



HAL
open science

Images directes I: Espaces rigides analytiques et images directes

Jean-Yves Etesse

► **To cite this version:**

Jean-Yves Etesse. Images directes I: Espaces rigides analytiques et images directes. Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, 2012, 24 (1), pp.101-151. <hal-00425909v3>

HAL Id: hal-00425909

<https://hal.science/hal-00425909v3>

Submitted on 5 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Images directes I : Espaces rigides analytiques et images directes

Jean-Yves ETESSE¹

Sommaire

- 0. Introduction
- 1. Changement de base pour un morphisme propre
- 2. Sorites sur les voisinages stricts
- 3. Images directes d'isocristaux
 - 3.1. Sections surconvergentes
 - 3.2. Définition des images directes
 - 3.3. Changement de base
 - 3.4. Surconvergence des images directes

1. (CNRS - IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu - 35042 RENNES
Cedex France)
E-mail : Jean-Yves.Etesse@univ-rennes1.fr

Résumé

Cet article est le premier d'une série de trois articles consacrés aux images directes d'isocristaux : ici nous considérons des isocristaux sans structure de Frobenius ; dans le deuxième [Et 6] (resp. le troisième [Et 7]), nous introduisons une structure de Frobenius dans le contexte convergent (resp. surconvergent).

Pour un morphisme propre et lisse relevable nous établissons la surconvergence des images directes, grâce à un théorème de changement de base pour un morphisme propre entre espaces rigides analytiques. Ce résultat répond partiellement à une conjecture de Berthelot sur la surconvergence des images directes par un morphisme propre et lisse.

Abstract

This article is the first one of a series of three articles devoted to direct images of isocrystals : here we consider isocrystals without Frobenius structure ; in the second one [Et 6] (resp. the third one [Et 7]), we will introduce a Frobenius structure in the convergent (resp. overconvergent) context.

For a liftable proper smooth morphism we establish the overconvergence of direct images, owing to a base change theorem for a proper morphism between rigid analytic spaces. This result partially answers a conjecture of Berthelot on the overconvergence of direct images under a proper smooth morphism.

2000 Mathematics Subject Classification : 13B35, 13B40, 13J10, 14D15, 14F20, 14F30, 14G22.

Mots clés : algèbres de Monsky-Washnitzer, schémas formels, espaces rigides analytiques, théorème de changement de base propre, cohomologie rigide, isocristaux surconvergeants.

Key words : Monsky-Washnitzer algebras, formal schemes, rigid analytic spaces, proper base change theorem, rigid cohomology, overconvergent isocrystals.

0. Introduction

Soit \mathcal{V} un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ de caractéristique $p > 0$ et de corps des fractions K de caractéristique 0.

Cet article est le premier d'une série de trois consacrés aux images directes d'isocristaux. Ici on rappelle la définition des images directes d'isocristaux surconvergentes par un morphisme $f : X \rightarrow S$ (cf [B 5], ou [C-T], [LS]) de k -schémas et on prouve leur surconvergence dans le cas où f est propre et lisse relevable, ou X est une intersection complète relative dans des espaces projectifs sur S .

L'outil essentiel dans la preuve de ce résultat est le théorème de changement de base pour un morphisme propre du §1 : on établit celui-ci d'abord dans le cadre des schémas formels [théo (1.1)], puis dans le cadre des espaces rigides analytiques [théo (1.2)] grâce aux travaux de Bosch et Lütkebohmert [Bo-Lü 1],[Bo-Lü 2],[Lü].

La notion de voisinage strict étant étroitement liée à celle de surconvergence des isocristaux, on développe au §2 quelques propriétés de ces voisinages stricts dans le cas plongeable : dans le cas cartésien, l'image inverse d'un système fondamental de voisinages stricts est un système fondamental de voisinages stricts [prop (2.2.3)] ; le même résultat vaut pour un morphisme fini et plat, ou fini étale, ou fini étale galoisien [prop (2.3.1)], ce qui nous servira dans un article ultérieur.

Après avoir rappelé au §3 la définition des images directes d'isocristaux surconvergentes donnée par Berthelot dans une note non publiée [B 5] (voir les articles [C-T], [LS] de Chiarellotto-Tsuzuki et Le Stum pour la publication des détails), on établit leur surconvergence pour un morphisme propre et lisse relevable, en même temps que le théorème de changement de base [théo (3.4.4)] : un ingrédient essentiel est l'extension aux voisinages stricts du théorème de changement de base pour un morphisme propre [théo (3.3.2)].

Des résultats de relèvement de [Et 5] on déduit alors la surconvergence des images directes d'un isocristal surconvergent par un morphisme $f : X \rightarrow S$ projectif et lisse, où S est lisse sur le corps de base k et X relevable en un \mathcal{V} -schéma plat [théo (3.4.8.2)] (resp X est une intersection relative dans des espaces projectifs sur S [cor (3.4.8.6)]). Une variante, étudiée dans le théorème (3.4.9), ramène la preuve de la surconvergence du cas projectif lisse au cas où la base S est affine et lisse sur k . Ici nous avons laissé de côté le cas d'un mor-

phisme fini étale qui sera traité dans [Et 6] et [Et 7] (cf [Et 4, chap III, et IV]).

Ces théorèmes (3.4.8.2), (3.4.8.6) et (3.4.9) [resp. le théo (3.4.4)] résolvent partiellement une conjecture de Berthelot [B 2] sur la surconvergence des images directes par un morphisme propre et lisse : dans [Et 7] (cf [Et 4, chap IV]) nous en donnons une version avec structure de Frobenius.

Dans le cas où la base S est une courbe affine et lisse sur un corps algébriquement clos k (resp. S est une courbe lisse sur un corps parfait k) la conjecture a été prouvée pour le faisceau structural par Trihan [Tri] (resp. Matsuda et Trihan [M-T]). Dans le cas relevable, la conjecture a aussi été prouvée indépendamment par Tsuzuki par des voies différentes [Tsu] : en particulier il n'a pas à sa disposition le théorème de changement de base pour un morphisme propre entre espaces rigides analytiques, alors que pour nous celui-ci tient une place centrale. Une autre approche est celle de Shiho qui utilise les log-schémas [Shi 1], [Shi 2], [Shi 3].

Notations : Pour les notions sur les espaces rigides analytiques et la cohomologie rigide nous renvoyons le lecteur à [B 3], [B 4], [B-G-R], [C-T] et [LS]. Sauf mention contraire, dans tout cet article on désigne par \mathcal{V} un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ de caractéristique $p > 0$, de corps des fractions K de caractéristique 0, d'uniformisante π et d'indice de ramification e .

On suppose donné un entier $a \in \mathbb{N}^*$ et on désigne par $C(k)$ un anneau de Cohen de k de caractéristique 0 [Bour, AC IX, § 2, n° 3, prop 5] : $C(k)$ est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal \mathfrak{p} $C(k)$ [EGA O_{IV} , 19.8.5] et on note K_0 son corps des fractions, $K_0 = \text{Frac}(C(k))$. Il existe une injection fidèlement plate $C(k) \hookrightarrow \mathcal{V}$ qui fait de \mathcal{V} un $C(k)$ -module libre de rang e [EGA O_{IV} , 19.8.6, 19.8.8] et [Bour, AC IX, § 2, n° 1, prop 2]. On fixe un relèvement $\sigma : C(k) \rightarrow C(k)$ de la puissance $a^{\text{ième}}$ du Frobenius absolu de k comme dans [Et 2, I, 1.1] ; on suppose que l'on peut étendre σ en un endomorphisme de \mathcal{V} , encore noté σ , de telle sorte que $\sigma(\pi) = \pi$; on notera encore σ l'extension naturelle de σ à K : lorsque k est parfait $C(k)$ est isomorphe à l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt de k et σ est un automorphisme de K . Si $k \hookrightarrow k'$ est une extension de corps de caractéristique $p > 0$, $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \otimes_{C(k)} C(k')$, $K' = \text{Frac}(\mathcal{V}')$, on peut relever la puissance $a^{\text{ième}}$ du Frobenius absolu de k' en un morphisme $\sigma' : K' \rightarrow K'$ au-dessus de $\sigma : K \rightarrow K$ [Et 2, I, 1.1].

1. Changement de base pour un morphisme propre

Le théorème suivant est un préalable pour les théorèmes de changement de base en géométrie rigide.

Théorème (1.1). *Soient \mathcal{V} un anneau noethérien et $I \subsetneq \mathcal{V}$ un idéal; on suppose \mathcal{V} séparé et complet pour la topologie I -adique. Soit*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{v} & \mathcal{X} \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{S}' & \xrightarrow{u} & \mathcal{S} \end{array}$$

un carré cartésien de \mathcal{V} -schémas formels (pour la topologie I -adique) de type fini, avec f propre.

(1.1.1) *Soit \mathcal{F} un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent. Alors, pour tout entier $i \geq 0$, on a :*

- (1) *$R^i f_*(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module cohérent.*
- (2) *Supposons de plus u plat; alors le morphisme de changement de base*

$$u^* R^i f_*(\mathcal{F}) \longrightarrow R^i g_* v^*(\mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

Plus généralement on a :

(1.1.2) *Soient $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^\bullet$ un complexe borné de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules cohérents et $\mathcal{E}_{\mathcal{X}'}^\bullet = \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathcal{O}_{\mathcal{S}'}$. Alors, pour tout entier $i \geq 0$, on a :*

- (1) *$R^i f_*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^\bullet)$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module cohérent.*
- (2) *Supposons de plus u plat; alors le morphisme de changement de base*

$$u^* R^i f_*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^\bullet) \xrightarrow{\sim} R^i g_*(\mathcal{E}_{\mathcal{X}'}^\bullet)$$

est un isomorphisme, qui s'interprète aussi comme un isomorphisme

$$\varprojlim_n u_n^* R^i f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n R^i g_{n*}(\mathcal{E}_{X'_n}^\bullet) ;$$

(cf. notations plus bas).

Démonstration.

Pour (1.1.1)(1). La cohérence de $R^i f_*(\mathcal{F})$ sur \mathcal{O}_S est rappelée pour mémoire [EGA III, (3.4.2)].

Pour (1.1.1)(2). Notons $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}/I^{n+1}\mathcal{F}$ et φ_n le morphisme canonique $\varphi_n : R^i f_*(\mathcal{F}) \rightarrow R^i f_*(\mathcal{F}_n)$. Posons $C_n = \text{Coker } \varphi_n$, $\mathcal{H} = R^i f_*(\mathcal{F})$, $\mathcal{H}_n = R^i f_*(\mathcal{F}_n)$ et $\mathcal{H}'_n = \mathcal{H}/I^{n+1}\mathcal{H}$. Comme $I^{n+1}\mathcal{H} \subset \text{Ker } \varphi_n$ on a une surjection

$$\mathcal{H}'_n \twoheadrightarrow \mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n$$

de noyau noté K_n . Dans les suites exactes

$$(1.1.1.1) \quad 0 \longrightarrow K_n \longrightarrow \mathcal{H}'_n \longrightarrow \mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n \longrightarrow 0$$

$$(1.1.1.2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n \longrightarrow \mathcal{H}_n \longrightarrow C_n \longrightarrow 0,$$

les systèmes projectifs $(\mathcal{H}'_n)_n$ et $(\mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n)_n$ vérifient la condition de Mittag-Leffler (notée M-L) car les flèches de transition sont surjectives. De plus $(\mathcal{H}_n)_n$ vérifie M-L d'après [EGA III, (3.4.3)], donc $(C_n)_n$ aussi [EGA *O*III, (13.2.1)]. D'où l'exactitude de la suite

$$(1.1.1.3) \quad 0 \longrightarrow \varprojlim_n \mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n \longrightarrow \varprojlim_n \mathcal{H}_n \longrightarrow \varprojlim_n C_n \longrightarrow 0.$$

D'autre part on a un isomorphisme [EGA III, (3.4.3)]

$$R^i f_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{H}_n ;$$

comme $R^i f_*(\mathcal{F})$ est un \mathcal{O}_S -module cohérent [EGA III, (3.4.2)], il est séparé et complet pour la topologie I -adique, donc on a aussi un isomorphisme

$$R^i f_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{H}'_n.$$

Ainsi le morphisme composé

$$\varprojlim_n \mathcal{H}'_n \longrightarrow \varprojlim_n \mathcal{H}/\text{Ker } \varphi_n \hookrightarrow \varprojlim_n \mathcal{H}_n$$

est un isomorphisme, donc chacune des flèches est un isomorphisme (car la seconde est injective par (1.1.1.3)). Par suite $\varprojlim_n C_n = 0$; comme $(C_n)_n$ vérifie M-L, on en déduit que le pro-objet $\ll (C_n)_n \gg$ associé est le pro-objet nul [G , 195-03, §2], i.e.

$$(1.1.1.4) \quad \forall n, \exists n' \geq n \text{ tel que } C_{n'} \rightarrow C_n \text{ soit la flèche nulle}$$

(cf aussi [Bour, TG II, §3, n° 5, théo 1]).

D'après [EGA III, (3.4.4)] les $\text{Ker } \varphi_n$ définissent sur \mathcal{H} une filtration I -bonne, i.e. [EGA 0_{III}, (13.7.7)], on a $I\text{Ker } \varphi_n \subset \text{Ker } \varphi_{n+1}$ avec égalité pour n assez grand; en particulier on a $\text{Ker } \varphi_n \subset I\mathcal{H}$ pour n assez grand et la topologie sur \mathcal{H} définie par les $\text{Ker } \varphi_n$ coïncide avec la topologie I -adique: par platitude de u , la topologie sur $\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H}$ définie par les $\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \text{Ker } \varphi_n$ coïncide donc avec la topologie I -adique. Comme \mathcal{H} est cohérent sur \mathcal{O}_S on en déduit des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H} &\xrightarrow{\sim} \varprojlim (\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H} / I^{n+1}(\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H})) \\ &\xrightarrow{\sim} \varprojlim^n (\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H} / \mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \text{Ker } \varphi_n) \\ &\xrightarrow{\sim} \varprojlim^n (\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} (\mathcal{H} / \text{Ker } \varphi_n)) . \end{aligned}$$

Or il résulte de (1.1.1.4) que

$$\forall n, \exists n' \geq n \text{ tel que } \mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} C_{n'} \rightarrow \mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} C_n \text{ soit la flèche nulle,}$$

donc $\varprojlim^n (\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} C_n) = 0$; comme les flèches de transition du système projectif $\{\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} (\mathcal{H} / \text{Ker } \varphi_n)\}_n$ sont surjectives, ce système projectif vérifie M-L: la suite exacte (1.1.1.2) le reste après tensorisation par $\mathcal{O}_{S'}$ sur \mathcal{O}_S et en passant à la \varprojlim^n on déduit de ce qui précède un isomorphisme

$$\varprojlim^n (\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} (\mathcal{H} / \text{Ker } \varphi_n)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim^n (\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H}_n) .$$

D'où l'isomorphisme

$$(1.1.1.5) \quad u^*(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim^n u_n^*(\mathcal{H}_n) ,$$

où l'on note

$$\begin{array}{ccc} X'_n & \xrightarrow{v_n} & X_n \\ g_n \downarrow & & \downarrow f_n \\ S'_n & \xrightarrow{u_n} & S_n \end{array}$$

le carré cartésien déduit de celui de la proposition par réduction mod I^{n+1} . Or, u_n étant plat, [EGA III, (1.4.15)] fournit un isomorphisme de changement de base

$$u_n^*(\mathcal{H}_n) = u_n^*(R^i f_{n*}(\mathcal{F}_n)) \xrightarrow{\sim} R^i g_{n*}(v_n^*(\mathcal{F}_n)),$$

d'où, par passage à la limite et via (1.1.1.5), des isomorphismes

$$\begin{aligned} u^*(R^i f_*(\mathcal{F})) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_n R^i g_{n*}(v_n^*(\mathcal{F}_n)) = \varprojlim_n R^i g_*(v_n^*(\mathcal{F}_n)) \\ &\xrightarrow{\sim} R^i g_*(v^*(\mathcal{F})) \text{ [EGA III, (3.4.3)],} \end{aligned}$$

car $v^*(\mathcal{F}) = \varprojlim_n v_n^*(\mathcal{F}_n)$. D'où le (1.1.1) du théorème.

Pour (1.1.2)(1). On note $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}/I^{n+1}$, $\mathcal{E}_{X_n}^\bullet = \mathcal{E}_X^\bullet/I^{n+1}\mathcal{E}_X^\bullet$ et $\mathcal{E}_{X'_n}^\bullet = \mathcal{E}_{X'}^\bullet/I^{n+1}\mathcal{E}_{X'}^\bullet$. Il suffit d'établir le lemme suivant :

Lemme (1.1.2.1). *Sous les hypothèses (1.1.2) et avec les notations ci-dessus on a un isomorphisme de \mathcal{O}_S -modules cohérents :*

$$R^i f_*(\mathcal{E}_X^\bullet) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n R^i f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet).$$

Démonstration du lemme. Il s'agit d'étendre la preuve de [EGA III, (3.4.4)] des \mathcal{O}_X -modules cohérents aux complexes de \mathcal{O}_X -modules cohérents. Comme $R^{i+j} f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de terme $E_1^{i,j}$ donné par

$$E_1^{i,j} = R^j f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^i)$$

et que $E_1^{i,j}$ est cohérent sur \mathcal{O}_{S_n} puisque f_n est propre, on en déduit que $R^{i+j} f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet)$ est cohérent sur \mathcal{O}_{S_n} : plus généralement, par la même méthode que pour la preuve de [EGA III, (3.4.4)], on prouve que la condition (F_i) de [EGA 0_{III}, (13.7.7)] est vérifiée pour tout i , donc par [loc. cit.] on a :

(1.1.2.2) Pour tout i le système projectif $(R^i f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet))_n$ vérifie M-L.

