrow K(x) = \text{Frac}(\mathcal{V}(x))$$

est ainsi un idéal maximal  $\mathfrak{q}_x$  de  $\hat{A}_K$  et le diagramme

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccccc} A_K^\dagger & \hookrightarrow & \hat{A}_K & \xrightarrow{\hat{\tau}_K(x)} & K(x) \\ F_{A_K^\dagger} \downarrow & & F_{\hat{A}_K} \downarrow & & \downarrow \sigma_{K(x)} \\ A_K^\dagger & \hookrightarrow & \hat{A}_K & \xrightarrow{\hat{\tau}_K(x)} & K(x) \end{array}$$

commute. On notera  $\tau_K^\dagger(x)$  la flèche composée

$$(1.2) \quad \tau_K^\dagger(x) = \tau^\dagger(x) \otimes_{\mathcal{V}} K : A_K^\dagger \xrightarrow{\varphi} \hat{A}_K \xrightarrow{\hat{\tau}_K(x)} K(x) ;$$

remarquons que  $\tau_K^\dagger(x)$  est aussi surjectif car  $\varphi$  induit une bijection entre les idéaux maximaux de  $\hat{A}_K$  et ceux de  $A_K^\dagger$  [G-K 2, theo 1.7]. Par le morphisme de spécialisation [B 2, (0.2.2.1)]

$$sp : Spm \hat{A}_K \rightarrow Spec A_0$$

l'image de  $\{\mathfrak{q}_x\}$  n'est autre que  $\{\mathfrak{m}_x\}$ ; de plus  $\hat{\tau}(x) : \hat{A} \twoheadrightarrow \mathcal{V}(x)$  est localisé en  $\{\hat{\mathfrak{p}}_x\} \in Spec \hat{A}$ , où  $\hat{\mathfrak{p}}_x$  est l'unique idéal maximal de  $\hat{A}$  au-dessus de  $\mathfrak{m}_x$ . En définissant l'application (encore appelée **relèvement de Teichmüller**)

$$(1.3) \quad \hat{T}_K : Spm A_0 \rightarrow Spm \hat{A}_K$$

par  $\hat{T}_K(x) = \{\text{Ker } \hat{\tau}_K(x)\} = \{\hat{\mathfrak{q}}_x\}$ , on vient de prouver que  $\hat{T}_K$  est **une section du morphisme de spécialisation**, considéré comme une application

$$sp : |Spm \hat{A}_K| \rightarrow |Spec A_0|.$$

La proposition suivante nous sera utile au §5 :

**Proposition (1.4).** *Soit  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un morphisme de  $\hat{A}$ -modules tels que  $\mathcal{N}$  soit de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\phi$  est surjectif.
- (ii) Pour tout point fermé  $x$  de  $Spec A_0$  le morphisme

$$\phi_x := \hat{\tau}(x)^*(\phi) : \mathcal{M}_x = \hat{\tau}(x)^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{N}_x = \hat{\tau}(x)^*(\mathcal{N})$$

*est surjectif.*

*Démonstration.* L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) est claire par exactitude à droite du produit tensoriel.

Pour l'implication réciproque, supposons (ii). Soit  $x$  un point fermé de  $Spec A_0$  correspondant à l'idéal maximal  $\mathfrak{m}_x$  de  $A_0$  et  $\hat{\mathfrak{p}}_x$  l'unique idéal maximal de  $\hat{A}$  au-dessus de  $\mathfrak{m}_x$ . Le relèvement de Teichmüller  $\hat{\tau}(x) : \hat{A} \twoheadrightarrow \mathcal{V}(x)$  se factorise via  $\hat{\tau}'(x) : \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}_x} \twoheadrightarrow \mathcal{V}(x)$  et  $\hat{\tau}'(x)$  induit un isomorphisme

$$(1.4.1) \quad \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}_x} / \hat{\mathfrak{p}}_x \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}_x} \simeq \mathcal{V}(x) / \pi \mathcal{V}(x) = k(x) .$$

Notons  $\phi_{\hat{\mathfrak{p}}_x} = \phi \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_{\hat{\mathfrak{p}}_x}$ . La surjectivité de  $\phi_x$  fournit celle de  $\phi_x \bmod \pi$ ; or l'isomorphisme (1.4.1) identifie  $\phi_{\hat{\mathfrak{p}}_x} \bmod \hat{\mathfrak{p}}_x$  à  $\phi_x \bmod \pi$ . D'où la surjectivité de  $\phi_{\hat{\mathfrak{p}}_x}$  par Nakayama [EGA 0<sub>I</sub>; (7.1.14)] et ceci pour tout idéal maximal  $\hat{\mathfrak{p}}_x$  de  $\hat{A}$ . La proposition en résulte.  $\square$

## 2. $F$ -modules convergents

Avec les notations du §1 et  $\mathcal{A} = \hat{A}$  ou  $\hat{A}_K$  ou  $A_n$  on désigne par  $\mathbf{F}^a\text{-Mod}(\mathcal{A})$  (resp.  $\mathbf{F}^a\text{-Modlib}(\mathcal{A})$ ) la catégorie des  $\mathcal{A}$ -modules projectifs de type fini (resp. des  $\mathcal{A}$ -modules libres de type fini)  $\mathcal{M}$  munis d'un morphisme de Frobenius (non nécessairement un isomorphisme)

$$\phi_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^\sigma := F_{\mathcal{A}}^*(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$$

Un tel  $\mathcal{M}$  est appelé un  $F$ -**module convergent** (resp. un  $F$ -**module libre convergent**). On note  $\mathbf{F}^a\text{-Mod}(\hat{A})^0$  (resp.  $\mathbf{F}^a\text{-Modlib}(\hat{A})^0$ ) la sous-catégorie de  $\mathbf{F}^a\text{-Mod}(\hat{A})$  (resp.  $\mathbf{F}^a\text{-Modlib}(\hat{A})$ ) formée des objets  $\mathcal{M}$  unités, i.e. tel que le Frobenius soit un isomorphisme : un tel  $\mathcal{M}$  est appelé  $F$ -**module convergent unité** (resp.  $F$ -**module libre convergent unité**).

Soit  $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$ . La fibre  $\mathcal{M}_x$  de  $\mathcal{M}$  en  $x \in |X|$  est par définition

$$(2.1) \quad \mathcal{M}_x := \hat{\tau}_K(x)^*(\mathcal{M}) ,$$

et  $\phi_{\mathcal{M}}$  induit

$$(2.2) \quad \phi_x = \phi_{\mathcal{M}} \otimes_{\hat{A}_K} K(x) : \sigma_{K(x)}^*(\mathcal{M}_x) \rightarrow \mathcal{M}_x ,$$

d'après la commutativité du diagramme (1.1).

L'itéré  $\deg x$  fois de  $\phi_x$  est un endomorphisme  $K(x)$ -linéaire du  $K(x)$ -espace vectoriel de dimension finie  $\mathcal{M}_x$

$$\phi_x^{\deg x} : \mathcal{M}_x \rightarrow \mathcal{M}_x .$$

Notons

$$(2.3) \quad \det(\mathcal{M}_x, T) = \det(1 - T \phi_x^{\deg x}, \mathcal{M}_x)$$

le «polynôme caractéristique» de  $\phi_x^{\deg x}$ .

Pour  $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$  (resp.  $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(A_n)$ ) on définit de même

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_x &:= \hat{\tau}(x)^*(\mathcal{M}) \text{ (resp. } \mathcal{M}_x := \hat{\tau}_n(x)^*(\mathcal{M})) \\ \det(\mathcal{M}_x, T) &= \det(1 - T \phi_x^{\deg x}, \mathcal{M}_x). \end{aligned}$$

Soit  $(\mathcal{M}, \phi) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$  ; posons  $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}/\pi^{n+1}\mathcal{M}$  et  $\phi_n = \phi \bmod \pi^{n+1}$  ; et pour  $x \in |X|$  notons

$$(\mathcal{M}_n)_x = \hat{\tau}_n(x)^*(\mathcal{M}_n), (\phi_n)_x = \hat{\tau}_n(x)^*(\phi_n),$$

$$(\mathcal{M}_x)_n = \mathcal{M}_x/\pi^{n+1}\mathcal{M}_x, (\phi_x)_n = \phi_x \bmod \pi^{n+1} .$$

Puisque  $(\mathcal{M}_n)_x = (\mathcal{M}_x)_n =: \mathcal{M}_{x,n}$  et  $(\phi_n)_x = (\phi_x)_n =: \phi_{x,n}$  on a la relation

$$(2.4 \text{ bis}) \quad \det(1 - T (\phi_{x,n})^{\deg x}, \mathcal{M}_{x,n}) \equiv \det(1 - T \phi_x^{\deg x}, \mathcal{M}_x) \bmod \pi^{n+1} .$$

**Lemme (2.5).** *Avec les notations précédentes, on a :*

- (i) *Si  $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$  , alors  $\det(\mathcal{M}_x, T) \in K[[T]]$  .*
- (ii) *Si  $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$ , alors  $\det(\mathcal{M}_x, T) \in \mathcal{V}[T]$ .*
- (iii) *Si  $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(A_n)$ , alors  $\det(\mathcal{M}_x, T) \in \mathcal{V}_n[[T]]$ .*

*Démonstration.* Pour (i), soient  $(e_i)_{i=1,\dots,r}$  (resp.  $(e_i \otimes 1)_{i=1,\dots,r}$ ) une base locale de  $\mathcal{M}$  (resp. de  $\mathcal{M}^\sigma$ ), et  $C(\underline{X})$  la matrice de  $\phi_{\mathcal{M}}$  dans ces bases respectives. Alors

$$C(\underline{X}) = \sum_{\underline{u} \in \mathbb{N}^d} a_{\underline{u}} \underline{X}^{\underline{u}},$$

avec  $a_{\underline{u}} \in \pi^\alpha M_r(\mathcal{V})$  pour un  $\alpha \in \mathbb{Z}$  et

$$\det(\mathcal{M}_x, T) = \det\{1 - T C(\underline{t}(x)^{q(\deg x)-1}) \times \dots \times C(\underline{t}(x)^q) \times C(\underline{t}(x))\}$$

où  $\underline{t}(x)^\beta = t_1(x)^\beta \times \dots \times t_d(x)^\beta$  et les  $t_j(x)$  sont les coordonnées de  $\hat{\tau}_K(x)$ . Il est clair que  $\det(\mathcal{M}_x, T)$  a des coefficients invariants par l'action du Frobenius  $\sigma_{K(x)}$ , car  $\sigma_{K(x)}$  envoie  $\underline{t}(x)$  sur  $\underline{t}(x)^q$  ; d'où le (i).