(1.1.2.3) $\varprojlim_n R^i f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet)$ est un \mathcal{O}_S -module cohérent.

(1.1.2.4) La filtration sur $R^i f_*(\mathcal{E}_X^\bullet)$ définie par

$$\text{Ker}\{\psi_n : R^i f_*(\mathcal{E}_X^\bullet) \rightarrow R^i f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet)\}$$

est I -bonne.

Or $R^{i+j} f_*(\mathcal{E}_X^\bullet)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de terme $E_1^{i,j} = R^j f_*(\mathcal{E}_X^i)$ qui est un \mathcal{O}_S -module cohérent via (1.1.1), donc $R^{i+j} f_*(\mathcal{E}_X^\bullet)$ est un \mathcal{O}_S -module cohérent ; comme la topologie I -adique sur $R^i f_*(\mathcal{E}_X^\bullet)$ coïncide

d'après (1.1.2.4) avec la topologie définie par les $\text{Ker}\{\psi_n\}$, on en déduit des isomorphismes

$$R^i f_*(\mathcal{E}_\lambda^\bullet) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n (R^i f_*(\mathcal{E}_\lambda^\bullet) / I^{n+1} R^i f_*(\mathcal{E}_\lambda^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n (R^i f_*(\mathcal{E}_\lambda^\bullet) / \text{Ker}\{\psi_n\}) .$$

En passant à la limite projective sur les injections canoniques

$$(R^i f_*(\mathcal{E}_\lambda^\bullet) / \text{Ker}\{\psi_n\}) \hookrightarrow R^i f_*(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet)$$

il en résulte une injection canonique

$$R^i f_*(\mathcal{E}_\lambda^\bullet) \hookrightarrow \varprojlim_n R^i f_*(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet) .$$

Montrons à présent la surjectivité de cette flèche. Puisque $R^i f_*(\mathcal{E}_\lambda^\bullet)$ (resp. $\varprojlim_n R^i f_*(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet)$) est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto H^i(f^{-1}(U), \mathcal{E}_\lambda^\bullet)$ (resp. $U \mapsto \varprojlim_n H^i(f^{-1}(U), \mathcal{E}_{X_n}^\bullet)$), il suffit de montrer que pour tout ouvert U de \mathcal{S} on a une surjection canonique

$$H^i(f^{-1}(U), \mathcal{E}_\lambda^\bullet) \twoheadrightarrow \varprojlim_n H^i(f^{-1}(U), \mathcal{E}_{X_n}^\bullet) .$$

Pour $m \geq n$, notons $\mathcal{N}_{m,n}^\bullet$ le noyau de la projection $\mathcal{E}_{X_m}^\bullet \rightarrow \mathcal{E}_{X_n}^\bullet$ et choisissons des résolutions injectives [C-E, chap. XVII, §1] $\mathcal{I}_{m,n}^{\bullet\bullet}$, $\mathcal{I}_m^{\bullet\bullet}$, $\mathcal{I}_n^{\bullet\bullet}$ de $\mathcal{N}_{m,n}^\bullet$, $\mathcal{E}_{X_m}^\bullet$, $\mathcal{E}_{X_n}^\bullet$ respectivement telles que l'on ait un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes [C-E, chap. V, §2] et morphismes d'augmentation les ε

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_{m,n}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{E}_{X_m}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{E}_{X_n}^\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon_{m,n} & & \downarrow \varepsilon_m & & \downarrow \varepsilon_n \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{m,n}^{\bullet\bullet} & \longrightarrow & \mathcal{I}_m^{\bullet\bullet} & \longrightarrow & \mathcal{I}_n^{\bullet\bullet} \longrightarrow 0 \end{array} .$$

Alors, pour U ouvert de \mathcal{S} , la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_{m,n}^{\bullet\bullet}) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_m^{\bullet\bullet}) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_n^{\bullet\bullet}) \longrightarrow 0$$

est exacte ; en particulier le système projectif $\{\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_n^{\bullet\bullet})\}_n$ a des flèches de transition surjectives, d'où $R^j \varprojlim_n \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_n^{\bullet\bullet}) = 0$ pour $j > 0$ [J, prop

2.1 et théo 1.8]. Pour la même raison on a aussi $R^j \varprojlim_n \mathcal{E}_{X_n}^\bullet = 0$ pour $j > 0$.

On en déduit donc des quasi-isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{E}_X^\bullet) &\simeq \mathbb{R}\Gamma(f^{-1}(U), \mathbb{R} \varprojlim_n \mathcal{E}_{X_n}^\bullet) \simeq \mathbb{R} \varprojlim_n \mathbb{R}\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{E}_{X_n}^\bullet) \\ &\simeq \mathbb{R} \varprojlim_n \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_n^{\bullet\bullet}) \simeq \varprojlim_n \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_n^{\bullet\bullet}) . \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $i \geq 0$, le morphisme canonique θ

$$\begin{aligned} H^i(f^{-1}(U), \mathcal{E}_X^\bullet) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i(\mathbb{R}\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{E}_X^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \\ \mathcal{H}^i(\varprojlim_n \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_n^{\bullet\bullet})) &\xrightarrow{\theta} \varprojlim_n \mathcal{H}^i(\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{I}_n^{\bullet\bullet})) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n H^i(f^{-1}(U), \mathcal{E}_{X_n}^\bullet) \end{aligned}$$

est surjectif d'après [EGA 0_{III}, (13.2.3)]; en fait [loc. cit.] fournit aussi l'injectivité de θ puisque le système projectif $\{H^i(f^{-1}(U), \mathcal{E}_{X_n}^\bullet)\}_n$ vérifie M-L d'après (1.1.2.2); d'où le lemme. \square

Pour (1.1.2)(2). Au cran fini n le morphisme de changement de base par u_n

$$(1.1.2.5) \quad u_n^* R^{i+j} f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet) \longrightarrow R^{i+j} g_{n*}(\mathcal{E}_{X'_n}^\bullet)$$

est un isomorphisme car c'en est un au niveau des termes $E_1^{i,j}$ de chaque membre puisque u_n est plat. Compte tenu de (1.1.2.4) le passage à la \varprojlim_n sur (1.1.2.5) fournit, par la même méthode qu'au cas (1.1.1)(2) du théorème (1.1), l'isomorphisme de changement de base

$$u^* R^i f_*(\mathcal{E}_X^\bullet) \xrightarrow{\sim} R^i g_*(\mathcal{E}_{X'}^\bullet)$$

qui s'interprète aussi comme un isomorphisme

$$\varprojlim_n u_n^* R^i f_{n*}(\mathcal{E}_{X_n}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n R^i g_{n*}(\mathcal{E}_{X'_n}^\bullet) . \square$$

Théorème (1.2). Soient \mathcal{V} un anneau de valuation discrète séparé et complet pour la topologie \mathfrak{m} -adique, où \mathfrak{m} est son idéal maximal, $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ son corps résiduel supposé de caractéristique $p > 0$, K son corps des fractions de caractéristique 0.

Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{v} & X \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{u} & S \end{array}$$

un carré cartésien de K -espaces analytiques rigides, avec f propre.

(1.2.1) Soit E un \mathcal{O}_X -module cohérent. Alors, pour tout entier $i \geq 0$,

- (1) $R^i f_*(E)$ est un \mathcal{O}_S -module cohérent.
- (2) Supposons de plus u plat; alors le morphisme de changement de base

$$u^*(R^i f_*(E)) \longrightarrow R^i g_*(v^*(E))$$

est un isomorphisme.

Plus généralement on a :

(1.2.2) Soient E^\bullet un complexe borné de \mathcal{O}_X -modules cohérents et $E'^\bullet = E^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$. Alors pour tout entier $i \geq 0$

- (1) $R^i f_*(E^\bullet)$ est un \mathcal{O}_S -module cohérent.
- (2) Supposons de plus u plat; alors le morphisme de changement de base

$$u^* R^i f_*(E^\bullet) \longrightarrow R^i g_*(E'^\bullet)$$

est un isomorphisme.

Démonstration du théorème (1.2).

1ère étape. Supposons d'abord démontré le théorème dans le cas où les K -espaces analytiques rigides sont tous quasi-compacts et quasi-séparés.

Prouvons alors (1.2.1) dans le cas général.

L'assertion (1) est locale sur S puisque $R^i f_*(E)$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$V \mapsto H^i(f^{-1}(V), E)$$

où V parcourt les ouverts de S [SGA 4, V, prop 5.1].

Soient $\psi : V \hookrightarrow S$ un ouvert affinoïde de S et W défini par le carré cartésien

$$(1.2.1.1) \quad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\theta} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{\psi} & S \end{array} \quad ;$$

d'après [loc. cit.] on a alors un isomorphisme canonique

$$\psi^* R^i f_* (E) \cong R^i f'_*(\theta^*(E)).$$

Or ici V est quasi-compact, quasi-séparé, et W aussi car f' est propre; d'où l'assertion (1) via le cas quasi-compact, quasi-séparé.

Pour le (2) on reprend le carré cartésien (1.2.1.1) : soient

$$u' : V' = V \times_S S' \longrightarrow V$$

$$\text{et } u'' : V'' \hookrightarrow V' \text{ un ouvert affinoïde de } V',$$

et on considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & X' & \xrightarrow{\quad} & X' & \xrightarrow{v} & X \\ & \nearrow \theta'' & \downarrow \text{dotted} & & \downarrow \text{dotted} & & \downarrow f \\ W'' & \xrightarrow{\quad} & W'' & \xrightarrow{v''} & W' & \xrightarrow{v'} & W \\ & \downarrow g'' & \downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow \theta \\ & & S' & \xrightarrow{\quad} & S' & \xrightarrow{u} & S \\ & \downarrow g'' & \downarrow g' & & \downarrow g' & & \downarrow f' \\ V'' & \xrightarrow{u''} & V' & \xrightarrow{u'} & V' & \xrightarrow{\psi} & V \end{array}$$

dont les faces verticales sont cartésiennes.

Vu le caractère local de l'isomorphisme (2) cherché, il suffit de montrer que l'on a un isomorphisme

$$\psi''^* u^* R^i f_*(E) \xrightarrow{\sim} \psi''^* R^i g_* v^*(E).$$

Or ici V et V'' sont quasi-compacts, quasi-séparés, donc W et W'' aussi car f' et g'' sont propres et on peut appliquer l'isomorphisme de changement de base du cas quasi-compact, quasi-séparé pour le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
W' & \xrightarrow{v'ov''} & W \\
g'' \downarrow & & \downarrow f' \\
V'' & \xrightarrow{u'ou''} & V
\end{array}
\quad ;$$

d'où une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned}
\psi''^* u^* R^i f_* (E) &= (u' u'')^* \psi^* R^i f_* (E) \\
&= (u' u'')^* R^i f'_* (\theta^* (E)) \\
&\simeq R^i g''_* ((v' v'')^* (\theta^* (E))) \\
&= R^i g''_* (\theta''^* (v^* (E))) \\
&= \psi''^* R^i g_* (v^* (E)).
\end{aligned}$$

D'où le (2).

Pour prouver (1.2.2) à partir du cas quasi-compact, quasi-séparé la démarche est analogue.

2ème étape. Prouvons le théorème dans le cas quasi-compact, quasi-séparé.

Pour (1.2.1). Le (1) est un théorème de Lütkebohmert [Lü, theo 2.7]. Pour le (2) on adopte les notations de [Bo-Lü 1, démonstration de 4.1] : d'après [loc. cit.] il existe des modèles formels $\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{S}'$ de X, S, S' respectivement et des éclatements admissibles

$$\tau_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{X}} \quad , \quad \tau_{\mathcal{S}'} : \mathcal{S}' \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{S}'}$$

et des morphismes

$$\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S} \quad , \quad \theta : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$$

tels que

$$\varphi_{\text{rig}} = f \circ \tau_{\mathcal{X}\text{rig}} \quad \text{et} \quad \theta_{\text{rig}} = u \circ \tau_{\mathcal{S}'\text{rig}},$$

avec θ plat [Bo-Lü 2, 5.2, 5.10 (c)].

Remarquons que tous les schémas formels précédents sont admissibles au sens de [Bo - Lü 1], donc sont plats sur \mathcal{V} [Bo - Lü 1, § 1]. On dispose donc d'un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{\theta'} & \mathcal{X} \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{S}' & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{S} \end{array} ,$$

qui est un modèle formel du carré du théorème : de plus il existe un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent \mathcal{F} tel que $\mathcal{F}_{\text{rig}} = E$ [Lü, 2.2], ou [Bo-Lü 1, 5.6] et φ est un morphisme propre [Lü, 2.6]. D'après le théorème (1.1) le morphisme de changement de base

$$\theta^* R^i \varphi_*(\mathcal{F}) \rightarrow R^i \varphi'_* \theta'^*(\mathcal{F})$$

est un isomorphisme ; par passage aux fibres génériques le (1.2.1) en résulte.

Pour (1.2.2) : le complexe E^\bullet provient, à multiplication près par p^{-n} , d'un complexe \mathcal{E}^\bullet de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules cohérents. Il suffit alors d'appliquer le (1.1.2) du théorème (1.1) et de passer aux fibres génériques pour obtenir (1.2.2).

Nous rassemblons pour mémoire dans la proposition suivante quelques propriétés des immersions.

Proposition (1.3). *Soient \mathcal{V} et K comme en (1.2). Alors*

- (1.3.1) *Toute immersion (resp. immersion ouverte, resp. immersion fermée) $\alpha : X \hookrightarrow Y$ de K -espaces rigides analytiques quasi-compacts et quasi-séparés admet un modèle formel $\beta : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ au sens de [Bo-Lü 2, cor 5.10] qui est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée) : en particulier \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont plats sur \mathcal{V} .*
- (1.3.2) *Pour tout K -espace analytique rigide X , le faisceau d'anneaux \mathcal{O}_X est cohérent.*
- (1.3.3) *Soient $\alpha : X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée de K -espaces analytiques rigides et M un \mathcal{O}_X -module cohérent. Alors, pour tout entier $i > 0$ on a*

$$R^i \alpha_*(M) = 0$$

et le morphisme canonique

$$\alpha^* \alpha_*(M) \rightarrow M$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le (1.3.1) n'est autre que [Bo-Lü 2, cor 5.10].

Pour le (1.3.2) la propriété est locale sur X [B-G-R, 9.4.3] : on peut donc supposer X affinoïde ; par suite X est quasi-compact et quasi-séparé et admet un modèle formel \mathcal{X} . Il suffit de prouver la cohérence du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$: comme \mathcal{X} est un schéma formel de type fini sur l'anneau noethérien \mathcal{V} , le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est un faisceau cohérent d'anneaux par [EGA I, (10.11.2)].

Pour le (1.3.3), les assertions sont locales sur Y : on peut donc supposer Y affinoïde, donc quasi-compact, quasi-séparé et de même pour X puisque α est propre [B-G-R, 9.5.3, prop 2, 9.6.2, prop 5]. On prend alors un modèle formel $\beta : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ de α [Bo-Lü 2, 5.10(d)] et un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent \mathcal{M} tel que $\mathcal{M}_K = M$ [Lü, lemma 2.2]. Soient $\beta_n : \mathcal{X}_n \hookrightarrow \mathcal{Y}_n$ la réduction de β mod \mathfrak{m}^{n+1} et $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}/\mathfrak{m}^{n+1} \mathcal{M}$; alors

$$\beta^* \beta_*(\mathcal{M})/\mathfrak{m}^{n+1} = \beta_n^* \beta_{n*}(\mathcal{M}_n)$$

et puisque \mathcal{M} et $\beta_*(\mathcal{M})$ sont cohérents [théo (1.1)] on a des isomorphismes

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{M}_n \quad \text{et} \quad \beta^* \beta_*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \beta_n^* \beta_{n*}(\mathcal{M}_n).$$

Or le morphisme canonique

$$\beta_n^* \beta_{n*}(\mathcal{M}_n) \longrightarrow \mathcal{M}_n$$

est un isomorphisme : en effet, \mathcal{M}_n étant de présentation finie sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}$, on est ramené au cas de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}$ pour lequel l'assertion est claire puisque β_n est une immersion fermée. En prenant la limite sur n de ces isomorphismes et en passant aux fibres génériques on en déduit un isomorphisme canonique

$$\alpha^* \alpha_*(M) \xrightarrow{\sim} M .$$

L'égalité $R^i \alpha_*(M) = 0$ pour $i > 0$ résulte de l'isomorphisme

$$R^i \beta_*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n R^i \beta_{n*}(\mathcal{M}_n) \quad [EGAIII, (3.4.3)]$$

et de l'égalité $R^i \beta_{n*}(\mathcal{M}_n) = 0$ pour $i > 0$, puisque β_n est fini. \square

2. Sorites sur les voisinages stricts

2.0. Rappelons la définition de «voisinage strict» dans un espace rigide analytique [G-K 2, 2.22].

Si U est un ouvert admissible d'un espace rigide analytique W , un ouvert admissible $V \subset W$ est appelé voisinage strict de U dans W si $\{V, W \setminus U\}$ est un recouvrement admissible de W . Cette définition redonne celle de [B 3, (1.2.1)], [B 4, §1], [LS, chap 2 et 3] dans le cas des tubes.