Les cas (ii) et (iii) sont analogues.  $\square$

Si l'on note  $\tilde{\mathcal{M}}_x$  l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_x$  vu comme  $K$ -espace vectoriel et  $\tilde{\phi}_x$  son endomorphisme de Frobenius on a

$$\det(\mathcal{M}_x, T) = \det(1 - T \phi_x^{\deg x}) = \det_K(1 - T \tilde{\phi}_x^{\deg x})^{-1/\deg x} .$$

**Définition-proposition (2.6).** *La fonction  $L$  de  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$  est définie par*

$$L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t) = \prod_{x \in |\text{Spec } A_0|} \det(1 - t^{\deg x} \phi_x^{\deg x} | \mathcal{M}_x)^{-1} \in K[[t]]$$

$$= \prod_{x \in |\text{Spec } A_0|} \det(1 - t^{\deg x} \tilde{\phi}_x^{\deg x} | \tilde{\mathcal{M}}_x)^{-1/\deg x} .$$

Si  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$  on définit de même  $L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t)$  et alors

$$L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t) = L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}_K, t) \in \mathcal{V}[[t]] ,$$

où l'on a posé

$$(\mathcal{M}_K, \phi_{\mathcal{M}_K}) := (\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_K .$$

La fonction  $L$  de  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(A_n)$  est définie par

$$L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t) = \prod_{x \in |\text{Spec } A_0|} \det(1 - t^{\deg x} \phi_x^{\deg x} | \mathcal{M}_x)^{-1} \in \mathcal{V}_n[[t]] .$$

Si  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$ , il résulte de (2.4 bis) que

$$L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t) \equiv L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}_n, t) \pmod{\pi^{n+1}} .$$

**Lemme (2.7).** *Pour établir la méromorphie  $p$ -adique de  $L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t)$  pour  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$  on peut supposer qu'il existe  $(\mathcal{M}', \phi_{\mathcal{M}'}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$  tel que  $\mathcal{M}'$  est libre et  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) = (\mathcal{M}', \pi^\alpha \phi_{\mathcal{M}'}) \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_K$  pour un  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . On a alors*

$$L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t) = L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}', \pi^\alpha t).$$

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{M}$  est projectif de type fini sur  $\hat{A}_K$ , et qu'un ouvert de  $\text{Spec } \hat{A}_K$  est intersection d'un ouvert de  $\text{Spec } \hat{A}$  avec  $\text{Spec } \hat{A}_K$ , il existe un recouvrement fini de  $\text{Spec } \hat{A}_K$  par des ouverts  $U_K = \text{Spec } B_K$ , où  $B = \hat{A}[1/g]$ ,  $g \in \hat{A}$ , tels que

$$\mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} B_K \simeq \bigoplus_{i=1}^r B_K e_i.$$

Relevons  $g \pmod{\pi} =: g_0$  en  $f \in A$ ; comme on a un isomorphisme  $\hat{B} \simeq \widehat{A[1/f]}$  [Et 3, cor 1 du théo 4] on en déduit que

$$\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \hat{B}_K \simeq \bigoplus_{i=1}^r \widehat{A[1/f]}_K e_i$$

et que la matrice  $C(\underline{X})$  du Frobenius  $\phi_{\mathcal{N}}$  est à coefficients dans  $\pi^\alpha \widehat{A[1/f]}$ , avec  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .



La fonction  $L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t)$  est définie par un produit eulérien sur les points fermés de  $\text{Spec } A_0$  et ceux-ci sont en bijection avec les points fermés de  $\text{Spf } \hat{A}$  : un recouvrement ouvert fini de  $\text{Spf } \hat{A}$  est fourni par des  $\text{Spf } \widehat{A[1/f]}$ ,  $f \in A$  comme ci-dessus ; on peut donc prendre

$$\mathcal{M}' = \bigoplus_{i=1}^r \widehat{A[1/f]} e_i$$

avec pour matrice du Frobenius  $\phi_{\mathcal{M}'}$  la matrice  $\pi^{-\alpha} C(\underline{X})$ , à coefficients dans  $\widehat{A[1/f]}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}'^\sigma & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{M}'}} & \mathcal{M}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{N}^\sigma = \mathcal{M}'_K & \xrightarrow{\pi^{-\alpha} \phi_{\mathcal{N}}} & \mathcal{N} = \mathcal{M}'_K. \end{array}$$

Le couple  $(\mathcal{M}', \phi_{\mathcal{M}'})$  est ce que Wan appelle une  $\sigma$ -module convergent [W 2], [W 3].  $\square$

### 3. $F$ -modules surconvergents

Avec les notations du §1 et  $\mathcal{A} = A^\dagger$  ou  $A_K^\dagger$  et par analogie avec le §2 on désigne par  $\mathbf{F}^a\text{-Mod}(\mathcal{A})$  ( resp.  $\mathbf{F}^a\text{-Modlib}(\mathcal{A})$ ) la catégorie des **F-modules surconvergents**, i.e. la catégorie des  $\mathcal{A}$ -modules projectifs (resp.  $\mathcal{A}$ -modules libres) de type fini  $M$  muni d'un morphisme de Frobenius (non nécessairement un isomorphisme)

$$\phi_M : M^\sigma = F_{\mathcal{A}}^*(M) \rightarrow M$$

On note  $\mathbf{F}^a\text{-Mod}(\mathbf{A}^\dagger)^0$  (resp.  $\mathbf{F}^a\text{-Modlib}(\mathbf{A}^\dagger)^0$ ) la sous-catégorie de  $\mathbf{F}^a\text{-Mod}(\mathbf{A}^\dagger)$  (resp.  $\mathbf{F}^a\text{-Modlib}(\mathbf{A}^\dagger)$ ) formée des objets  $M$  unités, i.e. tel que le Frobenius soit un isomorphisme : un tel  $M$  est appelé  **$F$ -module surconvergent unité** (resp.  **$F$ -module libre surconvergent unité**).

Soit  $M \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$ . La fibre  $M_x$  de  $M$  en  $x \in |X|$  est par définition

$$(3.1) \quad M_x := \tau_K^\dagger(x)^*(M),$$

et  $\phi_M$  induit

$$(3.2) \quad \phi_x = \phi_M \otimes_{A_K^\dagger} K(x) : \sigma_{K(x)}^*(M_x) \rightarrow M_x ,$$

d'après la commutativité du diagramme (1.1).

L'itéré  $\deg x$  fois de  $\phi_x$  est un endomorphisme  $K(x)$ -linéaire du  $K(x)$ -espace vectoriel de dimension finie  $M_x$

$$\phi_x^{\deg x} : M_x \rightarrow M_x ;$$

on notera  $\tilde{M}_x$  l'espace vectoriel  $M_x$  vu comme  $K$ -espace vectoriel et  $\tilde{\phi}_x$  son morphisme de Frobenius.

Notons

$$(3.3) \quad \det(M_x, T) = \det(1 - T \phi_x^{\deg x}, M_x) ;$$

pour  $M \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$  on pose de même

$$(3.4) \quad M_x = \tau^\dagger(x)^*(M) , \quad \det(M_x, T) = \det(1 - T \phi_x^{\deg x}, M_x).$$

On démontre le lemme suivant comme (2.5).

**Lemme (3.5).** *Avec les notations précédentes, on a :*

- (i) *Si  $M \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$ , alors  $\det(M_x, T) \in K[T]$  .*
- (ii) *Si  $M \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$ , alors  $\det(M_x, T) \in \mathcal{V}[T]$  .*

De même on a :

**Définition et proposition (3.6).** *Soit  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$  et  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$  son image canonique par l'extension des scalaires de  $A_K^\dagger$  à  $\hat{A}_K$ . La fonction  $L$  de  $(M, \phi_M)$  est définie par*

$$\begin{aligned} L(\text{Spec } A_0, M, t) &= \prod_{x \in |\text{Spec } A_0|} \det(1 - t^{\deg x} \phi_x^{\deg x}, M_x)^{-1} \in K[[t]] \\ &= \prod_{x \in |\text{Spec } A_0|} \det(1 - t^{\deg x} \tilde{\phi}_x^{\deg x}, \tilde{M}_x)^{-1/\deg x} , \end{aligned}$$

et on a

$$L(\text{Spec } A_0, M, t) = L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t).$$

Si  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$  on définit de même  $L(\text{Spec } A_0, M, t)$  et alors

$$L(\text{Spec } A_0, M, t) = L(\text{Spec } A_0, M_K, t) = L(\text{Spec } A_0, \mathcal{M}, t) \in \mathcal{V}[[t]],$$

$$\equiv L(\text{Spec } A_0, M_n, t) \in \mathcal{V}_n[[t]],$$

où l'on a posé

$$M_K := M \otimes_{A^\dagger} A_K^\dagger, \quad \mathcal{M} := M \otimes_{A^\dagger} \hat{A}, \quad M_n := M/\pi^{n+1}M.$$

Comme (2.7) on montre :

**Lemme (3.7).** *Pour établir la méromorphie  $p$ -adique de  $L(\text{Spec } A_0, M, t)$  pour  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$  on peut supposer qu'il existe  $(M', \phi_{M'}) \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$  tel que  $M'$  est libre et  $(M, \phi_M) = (M', \pi^\alpha \phi_{M'}) \otimes_{A^\dagger} A_K^\dagger$  pour un  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . On a alors*

$$L(\text{Spec } A_0, M, t) = L(\text{Spec } A_0, M', \pi^\alpha t).$$

### 3.8. Réduction au cas de l'espace affine

Soient  $A = \mathcal{V}[x_1, \dots, x_d]/(f_1, \dots, f_\epsilon)$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$ ,  $X = \text{Spec} A_0$ ,  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $R = \mathcal{V}[\underline{x}]$ ,  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Modlib}(A^\dagger)$  : un tel  $M$  est ce que Wan appelle un  $\sigma$ -module surconvergent. Dans ce paragraphe nous allons montrer que la fonction  $L(X, M, t)$  est une fonction  $L$  sur un certain espace affine.

Relevons d'abord  $M$  de  $X$  à  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d$ . On choisit une base  $(e_1, \dots, e_m)$  de  $M$  sur  $A^\dagger$  et on note  $C \in \mathcal{M}_m(A^\dagger)$  la matrice  $m \times m$  à coefficients dans  $A^\dagger$  de l'application  $F_{A^\dagger}$ -linéaire  $\phi_M$ . En notant  $\mu$  la surjection canonique

$$\mu : \mathcal{V}[x_1, \dots, x_d]^\dagger \twoheadrightarrow A^\dagger,$$

on choisit ensuite  $C_0$ , une matrice  $m \times m$  à coefficients dans  $\mathcal{V}[\underline{x}]^\dagger$  telle que  $\mu(C_0) = C$ . Alors les relations

$$M_0 = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{V}[\underline{x}]^\dagger e_i, \quad \phi_0(e_i) = C_0 e_i$$

définissent un élément  $(M_0, \phi_0) \in F^a\text{-Modlib}(\mathcal{V}[\underline{x}]^\dagger)$ , i.e. un  $F$ -module libre surconvergent sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d$ .