2.1. Considérons un diagramme commutatif

$$(2.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_X} & \mathcal{X} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{Y} \\ f \downarrow & & \downarrow h & \square & \downarrow \bar{h} \\ S & \xrightarrow{i_S} & \mathcal{S} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{T} \end{array}$$

dans lequel le carré de droite est un carré cartésien de \mathcal{V} -schémas formels séparés plats de type fini, f est un morphisme de k -schémas, $i_X, i_Y = \psi \circ i_X, i_S$ et $i_T = \varphi \circ i_S$ sont des immersions.

On note

$$\begin{aligned} h' :]X[_x &\longrightarrow]S[_s, \bar{h}' :]X[_y &\longrightarrow]S[_t, \\ \psi' :]X[_x &\longrightarrow]X[_y, \varphi' :]S[_s &\longrightarrow]S[_t \end{aligned}$$

les morphismes induits sur les tubes respectivement par $h, \bar{h}, \psi, \varphi$ [B 3, (1.1.11) (i)], [B 4, 1.1], [LS, chap 2].

Proposition (2.1.2). *Avec les notations précédentes, on a un diagramme commutatif à carrés cartésiens*

$$\begin{array}{ccc}]X[_x & \xrightarrow{\psi'} &]X[_y \\ h' \downarrow & & \downarrow \bar{h}' \\]S[_s & \xrightarrow{\varphi'} &]S[_t \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}_K & \xrightarrow{\varphi_K} & \mathcal{T}_K \end{array} \quad .$$

Démonstration. Pour le carré du bas, ça résulte de la définition des tubes et du morphisme de spécialisation. Pour le carré du haut, il s'agit de vérifier

que $]X[_{\mathcal{X}}$ satisfait la propriété universelle du produit fibré. Soit Z un espace rigide analytique s'insérant dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{u} &]X[_{\mathcal{Y}} & \longrightarrow & \mathcal{Y}_K \\
 \downarrow & & \downarrow \bar{h}' & & \downarrow \bar{h}_K \\
]S[_{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\varphi'} &]S[_{\mathcal{T}} & & \\
 & \searrow & \searrow & & \\
 & & \mathcal{S}_K & \xrightarrow{\varphi_K} & \mathcal{T}_K
 \end{array} \quad ;$$

par propriété universelle de $\mathcal{X}_K = \mathcal{S}_K \times_{\mathcal{T}_K} \mathcal{Y}_K$ on en déduit une flèche $Z \xrightarrow{v} \mathcal{X}_K$ qui s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xlongequal{\quad} & X & & \\
 \downarrow i_{\mathcal{X}} & & \downarrow i_{\mathcal{Y}} & & \\
 \mathcal{X} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{Y} & & \\
 \uparrow sp & & \uparrow sp & & \\
 Z & \xrightarrow{v} & \mathcal{X}_K & \xrightarrow{\psi_K} & \mathcal{Y}_K \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & &]\tilde{X}[_{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\psi'} &]\tilde{X}[_{\mathcal{Y}}
 \end{array}$$

u (arc from Z to $]\tilde{X}[_{\mathcal{Y}}$)

où sp sont les morphismes de spécialisation. Puisque $sp(]X[_{\mathcal{Y}}) = X \xrightarrow{i_{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y}$ et compte tenu de la commutativité du diagramme précédent le morphisme v se factorise par $]\tilde{X}[_{\mathcal{X}}$ en

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{v} & \mathcal{X}_K \\
 & \searrow & \uparrow \\
 & &]\tilde{X}[_{\mathcal{X}}
 \end{array} \quad ;$$

d'où la proposition. \square

2.2. Considérons à présent un diagramme commutatif

$$(2.2.1) \quad \begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{j_{X_1}} & X_1 & \xrightarrow{j_Y} & Y & \xrightarrow{i_Y} & \mathcal{Y} \\
 \searrow f & & \downarrow f_1 & \square & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{h} \\
 & & \mathcal{S} & \xrightarrow{j_T} & \mathcal{T} & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} \xrightarrow{\rho} \mathcal{W}
 \end{array}$$

dans lequel le carré de gauche est cartésien f , f_1 et \bar{f} sont des morphismes de k -schémas, \bar{h} et ρ sont des morphismes de \mathcal{V} -schémas formels séparés plats de type fini, j_{X_1} , j_Y et j_T sont des immersions ouvertes, i_Y et i_T sont des immersions fermées. Notons $X_2 = \bar{h}^{-1}(S)$, $Y_2 = \bar{h}^{-1}(T)$ et $f_2 : X_2 \rightarrow S$, $\bar{f}_2 : Y_2 \rightarrow T$ les morphismes induits par \bar{h} . Soient Y_0 et T_0 les réductions modulo π de \mathcal{Y} et \mathcal{T} : les immersions fermées i_Y et i_T se factorisent respectivement via les immersions fermées $i_{2Y_0} : Y \hookrightarrow Y_0$, $i_{Y_0} : Y \hookrightarrow Y_2 \hookrightarrow Y_0$ et $i_{T_0} : T \hookrightarrow T_0$. On désigne par $\bar{h}_X :]X[_{\mathcal{Y}} \rightarrow]S[_{\mathcal{T}}$, $\bar{h}_Y :]Y[_{\mathcal{Y}} \rightarrow]T[_{\mathcal{T}}$ les morphismes induits par $\bar{h}_K : \mathcal{Y}_K \rightarrow \mathcal{T}_K$ [B 3, (1.1.11) (i)], [B 4, 1.1], [LS, chap 2] $j'_Y :]X[_{\mathcal{Y}} \rightarrow]Y[_{\mathcal{Y}}$, $i'_{Y_0} :]Y[_{\mathcal{Y}} \rightarrow]Y_0[_{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_K$, $i'_{2Y_0} :]Y_2[_{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}_K$ ceux induits par l'identité de \mathcal{Y}_K et $j'_T :]S[_{\mathcal{T}} \rightarrow]T[_{\mathcal{T}}$, $i'_{T_0} :]T[_{\mathcal{T}} \rightarrow]T_0[_{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_K$ ceux induits par l'identité de \mathcal{T}_K . Si V est un voisinage strict de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans $]T[_{\mathcal{T}}$, alors $W := \bar{h}_Y^{-1}(V)$ est un voisinage strict de $]X_1[_{\mathcal{Y}}$ (donc de $]X[_{\mathcal{Y}}$) dans $]Y[_{\mathcal{Y}}$ [B 3, (1.2.7)], [LS, chap 3] et on note $h_V := \bar{h}_{Y|W} : W \rightarrow V$.

Proposition (2.2.2). *Sous les hypothèses (2.2) on a :*

(2.2.2.1) *Supposons que $\bar{f}^{-1}(S) = X$, alors le diagramme (2.2.1) induit un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc}]X[_{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{j'_Y} &]Y[_{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{i'_{Y_0}} & \mathcal{Y}_K \\ \bar{h}_X \downarrow & \square & \downarrow \bar{h}_Y & & \downarrow \bar{h}_K \\]S[_{\mathcal{T}} & \xrightarrow{j'_T} &]T[_{\mathcal{T}} & \xrightarrow{i'_{T_0}} & \mathcal{T}_K \end{array},$$

dans lequel le carré de gauche est cartésien et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes .

(2.2.2.2) *Supposons que $\bar{h}^{-1}(T) = Y$ et $\bar{f}^{-1}(S) = X$. Alors :*

Les deux carrés du diagramme précédent sont cartésiens.

Si de plus V décrit un système fondamental de voisinages stricts de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans $]T[_{\mathcal{T}}$, alors $\bar{h}_Y^{-1}(V)$ décrit un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_{\mathcal{Y}}$ dans $]Y[_{\mathcal{Y}}$.

Démonstration.

L'existence du diagramme commutatif dans (2.2.2.1) résulte de (2.2.1) et [B 3, (1.1.11) (i)] ou [LS, 2.2] via la définition des tubes [B 3, (1.1.1)], [LS, chap 2].

Puisque $\bar{f}^{-1}(S) = X$ le diagramme (2.2.1) se décompose en

$$(2.2.2.3) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j_Y} & Y & \xrightarrow{i_Y} & \mathcal{Y} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \bar{h}^{-1}(S) & \longrightarrow & \bar{h}^{-1}(T) & \longrightarrow & \mathcal{Y} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \bar{h} \\ S & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} \xrightarrow{\rho} \mathcal{W} \end{array} \quad .$$

On est donc ramené à étudier séparément le cas où $\bar{h}^{-1}(T) = Y$ et $\bar{f}^{-1}(S) = X$ et celui où $\bar{h} = id$: on montrera d'abord (2.2.2.2) et pour (2.2.2.1) il nous suffira de traiter le cas où $h = id$.

Pour (2.2.2.2). Les carrés du diagramme (2.2.2.1) sont cartésiens d'après la définition des tubes [B 3, (1.1.1)], [LS, chap 2] et le fait que $\bar{h}^{-1}(T) = Y$ et $\bar{f}^{-1}(S) = X$.

Pour la deuxième assertion de (2.2.2.2), on va utiliser les voisinages standards $V_{\eta, \lambda} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{\eta_n, \lambda_n}$ de Berthelot [B 3, (1.2.4)], [LS, 3.4] : rappelons au passage que si $\lambda_n < \lambda'_n$ alors $V_{\eta_n, \lambda'_n} \subset V_{\eta_n, \lambda_n}$.

Si V est un voisinage strict de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans $]T[_{\mathcal{T}}$, alors $\bar{h}_Y^{-1}(V)$ est un voisinage strict de $]X[_{\mathcal{Y}}$ dans $]Y[_{\mathcal{Y}}$ [B 3, (1.2.7)], [LS, 3.1]. Soit W un voisinage strict de $]X[_{\mathcal{Y}}$ dans $]Y[_{\mathcal{Y}}$; d'après [B 3, (1.2.2)] on se ramène au cas où $]Y[_{\mathcal{Y}}$ est affinoïde, et avec les notations de [loc. cit.] il existe $\lambda_0 < 1$ tel que, pour $\lambda_0 \leq \lambda < 1$, on ait $U_\lambda \subset W$. Avec les notations de [B 3, (1.2.4) (i)] si $V_{\eta, \lambda}(S)$ parcourt un système fondamental de voisinages stricts de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans $]T[_{\mathcal{T}}$, alors il existe η_n et λ_n assez proches de 1 tels que $(\bar{h}_Y)^{-1}(V_{\eta_n, \lambda_n}(S)) \subset U_\lambda$ car les équations locales de Y (resp de $Z := Y \setminus X$) sont obtenues par image inverse par \bar{h} des équations locales de T (resp de $T \setminus S$) (cf. aussi [LS, 3.2]).

Pour (2.2.2.1). Puisque $]X[_{\mathcal{Y}}$ et $]Y[_{\mathcal{Y}}$ sont des ouverts de \mathcal{Y}_K [B 3, (1.1.2)], [LS, chap 2] il en résulte que j'_Y et i'_Y sont des immersions ouvertes; de même pour j'_T et i'_T .

Pour montrer que le carré de gauche du diagramme (2.2.2.1) est cartésien il nous suffit de traiter le cas où $h = id$. Comme $\bar{f}^{-1}(S) = X$, les équations locales de $Z = Y \setminus X$ sont obtenues par image inverse par \bar{f} des équations locales de $T \setminus S$: la définition des tubes [B 3, (1.1.1)], [LS, chap 2] fournit alors l'égalité $]X[_{\mathcal{Y}} =]S[_{\mathcal{Y}} \cap]Y[_{\mathcal{Y}}$, d'où le carré cartésien de (2.2.2.1). \square

Proposition (2.2.3). *Sous les hypothèses de (2.2) on a :*

(2.2.3.1) *Supposons $\bar{h}^{-1}(T) = Y, \bar{f}^{-1}(S) = \bar{h}^{-1}(S) = X$ et \bar{h} est propre. Alors \bar{h}_K, \bar{h}_Y et \bar{h}_X sont propres. Si V est un voisinage strict de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans $]T[_{\mathcal{T}}$ et $W = \bar{h}_Y^{-1}(V)$, alors $h_V = \bar{h}_{Y|_W} : W \rightarrow V$ est propre.*

(2.2.3.2) *Supposons \bar{h} lisse sur un voisinage de X dans \mathcal{Y} . Alors*

(i) *\bar{h}_X est lisse et quel que soit V un voisinage strict de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans $]T[_{\mathcal{T}}$ il existe un voisinage strict W de $]X[_{\mathcal{Y}}$ dans $]Y[_{\mathcal{Y}}$ tel que \bar{h}_K induise un morphisme lisse $h_V : W \rightarrow V$. De plus $\Omega_{W/V}^i$ est un \mathcal{O}_W -module cohérent et localement libre.*

(ii) *Si l'on suppose aussi que $\bar{h}^{-1}(T) = Y$, et $\bar{h}^{-1}(S) = X$, alors il existe un voisinage strict V de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans $]T[_{\mathcal{T}}$ tel qu'en posant $W = \bar{h}_Y^{-1}(V)$ le morphisme \bar{h}_K induise un morphisme lisse $h_V : W \rightarrow V$.
Si de plus \bar{h} est propre, alors le morphisme propre h_V est ouvert pour la topologie rigide et $h_V(W)$ est un ouvert admissible de V et de \mathcal{T}_K .*

(iii) *Si en outre $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathrm{Spf} \mathcal{V}$ est lisse sur un voisinage de S dans \mathcal{T} , alors on peut prendre le V du (i) lisse sur K et ainsi $\Omega_{V/K}^1$ est localement libre de type fini sur le faisceau cohérent d'anneaux \mathcal{O}_V .*

(iv) *Supposons f surjectif, $\bar{h}^{-1}(T) = Y, \bar{h}^{-1}(S) = X$ et \bar{h} est propre. Pour V et W comme en (ii) posons $V' = h_V(W)$.
Si $(W_\lambda)_\lambda$ est un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_{\mathcal{Y}}$ dans $]Y[_{\mathcal{Y}}$ avec $W_\lambda \subset W$, alors $(h_V(W_\lambda))_\lambda$ est un système fondamental de voisinages stricts de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans V' .
De plus le morphisme h_V induit un morphisme propre lisse et surjectif*

$$h_{V'} : W \longrightarrow V' .$$

Démonstration.

Prouvons (2.2.3.1). Sous nos hypothèses les deux carrés de (2.2.2.1) sont cartésiens [cf (2.2.2.2)]. D'après Lütkebohmert [Lü, theo 3.1] le morphisme propre \bar{h} induit un morphisme propre d'espaces analytiques rigides $\bar{h}_K : \mathcal{Y}_K \rightarrow \mathcal{T}_K$. Comme la notion de morphisme propre est stable par changement de base en géométrie rigide [B-G-R, fin de 9.6.2, p 396], on en déduit que \bar{h}_Y, \bar{h}_X et h_V sont propres.

Pour (2.2.3.2).

- (i) L'ensemble W' des points de $]Y[_y$ où le morphisme \bar{h}_K est lisse est un voisinage strict de $]X[_y$ dans $]Y[_y$ [B 3, (2.2.1)], [LS, 3.3]. Si V est un voisinage strict quelconque de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans $]T[_{\mathcal{T}}$, $W = \bar{h}_Y^{-1}(V) \cap W'$ est un voisinage strict de $]X[_y$ dans $]Y[_y$ [B 3, (1.2.7) et (1.2.10)], [LS, 3.1] et \bar{h}_K induit donc un morphisme lisse $h_V : W \rightarrow V$; en particulier $\bar{h}_X :]X[_y \rightarrow]S[_{\mathcal{T}} \subset V$ est lisse.

La lissité de h_V prouve que $\Omega_{W/V}^i$ est un \mathcal{O}_W -module localement libre de type fini, et comme \mathcal{O}_W est un faisceau cohérent d'anneaux [prop (1.3)], il résulte de [EGA O_I , (5.4.1)] que $\Omega_{W/V}^i$ est un \mathcal{O}_W -module cohérent.

- (ii) Si V décrit un système fondamental de voisinages stricts de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans $]T[_{\mathcal{T}}$, alors $\bar{h}_Y^{-1}(V)$ décrit un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_y$ dans $]Y[_y$ [(2.2.2.2)] : ainsi la première assertion de (ii) résulte de (i).

Si de plus \bar{h} est propre alors le morphisme $h_V = \bar{h}_{Y|_W} : W \rightarrow V$ est propre et lisse; en particulier h_V est ouvert pour la topologie rigide : en effet on se ramène, comme dans la première étape de la preuve du théorème (1.2) (puisque h_V est propre), au cas des espaces quasi-compacts quasi-séparés et on applique alors [Bo-Lü 2, 5.11]. Donc $V' := h_V(W)$ est un ouvert admissible de V , donc de \mathcal{T}_K car V est un ouvert admissible de \mathcal{T}_K .

- (iii) Supposons en outre $g : \mathcal{T} \rightarrow Spf\mathcal{V}$ lisse sur un voisinage de S dans \mathcal{T} ; alors l'ensemble des points de $]T[_{\mathcal{T}}$ où g_K est lisse est un voisinage strict de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans $]T[_{\mathcal{T}}$ [B 3, (2.2.1)], [LS, 3.3] : quitte à restreindre le V du(i) [B 3, (1.2.10)], [LS, chap 3] on peut supposer que la restriction de g_K à V est lisse. Ainsi $\Omega_{V/K}^1$ sera un \mathcal{O}_V -module localement libre de type fini, donc cohérent sur \mathcal{O}_V [(1.3)]. D'où (iii).

- (iv) Puisque f est surjectif et \bar{h} plat au voisinage de X , le morphisme

$$\bar{h}_X :]X[_y \longrightarrow]S[_{\mathcal{T}}$$

induit par \bar{h} est surjectif [B 3, (1.1.12)] et lisse puisque c'est aussi la restriction de h_V . De plus $h_V(W)$ contient $]S[_{\mathcal{T}}$ par la surjectivité de \bar{h}_X . Dans le diagramme commutatif

$$(2.2.3.2.1) \quad \begin{array}{ccccc}]X[_y & \hookrightarrow & W = h_V^{-1}(V') = h_V^{-1}(V) & \xlongequal{\quad} & W \\ \bar{h}_X \downarrow & & \downarrow h_{V'} & & \downarrow h_V \\]S[_{\mathcal{T}} & \hookrightarrow & V' := h_V(W) & \hookrightarrow & V \end{array}$$

les carrés sont cartésiens d'après (2.2.2.2) et $h_{V'}$, \bar{h}_X sont lisses et surjectifs.

Soit W_λ un voisinage strict de $]X[_y$ dans $]Y[_y$ avec $W_\lambda \subset W$, où W est défini ci-dessus : le morphisme ouvert h_V [cf(ii)] envoie le recouvrement admissible $\{W_\lambda; W \setminus]X[_y\}$ de W sur le recouvrement admissible $\{h_V(W_\lambda); h_V(W \setminus]X[_y)\}$ de $V' = h_V(W)$. Par la surjectivité de $h_{V'}$ et le fait que $h_V^{-1}(]S[_\mathcal{T}) =]X[_y$ on a $h_V(W) \setminus]X[_y = V' \setminus]S[_\mathcal{T}$; par suite $\{h_V(W_\lambda); V' \setminus]S[_\mathcal{T}\}$ est un recouvrement admissible de V' , i.e. $h_V(W_\lambda)$ est un voisinage strict de $]S[_\mathcal{T}$ dans V' .

Supposons maintenant que $(W_\lambda)_\lambda$ décrive un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_y$ dans $]Y[_y$ avec $W_\lambda \subset W$. Soit V'' un voisinage strict de $]S[_\mathcal{T}$ dans V' : montrons que $h_{V'}^{-1}(V'')$ est un voisinage strict de $]X[_y$ dans W . D'abord $\{V''; V' \setminus]S[_\mathcal{T}\}$ est un recouvrement admissible de V' , donc par image inverse $\{h_{V'}^{-1}(V''); h_{V'}^{-1}(V' \setminus]S[_\mathcal{T})\}$ est un recouvrement admissible de $h_{V'}^{-1}(V') = W$; en utilisant encore l'égalité $h_{V'}^{-1}(]S[_\mathcal{T}) =]X[_y$ on en déduit que $h_{V'}^{-1}(V' \setminus]S[_\mathcal{T}) = W \setminus]X[_y$: donc $h_{V'}^{-1}(V'')$ est un voisinage strict de $]X[_y$ dans W . Ainsi il existe μ tel que $W_\mu \subset h_{V'}^{-1}(V'')$, d'où

$$h_{V'}(W_\mu) \subset h_{V'} h_{V'}^{-1}(V'') = V'';$$

par suite $(h_V(W_\lambda))_\lambda$ est bien un système fondamental de voisinages stricts de $]S[_\mathcal{T}$ dans V' .

Si de plus \bar{h} est propre alors $h_{V'}$ est de surcroît propre puisque (2.2.3.2.1) est à carrés cartésiens et h_V est propre. \square

2.3. Soient $S = \text{Spec } A_0$ un k -schéma lisse et $f : X = \text{Spec } B_0 \rightarrow S$ un k -morphisme fini. Désignons par $A = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$ une \mathcal{V} -algèbre lisse relevant A_0 , P la fermeture projective de $\text{Spec } A$ dans $\mathbb{P}_\mathcal{V}^n$, P' le normalisé de P et notons $\mathcal{S} = \text{Spf } \hat{A}$, $\tilde{\mathcal{S}} = \hat{P}$ et $\bar{\mathcal{S}} = \widehat{P'}$ les complétés formels de $\text{Spec } A$, P et P' comme dans le théorème [Et 5, théo (3.1.3)] : on sait [loc. cit.] que $\tilde{\mathcal{S}}$ et $\bar{\mathcal{S}}$ sont propres sur \mathcal{V} , que $\bar{\mathcal{S}}$ est normal, qu'il existe une A -algèbre finie

B et un carré cartésien de \mathcal{V} -schémas formels

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spf} \hat{B} = \mathcal{X} & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathcal{X}} = \widehat{P''_1} \\ h \downarrow & & \downarrow \bar{h} \\ \mathrm{Spf} \hat{A} = \mathcal{S} & \xrightarrow{j} & \overline{\mathcal{S}} = \widehat{P'} \end{array}$$

où P''_1 est la fermeture intégrale de P' dans $\mathrm{Spec} B$, avec h fini, \bar{h} fini et j une immersion ouverte. On note $\bar{f} : \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$ la réduction de $\bar{h} : \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \overline{\mathcal{S}}$ sur $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$.

Rappelons [Et 5, théo (3.1.3)] qu'il existe $a \in A$ et $f(t) \in A_a[t]$ tels que B est la fermeture intégrale de A dans $A_a[t]/(f)$. Fixons d'autre part une présentation de la \mathcal{V} -algèbre B

$$B \simeq \mathcal{V}[t'_1, \dots, t'_{n'}]/(g_1, \dots, g_s).$$

Soient $\overline{\mathcal{Y}}$ le complété formel de la fermeture projective P''_2 de $\mathrm{Spec} B$ dans $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^{n'}$ et \overline{Y} sa réduction sur k .

Comme P' est le normalisé de P on a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \overline{\mathcal{S}} := \widehat{P'} & \\ & \nearrow j & \downarrow v \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{\mathcal{S}} := \widehat{P} \end{array}$$

où v est fini et \tilde{j} une immersion ouverte. Un système fondamental de voisinages stricts de \mathcal{S}_K dans $\tilde{\mathcal{S}}_K$ est fourni par les intersections \tilde{V}_λ de $(\mathrm{Spec} A)_K^{an}$ avec les boules fermées $B(0, \lambda^+) \subset \mathbb{A}_K^n$ pour $\lambda \rightarrow 1^+$ et $\tilde{V}_\lambda = \mathrm{Spm} A_\lambda$, $A_K^\dagger = \varinjlim_\lambda A_\lambda$ [B 3, (2.5.1)], [LS, 5.1]. Puisque v est propre, et étale au voisinage de \mathcal{S} , il existe $\lambda_0 > 1$ tel que tout $\lambda, 1 < \lambda \leq \lambda_0$, v induise un isomorphisme entre \tilde{V}_λ et un voisinage strict V_λ de \mathcal{S}_K dans $\overline{\mathcal{S}}_K$ [B 3, (1.3.5)], [LS, chap 3] : on identifiera V_λ et \tilde{V}_λ dans la suite.

Notons P''_3 l'adhérence schématique de $\mathrm{Spec} B$ plongé diagonalement dans $P''_1 \times_{\mathcal{V}} P''_2$, $\overline{\mathcal{Z}} = \widehat{P''_3}$ le complété formel de P''_3 et \overline{Z} sa réduction mod \mathfrak{m} . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
& & \overline{Y} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{Y}} \\
& \nearrow & \uparrow v_2 & & \uparrow u_2 \\
X & \longrightarrow & \overline{Z} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{Z}} \\
& \searrow & \downarrow v_1 & & \downarrow u_1 \\
& & \overline{X} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{X}}
\end{array}$$

où les u_i, v_i sont propres et les u_i sont étales au voisinage de X . D'après [B 3, (1.3.5)], [LS, chap 3] u_{1K} induit un isomorphisme entre un voisinage strict de $]X[_{\overline{Z}}$ dans \overline{Z}_K et un voisinage strict de $]X[_{\overline{\mathcal{X}}} \simeq]X[_{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_K$ dans $\overline{\mathcal{X}}_K$ et par suite un isomorphisme entre des systèmes fondamentaux de tels voisinages stricts. De même u_{2K} induit un isomorphisme entre un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_{\overline{Z}}$ dans \overline{Z}_K et un système fondamental $(W'_{\lambda'})_{\lambda'}$ de voisinages stricts de \mathcal{X}_K dans $\overline{\mathcal{Y}}_K$. Par composition il en résulte pour $\lambda' \rightarrow 1^+$ un isomorphisme entre les $W'_{\lambda'}$ et un système fondamental de voisinages stricts $(W''_{\lambda''})$ de \mathcal{X}_K dans $\overline{\mathcal{X}}_K$ identifiés ci-après. Pour $\lambda > 1$, il existe donc $\lambda' > 1$ et des immersions ouvertes

$$\mathrm{Spm} \hat{B}_K = \mathcal{X}_K \hookrightarrow W'_{\lambda'} \xrightarrow{j'_{\lambda\lambda'}} \overline{h}_K^{-1}(V_\lambda) =: W_\lambda.$$

Proposition (2.3.1). *Avec les notations de 2.3 on a :*

- (1) *Si $(V_\lambda)_\lambda$ est un système fondamental de voisinages stricts de \mathcal{S}_K dans $\overline{\mathcal{S}}_K$, alors $(W_\lambda)_\lambda := (\overline{h}_K^{-1}(V_\lambda))_\lambda$ est un système fondamental de voisinages stricts de \mathcal{X}_K dans $\overline{\mathcal{X}}_K$.
Si $V_\lambda = \mathrm{Spm} A_\lambda$, alors $W_\lambda = \mathrm{Spm} B_\lambda$ où B_λ est la fermeture intégrale de A_λ dans \hat{B}_K , et B_λ est une A_λ -algèbre finie.*
- (2) *Supposons de plus f fini et plat (resp. fini et fidèlement plat, resp. fini étale, resp. fini étale galoisien de groupe G) et $V_\lambda = \mathrm{Spm} A_\lambda$. Alors il existe $\lambda_0 > 1$ tel que pour tout $\lambda, 1 < \lambda \leq \lambda_0$, et $W_\lambda := \overline{h}_K^{-1}(V_\lambda)$, le morphisme induit par \overline{h}_K*

$$h_\lambda := \overline{h}_{K|W_\lambda} : W_\lambda \longrightarrow V_\lambda$$

soit fini et plat (resp. fini et fidèlement plat, resp. fini étale, resp. fini étale galoisien de groupe G), avec V_λ lisse sur K et $\Omega_{V_\lambda/K}^1$ localement libre de type fini sur le faisceau cohérent d'anneaux \mathcal{O}_{V_λ} .

Démonstration. On utilise les notations du 2.3.

- (1) On a déjà prouvé la première assertion du (1) en (2.2.2.2) : prouvons la seconde assertion du (1). On peut supposer A, B, P' et P''_1 intégralement clos. Comme \bar{h}_K est fini, $W_\lambda = \bar{h}_K^{-1}(V_\lambda)$ est un affinoïde noté $\text{Spm } B_\lambda$ et B_λ est une A_λ -algèbre finie [B-GR, 9.4.4 cor 2]; on note $h_\lambda := \bar{h}_K|_{W_\lambda} : W_\lambda = \text{Spm } B_\lambda \rightarrow V_\lambda = \text{Spm } A_\lambda$. Puisque P''_1 est la fermeture intégrale de P' dans $\text{Spec } B$, il résulte de [EGA IV, 6.14.4] que B_λ est la fermeture intégrale de A_λ dans \hat{B}_K . D'où le (1).
- (2) Là encore on peut supposer A et B intégralement clos : on traitera à part le cas fini étale galoisien.

Notons $\varphi : A \rightarrow B$ le morphisme fini tel que $\text{Spec } \varphi : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ relève f [Et 5, théo (3.1.3)], et $\hat{\varphi} : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$ (resp. $\varphi^\dagger : A^\dagger \rightarrow B^\dagger$) le morphisme induit sur les séparés complétés (resp. sur les complétés faibles). D'après [loc. cit.], φ^\dagger et $\hat{\varphi}$ sont finis et plats (resp. finis et fidèlement plats, resp. finis étales) si et seulement si f l'est. Avec les notations du (2.3) on a :

$$A_K^\dagger = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \lambda \rightarrow 1}} A_\lambda, B_K^\dagger = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \lambda \rightarrow 1}} B_\lambda \text{ et } \varphi_K^\dagger : A_K^\dagger \rightarrow B_K^\dagger$$

est la limite inductive des $\varphi_\lambda : A_\lambda \rightarrow B_\lambda$ [EGA IV, (8.5.2.1)] avec

$$h_\lambda = \text{Spm } (\varphi_\lambda) : W_\lambda = \text{Spm } B_\lambda \rightarrow V_\lambda = \text{Spm } A_\lambda.$$

Si f est fini et plat (resp. ...) alors φ_K^\dagger l'est et pour λ assez proche de 1, φ_λ l'est aussi par [EGA IV, 11.2.6, 8.10.5, 17.7.8], de même pour h_λ . D'où le (2) hormis la cas galoisien.

Considérons à présent le cas galoisien.

Puisque f est galoisien il est surjectif; ainsi

$$h : \mathcal{X} = \text{Spf } \hat{B} \rightarrow \mathcal{S} = \text{Spf } \hat{A}$$

est fini étale surjectif et galoisien de groupe G , d'où en particulier une injection : $\hat{A} \hookrightarrow \hat{B}$. Par suite $h_K : \mathcal{X}_K \rightarrow \mathcal{S}_K$ est fini étale surjectif et galoisien de groupe G .

Remarquons ensuite que puisque B est la fermeture intégrale de A dans $A_a[t]/(f)$ et que $\text{Spec } A^\dagger \rightarrow \text{Spec } A$ est un morphisme normal [Et 5, prop (1.1)], il résulte de [EGA IV, (6.14.4)] que $B^\dagger = B \otimes_A A^\dagger$ est la fermeture intégrale de A^\dagger dans $(B^\dagger)_a = (A^\dagger)_a [t]/(f)$: par suite B_K^\dagger est la fermeture intégrale de A_K^\dagger dans $(A^\dagger)_{a,K} [t]/(f)$. L'anneau A^\dagger est réduit par [Et 5, prop (1.7)], car A est réduit, et $A^\dagger \rightarrow B^\dagger$ est fini étale car $\hat{A} \rightarrow \hat{B}$ l'est : donc B^\dagger est réduit car A^\dagger est réduit [Et 5, lemme (1.6)]. Ainsi B^\dagger est intégralement fermé dans \hat{B} [Et 5, théo (2.2)(2)ii] ; d'où B_K^\dagger est la fermeture intégrale de A_K^\dagger dans \hat{B}_K .

On a vu ci-dessus que, pour λ suffisamment proche de 1,

$$h_\lambda : W_\lambda = \text{Spm } B_\lambda \rightarrow V_\lambda = \text{Spm } A_\lambda$$

est fini étale. Compte tenu du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{B}_K & \longleftarrow & B_\lambda \\ \uparrow & & \uparrow \\ \hat{A}_K & \longleftarrow & A_K^\dagger \longleftarrow A_\lambda \end{array}$$

la flèche $A_\lambda \rightarrow B_\lambda$ induite par h_λ est injective, donc h_λ est surjectif. Choisissons un ensemble fini $\{x_i\}$ de générateurs de B_λ sur A_λ . Comme chaque x_i est entier sur A_λ , les éléments $g_{\hat{B}_K}(x_i) \in \hat{B}_K$, pour g décrivant G et $g_{\hat{B}_K} : \hat{B}_K \rightarrow \hat{B}_K$ induit par g , sont aussi entiers sur $A_\lambda \subset A_K^\dagger$, donc a fortiori sur $A_K^\dagger = \lim_{\rightarrow \mu} A_\mu$. Or on a vu que B_K^\dagger est la fermeture

intégrale de A_K^\dagger dans \hat{B}_K et que B_K^\dagger est intégralement fermé dans \hat{B}_K : il existe donc λ' , $1 < \lambda' \leq \lambda$ tel que pour tout i et tout $g \in G$ on ait $g_{\hat{B}_K}(x_i) \in B_{\lambda'}$. Ainsi l'action de G s'étend de \mathcal{X}_K à $W_{\lambda'} = \text{Spm } B_{\lambda'}$: en effet $g \in G$ définit un morphisme $g_{\lambda\lambda'} : W_{\lambda'} \rightarrow W_\lambda$ s'insérant dans le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccccc} W_{\lambda'} & & & & \\ & \searrow^{g_{\lambda\lambda'}} & & & \\ & & W_{\lambda'} & \xrightarrow{\quad} & W_\lambda \\ & \searrow^{g_{\lambda'}} & \downarrow h_{\lambda'} & & \downarrow h_\lambda \\ & & V_{\lambda'} & \xrightarrow{\alpha_{\lambda\lambda'}} & V_\lambda ; \end{array}$$

d'où la factorisation de $g_{\lambda\lambda'}$ par $W_{\lambda'}$.