Pour se réduire au cas de l'espace affine nous allons faire une petite digression par le  $F$ -cristal de Dwork [B 1]. Quitte à passer à une extension totalement ramifiée de  $\mathcal{V}$ , on peut supposer que  $\mathcal{V}$  contient une racine primitive  $p$ -ième de l'unité : à toute racine  $\pi^*$  de l'équation

$$(\pi^*)^{p-1} = -p$$

correspond une unique racine primitive  $p$ -ième de l'unité  $\lambda \in K_0 := \mathbb{Q}_p(\pi^*)$  telle que l'on ait la congruence [Mo 1, theo 4.3]

$$\lambda \equiv 1 + \pi^* \pmod{\pi^{*2}} \text{ dans } \mathcal{O}_{K_0} .$$

La série

$$E(t) = \exp(\pi^*(t - t^q))$$

qui converge pour  $\text{ord}_p(t) > -\frac{p-1}{qp}$  [Mo 1, theo 4.1] est donc surconvergente et  $E(1)$  est une racine primitive  $p$ -ième de l'unité [Mo 1, theo 4.3]. Soit  $\psi_0$  le caractère additif non trivial de  $\mathbb{F}_p$  tel que  $\psi_0(1) = E(1)$  : pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$  posons

$$\psi_r = \psi_0 \circ \text{Tr}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_p} ;$$

$\psi_r$  est un caractère additif non trivial de  $\mathbb{F}_{q^r}$ . Au caractère  $\psi := \psi_1$  est associé le  $F$ -cristal de Dwork  $\mathcal{L}_\psi$  sur la droite  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^1$  [B 6] :  $\mathcal{L}_\psi$  est un  $F$ -cristal surconvergent (au sens de Berthelot) libre de rang 1 et si l'on note  $\theta_\psi$  une base de  $\mathcal{L}_\psi$ , le Frobenius

$$\phi_{\mathcal{L}_\psi} : F^* \mathcal{L}_\psi \rightarrow \mathcal{L}_\psi$$

est donné par [B 1, (1.5.2)]

$$\phi_{\mathcal{L}_\psi}(\theta_\psi \otimes 1) = \exp(\pi^*(t - t^q))\theta_\psi = E(t)\theta_\psi .$$

Posons  $\underline{y} = (y_1, \dots, y_s)$  ; pour  $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ , notons  $\overline{f}_i$  la réduction de  $f_i$  mod  $\pi$  et

$$f(\underline{x}, \underline{y}) = y_1 \overline{f}_1(\underline{x}) + \dots + y_s \overline{f}_s(\underline{x}) \in \mathbb{F}_q[\underline{x}, \underline{y}] .$$

On étend le Frobenius  $F_{R^\dagger}$  (défini au §1) de  $R^\dagger = \mathcal{V}[\underline{x}]^\dagger$  à  $R[\underline{y}]^\dagger = \mathcal{V}[\underline{x}, \underline{y}]^\dagger$  en  $\sigma$ , défini par exemple par  $y_i^\sigma = y_i^q$ . Le polynôme  $f$  définit un morphisme encore noté  $f$

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{d+s} = \text{Spec}(k[\underline{x}, \underline{y}]) & \longrightarrow & \text{Spec} k[t] = \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^1 \\ f(\underline{x}, \underline{y}) & \longleftarrow & t . \end{array}$$

Par image inverse par  $f$ , le  $F$ -cristal de Dwork  $\mathcal{L}_\psi$  fournit le  $F$ -cristal  $\mathcal{L}_{\psi, f} := f^*(\mathcal{L}_\psi)$  surconvergent sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{d+s}$ , libre de rang 1, de base  $e$ , et dont le Frobenius

$$\phi_{\mathcal{L}_{\psi, f}} : F^* \mathcal{L}_{\psi, f} \rightarrow \mathcal{L}_{\psi, f}$$

est donné par

$$\phi_{\mathcal{L}_{\psi, f}}(e \otimes 1) = \exp(\pi^* \sum_{i=1}^s y_i f_i(\underline{x}) - \pi^* \sum_{i=1}^s y_i^\sigma f_i(\underline{x}^\sigma))e =: \phi_f(\underline{x}, \underline{y})e .$$

Pour  $(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{d+s}(\mathbb{F}_{q^r})$  notons  $\tau_{R[\underline{y}]}^\dagger(\underline{x}, \underline{y}) = (\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{y}})$  son relèvement de Teichmüller [§1] à  $R[\underline{y}]^\dagger = \mathcal{V}[\underline{x}, \underline{y}]^\dagger$ ; alors l'action du Frobenius itérée  $r = \deg x$  fois sur  $\mathcal{L}_{\psi, f}$  au point  $(\underline{x}, \underline{y})$  est donnée par (cf la preuve de (2.5)) :

$$(3.8.1) \quad \begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{V}}(\phi_{(\mathcal{L}_{\psi, f})(\underline{x}, \underline{y})}^{\deg x}) &= \phi_f(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{y}}) \times \phi_f(\tilde{\underline{x}}^q, \tilde{\underline{y}}^q) \times \dots \times \phi_f(\tilde{\underline{x}}^{q^{r-1}}, \tilde{\underline{y}}^{q^{r-1}}) \\ &= \psi_r(f(\underline{x}, \underline{y})) , \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de [B 1, (1.4)(ii)]. Puisque  $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_\epsilon}$  définissent  $X$  dans  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d$ , un argument standard sur les sommes de caractères permet de remarquer les égalités :

$$(3.8.2) \quad \begin{aligned} \sum_{\underline{y} \in \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^s(\mathbb{F}_{q^r})} \psi_r(f(\underline{x}, \underline{y})) &= q^{rs} \quad \text{si } \underline{x} \in X(\mathbb{F}_{q^r}) \\ &= 0 \quad \text{si } \underline{x} \in (\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d \setminus X)(\mathbb{F}_{q^r}) , \end{aligned}$$

où, pour un schéma  $Y$  sur  $\mathbb{F}_q$ , l'on a posé  $Y(\mathbb{F}_{q^r}) = \{\text{points de } Y \text{ à valeurs dans } \mathbb{F}_{q^r}\}$ .

Revenons à présent à notre fonction  $L$  de départ; on a :

$$\begin{aligned} L(X, M, t) &= \prod_{x \in |X|} \det(1 - t^{\deg x} \phi_x^{\deg x} | M_x)^{-1} \\ &= \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r} S_r(X, M)\right) \end{aligned}$$

avec

$$S_r(X, M) = \sum_{x \in X(\mathbb{F}_{q^r})} \text{Tr}_{\mathcal{V}}(\phi_x^r | M_x) ;$$

en effet, pour vérifier la concordance des deux écritures de la fonction  $L$ , il suffit de passer au logarithme dans les deux expressions et regrouper les facteurs du produit eulérien par degrés (cf [Et 1, II 2]). Dans la définition de  $S_r(X, M)$  il est à noter que l'on peut remplacer la somme sur les  $x \in X(\mathbb{F}_{q^r})$  par une somme sur les points de Teichmüller  $\tau^\dagger(x)$  de  $A^\dagger$  à valeurs dans  $\mathcal{V}(\mathbb{F}_{q^r}) := W(\mathbb{F}_{q^r}) \otimes_W \mathcal{V}$  relativement à  $F_{A^\dagger}$ , ceci grâce à la bijection entre ces deux ensembles établie au §1.

Pour passer de  $X$  à l'espace affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{d+s}$  il va nous suffire de réécrire l'expression de  $S_r(X, M)$  à l'aide de  $\mathcal{L}_{\psi, f}$ , en utilisant (3.8.1) et (3.8.2) de la

façon suivante :

$$\begin{aligned}
S_r(X, M) &= \frac{1}{q^{rs}} \sum_{(\underline{x}, \underline{y}) \in (X \times \mathbb{A}^s)(\mathbb{F}_{q^r})} \text{Tr}_{\mathcal{V}}(\phi_{\underline{x}}^r) \times \psi_r(f(\underline{x}, \underline{y})) \\
&= \frac{1}{q^{rs}} \sum_{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{A}^{d+s}(\mathbb{F}_{q^r})} \text{Tr}_{\mathcal{V}}(\phi_{0, \underline{x}}^r) \times \text{Tr}_{\mathcal{V}}(\phi_{(\mathcal{L}_{\psi, f})(\underline{x}, \underline{y})}^r) \\
&= \frac{1}{q^{rs}} \sum_{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{A}^{d+s}(\mathbb{F}_{q^r})} \text{Tr}_{\mathcal{V}}(\phi_{N(\underline{x}, \underline{y})}^r) \times \text{Tr}_{\mathcal{V}}(\phi_{(\mathcal{L}_{\psi, f})(\underline{x}, \underline{y})}^r)
\end{aligned}$$

où  $N := pr^*(M_0)$  est l'image inverse de  $M_0$  par la projection canonique  $pr : \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{d+s} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d$  et  $\phi_N = pr^*(M_0)$ . D'où

$$\begin{aligned}
S_r(X, M) &= \frac{1}{q^{rs}} \sum_{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{A}^{d+s}(\mathbb{F}_{q^r})} \text{Tr}_{\mathcal{V}}((\phi_N \otimes \phi_{\mathcal{L}_{\psi, f}})^r_{(\underline{x}, \underline{y})}) \\
&= \frac{1}{q^{rs}} S_r(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{d+s}, N \otimes \mathcal{L}_{\psi, f})
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
L(X, M, t) &= \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{t}{qs}\right)^r S_r(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{d+s}, N \otimes \mathcal{L}_{\psi, f})\right) \\
(3.8.3) \quad &= L(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{d+s}, N \otimes \mathcal{L}_{\psi, f}, \frac{1}{qs}t) \\
L(X, M, t) &= L(\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{d+s}, pr^*(M_0) \otimes f^*(\mathcal{L}_{\psi}), \frac{1}{qs}t) .
\end{aligned}$$

Ceci est le lien que nous recherchions entre les fonctions  $L$  sur  $X$  et les fonctions  $L$  sur l'espace affine. C'est ce passage par le cas plus simple de l'espace affine que Wan utilise dans [W 4] pour la dernière phase de sa preuve de la conjecture de Dwork consacrée aux  $F$ -modules libres surconvergentes de rang 1.