Montrons que le morphisme fini étale surjectif

$$h_{\lambda'} : W_{\lambda'} \rightarrow V_{\lambda'}$$

est galoisien de groupe G . On a

$$(B_{\lambda'})^G \subset (\hat{B}_K)^G = \hat{A}_K;$$

d'où

$$A_{\lambda'} \subset (B_{\lambda'})^G \subset B_{\lambda'} \cap \hat{A}_K$$

et on dispose d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_{\lambda'} & \hookrightarrow & \hat{A}_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{\lambda'} & \hookrightarrow & \hat{B}_K \end{array}$$

avec $A_{\lambda'} \rightarrow B_{\lambda'}$ fidèlement plat et $\hat{B}_K = \hat{A}_K \otimes_{A_{\lambda'}} B_{\lambda'}$: d'après [Et 2, prop 2] on en déduit

$$A_{\lambda'} = B_{\lambda'} \cap \hat{A}_K = (B_{\lambda'})^G,$$

d'où la proposition (2.3.1). \square

3. Images directes d'isocristaux

3.1 Sections surconvergentes

On suppose donné un diagramme commutatif tel que (2.2.1). Pour un voisinage strict W (resp. un couple de voisinages stricts $W' \subset W$) de $]X[_y$ dans $]Y[_y$ on note α_W (resp. $\alpha_{WW'}$) l'immersion ouverte de W dans $]Y[_y$ (resp. de W' dans W). Si \mathcal{A} est un faisceau d'anneaux sur W et E un \mathcal{A} -module, on pose [B 3,(2.1.1.1)], [LS, chap 5] :

$$(3.1.1) \quad j_W^\dagger E := \varinjlim_{W' \subset W} \alpha_{WW'^*} \alpha_{WW'}^* E,$$

la limite étant prise sur les voisinages $W' \subset W$.

De même [B 3,(2.1.1.3)], [LS, chap 5] :

$$(3.1.2) \quad j_Y^\dagger E := \alpha_{W^*} j_W^\dagger E .$$

(3.1.3) Si V est un voisinage strict de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans $]T[_{\mathcal{T}}$, alors $W = \bar{h}_K^{-1}(V) \cap]Y[_y = \bar{h}_Y^{-1}(V)$ est un voisinage strict de $]X[_y$ dans $]Y[_y$ [B 3, (1.2.7)], [LS, chap 3] et on note h_V la restriction de \bar{h}_Y à W , et $R^i \bar{h}_K^* j_Y^\dagger E := R^i \bar{h}_Y^* j_Y^\dagger E$.

Proposition (3.1.4). *Avec les hypothèses et notations de (3.1.3) supposons que $\bar{h}_Y :]Y[_y \rightarrow]T[_{\mathcal{T}}$ soit quasi-compact et quasi-séparé; soit E un faisceau abélien sur W .*

(a) *Supposons que $\bar{h}^{-1}(T) = Y$ et $\bar{h}^{-1}(S) = X$; alors, pour tout entier $i \geq 0$, on a des isomorphismes canoniques*

$$(3.1.4.1) \quad R^i h_{V^*} (j_W^\dagger E) \xrightarrow{\sim} j_V^\dagger R^i h_{V^*} (E).$$

$$(3.1.4.2) \quad R^i \bar{h}_K^* (j_Y^\dagger E) \xrightarrow{\sim} j_T^\dagger R^i h_{V^*} (E).$$

Si de plus \bar{h} est une immersion fermée, alors

$$(3.1.4.3) \quad R^i h_{V^*} (j_W^\dagger E) = 0 \text{ pour } i \geq 1$$

et le morphisme canonique

$$(3.1.4.4) \quad \bar{h}_K^* \bar{h}_K^* j_Y^\dagger E \xrightarrow{\sim} j_Y^\dagger E$$

est un isomorphisme.

(b) *Si l'on ne suppose plus que $\bar{h}^{-1}(T) = Y$ et $\bar{h}^{-1}(S) = X$, alors, pour tout entier $i \geq 0$, on a des isomorphismes canoniques*

$$(3.1.4.5) \quad R^i h_{V^*} (j_W^\dagger E) \xrightarrow{\sim} j_V^\dagger R^i h_{V^*} (j_W^\dagger E).$$

$$(3.1.4.6) \quad R^i \bar{h}_K^* (j_Y^\dagger E) \xrightarrow{\sim} j_T^\dagger R^i h_{V^*} (j_W^\dagger E).$$

Démonstration

(a) Les deux foncteurs

$$\mathcal{F} : E \longmapsto h_{V^*} j_W^\dagger E$$

et

$$\mathcal{G} : E \longmapsto j_V^\dagger h_{V^*} E$$

de la catégorie \mathcal{C} des faisceaux abéliens sur W dans la catégorie des faisceaux abéliens sur V sont exacts à gauche [B 3, (2.1.3)(iii)], [LS,

5.3]. Comme la catégorie abélienne \mathcal{C} admet suffisamment d'injectifs, les foncteurs dérivés droits $R^i\mathcal{F}$ et $R^i\mathcal{G}$ existent et $(R^i\mathcal{F})_i$, $(R^i\mathcal{G})_i$ sont des δ -foncteurs universels : puisque j_W^\dagger et j_V^\dagger sont exacts [loc. cit.], et que $\alpha_W : W \hookrightarrow]Y[_y$ (resp. $\alpha_V : V \hookrightarrow]T[_\mathcal{T}$) est exact sur la catégorie des $j_W^\dagger\mathbb{Z}$ -modules (resp. des $j_V^\dagger\mathbb{Z}$ -modules) [B 3, dém. de (2.1.3)], on est ramené pour le (a) à prouver que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Comme \bar{h}_Y est quasi-compact et quasi-séparé, il en est de même par changement de base pour h_V , donc h_{V^*} commute aux limites inductives filtrantes : de plus les hypothèses entraînent que si V' décrit un système fondamental de voisinages stricts de $]S[_\mathcal{T}$ dans $]T[_\mathcal{T}$, alors $h_V^{-1}(V') = W'$ décrit un système fondamental de voisinages stricts de $]X[_y$ dans $]Y[_y$ [(2.2.2.2)]; d'où

$$\begin{aligned} h_{V^*}(j_W^\dagger E) &= \varinjlim_{w' \subset w} h_{V^*} \alpha_{WW'} \alpha_{WW'}^{-1} E \\ &= \varinjlim_{v' \subset v} \alpha_{VV'} h_{V'^*} \alpha_{WW'}^{-1} E \\ &= \varinjlim_{v' \subset v} \alpha_{VV'} \alpha_{V'}^{-1} h_{V^*} E \\ &= j_V^\dagger h_{V^*}(E), \end{aligned}$$

ce qui prouve (3.1.4.1) et (3.1.4.2).

Si \bar{h} est une immersion fermée, alors \bar{h}_K en est une aussi [B 3, (0.2.4)(iv)], ou [Bo-Lü 1, §4] et [B-G-R, 9.5.3 prop 2 et 7.1.4 def 3], de même que h_V par changement de base : en particulier h_V est quasi-compact et quasi-séparé. Ainsi (3.1.4.3) résulte de (3.1.4.1) et (1.3.3). Pour (3.1.4.4) on utilise la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} \bar{h}_K^* \bar{h}_K^* j_Y^\dagger E &\xrightarrow{\sim} \bar{h}_K^* j_T^\dagger h_{V^*} E && (3.1.4.2) \\ &\xleftarrow{\sim} j_Y^\dagger h_V^* h_{V^*}(E) && [\text{B 3, (2.1.4.8)}, [\text{LS, 5.3}]] \\ &\xrightarrow{\sim} j_Y^\dagger(E) && (1.3.3). \end{aligned}$$

- (b) L'ouvert $W = \bar{h}_Y^{-1}(V)$ est un voisinage strict de $]X_1[_y$ (donc de $]X[_y$) dans $]Y[_y$; la définition de $j_W^\dagger(E)$ fait intervenir une limite inductive sur les voisinages stricts W' de $]X[_y$ dans $]Y[_y$: si cette fois la limite inductive est prise sur les voisinages stricts W'_1 de $]X_1[_y$ dans $]Y[_y$ nous noterons $j_{W_1}^\dagger(E)$ le résultat, et on a [B 3, (2.1.7)], [LS, chap 5]

$$j_W^\dagger(E) = j_W^\dagger \circ j_{W_1}^\dagger(E) = j_{W_1}^\dagger \circ j_W^\dagger(E).$$

D'où, en appliquant (3.1.4.1) :

$$\begin{aligned} R^i h_{V^*}(j_W^\dagger E) &= R^i h_{V^*} j_{W_1}^\dagger(j_W^\dagger E) \\ &= j_V^\dagger R^i h_{V^*}(j_W^\dagger E); \end{aligned}$$

de même pour (3.1.4.6). \square

3.2 Définition des images directes

(3.2.1) On suppose fixé un diagramme commutatif tel que (2.2.1) et on fait l'hypothèse supplémentaire que \bar{h} (resp ρ) est lisse sur un voisinage de X dans \mathcal{Y} (resp de S dans \mathcal{T})

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j_Y} & Y & \xrightarrow{i_Y} & \mathcal{Y} \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{h} \\ S & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} \xrightarrow{\rho} \mathcal{W}. \end{array}$$

Soient $E \in Isoc^\dagger((X, Y)/\mathcal{W})$, W un voisinage strict de $]X[_{\mathcal{Y}}$ dans $]Y[_{\mathcal{Y}}$ et E_W un \mathcal{O}_W -module cohérent muni d'une connexion intégrable tel que $j_Y^\dagger E_W =: E_{\mathcal{Y}}$ soit une réalisation de E [B 3, (2.3.2)], [LS, 7.1]. Lorsque Y est propre sur \mathcal{W} on notera $Isoc^\dagger((X, Y)/\mathcal{W}) = Isoc^\dagger(X/\mathcal{W})$ [B 3, (2.3.6)] : si de plus $\mathcal{W} = Spf \mathcal{V}$ on notera $Isoc^\dagger(X/Spf \mathcal{V}) =: Isoc^\dagger(X/K)$.

Pour $E \in Isoc^\dagger((X, Y)/\mathcal{W})$ Berthelot a défini dans [B 5, (3.1.11)] les images directes en cohomologie rigide (cf. aussi [LS, (7.4)] et [C-T, 10]) par la formule

$$\begin{aligned} (3.2.1.1) \quad \mathbb{R}\bar{f}_{rig^*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) &:= \mathbb{R}\bar{h}_{K^*}(j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{]Y[_{\mathcal{Y}}}} \Omega_{]Y[_{\mathcal{Y}}/\mathcal{T}_K}^\bullet), \\ &:= \mathbb{R}\bar{h}_{Y^*}(j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{]Y[_{\mathcal{Y}}}} \Omega_{]Y[_{\mathcal{Y}}/\mathcal{T}[\mathcal{T}]}^\bullet); \end{aligned}$$

et la cohomologie de ces complexes est indépendante du \mathcal{Y} choisi [B 5, (3.1.2)], [LS, 7.4.2].

Lorsque $X = Y$, alors $\bar{f} : X \rightarrow T$ et on obtient la cohomologie convergente :

$$(3.2.1.2) \quad \mathbb{R}\bar{f}_{conv^*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) := \mathbb{R}\bar{f}_{rig^*}((X, X)/\mathcal{T}; E).$$

(3.2.2) Sous les hypothèses (3.2.1) supposons de plus \bar{h} propre : ainsi Y est une compactification $\bar{X} = Y$ de X au-dessus de \mathcal{T} . Berthelot définit alors $\mathbb{R}f_{rig^*}(X/\mathcal{T}; E)$ par la formule [B 5, (3.2.3)] (cf. aussi [LS, 8.2])

$$(3.2.2.1) \quad \mathbb{R}f_{rig^*}(X/\mathcal{T}; E) := \mathbb{R}\bar{f}_{rig^*}((X, \bar{X})/\mathcal{T}; E);$$

et la cohomologie de ce complexe est indépendante du \bar{X} choisi [B 5,(3.2.2)] [LS, 8.2.1] [C-T, 10.5.3].

3.3 Changement de base

(3.3.1) Avec les notations de (2.2) on considère un parallélépipède commutatif

(3.3.1.1)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X & \xrightarrow{j_Y} & Y & \xrightarrow{i_Y} & \mathcal{Y} \\
 & \nearrow \varphi' & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{h} \\
 X' & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y' & \xrightarrow{i_{Y'}} & \mathcal{Y}' & & \\
 \downarrow f' & & \downarrow \bar{f}' & & \downarrow \bar{h}' & & \\
 S & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W} \\
 \nearrow \varphi & & \nearrow \bar{\varphi} & & \nearrow \bar{g} & & \nearrow \theta \\
 S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T'}} & \mathcal{T}' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}'
 \end{array}$$

dans lequel le cube de gauche est formé de k -schémas séparés de type fini, les morphismes $\bar{g}, \bar{h}, \bar{g}', \bar{h}', \rho, \rho', \theta$ sont des morphismes de \mathcal{V} -schémas formels (\mathcal{V} -schémas formels que l'on supposera séparés, plats et de type fini), les j (resp. les i) sont des immersions ouvertes (resp. fermées). On suppose θ lisse et $X' = X \times_S S'$, $Y' = Y \times_T T'$, et $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{T}} \mathcal{T}'$.

On vérifie alors facilement que l'on a

$$(3.3.1.2) \quad]X'[_{\mathcal{Y}'} =]X[_{\mathcal{Y}} \times_{]S[_{\mathcal{T}}}]S'[_{\mathcal{T}'}, \quad]Y'[_{\mathcal{Y}'} =]Y[_{\mathcal{Y}} \times_{]T[_{\mathcal{T}}}]T'[_{\mathcal{T}'}$$

Soient V un voisinage strict de $]S[_{\mathcal{T}}$ dans $]T[_{\mathcal{T}}$ et V' un voisinage strict de $]S'[_{\mathcal{T}'}$ dans $]T'[_{\mathcal{T}'}$ tel que $V' \subset \bar{g}_K^{-1}(V) \cap]T'[_{\mathcal{T}'}$; alors $W := \bar{h}_K^{-1}(V) \cap]Y[_{\mathcal{Y}}$ est un voisinage strict de $]X[_{\mathcal{Y}}$ dans $]Y[_{\mathcal{Y}}$ et $W' := \bar{h}'_K^{-1}(V') \cap]Y'[_{\mathcal{Y}'}$ est un voisinage strict de $]X'[_{\mathcal{Y}'}$ dans $]Y'[_{\mathcal{Y}'}$ tel que $W' \subset \bar{g}'_K^{-1}(W) \cap]Y'[_{\mathcal{Y}'}$.

Notons

$$h_V : W \rightarrow V, \quad g_V : V' \rightarrow V, \quad h'_{V'} : W' \rightarrow V', \quad \text{et} \quad g'_{W'} : W' \rightarrow W$$

les morphismes induits respectivement par \bar{h}_K , \bar{g}_K , \bar{h}'_K , et \bar{g}'_K .
Ainsi on dispose d'un cube commutatif

$$(3.3.1.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & W & \hookrightarrow & \mathcal{Y}_K \\ & & \uparrow g'_W & & \uparrow \bar{g}'_K \\ W' & \hookrightarrow & \mathcal{Y}'_K & & \mathcal{Y}_K \\ \downarrow h'_{V'} & & \downarrow & & \downarrow \bar{h}_K \\ & & V & \hookrightarrow & \mathcal{T}_K \\ & & \uparrow g_V & & \uparrow \bar{g}_K \\ V' & \hookrightarrow & \mathcal{T}'_K & & \mathcal{T}_K \end{array}$$

dans lequel $W' = W \times_V V'$ et $\mathcal{Y}'_K = \mathcal{Y}_K \times_{\mathcal{T}_K} \mathcal{T}'_K$.

Lemme (3.3.1.4). *Avec les hypothèses et notations de (3.3.1) supposons de plus que \bar{g} soit plat (resp. que \bar{g} soit lisse sur un voisinage de S' dans \mathcal{T}'). Alors il existe un voisinage strict V' de $]S'[_{\mathcal{T}'}$ dans $]T'[_{\mathcal{T}'}$ tel que g_V soit plat (resp. que g_V soit lisse).*

Démonstration. Dans le cas plat c'est clair puisque \bar{g}_K est plat ; dans le cas lisse, c'est [B 3, (2.2.1)], [LS, chap 3]. \square

Définition (3.3.1.5) *Soit \mathcal{E} un $j_T^\dagger \mathcal{O}_V$ -module ; son image inverse surconvergente est définie par la formule*

$$(\varphi, \bar{\varphi}, \bar{g})^\dagger(\mathcal{E}) := j_{T'}^\dagger(\bar{g}_K^* \mathcal{E});$$

lorsque \mathcal{E} est une réalisation d'un isocristal $E \in \text{Isoc}^\dagger((S, T)/\mathcal{W})$ on écrira aussi

$$(\varphi, \bar{\varphi})^*(\mathcal{E}) = (\varphi, \bar{\varphi}, \bar{g})^\dagger(\mathcal{E}) = j_{T'}^\dagger(\bar{g}_K^* \mathcal{E}).$$

Théorème (3.3.2) *Sous les hypothèses (3.3.1) supposons que $\bar{h}^{-1}(T) = Y, \bar{h}^{-1}(S) = X$ et h_V propre (cette dernière hypothèse est vérifiée si \bar{h} est propre).*

(3.3.2.1) *Soit E_W un \mathcal{O}_W -module cohérent. Alors, pour tout entier $i \geq 0$, on a :*

- (1) *$R^i \bar{h}_{K*}(j_Y^\dagger E_W)$ est un $j_T^\dagger \mathcal{O}_{]T[_{\mathcal{T}'}$ -module cohérent et on a un isomorphisme*

$$R^i \bar{h}_{K*}(j_Y^\dagger E_W) \xrightarrow{\sim} j_T^\dagger R^i h_{V*}(E_W).$$

(2) *Supposons de plus g_V plat; alors*

(i) *On a des isomorphismes de changement de base au sens sur-convergent*

$$\begin{aligned} (\varphi, \overline{\varphi}, \overline{g})^\dagger (R^i \overline{h}_{K^*} j_Y^\dagger E_W) &\simeq R^i \overline{h}'_{K^*} (\overline{g}'_{K^*} j_Y^\dagger E_W) \\ &\simeq R^i \overline{h}'_{K^*} (j_{Y'}^\dagger g_W'^* E_W) \\ &\simeq j_{T'}^\dagger R^i h_{V'^*}' (g_W'^* E_W). \end{aligned}$$

(ii) *Si de plus $\overline{\varphi}^{-1}(S) = S'$, les isomorphismes précédents deviennent*

$$\begin{aligned} \overline{g}_K^* R^i \overline{h}_{K^*} j_Y^\dagger E_W &\simeq R^i \overline{h}'_{K^*} (j_{Y'}^\dagger g_W'^* E_W) \\ &\simeq j_{T'}^\dagger R^i h_{V'^*}' (g_W'^* E_W), \end{aligned}$$

et l'on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \overline{g}_V^* R^i h_{V^*} j_W^\dagger E_W &\simeq R^i h_{V'^*}' (g_W'^* j_W^\dagger E_W) \\ &\simeq R^i h_{V'^*}' j_{W'}^\dagger g_W'^* E_W. \end{aligned}$$

(3.3.2.2) *Soient E_W^\bullet un complexe borné de \mathcal{O}_W -module cohérents et*

$$E_{W'}^\bullet = E_W^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{O}_{V'} = g_W'^* E_W^\bullet.$$

Alors, pour tout entier $i \geq 0$, on a :

(1) *$R^i \overline{h}_{K^*} (j_Y^\dagger E_W^\bullet)$ est un $j_{T'}^\dagger \mathcal{O}_{|T|_{T'}}$ -module cohérent et on a un isomorphisme*

$$R^i \overline{h}_{K^*} (j_Y^\dagger E_W^\bullet) \xrightarrow{\sim} j_{T'}^\dagger R^i h_{V'^*}' E_{W'}^\bullet.$$

(2) *Supposons de plus g_V plat; alors*

(i) *On a des isomorphismes de changement de base au sens sur-convergent*

$$\begin{aligned} (\varphi, \overline{\varphi}, \overline{g})^\dagger (R^i \overline{h}_{K^*} j_Y^\dagger E_W^\bullet) &\simeq R^i \overline{h}'_{K^*} (j_{Y'}^\dagger g_W'^* E_W^\bullet) \\ &\simeq j_{T'}^\dagger R^i h_{V'^*}' (E_{W'}^\bullet). \end{aligned}$$

(ii) *Si de plus $\overline{\varphi}^{-1}(S) = S'$, les isomorphismes précédents deviennent*

$$\begin{aligned} \overline{g}_K^* R^i \overline{h}_{K^*} j_Y^\dagger E_W^\bullet &\simeq R^i \overline{h}'_{K^*} (j_{Y'}^\dagger E_{W'}^\bullet) \\ &\simeq j_{T'}^\dagger R^i h_{V'^*}' (E_{W'}^\bullet), \end{aligned}$$

et l'on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \overline{g}_V^* R^i h_{V^*} j_W^\dagger E_W^\bullet &\simeq R^i h_{V'^*}' g_W'^* j_W^\dagger E_W^\bullet \\ &\simeq R^i h_{V'^*}' j_{W'}^\dagger g_W'^* E_W^\bullet. \end{aligned}$$

Démonstration

Le (1) de (3.3.2.1) résulte de (3.1.4.2) et (1.2.1).

Pour le (i) de (3.3.2.1)(2) on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{j_T} & T \\
 \varphi_1 \uparrow & \square & \uparrow \bar{\varphi} \\
 S'_1 & \xrightarrow{j_{1T'}} & T' \\
 j \uparrow & & \parallel \\
 S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T'
 \end{array}$$

dans lequel le carré du haut est cartésien et $\varphi = \varphi_1 \circ j$. On a alors une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned}
 (\varphi, \bar{\varphi}, \bar{g})^\dagger(R^i \bar{h}_{K^*} j_Y^\dagger E_W) &\simeq j_{T'}^\dagger \bar{g}_K^* R^i \bar{h}_{K^*} j_Y^\dagger E_W && [(3.3.1.5)] \\
 &\xrightarrow{\sim} j_{T'}^\dagger j_{1T'}^\dagger g_V^* R^i h_{V^*} E_W && [\text{B 3, (2.1.4.8)}, [\text{LS, (5.3)}]] \\
 &\xrightarrow{\sim} j_{T'}^\dagger g_V^* R^i h_{V^*} E_W && [\text{B 3, (2.1.7)}, [\text{LS, (5.1)}]] \\
 &\xrightarrow{\sim} j_{T'}^\dagger R^i h'_{V'^*} g_W'^* E_W && [(1.2.1)(2)] \\
 &\xleftarrow{\sim} R^i \bar{h}'_{K^*} j_{Y'}^\dagger g_W'^* E_W && [(3.1.4.2)] \\
 &\xleftarrow{\sim} R^i \bar{h}_{K^*} \bar{g}'_K j_Y^\dagger E_W && [\text{B 3, (2.1.4.8)}, [\text{LS, (5.3)}]].
 \end{aligned}$$

Pour le (ii) de (3.3.2.1)(2) il suffit de remarquer que les hypothèses impliquent que $(\varphi, \bar{\varphi}, \bar{g})^\dagger(\mathcal{E}) = \bar{g}_K^*(\mathcal{E})$ pour tout faisceau abélien \mathcal{E} sur \mathcal{T}_K ; la dernière assertion résulte de (3.1.4.1), [B 3, (2.1.4.7)] ou [LS, 5.3] et (1.2.1) comme ci-dessus.

Pour (3.3.2.2) on procède de même en utilisant cette fois le (1.2.2) du théorème (1.2). \square

Remarque (3.3.3) En fait, dans le (3.3.2.1) (2) (ii) du théorème précédent, si l'on ne suppose plus l'existence de \bar{g} , mais que l'on suppose toujours l'existence du carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 W' & \xrightarrow{g'_W} & W \\
 h'_{V'} \downarrow & & \downarrow h_V \\
 V' & \xrightarrow{g_V} & V,
 \end{array}$$

on obtient, pour tout \mathcal{O}_W -module cohérent E_W , un isomorphisme de changement de base

$$(3.3.3.1) \quad g_V^* R^i h_{V^*} j_W^\dagger E_W \xrightarrow{\sim} R^i h'_{V'^*} g_W'^* j_W^\dagger E_W \\
 \xrightarrow{\sim} R^i h'_{V'^*} j_{W'}^\dagger g_W'^* E_W.$$

De même, pour le (3.3.2.2)(2)(ii) du théorème, on a un isomorphisme

$$(3.3.3.2) \quad g_V^* R^i h_{V^*} j_W^\dagger(E_W^\bullet) \xrightarrow{\sim} R^i h_{V'^*} j_{W'}^\dagger(E_{W'}^\bullet).$$

3.4 Surconvergence des images directes.

Nous allons considérer dans le prochain théorème l'une des trois situations suivantes.

(3.4.1) Dans le premier cas, nous considérons un diagramme commutatif satisfaisant aux hypothèses de (2.2)

$$(3.4.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j_Y} & Y & \xrightarrow{i_Y} & \mathcal{Y} \\ f \downarrow & \square & \downarrow \bar{f} & \square & \downarrow \bar{h} \\ S & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} \xrightarrow{\rho} \mathcal{W}, \end{array}$$

et un diagramme commutatif

$$(3.4.1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} S & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W} \\ \varphi \uparrow & & \bar{\varphi} \uparrow & & \bar{g} \uparrow & & \uparrow \theta \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T'}} & \mathcal{T}' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \end{array}$$

tel qu'en prenant l'image inverse de (3.4.1.1) par (3.4.1.2) on obtienne un parallélépipède commutatif tel que (3.3.1.1). On suppose de plus les carrés de (3.4.1.1) cartésiens ($\bar{h}^{-1}(T) = Y$, $\bar{h}^{-1}(S) = X$), \bar{h} propre, \bar{h} lisse sur un voisinage de X dans \mathcal{Y} , θ lisse, ρ (resp ρ') lisse sur un voisinage de S dans \mathcal{T} (resp de S' dans \mathcal{T}'). On suppose également satisfaite l'une des deux hypothèses suivantes : \bar{g} est lisse sur un voisinage de S' dans \mathcal{T}' , ou \bar{g} est plat.

(3.4.2) Dans le deuxième cas, nous considérons un diagramme commutatif tel que (3.4.1.1) et un diagramme commutatif

$$(3.4.2.1) \quad \begin{array}{ccccccc} S & \xrightarrow{j_T} & T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W} \\ \varphi \uparrow & & \bar{\varphi} \uparrow & & \uparrow \theta & & \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T'}} & \mathcal{T}' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \end{array}$$

satisfaisant aux mêmes propriétés que (3.4.1.2) excepté l'existence de \bar{g} , mais en supposant ρ propre, et nous noterons

$$X' = X \times_S S' \xrightarrow{j_{Y'}} Y' = Y \times_T T'$$

et

$$(3.4.2.2) \quad \begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{j_Y} & Y \\ & \nearrow \varphi' & \downarrow f & & \searrow \bar{\varphi}' \\ X' & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y' & & \\ \downarrow f' & & \downarrow \bar{f}' & & \downarrow \bar{f} \\ & \nearrow \varphi & S & \xrightarrow{j_T} & T \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & & \searrow \bar{\varphi} \end{array}$$

l'image inverse par $(\varphi, \bar{\varphi})$ de (3.4.1.1).

(3.4.3) Dans le troisième cas, qui généralise le premier, nous considérons des diagrammes commutatifs tels que (3.4.1.1) et (3.4.2.1) mais sans supposer ρ propre. Par contre nous supposons de plus l'existence d'un diagramme commutatif

$$(3.4.3.1) \quad \begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y' & \xrightarrow{i_{Y'}} & \mathcal{Y}' & & \\ \downarrow f' & \square & \downarrow \bar{f}' & \square & \downarrow \bar{h}' & & \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T'}} & \mathcal{T}' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \end{array}$$

satisfaisant aux mêmes hypothèses que (3.4.1.1), et dans lequel X', Y' satisfont aux propriétés de (3.4.2.2).

Dans le cas relevable le théorème suivant résout une conjecture de Berthelot [B 2, (4.3)] et généralise le théorème 5 de loc. cit.

Théorème (3.4.4) *Pour tout entier $i \geq 0$, on a :*

(3.4.4.1) *Sous les hypothèses (3.4.3), on a :*

(i) \bar{f} induit un foncteur

$$R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; -) : Isoc^\dagger((X, Y)/\mathcal{W}) \longrightarrow Isoc^\dagger((S, T)/\mathcal{W}).$$

(ii) il existe un morphisme de changement de base

$$(\varphi, \overline{\varphi})^* R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) \longrightarrow R^i \overline{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \overline{\varphi}')^*(E))$$

et celui-ci est un isomorphisme dans $Isoc^\dagger((S', T')/\mathcal{W}')$.

(3.4.4.2) Sous les hypothèses (3.4.2) on a :

(i) f induit un foncteur

$$R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; -) : Isoc^\dagger(X/\mathcal{W}) \longrightarrow Isoc^\dagger(S/\mathcal{W}).$$

(ii) L'isomorphisme de changement de base de (3.4.4.1)(ii) existe et devient

$$(\varphi, \overline{\varphi})^* R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; E) \xrightarrow{\sim} R^i \overline{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \overline{\varphi}')^*(E)).$$

(iii) Si de plus ρ' est propre, alors l'isomorphisme de (ii) précédent devient un isomorphisme dans $Isoc^\dagger(S'/\mathcal{W}')$:

$$\varphi^* R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; E) \xrightarrow{\sim} R^i f'_{rig*}(X'/\mathcal{T}'; \varphi'^*(E)).$$

(iv) Si $S' = T'$, l'isomorphisme du (ii) précédent devient un isomorphisme dans $Isoc(S'/\mathcal{W}')$:

$$\varphi^* j_T^* R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; E) \xrightarrow{\sim} R^i f'_{conv*}(X'/\mathcal{T}'; \varphi'^*(\hat{E}))$$

où $\hat{E} \in Isoc(X/\mathcal{W})$ est l'isocrystal convergent associé à $E \in Isoc^\dagger(X/\mathcal{W})$ par le foncteur d'oubli $Isoc^\dagger(X/\mathcal{W}) \rightarrow Isoc(X/\mathcal{W})$.

En particulier si $S' = T' = S$, on a un isomorphisme

$$j_T^* R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; E) \xrightarrow{\sim} R^i f_{conv*}(X/\mathcal{T}; \hat{E})$$

(3.4.4.3) Sous les hypothèses (3.4.3) avec $S = T$ et $S' = T'$ on a :

(i) f induit un foncteur

$$R^i f_{conv*} : Isoc(X/\mathcal{W}) \longrightarrow Isoc(S/\mathcal{W}).$$

(ii) Il existe un isomorphisme de changement de base dans $Isoc(S'/\mathcal{W}')$

$$\varphi^* R^i f_{conv*}(X/\mathcal{T}; \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f'_{conv*}(X'/\mathcal{T}'; \varphi'^*(\mathcal{E})).$$

Avant de donner la preuve du théorème, faisons quelques remarques :

Remarques (3.4.4.4) :

- (i) Sous les hypothèses de (3.4.4.2)(iii), et en supposant de plus que φ est l'identité de S et θ l'identité de \mathcal{W} , l'isomorphisme de changement de base prouve que $R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; E)$ est indépendant du schéma formel \mathcal{T} dans lequel S est plongé (avec bien sûr \mathcal{T} propre sur \mathcal{W} , ρ lisse sur un voisinage de S dans \mathcal{T} et \bar{h} vérifiant (3.4.4)).
La même remarque s'applique à $R^i f_{conv*}(X/\mathcal{T}; \mathcal{E})$.
- (ii) D'après [Et 5, théo (3.2.1)] les hypothèses de (3.4.4.2)(iii) sont vérifiées pour $\mathcal{W} = Spf\mathcal{V}$, S affine et lisse sur k et certains morphismes f projectifs et lisses.
- (iii) En conjuguant (i) et (ii) nous en déduisons plus loin [Théorème (3.4.8.2)] que les constructions se recollent pour certains morphismes f projectifs lisses et S un k -schéma lisse (plus nécessairement affine).

Démonstration de (3.4.4).

Le (3.4.4.3) est conséquence directe de (3.4.4.1).

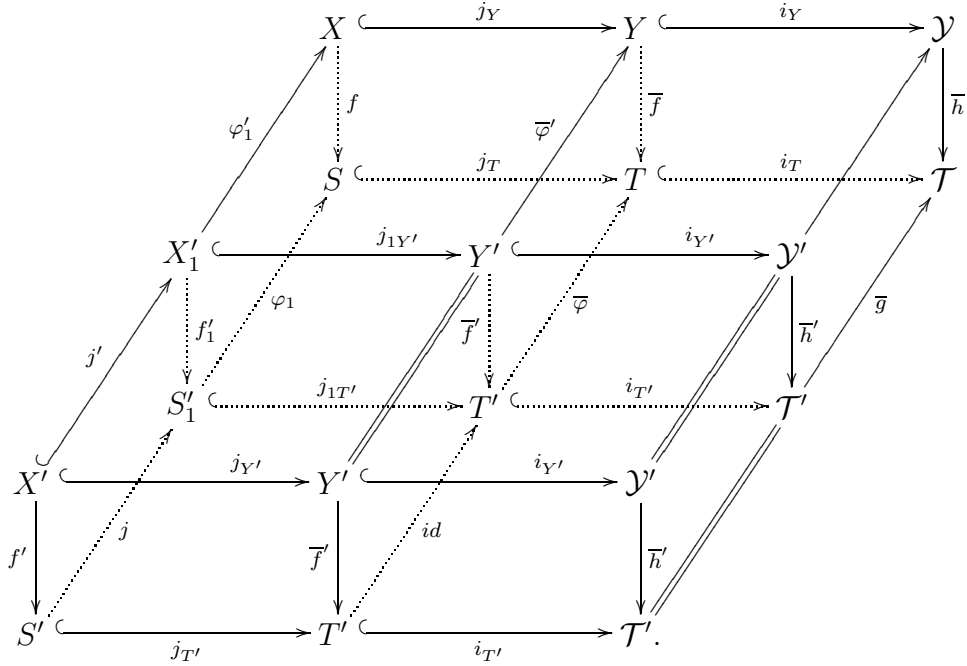
La preuve de (3.4.4.1) et (3.4.4.2) va se faire en six étapes que l'on précise ici :

Dans les quatre premières étapes on va faire la preuve de (3.4.4.1) sous l'hypothèse plus particulière (3.4.1) (i.e. existence de \bar{g}) :

- *étape ①* : montrer que $R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$ est un $j_T^\dagger \mathcal{O}_{T|T}$ -module cohérent.
- *étape ②* : montrer l'isomorphisme de changement de base (3.4.4.1)(ii) lorsque $\bar{\varphi}^{-1}(S) = S'$.
- *étape ③* : achever la preuve de (3.4.4.1)(i).
- *étape ④* : achever la preuve de l'isomorphisme de changement de base (3.4.4.1)(ii).
- *étape ⑤* : on prouve (3.4.4.1) sous les hypothèses (3.4.3).
- *étape ⑥* : on prouve (3.4.4.2).

Plaçons-nous d'abord sous les hypothèses (3.4.1).