## 4. Formule des traces de Monsky généralisée

Soit  $X = \text{Spec } A_0$  un  $k$ -schéma lisse ; on considère une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse  $A$  relevant  $A_0$  comme dans (3.8) telle que  $\text{Spec } A$  soit de dimension  $n$  sur  $\text{Spec } \mathcal{V}$ . Pour tout entier  $i \in \mathbb{N}$ , on note  $\Omega_{A^\dagger}^i := \Omega_{A^\dagger/\mathcal{V}}^i$  : puisque  $A$  est lisse sur  $\mathcal{V}$ ,  $\Omega_{A^\dagger}^i$  est un  $A^\dagger$ -module projectif de type fini ; en particulier  $\Omega_{A^\dagger}^n$  est projectif de rang 1 sur  $A^\dagger$ . Le morphisme de Frobenius  $F_{A^\dagger}$  s'étend à  $\Omega_{A^\dagger}^i$  en tant que  $\mathcal{V}$ -endomorphisme  $\sigma$ -linéaire, injectif et fini localement libre, noté

$$\sigma_i : \Omega_{A^\dagger}^i \rightarrow \Omega_{A^\dagger}^i \quad .$$

Puisque  $\sigma_i = \wedge^i \sigma_1$  et que  $\sigma_1(\omega) \equiv 0 \pmod{\pi}$ , pour  $\omega \in \Omega_{A^\dagger}^1$ , on en déduit

$$(4.1) \quad \sigma_i(\omega) \equiv 0 \pmod{\pi^i}, \text{ pour } \omega \in \Omega_{A^\dagger}^i \text{ et } i \geq 1.$$

Il en résulte une application trace [M-W, theo 8.3]

$$\text{Tr}_i : \Omega_{A^\dagger}^i \rightarrow \sigma_i(\Omega_{A^\dagger}^i)$$

telle que, pour  $a \in A^\dagger, \omega \in \Omega_{A^\dagger}^i$ , on ait

$$\text{Tr}_i(F_{A^\dagger}(a)\omega) = F_{A^\dagger}(a).\text{Tr}_i(\omega) \quad .$$

De plus, en tant qu'endomorphisme de  $\Omega_{A^\dagger}^i$ , on a d'après [M-W, theo 8.5] la relation suivante

$$\sigma_i^{-1} \circ \text{Tr}_i \circ \sigma_i = [A_0 : F_{A_0}(A_0)] = q^n \quad .$$

Ainsi l'application  $\sigma_i$  agissant sur  $\Omega_{A^\dagger}^i$  a un inverse à gauche quand on tensorise par  $\mathbb{Q}$  : cet «inverse à gauche» est l'application  $\psi_i$  définie par

$$\psi_i = \sigma_i^{-1} \circ \text{Tr}_i : \Omega_{A^\dagger}^i \rightarrow \Omega_{A^\dagger}^i \quad .$$

L'application  $\psi_i$  est un exemple d'opérateur de Dwork, i.e. d'une application  $\sigma^{-1}$ -linéaire dans le sens suivant :

$$\psi_i(F_{A^\dagger}(a)\omega) = a\psi_i(\omega), \quad a \in A^\dagger, \quad \omega \in \Omega_{A^\dagger}^i \quad .$$

Les opérateurs de Dwork sont des opérateurs à trace, d'où leur importance ([M-W], [E-LS 1, § 5.1], [W 3]).

Considérons maintenant  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$  et le  $A^\dagger$ -module suivant

$$M^* := \text{Hom}_{A^\dagger}(M, \Omega_{A^\dagger}^n) \quad .$$

Définissons un opérateur de Dwork  $\phi^*$  sur  $M^*$  comme suit : si  $f \in M^*$  et  $m \in M$ , on pose

$$\phi^*(f)(m) = (\sigma_n^{-1} \circ Tr_n)(f(\phi_M(m))) = \psi_n(f(\phi_M(m))) \ ;$$

on vérifie que  $\phi^*$  est bien un opérateur de Dwork, car  $\psi_n$  en est un :

$$\phi^*(F_{A^\dagger}(a)f) = a\phi^*(f) \ , \ a \in A^\dagger \ , \ f \in M^* \ .$$

Pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , soit

$$\Omega^i M = M \otimes_{A^\dagger} \Omega_{A^\dagger}^i \ ;$$

ce module  $\Omega^i M$  est projectif de type fini sur  $A^\dagger$  et l'on pose

$$\phi_i := \phi_M \otimes \sigma_i \ ;$$

d'après (4.1) on a

$$(4.2) \quad \phi_i \equiv 0 \pmod{\pi^i} \text{ pour } i \geq 1.$$

Alors la paire  $(\Omega^i M, \phi_i)$  est un  $F$ -module surconvergent.

Soit

$$M_i^* := Hom_{A^\dagger}(\Omega^i M, \Omega_{A^\dagger}^n) \ .$$

On définit de manière analogue un opérateur de Dwork  $\phi_i^*$  sur  $M_i^*$  par

$$\phi_i^*(f)(m) = (\sigma_n^{-1} \circ Tr_n)(f(\phi_i(m))) = \psi_n(f(\phi_i(m))), \ m \in \Omega^i M, \ f \in M_i^* \ ;$$

par (4.2) on a la congruence

$$(4.3) \quad \phi_i^* \equiv 0 \pmod{\pi^i} \text{ pour } i \geq 1 \ .$$

Pour  $i = 0$ , on a

$$(\Omega_{A^\dagger}^0, \sigma_0) = (A^\dagger, F_{A^\dagger}) \ , \ (M_0^*, \phi_0^*) = (M^*, \phi^*) \ .$$

Le  $A_K^\dagger$ -module  $M_i^* \otimes_{\mathcal{V}} K$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension infinie, qui est limite inductive d'une suite d'espaces de Banach  $p$ -adiques avec des bases orthonormales. Puisque  $(M, \phi_M)$  est surconvergent l'opérateur de Dwork  $\phi_i^*$  donne, après tensorisation par  $K$  sur  $\mathcal{V}$ , un opérateur nucléaire sur l'espace  $p$ -adique  $M_i^* \otimes_{\mathcal{V}} K$ . Il résulte de la théorie spectrale  $p$ -adique de Serre [S 2] que le déterminant de Fredholm  $det(1 - t\phi_i^* | M_i^* \otimes_{\mathcal{V}} K)$  est bien défini et est une fonction entière de  $t$  sur  $K$  : les coefficients de cette fonction entière sont en fait dans  $\mathcal{V}$  car la construction ci-dessus est partie de  $\phi_i$  à coefficients dans  $\mathcal{V}$ .



La formule des traces de Monsky généralisée établie par Wan [W 3, appendix] s'énonce alors comme suit :

**Théorème (4.4) (Wan) [W 3].** *Avec les notations précédentes soit  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$  un  $F$ -module surconvergent sur  $X/\mathbb{F}_q$ . Alors*

$$L(X, M, t) = \prod_{i=0}^n \det(1 - t\phi_{n-i}^* | M_{n-i}^* \otimes_{\mathcal{V}} K)^{(-1)^{i+1}} ,$$

où les déterminants de Fredholm  $\det(1 - t\phi_{n-i}^* | M_{n-i}^* \otimes_{\mathcal{V}} K)$  sont bien définis et sont des fonctions entières de  $t$ . En particulier  $L(X, M, t)$  est  $p$ -adiquement méromorphe

*Démonstration.* Si  $M$  est de rang 1, ce théorème est conséquence du théorème 5.3 de [Mo 2]. Le cas général est fourni par le théorème (10.10) de [W 3], dont la démonstration utilise la méthode des groupes de Grothendieck de [Mo 2].  $\square$

**Corollaire (4.5).** *Soient  $X = \text{Spec } A_0$  un  $k$ -schéma lisse,  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$  et  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$ .*

*Alors  $L(X, M, t)$  est  $p$ -adiquement méromorphe.*

*Démonstration.* Par le lemme (3.7), on peut remplacer  $M$  par un  $A^\dagger$ -module libre  $M' : (M', \phi_{M'})$  est alors ce que Wan appelle un  $\sigma$ -module surconvergent [W 2] [W 3]. L'extension au cas affine et lisse de la formule des traces de Monsky-Washnitzer établie par Wan (cf Théorème (4.4)) prouve alors la méromorphie de  $L(M', t)$ , donc celle de  $L(M, t)$ . On peut aussi se ramener au cas de l'espace affine [§ 3.8] et utiliser la formule des traces de Monsky [Dw 3, 7(a)].  $\square$

*Comme conséquence du théorème (4.4) nous allons, dans la suite de ce §4, montrer que la fonction  $L$  d'un  $F$ -module convergent à coefficients dans  $\hat{A}$  est méromorphe dans le disque unité fermé  $|t|_p \leq 1$  [Théorème (4.9)].*

Auparavant nous allons devoir établir quelques propositions.

**Proposition (4.6).** *Avec les notations précédentes soit  $\mathcal{L}$  un  $\hat{A}_K$ -module projectif de type fini. Alors*

- (i) *Il existe un  $A_K^\dagger$ -module projectif de type fini  $L$  et un  $\hat{A}$ -module de type fini  $\mathcal{M}$  tels que*

$$\mathcal{L} \simeq L \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K \text{ et } \mathcal{L} \simeq \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_K.$$

(ii) Soit  $M := \mathcal{M} \cap L \subset \mathcal{L}$ ; alors  $M$  est un  $A^\dagger$ -module de type fini et on a des isomorphismes

$$\mathcal{M} \simeq M \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \text{ et } L \simeq M \otimes_{A^\dagger} A_K^\dagger.$$

*Démonstration.*

*Pour (i).* Puisque  $(A^\dagger, A^\dagger/\pi A^\dagger)$  est un couple hensélien [Et 3, théorème 3], l'existence de  $L$  résulte d'un théorème de Elkik [El, cor 1 p.573]. Pour  $\mathcal{M}$  il suffit de prendre l'image de l'application composée  $\hat{A}^r \xrightarrow{can} \hat{A}_K^r \xrightarrow{s} \mathcal{L}$  où  $s$  est une surjection et  $can$  l'injection canonique.

*Pour (ii).* Comme on a des injections  $L \hookrightarrow \mathcal{L}, \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{L}$  le  $A^\dagger$ -module  $M := \mathcal{M} \cap L$  est le produit fibré de  $\mathcal{M}$  et  $L$  au-dessus de  $\mathcal{L}$ , donc par [F-R, prop. 4.2] on a les isomorphismes cherchés.  $\square$

**Corollaire (4.7).** *Avec les notations précédentes soit  $\mathcal{M}$  un  $\hat{A}$ -module de type fini tel que  $\mathcal{M}_K := \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_K$  soit projectif. Alors*

- (i) *Il existe un  $A^\dagger$ -module de type fini  $M$  tel que  $\mathcal{M} \simeq M \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$ .*
- (ii) *Si de plus  $\mathcal{M}$  est projectif alors le  $M$  du (i) est projectif de type fini.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la proposition (4.6) à  $\mathcal{L} = \mathcal{M}_K$ ; le cas projectif résultant de la pleine fidélité de  $\hat{A}$  sur  $A^\dagger$  [Et 3, prop 2 : (2) (ii)].  $\square$

**Proposition (4.8).** *Avec les notations du §4 soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $\hat{A}$ -modules de type fini tels que  $\mathcal{M}_K$  et  $\mathcal{N}_K$  soient projectifs sur  $\hat{A}_K$ . Soit  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application  $\hat{A}$ -linéaire et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\psi_n : \mathcal{M}_n := \mathcal{M}/\pi^{n+1}\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}_n$  sa réduction modulo  $\pi^{n+1}$ . Considérons comme dans (4.7) un  $A^\dagger$ -module de type fini  $M$  (resp.  $N$ ) relevant  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{N}$ ). Alors*

- (i) *Il existe une application  $A^\dagger$ -linéaire  $\varphi(n) : M \rightarrow N$  relevant  $\psi_n$ .*
- (ii) *Si  $\psi$  est surjective alors  $\varphi(n)$  est surjective.*
- (iii) *Supposons de plus que  $\mathcal{M} = \mathcal{N}$  ou que  $\mathcal{N}$  est projectif sur  $\hat{A}$ ; alors, si  $\psi$  est un isomorphisme,  $\varphi(n)$  est aussi un isomorphisme.*

*Démonstration.*

*Pour (i).* Puisque  $M$  est de type fini, on relève une famille génératrice  $(\bar{e}_i)_{i=1,\dots,r}$  de  $\mathcal{M}_n \simeq M_n := M/\pi^{n+1}M$  en une famille  $(e_i)_{i=1,\dots,r}$  de  $M$ : d'après le lemme de Nakayama [Bour, AC II, §3, n° 2, cor 2 de prop 4], cette famille est génératrice pour  $M$  car  $\pi A^\dagger \subset \text{Rad} A^\dagger$ . On note  $f_1, \dots, f_r$  des relèvements de  $\psi_n(\bar{e}_1), \dots, \psi_n(\bar{e}_r)$  dans  $N$ , et on définit  $\varphi(n)$  par  $A^\dagger$ -linéarité en posant

$\varphi(n)(e_i) = f_i$ .