On se donne donc un diagramme tel que (3.3.1.1) avec $\bar{h}^{-1}(T) = Y$, $\bar{h}^{-1}(S) = X$: on note $S'_1 = \bar{\varphi}^{-1}(S)$ et $S' \xrightarrow{j} S'_1 \xrightarrow{\varphi_1} S$ la factorisation de φ où j est une immersion ouverte ; on en déduit un diagramme commutatif à carrés verticaux cartésiens



Pour $E \in \text{Isoc}^\dagger((X, Y)/\mathcal{W})$ on notera $(\varphi, \bar{\varphi})^*(E)$ son image inverse par le couple $(\varphi, \bar{\varphi})$ [B 3, (2.3.2)(iv)], [LS, chap 7] pour préciser la dépendance en φ et $\bar{\varphi}$: d'autres images inverses seront utilisées, que le contexte précisera (cf. déf. (3.3.1.5)).

Étape ①. Avec les notations de (3.2) il existe un voisinage strict W de $]X[_y$ dans $]Y[_y$ tel que $E_y := j_Y^\dagger E_W$ soit une réalisation de E , et d'après (2.2.2.2) on peut supposer que W est de la forme $W = \bar{h}_Y^{-1}(V)$ pour un voisinage strict V de $]S[_\mathcal{T}$ dans $]T[_\mathcal{T}$; de plus on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}]X[_y & \hookrightarrow & W & \xrightarrow{\alpha_W} & \mathcal{Y}_K \\ \bar{h}_X \downarrow & & h_V \downarrow & & \downarrow \bar{h}_K \\]S[_\mathcal{T} & \hookrightarrow & V & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{T}_K \end{array}$$

dans lequel les carrés sont cartésiens et où les flèches horizontales sont des

immersions ouvertes, \bar{h}_K est propre et \bar{h}_X est propre et lisse [(2.2.3.2)(i)] : quitte à restreindre V on peut supposer via [(2.2.3.2)(ii)] que h_V est propre et lisse.

Or $R^{i+j}\bar{f}_{rig^*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de terme $E_1^{i,j}$ donné par

$$E_1^{i,j} = R^j\bar{h}_{K^*}(j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{Y|y}} \Omega_{Y|y/\mathcal{T}_K}^i)$$

avec filtration

$$\begin{aligned} Fil^i &:= Fil^i(j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{Y|y/\mathcal{T}_K}}^\bullet) \\ &= j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{Y|y/\mathcal{T}_K}}^{\geq i}, \end{aligned}$$

et on a une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{Y|y}} \Omega_{Y|y/\mathcal{T}_K}^i &= (\alpha_{W^*} j_W^\dagger E) \otimes_{\mathcal{O}_{Y|y}} \Omega_{Y|y/\mathcal{T}_K}^i \\ &\simeq \alpha_{W^*}(j_W^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \alpha_W^*(\Omega_{Y|y/\mathcal{T}_K}^i)) \\ &\simeq \alpha_{W^*}(j_W^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/\mathcal{T}_K}^i) && \text{car } \alpha_W \text{ est étale} \\ &\simeq \alpha_{W^*}(j_W^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^i) && \text{car } \alpha_V \text{ est étale} \\ &\simeq \alpha_{W^*}(j_W^\dagger \mathcal{O}_W \otimes_{\mathcal{O}_W} E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^i) && [\text{B 3, (2.1.3)}, [\text{LS, chap 5}]] \\ &\simeq \alpha_{W^*} j_W^\dagger (E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^i) && [\text{loc. cit.}] \\ &= j_Y^\dagger (E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^i), \end{aligned}$$

où $\Omega_{W/V}^i$ est un \mathcal{O}_W -module cohérent et localement libre [(2.2.3.2)(i)]. D'après (3.1.4) on en déduit un isomorphisme

$$\begin{aligned} E_1^{i,j} &= R^j\bar{h}_{K^*}(j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{Y|y}} \Omega_{Y|y/\mathcal{T}_K}^i) \\ &\xrightarrow{\sim} j_T^\dagger R^j h_{V^*}(E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^i); \end{aligned}$$

or $R^j h_{V^*}(E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^i)$ est un \mathcal{O}_V -module cohérent d'après le théorème (1.2), donc $E_1^{i,j}$ est un $j_T^\dagger \mathcal{O}_{T|\mathcal{T}}$ -module cohérent. Comme la filtration Fil^i est finie, il en résulte que l'aboutissement $R^{i+j}\bar{f}_{rig^*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$ est un $j_T^\dagger \mathcal{O}_{T|\mathcal{T}}$ -module cohérent. Remarquons que pour prouver cette cohérence on aurait pu appliquer le (1) de (3.3.2.2).

Étape ②. On a vu à l'étape ① que

$$\begin{aligned} R^i\bar{f}_{rig^*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) &:= R^i\bar{h}_{K^*}(j_Y^\dagger E_W \otimes_{\mathcal{O}_{Y|y}} \Omega_{Y|y/\mathcal{T}_K}^\bullet) \\ &\simeq R^i\bar{h}_{K^*}(j_Y^\dagger (E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^\bullet)), \end{aligned}$$

et les $E_W \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W/V}^j$ sont des \mathcal{O}_W -module cohérents.

Puisque ou bien \bar{y} est plat, ou bien \bar{y} est lisse sur un voisinage de S' dans \mathcal{T}' ,

on peut d'après (3.3.1.4) et quitte à restreindre V supposer g_V plat : le (2) de (3.3.2.2) nous fournit alors l'isomorphisme de changement de base

$$(3.4.4.1.1) \quad \overline{g}_K^* R^i \overline{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) \xrightarrow{\sim} R^i \overline{f}'_{rig*}((X'_1, Y')/\mathcal{T}'; (\varphi'_1, \overline{\varphi}')^*(E)).$$

Etape (3). En reprenant la construction de la connexion de Gauß-Manin décrite explicitement par Katz dans [K, 3.4 et 3.5] on prouve que cette connexion agit aussi bien sur le terme $E_1^{i,j}$ que sur l'aboutissement [loc. cit., theo. 3.5] : ainsi $R^i f_{rig*}(X/\mathcal{T}; E)$ est muni d'une connexion ∇^i (de Gauß-Manin) intégrable. Pour construire cette connexion de Gauß-Manin ∇^i on peut aussi établir des isomorphismes [B 3, (2.2.5.1)], [LS, chap 7] vérifiant la condition de cocycles : cette construction coïncide avec la précédente [B 1, V, 3.6.3, 3.6.4, 3.6.5], et cette deuxième construction va nous permettre d'établir la surconvergence de ∇^i .

On a un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\Gamma_{\overline{h}}=(1_{\mathcal{Y}} \times \overline{h})} & \mathcal{Y} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T} & \xrightarrow{p'_1} & \mathcal{Y} \\ \overline{h} \downarrow & & \downarrow \overline{h} \times 1_{\mathcal{T}} & & \downarrow \overline{h} \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T} & \xrightarrow{p_{1\mathcal{T}}} & \mathcal{T}, \end{array}$$

où $p_{1\mathcal{T}}$, p'_1 sont les premières projections, $\Gamma_{\overline{h}}$ est le morphisme graphe de \overline{h} et $\Delta_{\mathcal{T}}$ est le morphisme diagonal : $\Gamma_{\overline{h}}$ est une immersion fermée puisque \mathcal{T} est séparé sur \mathcal{W} ; on note alors $]Y[_{\mathcal{Y} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}}$ le tube de Y dans $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}$ pour l'immersion fermée composée $Y \hookrightarrow \mathcal{Y} \xrightarrow{\Gamma_{\overline{h}}} \mathcal{Y} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}$, et $]T[_{\mathcal{T}^2}$ celui de T dans \mathcal{T}^2 pour l'immersion fermée $T \hookrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{T}}} \mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}$.

D'après (2.1.2) on a alors un diagramme commutatif à carré cartésien

$$(3.4.4.1.2) \quad \begin{array}{ccccc} & & & &]Y[_{\mathcal{Y}^2} \\ & & & \swarrow p_{1\mathcal{Y}} & \\ & & & & \downarrow h''_1 \\]Y[_{\mathcal{Y}} & \xleftarrow{p'_1} &]Y[_{\mathcal{Y} \times \mathcal{T}} & & \\ \overline{h}_{\mathcal{Y}} \downarrow & & \downarrow h'_1 & & \downarrow \tilde{h} \\]T[_{\mathcal{T}} & \xleftarrow{p_{1\mathcal{T}}} &]T[_{\mathcal{T}^2} & & \end{array}$$

où h'_1 , h''_1 , \tilde{h} sont induits respectivement par $\overline{h}_K \times 1_{\mathcal{T}_K}$, $1_{\mathcal{Y}_K} \times \overline{h}_K$ et $\overline{h}_K \times \overline{h}_K$. On a de même un diagramme analogue (3.4.4.1.2)' avec p_2 à la place de p_1

et $h'_2, h''_2 \dots$

D'après (3.2.2.1) et [B 5, (3.2.3) et (3.1.11)(i)] ou [LS, 7.4] on a les isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}
R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}^2; E) &= R^i \tilde{h}_*(p_{1Y}^*(E_Y) \otimes \Omega_{Y|_{Y^2/\mathcal{T}_K^2}}^\bullet) \\
&\simeq R^i h'_{1*}(p_1^*(E_Y) \otimes \Omega_{Y|_{Y \times \mathcal{T}/\mathcal{T}_K^2}}^\bullet) \\
&\xleftarrow{\sim} p_{1\mathcal{T}}^* R^i \bar{h}_Y^*(E_Y \otimes \Omega_{Y|_{Y/\mathcal{T}_K}}^\bullet) \quad [\text{étape } \textcircled{2}] \\
&= p_{1\mathcal{T}}^* R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E);
\end{aligned}$$

l'avant-dernier isomorphisme ci-dessus est réalisable via l'étape $\textcircled{2}$ car ρ étant lisse sur un voisinage de S dans \mathcal{T} , $p_{1\mathcal{T}} : \mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est lisse sur un voisinage de S dans $\mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}$.

Or l'isomorphisme [B 3, (2.2.5.1)], [LS, 7.2]

$$p_{2Y}^*(E_Y) \xrightarrow{\sim} p_{1Y}^*(E_Y)$$

assurant l'existence d'une connexion (surconvergente) sur E_Y fournit aussi les isomorphismes

$$R^i \tilde{h}_*(p_{2Y}^*(E_Y) \otimes \Omega_{Y|_{Y^2/\mathcal{T}_K^2}}^\bullet) \xrightarrow{\sim} R^i \tilde{h}_*(p_{1Y}^*(E_Y) \otimes \Omega_{Y|_{Y^2/\mathcal{T}_K^2}}^\bullet),$$

c'est-à-dire, par les mêmes arguments que ci-dessus, des isomorphismes

$$(3.4.4.1.3) \quad p_{2\mathcal{T}}^* R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) \xrightarrow{\sim} R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}^2; E) \xleftarrow{\sim} p_{1\mathcal{T}}^* R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$$

satisfaisant aux conditions de [B 3, (2.2.5)], [LS, 7.2]. De plus la connexion surconvergente sur $R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$ obtenue par l'isomorphisme (3.4.4.1.3) est bien celle de Gauß-Manin [B 1, V, 3.6.4].

Ceci achève la preuve de l'étape $\textcircled{3}$.

Étape $\textcircled{4}$. Puisque $R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$ est un isocrystal surconvergent le long de $T \setminus S$, son image inverse par $(\varphi, \bar{\varphi})$ est, d'après l'étape $\textcircled{2}$, l'image inverse par $(j, id_{T'})$ de l'isocrystal surconvergent (le long de $T' \setminus S'_1$)

$$R^i \bar{f}'_{rig*}((X'_1, Y')/\mathcal{T}'; (\varphi'_1, \bar{\varphi}')^*(E)) = j_{1T'}^\dagger(R^i h'_{V'^*}(g_W'^*(E_W) \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W'/V'}^\bullet)) \text{ (cf (3.3.1.3)).}$$

Le $\mathcal{O}_{V'}$ -module

$$\mathcal{E}_{V'}^i := R^i h'_{V'^*}(g_W'^*(E_W) \otimes_{\mathcal{O}_W} \Omega_{W'/V'}^\bullet)$$

est cohérent, et par définition des images inverses [B 3, (2.3.2)(iv)], [LS, chap 5] on a

$$(j, id_{T'})^*(j_{1T'}^\dagger(\mathcal{E}_{V'}^i)) = j_{T'}^\dagger(\mathcal{E}_{V'}^i);$$

or d'après [(3.3.2.2)(1)] on a :

$$\begin{aligned} j_{T'}^\dagger(\mathcal{E}_{V'}^i) &\simeq R^i \bar{h}_{K^*}^{\prime}(j_{Y'}^\dagger(g_W^*(EW)) \otimes_{\mathcal{O}_{W'}} \Omega_{W'/V'}^\bullet) \\ &=: R^i \bar{f}'_{rig^*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi, \bar{\varphi})^*(E)), \end{aligned}$$

d'où l'isomorphisme de changement de base

$$(3.4.4.1.4) \quad (\varphi, \bar{\varphi})^* R^i \bar{f}'_{rig^*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) \simeq R^i \bar{f}'_{rig^*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)),$$

qui est celui de (3.4.4.1)(ii).

Etape (5). Plaçons-nous sous les hypothèses (3.4.3) et prouvons (3.4.4.1) dans ce cas.

Considérons les parallélépipèdes commutatifs suivants dans lesquels les faces verticales sont cartésiennes

$$(3.4.4.1.5) \quad \begin{array}{ccccccc} & & X^c & \xrightarrow{j_Y} & Y^c & \xrightarrow{i_Y} & \mathcal{Y} \\ & \nearrow \varphi' & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow p_{1\mathcal{Y}} \\ X'^c & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y'^c & \xrightarrow{i_{Y'}} & \mathcal{Y}'' & & \\ \downarrow f' & \searrow \varphi & S^c & \xrightarrow{j_T} & T^c & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} \\ & \nearrow \bar{f}' & \downarrow \bar{f}' & & \downarrow \bar{h}'' & & \downarrow p_{1\mathcal{T}''} \\ S'^c & \xrightarrow{j_{T'}} & T'^c & \xrightarrow{i_{T'}} & \mathcal{T}'' = \mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}' & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W} \end{array}$$

$$(3.4.4.1.6) \quad \begin{array}{ccccccc} & & X'^c & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y'^c & \xrightarrow{i_{Y'}} & \mathcal{Y}' \\ & \nearrow \text{id} & \downarrow f' & & \downarrow \bar{f}' & & \downarrow \bar{h}''' \\ X'^c & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y'^c & \xrightarrow{i_{Y'}} & \mathcal{Y}' & & \\ \downarrow f' & \searrow \text{id} & S'^c & \xrightarrow{j_{T'}} & T'^c & \xrightarrow{i_{T'}} & \mathcal{T}'' \\ & \nearrow \bar{f}' & \downarrow \bar{f}' & & \downarrow \bar{h}' & & \downarrow p_{2\mathcal{T}''} \\ S'^c & \xrightarrow{j_{T'}} & T'^c & \xrightarrow{i_{T'}} & \mathcal{T}' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \end{array}$$

où p_i est la projection sur le i^e facteur et $i_{T'}'' = (i_T \circ \bar{\varphi}, i_{T'})$.

On forme aussi le carré cartésien

$$(3.4.4.1.7) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{Y}} & \xrightarrow{u_2} & \mathcal{Y}'' \\ u_1 \downarrow & & \downarrow \bar{h}'' \\ \mathcal{Y}''' & \xrightarrow{\bar{h}'''} & \mathcal{T}'' . \end{array}$$

Comme u_1 et u_2 sont propres, et lisses sur un voisinage de X' dans $\tilde{\mathcal{Y}}$, on peut d'après [B 5, (3.1.2)] ou [LS, 7.4] faire le calcul de

$$R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}''; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E))$$

à l'aide de la cohomologie de de Rham, aussi bien avec \bar{h}''' , $\bar{h}''' \circ u_1 = \bar{h}'' \circ u_2$ ou \bar{h}'' , qui sont tous les trois propres, et lisses sur un voisinage de X' respectivement dans \mathcal{Y}''' , $\tilde{\mathcal{Y}}$ et \mathcal{Y}'' . Or $p_{1\mathcal{T}''}$ (resp $p_{2\mathcal{T}''}$) étant lisse sur un voisinage de S' dans \mathcal{T}'' , on a d'après l'étape ④ des isomorphismes de changement de base (le premier calculé via \bar{h}'' et le second via \bar{h}''')

$$(\varphi, \bar{\varphi}, p_{1\mathcal{T}''})^* R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) \simeq R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}''; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)) ,$$

$$(p_{2\mathcal{T}''})^* : R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)) \simeq R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}''; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E))$$

et les seconds membres coïncident en faisant le calcul de la cohomologie de de Rham via $\bar{h}''' \circ u_1 = \bar{h}'' \circ u_2$. Ceci achève la preuve de l'isomorphisme de changement de base : d'où, ici encore, l'isomorphisme (3.4.4.1.3). Comme l'étape ① s'applique on a prouvé (3.4.4.1).