*Pour(ii).* On applique [Bour, AC II, §3, n° 2, cor 1 de prop 4].

*Pour(iii).* Le cas  $\mathcal{M} = \mathcal{N}$  résulte de [Ma, theo 2.4 p. 9]. Supposons  $\mathcal{N}$  projectif : si  $\psi$  est un isomorphisme  $\psi_n$  en est un aussi par [EGA 0<sub>I</sub>(6.7.2)], et donc  $\varphi(n)$  aussi [loc. cit.] car  $N$  est un  $A^\dagger$ -module projectif et  $M$  est de type fini sur  $A^\dagger$ .  $\square$

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le résultat de méromorphie promis avant la proposition (4.6) :

**Théorème (4.9).** *Avec les notations du §4, soit  $(\mathcal{M}, \phi) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$ . Alors*

$$L(X, \mathcal{M}, t)^{(-1)^{\dim X - 1}} \in 1 + t\mathcal{V}\{t\} ;$$

*en particulier  $L(X, \mathcal{M}, t)$  est méromorphe dans le disque unité fermé  $|t|_p \leq 1$ .*

*Démonstration.* Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  on note  $\psi_n : F_{A_n}^*(\mathcal{M}/\pi^{n+1}\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}/\pi^{n+1}\mathcal{M}$  l'application obtenue en réduisant  $\phi$  modulo  $\pi^{n+1}$ . Par la proposition (4.8) on relève  $\psi_n$  en  $\phi(n) : F_{A^\dagger}^*(M) \rightarrow M$  ; par le début du §4 on en déduit, pour tout entier  $i, 0 \leq i \leq \dim X$ , des endomorphismes  $\phi(n)_i^*$  de  $M_i^* \otimes_{\mathcal{V}} K$  tels que

$$(4.9.1) \quad \det(1 - t\phi(n)_i^*) \in 1 + \pi^i \mathcal{V}[[\pi^i t]] \quad [(4.3)]$$

et que  $\det(1 - t\phi(n)_i^*)$  soit une fonction entière de la variable  $p$ -adique  $t$  [(4.4)], en particulier

$$(4.9.2) \quad \det(1 - t\phi(n)_i^*) \in 1 + t\mathcal{V}\{t\} .$$

Par le théorème (4.4) on en déduit que

$$(4.9.3) \quad L(X, (M, \phi(n)), t)^{(-1)^{\dim X - 1}} \in 1 + t\mathcal{V}\{t\}.$$

Notons  $L(\phi(n)) := L(X, (M, \phi(n)), t)$  et  $L(\phi) := L(X, (\mathcal{M}, \phi), t)$  ; par construction on a

$$(4.9.4) \quad L(\phi(n))^{(-1)^{\dim X - 1}} \bmod \pi^{n+1} \equiv L(\phi)^{(-1)^{\dim X - 1}} \bmod \pi^{n+1} \in 1 + t\mathcal{V}_n[[t]],$$

donc par (4.9.3) on en déduit

$$(4.9.5) \quad L(\phi)^{(-1)^{\dim X-1}} \bmod \pi^{n+1} \in 1 + t\mathcal{V}_n[t] .$$

En passant à la limite sur  $n$  ceci achève la preuve du théorème (4.9).  $\square$

## 5. La conjecture de Dwork pour les $F$ -modules surconvergents

### 5.1. Énoncé de la conjecture et du théorème

Avec les notations des §1, 2, 3 décomposons le «polynôme caractéristique» de  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A}_K)$  au point  $x \in |X|$  en

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{M}_x, t) &:= \det(1 - t \phi_x^{\deg x} | \mathcal{M}_x) \in K[t] \\ &= \prod_j (1 - a_{j,x} t), \end{aligned}$$

où les  $a_{j,x}$  sont dans une clôture algébrique  $K^{\text{alg}}$  de  $K$  : plus exactement les  $a_{j,x}$  sont dans une extension finie (éventuellement ramifiée)  $K'(x) \subset K^{\text{alg}}$  de  $K(x)$ ; soient  $\pi'(x)$  une uniformisante de  $K'(x)$  et  $\sigma_{K'(x)}$  un relèvement à  $K'(x)$  de la puissance  $p^a$  de  $k(x)$  tel que  $\sigma_{K'(x)}(\pi'(x)) = \pi'(x)$  [Et 4, 1.1]. Notons  $\pi_x = \pi^{\deg x}$  et  $\text{ord}_{\pi_x}$  la valuation de  $K'(x)$  normalisée par  $\text{ord}_{\pi_x}(\pi_x) = 1$ .

Pour tout nombre rationnel  $\alpha \in \mathbb{Q}$  on définit la partie de pente  $\alpha$  du «polynôme caractéristique»  $\det(\mathcal{M}_x, t)$  par le produit

$$(5.1.1) \quad \det_{\alpha}(\mathcal{M}_x, t) := \prod_{\text{ord}_{\pi_x}(a_{j,x})=\alpha} (1 - a_{j,x} t) .$$

Si  $a_{j,x}$  est l'inverse d'une racine de  $\det(\mathcal{M}_x, t)$ , alors  $\sigma_{K'(x)}(a_{j,x})$  en est une aussi par le même argument que pour la démonstration du lemme (2.5), et puisque  $\sigma_{K'(x)} : K'(x) \rightarrow K'(x)$  est une extension isométrique on a  $\text{ord}_{\pi_x}(a_{j,x}) = \text{ord}_{\pi_x}(\sigma_{K'(x)}(a_{j,x}))$ ; par conséquent  $\det_{\alpha}(\mathcal{M}_x, t)$  est à coefficients dans  $K$ . Comme  $\mathcal{M}$  est un  $\hat{A}_K$ -module projectif de type fini, il existe  $\alpha_0 \in \mathbb{Q}$  tel que pour tout  $x \in |\text{Spec } A_0|$  et tout  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ,  $\alpha < \alpha_0$ , on ait  $\det_{\alpha}(\mathcal{M}_x, t) = 1$ . D'autre part  $\det(\mathcal{M}_x, t)$  s'exprime par un produit fini

$$(5.1.2) \quad \det(1 - t \phi_x^{\deg x}, \mathcal{M}_x) = \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}} \det_{\alpha}(\mathcal{M}_x, t) .$$

La partie de pente  $\alpha$  de la fonction  $L(X, \mathcal{M}, t)$  est définie par l'expression

$$(5.1.3) \quad L_\alpha(X, \mathcal{M}, t) := \prod_{x \in |X|} \det_\alpha(\mathcal{M}_x, t^{\deg x})^{-1} \in K[[t]] .$$

Comme  $\det_\alpha(\mathcal{M}_x, t) = 1$  pour tout  $\alpha < \alpha_0$  et tout  $x \in |X|$ , le théorème de spécialisation de Grothendieck [K 2, (2.3)] montre qu'il n'existe qu'un nombre fini de possibilités pour les pentes de Newton de  $\mathcal{M}_x$  (donc pour les  $\alpha$  ci-dessus) pour tous les  $x \in |X|$ .

D'après (5.1.2) on a ainsi la relation

$$(5.1.4) \quad L(X, \mathcal{M}, t) = \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}} L_\alpha(X, \mathcal{M}, t) ;$$

où le produit (5.4) est fini d'après la remarque précédente.

Pour  $r \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , on définit plus généralement

$$(5.1.5) \quad \det^{(r)}(\mathcal{M}_x, t) := \prod_j (1 - (a_{j,x})^r t),$$

$$(5.1.6) \quad \det_\alpha^{(r)}(\mathcal{M}_x, t) := \prod_{\text{ord}_{\pi_x}(a_{j,x})=\alpha} (1 - (a_{j,x})^r t) ,$$

$$(5.1.7) \quad L^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) := \prod_{x \in |X|} \det^{(r)}(\mathcal{M}_x, t^{\deg x})^{-1} \in K[[t]] ,$$

$$(5.1.8) \quad L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) := \prod_{x \in |X|} \det_\alpha^{(r)}(\mathcal{M}_x, t^{\deg x})^{-1} \in K[[t]] .$$

On a encore :

$$(5.1.9) \quad L^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) = \prod_{\alpha \in \mathbb{Q}} L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) .$$

Plus précisément, grâce à l'expression établie par Wan [W 2, lemma 4.4], on a en fait

$$(5.1.10) \quad L^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) = \prod_{i \geq 1} L(X, \text{Sym}^{r-i} \mathcal{M} \otimes \overset{i}{\wedge} \mathcal{M}, t)^{i \times (-1)^{i-1}} ,$$

$$(5.1.11) \quad L_\alpha^{(r)}(X, \mathcal{M}, t) = \prod_{i \geq 1} L_\alpha(X, \text{Sym}^{r-i} \mathcal{M} \otimes \overset{i}{\wedge} \mathcal{M}, t)^{i \times (-1)^{i-1}} .$$

Les définitions précédentes s'étendent à  $M \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$ .

Nous pouvons à présent énoncer la conjecture de Dwork généralisée pour les  $F^a$ -modules surconvergens.

(5.1.12) **Conjecture (Dwork)**. Soit  $M \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$ . Alors, pour tout nombre rationnel  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et tout entier  $r \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $L_\alpha^{(r)}(X, M, t)$  est  $p$ -adiquement méromorphe.

Nous prouvons cette conjecture dans le reste du §5 :

**Théorème (5.1.13)**. Soient  $X = \text{Spec}(A_0)$  un  $k$ -schéma lisse,  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$  et  $M \in F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$ . Alors, pour tout  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et tout  $r \in \mathbb{N}^*$ , les fonctions  $L_\alpha^{(r)}(X, M, t)$ , et  $L^{(r)}(X, M, t)$  sont  $p$ -adiquement méromorphes.

Notre objectif ici est de fournir une preuve plus courte que celle que Wan a donné dans une série de trois articles [W 2][W 3][W 4]. Après un bref rappel historique en 5.2, notre preuve reposera sur le théorème d'isogénie de Katz (cf (5.3.2.3)) tel que formulé par Wan [W 3, theo 7.2] : ceci nous ramènera au cas ordinaire dans lequel on prouvera que la partie unité est surconvergente ; la conclusion resultera alors de la formule des traces de Monsky généralisée du §4.

**Remarque (5.1.14)**. Par stabilité de la catégorie  $F^a\text{-Mod}(A_K^\dagger)$  par puissances symétriques et extérieures [W 2, § 3] la conjecture (5.1.12) se ramène au cas  $r = 1$ . Par la même démonstration que celle du lemme (3.7) on peut supposer qu'il existe un  $F^a$ -module libre surconvergent  $(M', \phi_{M'}) \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$  tel que

$$(M, \phi_M) = (M', \pi^\beta \phi_{M'}) \otimes_{A^\dagger} A_K^\dagger \text{ pour un } \beta \in \mathbb{Z} ,$$

et 
$$L(M, t) = L(M', \pi^\beta t) .$$

On est ramené à montrer que  $L_\alpha(\text{Spec } A_0, M', t)$  est  $p$ -adiquement méromorphe.

## 5.2. Petit rappel historique

La conjecture de Dwork, qui date du début des années 70 [Dw 3], est venue des tentatives de Dwork pour comprendre les variations analytiques  $p$ -adiques des parties «pures» d'une variété lorsque celle-ci évolue au sein d'une famille sur un corps fini de caractéristique  $p > 0$ , i.e de comprendre les

variations des zéros et des pôles de la fonction zêta d'une famille de variétés lorsque le paramètre varie.

Dans le cas de la famille de Legendre des courbes elliptiques ordinaires, Dwork avait prouvé sa conjecture sur la méromorphie de la fonction  $L$  associée [Dw 2] : dans ce cas le point clé de sa preuve est l'existence d'un «relèvement excellent» (excellent lifting) du Frobenius qui permet d'appliquer la formule des traces de Monsky et d'en déduire la méromorphie [Dw 2]. Dwork a également prouvé sa conjecture pour certaines familles de surfaces  $K3$  ordinaires [Dw 3]. L'ennui de cette méthode c'est qu'elle repose sur l'existence des «relèvements excellents» du Frobenius, ce qui n'est pas le cas en général.

On peut se demander également l'intérêt qu'il y a de connaître la méromorphie de la fonction  $L$  dans la conjecture de Dwork : c'est qu'elle donne des estimations  $p$ -adiques de sommes de caractères, estimations qui généralisent celles obtenues par les conjectures de Weil. Illustrons cette remarque sur un exemple. Considérons un morphisme propre et lisse  $f : X \rightarrow Y$  de variétés définies sur  $\mathbb{F}_q$  : alors la fonction zêta unité de cette famille est donnée par [E-LS 2] :

$$Z_u(Y/X, t) = \prod_m L(X, R^m f_* \mathbb{Q}_p, t)^{(-1)^m}$$

et Dwork conjecture, pour tout entier  $m$ , la méromorphie de la fonction  $L(X, R^m f_* \mathbb{Q}_p, t)$ . Or  $L(X, R^m f_* \mathbb{Z}_p, t)$  est donnée par la fonction génératrice

$$(5.2.1) \quad L(X, R^m f_* \mathbb{Z}_p, t) = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(R^m f_* \mathbb{Z}_p)}{k} t^k \right) ,$$

où  $S_k(R^m f_* \mathbb{Z}_p)$  est une somme de caractères sur les points fermés de  $X$ . La méromorphie (supposée) de la fonction  $L(X, R^m f_* \mathbb{Z}_p, t)$  et le théorème de factorisation  $p$ -adique de Weierstraß montrent qu'il existe des entiers  $p$ -adiques  $\alpha_i (1 \leq i < \infty)$  et des entiers  $p$ -adiques  $\beta_j (1 \leq j < \infty)$ , algébriques sur  $K$  [Ro, chap 6, 2.2, theo 2 (a), p 312], tels que

$$(5.2.2) \quad L(X, R^m f_* \mathbb{Z}_p, t) = \frac{\prod_{i \geq 1} (1 - \alpha_i t)}{\prod_{j \geq 1} (1 - \beta_j t)}$$

avec

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = \lim_{j \rightarrow \infty} \beta_j = 0 .$$

En prenant les logarithmes dans (5.2.1) et (5.2.2), il en résulte, pour tout entier  $k$ , l'égalité

$$(5.2.3) \quad S_k = \sum_{j \geq 1} \beta_j^k - \sum_{i \geq 1} \alpha_i^k .$$

Cette formule généralise la formule classique du nombre de points rationnels de  $X$  dans  $\mathbb{F}_{q^k}$  qui résulte des conjectures de Weil, et dans ce cas la somme dans (5.2.3) ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. Dans le cas général, si l'on ne considère qu'un nombre fini de termes  $\beta_j$  et  $\alpha_i$  dans (5.2.3), on obtient une formule asymptotique  $p$ -adique pour des sommes de caractères  $p$ -adiques : plus on prend de termes et plus la précision augmente.

Le théorème prouvé par Wan dans une série de deux articles [W 3, W 4] s'énonce ainsi :

**Théorème (5.2.4) (Wan)**[W 3, theo 1.1]. *Soient  $X$  une variété affine et lisse définie sur un corps fini  $\mathbb{F}_q$  de caractéristique  $p > 0$ , et  $(M, \phi)$  un  $\sigma$ -module surconvergent sur  $X/\mathbb{F}_q$ . Alors, pour tout nombre rationnel  $s$ , la fonction  $L$  de pente pure  $s$ ,  $L_s(\phi, t)$ , attachée à  $(M, \phi)$  est  $p$ -adiquement méromorphe.*

Rappelons la terminologie de Wan. Si  $X = \text{Spec } A_0$ , on relève  $A_0$  en une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse  $A$ , on note  $A^\dagger$  (resp.  $\hat{A}$ ) sa complétée faible (resp. son séparé complété) et  $F_{A^\dagger}$  (resp.  $F_{\hat{A}}$ ) un relèvement du Frobenius de  $A_0$  à  $A^\dagger$  (resp. à  $\hat{A}$ ). Un  $\sigma$ -module surconvergent est ce que nous avons appelé un  $F$ -module surconvergent libre, i.e. la donnée d'un  $A^\dagger$ -module libre de type fini  $M$  muni d'un morphisme de Frobenius

$$\phi : F_{A^\dagger}^* M =: M^\sigma \rightarrow M .$$

L'expression  $L_s(\phi, t) := L_s(X, (M, \phi), t)$  a été définie en (5.1.3).

La démonstration par Wan de ce théorème (5.2.4) s'effectue en deux phases :

**La première phase**, regroupée dans le premier article [W 3], est une phase de réduction :

- de la pente  $s$  à la pente zéro,
- d'une pente zéro de rang  $r$  à une pente zéro de rang 1,
- de  $X$  affine et lisse sur  $\mathbb{F}_q$  à l'espace affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^n$ .

Cette partie est de nature algébrique via :



- la formule des traces de Monsky,
- le théorème de spécialisation de Grothendieck,
- la décomposition de Hodge-Newton,
- le théorème d’isogénie de Katz.

**La deuxième phase**, regroupée au sein du deuxième article [W 4], est de nature plus analytique :

- par le travail avec des modules de rang infini,
- par des processus de passage à la limite dans des familles de fonctions  $L$  méromorphes.

Abordons à présent notre preuve basée seulement sur le théorème d’isogénie de Katz et la formule des traces de Monsky : faisons d’abord quelques rappels sur les module ordinaires.

### 5.3. $F$ -modules convergents ordinaires

Dans ce §5.3. on supposera simplement que  $k$  est un corps parfait de caractéristique  $p > 0$ ,  $X = \text{Spec } A_0$  est un  $k$ -schéma lisse et  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$ .

#### 5.3.1. Définitions

Soit  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$  un  $F$ -module convergent .

A la suite de Katz et Deligne [K 2, II, 2.4, Rks p 148], [Del 2], on dit que  $\mathcal{M}$  est un  **$F$ -module convergent ordinaire de niveau  $m$**  s’il existe une filtration de  $\mathcal{M}$  par des sous  $F$ -modules convergents ( donc localement libres de type fini)

$$(5.3.1.1) \quad 0 \subset \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \dots \subset \mathcal{M}_{i-1} \subset \mathcal{M}_i \subset \dots \subset \mathcal{M}_m = \mathcal{M}$$

tels que  $(\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}, \phi_{\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}})$ , où  $\phi_{\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}}$  est induit par  $\phi_{\mathcal{M}}$ , soit de la forme  $(\mathcal{U}_i, \pi^i \phi_i)$ , où  $(\mathcal{U}_i, \phi_i)$  est un  $F$ -module convergent unité (donc localement libre de type fini). On dit que  $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$  est **ordinaire** s’il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{M}$  soit ordinaire de niveau  $m$ .

Pour les définitions et propriétés des polygones de Hodge et de Newton de  $\mathcal{M}$  nous renvoyons le lecteur à [K 2, I, 1.2, 1.3 et 2.3 p 142].

Puisque  $k$  est parfait, si  $\mathcal{M} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$  est ordinaire, il est clair qu’en tout point  $x \in |X|$  les polygones de Hodge et de Newton de  $\mathcal{M}$  coïncident et

qu'ils sont constants, i.e. indépendants de  $x \in |X|$  [loc. cit.]. La réciproque est vraie puisque  $X$  est un schéma sur un corps parfait  $k$  de caractéristique  $p > 0$  et  $X$  est lisse sur  $k$  [K 2, II, 2.4 Rks p 148], [W 2, lemma 3.6], [W 3, theo 7.2, cor 7.3].

### 5.3.2. Rappels

Nous utiliserons en 5.4 les résultats suivants de Wan.

**Lemme (5.3.2.1) (Wan) [W3, 4.5].** *Avec les notations de 5.3, soit  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Modlib}(A^\dagger)$  un  $F$ -module libre surconvergent. Alors, quitte à rétrécir  $X$  si nécessaire, le  $F$ -module surconvergent  $(M, \phi_M)$  admet une filtration  $\phi_M$ -stable par des  $A^\dagger$ -modules libres de type fini à quotients libres de type fini*

$$0 \subset N_0 \subset M$$

*tels que la restriction  $\phi_{N_0}$  de  $\phi_M$  à  $N_0$  est nilpotente et le quotient  $M/N_0$  est un  $F$ -module libre surconvergent dont le Frobenius est injectif.*

Dans le cas où l'on part d'un  $F$ -module libre convergent ordinaire on a le résultat suivant de Wan qui améliore (5.3.1.1) :

**Proposition (5.3.2.2)(Wan)[W 3, 4.9, 4.1].** *Avec les notations de 5.3 soit  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}}) \in F^a\text{-Modlib}(\hat{A})$  un  $F$ -module libre convergent ordinaire de niveau  $m$ . Alors  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$  admet une filtration finie  $\phi_{\mathcal{M}}$ -stable par des  $\hat{A}$ -modules libres de type fini à quotients libres de type fini*

$$0 \subset \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \dots \subset \mathcal{M}_{i-1} \subset \mathcal{M}_i \subset \dots \subset \mathcal{M}_m = \mathcal{M}$$

*tels que*

- (a) *Le quotient  $\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}$  est un  $F$ -module libre convergent de la forme  $(\mathcal{U}_i, \pi^i \phi_i)$  où  $(\mathcal{U}_i, \phi_i) \in F^a\text{-Modlib}(A^\dagger)^0$  est un  $F$ -module libre convergent unité pour chaque entier  $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$ .*
- (b) *Pour chaque entier  $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$  on a une décomposition*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_i \oplus \mathcal{M}_{(i+1)}$$

*dans laquelle  $\mathcal{M}_{(i+1)}$  est un sous  $\hat{A}$ -module libre de type fini de  $\mathcal{M}$  tel que  $\phi_{\mathcal{M}}(F_{\hat{A}}^* \mathcal{M}_{(i+1)}) \subset \pi^{i+1} \mathcal{M}$ ; en particulier  $\mathcal{M}/\mathcal{M}_i$  est muni d'un Frobenius divisible par  $\pi^{i+1}$ .*

- (c)  *$\phi_{\mathcal{M}}$  est injectif.*

*Démonstration.* Seul le point (c) reste à prouver. Or l'injectivité de  $\phi_{\mathcal{M}}$  est équivalente à la non nullité de  $\det(\phi_{\mathcal{M}})$ ; celle-ci est claire car

$$\det(\phi_{\mathcal{M}}) = \prod_{i=0}^{i=m} \det(\pi^i \phi_i) \neq 0. \quad \square$$

Voici la version de Wan du théorème d'isogénie de Katz :

**Théorème (5.3.2.3)(Wan)[W3, 7.2].** *Avec les notations de 5.3, soient  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Modlib}(A^\dagger)$  un  $F$ -module libre surconvergent à «pentes de Newton» des entiers naturels et  $\mathcal{M} = M \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \in F^a\text{-Modlib}(\hat{A})$  le  $F$ -module convergent associé; on suppose que  $\phi_M$  est injectif. Alors, quitte à rétrécir  $X$  si nécessaire, le  $F$ -module surconvergent  $(M, \phi_M)$  est isogène à un  $F$ -module surconvergent  $(M', \phi_{M'})$  dont le  $F$ -module convergent associé  $(\mathcal{M}', \phi_{\mathcal{M}'})$  est ordinaire. C'est-à-dire que le  $F$ -module convergent  $(\mathcal{M}', \phi_{\mathcal{M}'})$  admet une filtration finie  $\phi_{\mathcal{M}'}$ -stable par des  $\hat{A}$ -modules libres de type fini à quotients libres de type fini*

$$0 \subset \mathcal{M}'_0 \subset \mathcal{M}'_1 \subset \dots \subset \mathcal{M}'_{i-1} \subset \mathcal{M}'_i \subset \dots \subset \mathcal{M}'_m = \mathcal{M}'$$

tels que

(a) *Le quotient  $\mathcal{M}'_i/\mathcal{M}'_{i-1}$  est un  $F$ -module libre convergent de la forme  $(\mathcal{U}_i, \pi^i \phi_i)$  où  $(\mathcal{U}_i, \phi_i) \in F^a\text{-Modlib}(A^\dagger)^0$  est un  $F$ -module libre convergent unité pour chaque entier  $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$ .*

(b) *Pour chaque entier  $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$  on a une décomposition*

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M}'_i \oplus \mathcal{M}'_{(i+1)}$$

*dans laquelle  $\mathcal{M}'_{(i+1)}$  est un sous  $\hat{A}$ -module libre de type fini de  $\mathcal{M}'$  tel que  $\phi_{\mathcal{M}'}(F_{\hat{A}}^* \mathcal{M}'_{(i+1)}) \subset \pi^{i+1} \mathcal{M}'$ .*

*Démonstration.* C'est [W 3, 7.2] hormis le  $F$ -module surconvergent  $M'$  dont l'existence est mentionnée dans la preuve de [W 2, 7.2] par Wan, et l'assertion (b) qui résulte de (5.3.2.2)(b).  $\square$

### 5.3.3. $F$ -modules surconvergents ordinaires

Dans le cas d'un  $F$ -module surconvergent ordinaire, i.e. dont le  $F$ -module convergent associé est ordinaire, alors la partie unité est également surconvergente; plus précisément on a le théorème suivant :

**Théorème (5.3.3.1).** Avec les notations de 5.3, soit  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Modlib}(A^\dagger)$  un  $F$ -module libre surconvergent et  $\mathcal{M} = M \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \in F^a\text{-Modlib}(\hat{A})$  le  $F$ -module convergent associé; on suppose  $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$  ordinaire, donc muni d'une filtration satisfaisant à (5.3.2.2). Alors  $(M, \phi_M)$  admet une filtration  $\phi_M$ -stable par des  $A^\dagger$ -modules libres de type fini à quotients libres de type fini

$$0 \subset M_0 \subset M$$

tels que la restriction  $\phi_{M_0}$  de  $\phi_M$  à  $M_0$  est un isomorphisme, i.e.  $(M_0, \phi_{M_0}) \in F^a\text{-Modlib}(A^\dagger)^0$ , et  $\phi_M$  induit sur le quotient  $M/M_0$  un Frobenius  $\phi_{M/M_0}$  divisible par  $\pi$ .

*Démonstration.* Pour chaque entier  $n \in \mathbb{N}$  on note

$$\phi_M^n : F_{A^\dagger}^{n*}(M) \rightarrow M \quad (\text{resp. } \phi_{\mathcal{M}}^n : F_{\hat{A}}^{n*}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M})$$

l'itéré de  $\phi_M$  (resp.  $\phi_{\mathcal{M}}$ ). Etablissons d'abord le lemme suivant :

**Lemme (5.3.3.2).** Avec les notations du théorème (5.3.3.1) on a

$$\mathcal{M}_0 = \bigcap_n \text{Im}\{\phi_{\mathcal{M}}^n : F_{\hat{A}}^{n*}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}\} .$$

*Preuve du lemme.* Puisque  $\phi_{\mathcal{M}_0}$  est bijectif on a une inclusion évidente

$$\mathcal{M}_0 \subset \bigcap_n \text{Im}\{\phi_{\mathcal{M}}^n : F_{\hat{A}}^{n*}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}\} .$$

Pour prouver l'égalité il suffit d'après [Prop. (1.4)] d'établir la surjectivité en tout point fermé  $x$  de  $X$ , i.e., en utilisant les notations du §1, que l'on a un isomorphisme

$$\hat{\tau}(x)^*(\mathcal{M}_0) =: (\mathcal{M}_0)_x \simeq \left( \bigcap_n \text{Im}\{\phi_{\mathcal{M}}^n : F_{\hat{A}}^{n*}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}\} \right)_x .$$

Or la composée des applications canoniques

$$(\mathcal{M}_0)_x \rightarrow \left( \bigcap_n \text{Im } \phi_{\mathcal{M}}^n \right)_x \rightarrow \bigcap_n (\text{Im } \phi_{\mathcal{M}_x}^n)$$

et des égalités

$$\bigcap_n (\text{Im } \phi_{\mathcal{M}_x}^n) = (\mathcal{M}_x)_0 \text{ [Del 2; 1.3.2, (1.3.3.3) et Rq 1.2.5] ,}$$

$$(\mathcal{M}_x)_0 = (\mathcal{M}_0)_x \text{ [K2] [W3; 4.12] ,}$$

est l'identité de  $(\mathcal{M}_0)_x$ . De même la composée de l'application canonique

$$\left(\bigcap_n \text{Im } \phi_{\mathcal{M}}^n\right)_x \rightarrow \bigcap_n (\text{Im } \phi_{\mathcal{M}_x}^n) ,$$

des égalités

$$\bigcap_n (\text{Im } \phi_{\mathcal{M}_x}^n) = (\mathcal{M}_x)_0 = (\mathcal{M}_0)_x ,$$

et de l'application canonique

$$(\mathcal{M}_0)_x \rightarrow \left(\bigcap_n \text{Im } \phi_{\mathcal{M}}^n\right)_x$$

est l'identité de  $(\bigcap_n \text{Im } \phi_{\mathcal{M}}^n)_x$ . D'où le lemme.  $\square$

Posons

$$M_0 = \bigcap_n \text{Im}\{\phi_M^n : F_{A^\dagger}^{n*}(M) \rightarrow M\} .$$

Puisqu'on a un isomorphisme  $\mathcal{M}_0 \simeq M_0 \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$ ,  $M_0$  est libre de type fini sur  $A^\dagger$ , par fidèle platitude de  $\hat{A}$  sur  $A^\dagger$ . L'injectivité de  $\phi_{\mathcal{M}}$  [Prop 5.3.2.2(c)] implique celle de  $\phi_M$ , toujours par fidèle platitude de  $\hat{A}$  sur  $A^\dagger$ ; or  $M_0$  est  $\phi_M$ -stable et  $\phi_{M_0}$  est surjectif, donc  $\phi_{M_0}$  est un isomorphisme. Comme

$$M/M_0 \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \simeq \mathcal{M}/\mathcal{M}_0 \simeq \mathcal{M}_{(1)} ,$$

le quotient  $M/M_0$  est libre de type fini sur  $A^\dagger$  et son Frobenius  $\phi_{M/M_0}$ , induit par  $\phi_M$ , est divisible par  $\pi$  car on a des isomorphismes

$$(M/M_0, \phi_{M/M_0})/\pi(M/M_0, \phi_{M/M_0}) \simeq (\mathcal{M}/\mathcal{M}_0, \phi_{\mathcal{M}/\mathcal{M}_0})/\pi(\mathcal{M}/\mathcal{M}_0, \phi_{\mathcal{M}/\mathcal{M}_0}) ,$$

$$(\mathcal{M}/\mathcal{M}_0, \phi_{\mathcal{M}/\mathcal{M}_0})/\pi(\mathcal{M}/\mathcal{M}_0, \phi_{\mathcal{M}/\mathcal{M}_0}) = ((\mathcal{M}/\mathcal{M}_0)/\pi(\mathcal{M}/\mathcal{M}_0), 0) ,$$

la dernière égalité résultant de [Prop 5.3.2.2 (b)].  $\square$

## 5.4 La preuve de la conjecture de Dwork

A présent nous allons prouver le théorème (5.1.13).

Soit  $X = \text{Spec}A_0$  un  $k$ -schéma lisse,  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre lisse relevant  $A_0$ ,  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Mod}(A^\dagger)$  un  $F$ -module surconvergent et  $\mathcal{M} = M \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \in F^a\text{-Mod}(\hat{A})$  le  $F$ -module convergent associé. Pour la méromorphie de  $L_\alpha^{(r)}(X, M, t)$ , et  $L^{(r)}(X, M, t)$ , il suffit de traiter le cas  $r = 1$  et  $M$  libre

[(5.1.14)]. Par le théorème de spécialisation de Grothendieck on a vu en (5.1) que  $M$  (et donc  $\mathcal{M}$ ) n'a qu'un nombre fini de «pentes de Newton»  $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ . Quitte à passer à une extension finie totalement ramifiée de  $\mathcal{V}$  on peut supposer que toutes les «pentes de Newton» de  $M$  sont des entiers  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

Soit  $N_0 \subset M$  comme dans le lemme (5.3.2.1). Puisque

$$L(X, M, t) =: L(M, t) = L(N_0, t) \times L(M/N_0, t) = L(M/N_0, t) ,$$

car  $\phi_{N_0}$  est nilpotent, on est ramené au cas où  $\phi_M$  est injectif.

On peut appliquer le théorème d'isogénie de Katz (5.3.2.3) à notre  $(M, \phi_M) \in F^a\text{-Modlib}(A^\dagger)$  à «pentes de Newton» des entiers  $\alpha \in \mathbb{N}$ ; soit  $M'$  isogène à  $M$  comme dans ce théorème. Alors  $(M_K, \phi_{M_K})$  est isomorphe à  $(M'_K, \phi_{M'_K})$ , donc ils ont même fonction  $L$

$$L(X, M, t) = L(X, M_K, t) = L(X, M'_K, t) = L(X, M', t)$$

et mêmes fonctions  $L_\alpha$

$$L_\alpha(M, t) = L_\alpha(M_K, t) = L_\alpha(M'_K, t) = L_\alpha(M', t) = L_\alpha(\mathcal{M}', t) = L(\mathcal{M}'_\alpha/\mathcal{M}'_{\alpha-1}, t) .$$

Pour la pente zéro, notons  $M'_0 \subset M'$  le sous- $F$ -module surconvergent unité de  $M'$  obtenu via le théorème (5.3.3.1); on a donc

$$L_0(M, t) = L(\mathcal{M}'_0, t) = L(M'_0, t) .$$

La formule de traces de Monsky généralisée [Théorème (4.4)] prouve alors que cette dernière fonction est  $p$ -adiquement méromorphe.

Pour les pentes  $\alpha \geq 1$ , on remarque que

$$L(M, t) = L_0(M', t) \times \prod_{\alpha \geq 1} L_\alpha(M', t) = L_0(M', t) \times L(M'/M'_0, t) ,$$

et que  $\phi_{M'/M'_0}$  est divisible par  $\pi$  [Théorème (5.3.3.1)]. On pose alors

$$(M^{(1)}, \phi_{M^{(1)}}) = (M'/M'_0, \frac{1}{\pi} \phi_{M'/M'_0})$$

D'où l'identité

$$L_\alpha(M, t) = L_{\alpha-1}(M^{(1)}, \pi t) ;$$

en particulier

$$L_1(M, t) = L_0(M^{(1)}, \pi t) ;$$

comme  $(M^{(1)}, \phi_{M^{(1)}}) \in F^a\text{-Modlib}(A^\dagger)$  vérifie les mêmes hypothèses que  $(M, \phi_M)$  on en déduit par le même procédé que précédemment que  $L_1(M, t)$  est  $p$ -adiquement méromorphe. En itérant le processus on prouve le théorème (5.1.13). Ceci achève la preuve de la conjecture de Dwork.  $\square$

## Références

- [A] Y. Amice : *Les nombres  $p$ -adiques*, Presses Universitaires de France (1975).
- [B 1] P. Berthelot : *Cohomologie rigide et théorie de Dwork : le cas des sommes exponentielles*, Astérisque n° 119-120 (1984), 17-49.
- [B 2] P. Berthelot : *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Prépublication 93-03 de Rennes (1996).
- [B-M] P. Berthelot, W. Messing : *Théorie de Dieudonné cristalline III : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Progress in Math. 86, Birkhäuser (1990).
- [B-G-R] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert : *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 261, Springer Verlag (1984).
- [Bour] N. Bourbaki : *Algèbre* [A] chap. I à VII ; *Algèbre commutative* [AC] chap. I à X.
- [C] R. Crew :  *$F$ -isocrystals and  $p$ -adic representations in Algebraic Geometry, Bowdoin 1985*, Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. 46, AMS (1987), 111-138.
- [Del 1] P. Deligne : *La conjecture de Weil II*, Pub. Math. IHES 52, (1980), 137-252.
- [Del 2] P. Deligne : *Cristaux ordinaires et coordonnées canoniques in Surfaces algébriques*, Lecture Notes in Math. 868, Springer (1981).
- [Del 3] P. Deligne : *Rapport sur la formule des traces in SGA 4 1/2, Cohomologie Etale*, Lecture Notes in Math. 569, Springer (1977), 76-109.
- [Del 4] P. Deligne : *Fonctions  $L$  modulo  $\ell^n$  et modulo  $p$  in SGA 4 1/2, Cohomologie Etale*, Lecture Notes in Math. 569, Springer (1977), 110-128.
- [Dw 1] B. Dwork : *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. Math., vol 88, (1960), 631-648.
- [Dw 2] B. Dwork : *On Hecke polynomials*, Invent. Math. 12, (1971), 249-256.
- [Dw 3] B. Dwork : *Normalized period matrices II*, Annals of Math. 98, (1973), 1-57.
- [Dw-S] B. Dwork, S. Sperber : *Logarithmic decay and overconvergence of the unit root and associated zeta functions*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 24, (1991), 575-604.

- [EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné : *Eléments de Géométrie Algébrique* : Chap. I, Springer Grundlehren 166 ; Chap. II, III, IV, Pub. Math. IHES n° 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.
- [Eis] D. Eisenbud : *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 150, Springer, (1996).
- [El] R. Elkik : *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 6, (1973), 553-604.
- [Et 1] J.-Y. Etesse : *Rationalité et valeurs de fonctions  $L$  en cohomologie cristalline*, Annales Inst. Fourier, t. 38, fasc. 4, (1988), 33-92.
- [Et 2] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas abéliens,  $F$ -cristaux et fonctions  $L$* , J. reine angew. Math. 535, (2001), 51-63.
- [Et 3] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 107, (2002), 111-138.
- [Et 4] J.-Y. Etesse : *Descente étale des  $F$ -isocristaux surconvergens et rationalité des fonctions  $L$  de schémas abéliens*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 35, (2002), 575-603.
- [Et 5] J.-Y. Etesse : *Introduction to  $L$ -functions of  $F$ -isocrystals*, in *Geometric Aspects of Dwork Theory*, Vol. II, de Gruyter, (2002), 701-710.
- [Et 6] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité II*, à paraître dans Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova.
- [Et 7] J.-Y. Etesse : *Images directes I : Espaces rigides analytiques et images directes*, hal-00425909/arXiv : 0910.4433.
- [Et 8] J.-Y. Etesse : *Images directes II :  $F$ -isocristaux convergens*, hal-00425919/arXiv : 0910.4434.
- [Et 9] J.-Y. Etesse : *Images directes III :  $F$ -isocristaux surconvergens*, hal-00425922/arXiv : 0910.4435.
- [Et 10] J.-Y. Etesse : *Fonctions  $L$  en géométrie rigide II :  $F$ -(iso)cristaux et conjecture de Katz*, preprint.
- [Et 11] J.-Y. Etesse : *Fonctions  $L$  en géométrie rigide III : Schémas abéliens ordinaires*, preprint.
- [E-LS 1] J.-Y. Etesse, B. Le Stum : *Fonctions  $L$  associées aux  $F$ -isocristaux surconvergens I : Interprétation cohomologique*, Math. Annalen 296, (1993), 557-576.



- [E-LS 2] J.-Y. Etesse, B. Le Stum : *Fonctions  $L$  associées aux  $F$ -isocristaux surconvergents II : Zéros et pôles unités*, Invent. Math. 127, (1997), 1-31.
- [F-R] D. Ferrand, M. Raynaud : *Fibres formelles d'un anneau local noethérien*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 3, (1970), 295-311.
- [G-K 1] E. Große-Klönne : *de Rham-Kohomologie in der rigiden Analysis*, Preprintreihe der Universität Münster SFB 478, Heft 39 (1999).
- [G-K 2] E. Große-Klönne : *Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf*, Journal für die reine und angewandte Math. 519,(2000), 73-95.
- [G 1] A. Grothendieck : *Fondements de la Géométrie Algébrique*, Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962, Secrétariat Mathématique (1962).
- [G 2] A. Grothendieck : *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions  $L$* , Séminaire Bourbaki 279, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson, North-Holland, (1968).
- [K 1] N. Katz : *Travaux de Dwork*, Séminaire Bourbaki 409, Lecture Notes in Math. 383, Springer (1972).
- [K 2] N. Katz : *Slope filtration of  $F$ -crystals*, Astérisque 63 (1979), 113-163.
- [Ked ] K. Kedlaya : *Finiteness of rigid cohomology with coefficients*, Preprint, arxiv : math.AG/0208027. Duke Math. J. 134 (2006), 15-97.
- [Ma] H. Matsumura : *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8 (1997).
- [Mi] J.-S. Milne : *Etale cohomology*, Princeton University Press (1980).
- [Mo 1] P. Monsky :  *$p$ -Adic Analysis and Zeta Functions*, Kinokuniya Book-Store Co, Tokyo (1970).
- [Mo 2] P. Monsky : *Formal Cohomology III*, Annals of Math. 93, n° 2 (1971), 315-343.
- [M-W] P. Monsky, G. Washnitzer : *Formal Cohomology I*, Annals of Math. 88, n° 2 (1968), 181-217.
- [R] M. Raynaud : *Anneaux locaux henséliens*, Lecture Notes in Math. 169, Springer (1970).
- [Ro] A.M. Robert : *A Course in  $p$ -adic Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 198, Springer (2000).
- [S 1] J.-P. Serre : *Corps locaux*, Hermann (1968).

- [S 2] J.-P. Serre : *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach  $p$ -adiques*, Pub. Math. IHES n° 12 (1962), p. 69-85.
- [SGA 1] A. Grothendieck : *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math. 224, Springer (1971).
- [SGA 3] M. Demazure, A. Grothendieck : *Schémas en groupes*, Lecture Notes in Math. 151, 152, 153, Springer (1970).
- [SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer (1972, 1973).
- [SGA 7, II] P. Deligne, N. Katz : *Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique*, Lecture Notes in Math. 340, Springer (1973).
- [Shi 1] A. Shiho : *Crystalline Fundamental Groups II- Log Convergent Cohomology and Rigid Cohomology*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 9 (2002), 1-163.
- [Shi 2] A. Shiho : *Relative Log Convergent Cohomology and Relative Rigid Cohomology I*, arXiv : 0707.1742v1 [math.NT] 12 Jul 2007.
- [Shi 3] A. Shiho : *Relative Log Convergent Cohomology and Relative Rigid Cohomology II*, arXiv : 0707.1743v1 [math.NT] 12 Jul 2007.
- [W 1] D. Wan : *Meromorphic continuation of  $L$ -functions of  $p$ -adic representations*, Annals of Math. 143 (1996), 469-498.
- [W 2] D. Wan : *Dwork's conjecture on unit-root zeta functions*, Annals of Math. 150 (1999), 867-927.
- [W 3] D. Wan : *Higher rank case of Dwork's conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 807-852.
- [W 4] D. Wan : *Rank one case of Dwork's conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 853-908.