Étape ⑥. L'étape ③ reste inchangée puisqu'on peut faire les changements de base par $p_{1\mathcal{T}}$ et $p_{2\mathcal{T}}$ car ils sont lisses sur un voisinage de S dans $\mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}$: en particulier $R^i \bar{f}_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E)$ est un isocristal surconvergent le long de $T \setminus S$. Soit \mathcal{W}_0 la réduction sur k de \mathcal{W} . On note

(3.4.4.2.1)

$$\begin{array}{ccccc} X'' \hookrightarrow & \xrightarrow{j_{Y''}} & Y'' \hookrightarrow & \xrightarrow{i_{Y''}} & \mathcal{Y}'' = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}' \\ f'' \downarrow & & \bar{f}'' \downarrow & & \bar{h}'' \downarrow \\ S'' = S \times_{\mathcal{W}_0} S' \hookrightarrow & \xrightarrow{j_{T''} = j_T \times j_{T'}} & T'' := T \times_{\mathcal{W}_0} T' \hookrightarrow & \xrightarrow{i_{T''} = i_T \times i_{T'}} & \mathcal{T}'' := \mathcal{T} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{T}' \end{array}$$

l'image inverse de (2.2.1) par le diagramme commutatif

$$(3.4.4.2.2) \quad \begin{array}{ccccc} S & \hookrightarrow & \xrightarrow{j_T} & T & \hookrightarrow & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} \\ p_{1S} \uparrow & & & \uparrow p_{1T} & & & \uparrow p_{1\mathcal{T}''} \\ S'' & \hookrightarrow & \xrightarrow{j_{T''}} & T'' \hookrightarrow & \xrightarrow{i_{T''}} & & \mathcal{T}'' \end{array}$$

où les p_1 sont les projections sur le premier facteur : \bar{h}'' est propre et \bar{h}'' est lisse sur un voisinage de X'' dans \mathcal{Y}'' .

De même

$$(3.4.4.2.3) \quad \begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y' & \xrightarrow{i_{Y''} \circ \psi_Y} & \mathcal{Y}'' \\ f' \downarrow & & \downarrow \bar{f}' & & \downarrow \bar{h}'' \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T''} \circ \psi_T} & \mathcal{T}'' \end{array}$$

est l'image inverse de (3.4.4.2.1) par le diagramme commutatif

$$(3.4.4.2.4) \quad \begin{array}{ccccc} S'' & \xrightarrow{j_{T''}} & T'' & \xrightarrow{i_{T''}} & \mathcal{T}'' \\ \psi_S = (\varphi, 1_{S'}) \uparrow & & \uparrow \psi_T = (\bar{\varphi}, 1_{T'}) & & \parallel id_{\mathcal{T}''} \\ S' & \xrightarrow{j_{T'}} & T' & \xrightarrow{i_{T''} \circ \psi_T} & \mathcal{T}'' \end{array}$$

où ψ_S, ψ_T sont des immersions fermées et ψ_Y est l'immersion fermée définie par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\psi_Y} & Y'' \\ \bar{f}' \downarrow & & \downarrow \bar{f}'' \\ T' & \xrightarrow{\psi_T} & T'' \end{array} .$$

En appliquant (3.4.4.1)(ii) au changement de base par $p_{1\mathcal{T}}$ et ψ_T on obtient un isomorphisme

$$\psi_T^* p_{1\mathcal{T}''}^* R^i \bar{f}'_{rig*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) \simeq R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}''; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)).$$

Puisque le carré suivant commute

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{i_T} & \mathcal{T} \\ p_{1\mathcal{T}} \circ \psi_T = \bar{\varphi} \uparrow & & \uparrow p_{1\mathcal{T}''} \\ T' & \xrightarrow{i_{T''} \circ \psi_T} & \mathcal{T}'' \end{array} ,$$

pour prouver (3.4.4.2) il suffit d'après [B 3, (2.3.2)(iv)] ou [LS, chap 7] de prouver que la projection sur le second facteur $p_{2\mathcal{T}''} : \mathcal{T}'' \rightarrow \mathcal{T}'$ induit un isomorphisme

$$p_{2\mathcal{T}''}^* R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)) \simeq R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}''; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)).$$

Considérons alors le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccccccc}
X' & \xrightarrow{j_{Y'}} & Y' & \xrightarrow{\psi_Y} & Y'' & \xrightarrow{i_{Y''}} & \mathcal{Y}'' \\
& & & & & & \searrow^{Id_{\mathcal{Y}''}} \\
& & & & & & \mathcal{Y}''' \xrightarrow{p_{3\mathcal{Y}}} \mathcal{Y}'' \\
& & & & & & \downarrow \bar{h}'' \\
& & & & & & \mathcal{T}'' \\
& & & & & & \downarrow p_{2\mathcal{T}''} \\
& & & & & & \mathcal{T}' \\
& & & & & & \downarrow p_{2\mathcal{T}''} \\
& & & & & & \mathcal{T}'
\end{array}$$

$\bar{h}' : \mathcal{Y}'' \rightarrow \mathcal{T}''$, $\bar{h}'' : \mathcal{Y}''' \rightarrow \mathcal{T}''$, $p_{2\mathcal{T}''} : \mathcal{T}'' \rightarrow \mathcal{T}'$

D'après les hypothèses faites sur ρ , $p_{2\mathcal{T}''}$ est propre et $p_{2\mathcal{T}''}$ est lisse sur un voisinage de S'' dans \mathcal{T}'' : ainsi $p_{2\mathcal{T}''} \circ \bar{h}''$ est propre et $p_{2\mathcal{T}''} \circ \bar{h}''$ est lisse sur un voisinage de X' dans \mathcal{Y}'' ; par suite en appliquant (3.4.4.1) on en déduit que

$$R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)) \text{ et } R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}''; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E))$$

sont des isocristaux surconvergentes et puisque $i_{\mathcal{Y}''}$ est propre, que l'on a des isomorphismes (où $p_{1\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}'' \rightarrow \mathcal{Y}$ est la première projection)

$$\begin{aligned}
p_{2\mathcal{T}''}^* R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}'; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)) &\simeq R^i \bar{h}'''_* p_{3\mathcal{Y}}^* ((p_{1\mathcal{Y}}^* E_{\mathcal{Y}}) \otimes \Omega_{|Y'|_{\mathcal{Y}''}/\mathcal{T}'_K}^\bullet) \\
&\simeq R^i \bar{h}'''_* (p_{3\mathcal{Y}}^* p_{1\mathcal{Y}}^* (E_{\mathcal{Y}}) \otimes \Omega_{|Y'|_{\mathcal{Y}''}/\mathcal{T}'_K}^\bullet) \quad [(2.1.2)] \\
&\simeq R^i \bar{h}'''_* (i_{\mathcal{Y}''}^* p_{3\mathcal{Y}}^* p_{1\mathcal{Y}}^* (E_{\mathcal{Y}}) \otimes \Omega_{|Y'|_{\mathcal{Y}''}/\mathcal{T}'_K}^\bullet) \quad [\text{B 5, (3.2.2)}] \\
&= R^i \bar{f}'_{rig*}((X', Y')/\mathcal{T}''; (\varphi', \bar{\varphi}')^*(E)) \quad [(3.2.2)];
\end{aligned}$$

au lieu de [B 5, (3.2.2)] ci-dessus on peut utiliser [LS, 7.4]. D'où (3.4.4.2), compte tenu des définitions (3.2). Ceci achève la preuve de (3.4.4). \square

(3.4.5)

(3.4.5.1) Supposons donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{j_{\mathcal{Y}}} & \mathcal{Y} & & \\
f \downarrow & & \square & & \downarrow \bar{h} \\
S & \xrightarrow{j_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W},
\end{array}$$

dans lequel le carré est cartésien, f est un morphisme propre de k -schémas séparés de type fini, \bar{h} et ρ sont des morphismes de \mathcal{V} -schémas formels séparés

plats de type fini, \bar{h} est propre, \bar{h} (resp ρ) est lisse sur un voisinage de X (resp S) dans \mathcal{Y} (resp \mathcal{T}), $j_{\mathcal{Y}}$ et $j_{\mathcal{T}}$ sont des immersions. Soit T l'adhérence schématique de S dans \mathcal{T} et

$$S \xrightarrow{j_{\mathcal{T}}} T \xrightarrow{i_{\mathcal{T}}} \mathcal{T}$$

la factorisation de $j_{\mathcal{T}} : j_{\mathcal{T}}$ est une immersion ouverte dominante et $i_{\mathcal{T}}$ est une immersion fermée. On note $Y = \bar{h}^{-1}(T)$ et $\bar{f} := \bar{h}|_Y : Y \rightarrow T$. Avec les notations précédentes on est donc dans la situation (2.2.1) avec $\bar{f}^{-1}(S) = X$.

(3.4.5.2) Supposons de plus donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{j_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W} \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \bar{g} & & \uparrow \theta \\ S' & \xrightarrow{j_{\mathcal{T}'}} & \mathcal{T}' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \end{array}$$

dans lequel φ est un morphisme de k -schémas séparés de type fini, \bar{g} , ρ' sont des morphismes séparés de \mathcal{V} -schémas formels séparés plats de type fini, ρ' est lisse sur un voisinage de S' dans \mathcal{T}' , θ est lisse et $j_{\mathcal{T}'}$ est une immersion. On définit $f' : X' \rightarrow S'$ par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array} .$$

On note T' l'adhérence schématique de S' dans \mathcal{T}' et

$$S' \xrightarrow{j_{\mathcal{T}'}} T' \xrightarrow{i_{\mathcal{T}'}} \mathcal{T}'$$

la factorisation de $j_{\mathcal{T}'}$ par l'immersion ouverte dominante $j_{\mathcal{T}'}$ et l'immersion fermée $i_{\mathcal{T}'}$ induit un k -morphisme $\bar{\varphi} : T' \rightarrow T$.

Par image inverse de (3.4.5.1) par (3.4.5.2) on obtient un parallélogramme commutatif tel que (3.3.1.1), dont on reprend les notations; on en déduit :

Corollaire (3.4.5.3). *Sous les hypothèses (3.4.5.1) et (3.4.5.2) les parties (3.4.4.1) et (3.4.4.3) du théorème (3.4.4) sont valides.*

(3.4.5.4) Supposons donné cette fois un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{j_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{W} \\ \varphi \uparrow & & & & \uparrow \theta \\ S' & \xrightarrow{j_{\mathcal{T}'}} & \mathcal{T}' & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{W}' \end{array}$$

Dans le carré cartésien de \mathcal{V} -schémas formels plats et séparés

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(s) & \xrightarrow{u'} & \mathcal{S} \\ v' \downarrow & & \downarrow v \\ \text{Spf } \mathcal{V}(s) & \xrightarrow{u} & \text{Spf } \mathcal{V} \end{array}$$

les morphismes u et u' (resp v et v') sont finis étales (resp lisses et séparés). Par lissité de \mathcal{S} sur \mathcal{V} le morphisme composé

$$\text{Spec } k(s) \xrightarrow{i_s} \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}$$

se relève en un morphisme séparé

$$g_s : \text{Spf } \mathcal{V}(s) \longrightarrow \mathcal{S} .$$

Par la propriété universelle du produit fibré, g_s se factorise en

$$g_s : \text{Spf } \mathcal{V}(s) \xrightarrow{\tilde{g}_s} \mathcal{U}(s) \xrightarrow{u'} \mathcal{S}$$

avec $v' \circ \tilde{g}_s = Id_{\text{Spf } \mathcal{V}(s)}$: on en déduit que \tilde{g}_s est une immersion fermée. En notant \bar{g}_s le morphisme composé

$$\bar{g}_s : \text{Spf } \mathcal{V}(s) \xrightarrow{g_s} \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{T} ,$$

les foncteurs $i_s^{\dagger*}$ et \hat{i}_s^* sont induits par \bar{g}_s^* [B 3, (2.3.6) et (2.3.2)(iv)], [LS, chap 7], ce qui fournit une réalisation explicite de ces foncteurs comme nous l'annoncions.

Théorème (3.4.7). *On se place sous les hypothèses et notations de (3.4.6).*

(3.4.7.1) *Soit $E \in \text{Isoc}^\dagger((X, Y)/\mathcal{V})$. Alors, pour tout entier $i \geq 0$ et tout point fermé s de S , on a des isomorphismes*

$$\begin{aligned} i_s^{\dagger*} R^i \bar{f}_{\text{rig}*}((X, Y)/\mathcal{T}; E) &\simeq R^i f_{s \text{ rig}*}(X_s/\mathcal{V}(s); E_{X_s}) \\ &\simeq R^i f_{s \text{ conv}*}(X_s/\mathcal{V}(s); \widehat{E}_{X_s}) \\ &\simeq H_{\text{rig}}^i(X_s/K(s); E_{X_s}) \\ &= H_{\text{conv}}^i(X_s/K(s); \widehat{E}_{X_s}) \end{aligned}$$

où l'isocrystal convergent $\widehat{E}_{X_s} \in \text{Isoc}(X_s/K(s)) = \text{Isoc}^\dagger(X_s/K(s))$ coïncide avec l'isocrystal surconvergent $E_{X_s} \in \text{Isoc}^\dagger(X_s/K(s))$.

(3.4.7.2) Supposons $\rho \mathcal{T} \rightarrow \text{Spf } \mathcal{V}$ propre et soit $E \in \text{Isoc}^\dagger(X/K)$. Alors, pour tout entier $i \geq 0$ et tout point fermé s de S , on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} i_s^* R^i f_{\text{rig}*}(X/\mathcal{T}; E) &\simeq R^i f_{s \text{ rig}*}(X_s/\mathcal{V}(s); E_{X_s}) \\ &\simeq R^i f_{s \text{ conv}*}(X_s/\mathcal{V}(s); \widehat{E}_{X_s}) \\ &\simeq H_{\text{rig}}^i(X_s/K(s); E_{X_s}) \\ &= H_{\text{conv}}^i(X_s/K(s); \widehat{E}_{X_s}) \end{aligned}$$

où l'isocrystal convergent $\widehat{E}_{X_s} \in \text{Isoc}(X_s/K(s)) = \text{Isoc}^\dagger(X_s/K(s))$ coïncide avec l'isocrystal surconvergent $E_{X_s} \in \text{Isoc}^\dagger(X_s/K(s))$.

(3.4.7.3) Supposons que $S = T$ et soit $\mathcal{E} \in \text{Isoc}(X/K)$. Alors, pour tout entier $i \geq 0$ et tout point fermé s de S , on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \hat{i}_s^* R^i f_{\text{conv}*}(X/\mathcal{T}; \mathcal{E}) &\simeq R^i f_{s \text{ conv}*}(X_s/\mathcal{V}(s); \mathcal{E}_{X_s}) \\ &= H_{\text{conv}}^i(X_s/K(s); \mathcal{E}_{X_s}). \end{aligned}$$

Démonstration. On applique le changement de base par (i_s, \bar{g}_s) et les corollaires (3.4.5.3) et (3.4.5.5). \square

3.4.8. Soient S un k -schéma lisse et séparé et $f : X \rightarrow S$ un k -morphisme projectif et lisse. Notons $S = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha,0}$ une décomposition de S en réunion d'ouverts connexes affines $S_{\alpha,0} = \text{Spec}(A_{\alpha,0})$, $A_{\alpha} = \mathcal{V}[t_1, \dots, t_{d_{\alpha}}]/J_{\alpha}$ une \mathcal{V} -algèbre lisse relevant $A_{\alpha,0}$ dont on a fixé une présentation et $S_{\alpha} = \text{Spec}(A_{\alpha})$. On désigne par \overline{S}_{α} l'adhérence schématique de S_{α} dans $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^{d_{\alpha}}$, par \mathcal{S}_{α} (resp $\overline{\mathcal{S}}_{\alpha}$) le complété formel \mathfrak{m} -adique de S_{α} (resp \overline{S}_{α}) et par

$$f_{\alpha} : X_{\alpha,0} = X \times_S S_{\alpha,0} \longrightarrow S_{\alpha,0}$$

la restriction de f . Quitte à décomposer $X_{\alpha,0}$ en somme disjointe de ses composantes connexes on peut supposer $X_{\alpha,0}$ connexe. D'après [Et 5, (3.2.1.1)] il existe un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_{\alpha} \subset & \longrightarrow & \overline{X}_{\alpha} \\ h_{\alpha} \downarrow & & \downarrow \bar{h}_{\alpha} \\ S_{\alpha} \subset & \longrightarrow & \overline{S}_{\alpha} \end{array}$$

dans lequel \bar{h}_{α} est projectif, h_{α} est un relèvement projectif de f_{α} et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes. Le complété formel de ce carré est d'après [Et 5, théo (3.2.1)] un carré cartésien de \mathcal{V} -schémas formels

$$(3.4.8.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{\alpha} \subset & \longrightarrow & \overline{\mathcal{X}}_{\alpha} \\ \hat{h}_{\alpha} \downarrow & & \downarrow \hat{\bar{h}}_{\alpha} \\ \mathcal{S}_{\alpha} \subset & \longrightarrow & \overline{\mathcal{S}}_{\alpha} \end{array}$$

dans lequel \widehat{h}_α est projectif, \hat{h}_α est un relèvement projectif de la restriction f_α de f et les flèches horizontales sont des immersions ouvertes.

Théorème (3.4.8.2). *Sous les hypothèses (3.4.8) supposons que, pour tout α , X_α est plat sur \mathcal{V} . Alors, pour tout entier $i \geq 0$, on a un diagramme commutatif de foncteurs naturels induits par f et définis ci-après en (3.4.8.5)*

$$\begin{array}{ccc} \text{Isoc}^\dagger(X/K) & \xrightarrow{R^i f_{\text{rig}*}} & \text{Isoc}^\dagger(S/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Isoc}(X/K) & \xrightarrow{R^i f_{\text{conv}*}} & \text{Isoc}(S/K) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs d'oubli.

De plus ces foncteurs commutent à tout changement de base $S' \rightarrow S$ entre k -schémas lisses et séparés; en particulier ils commutent aux passages aux fibres en les points fermés de S .

Démonstration. Puisque, pour tout α , X_α est plat sur \mathcal{V} , le théorème [Et 5, théo (3.2.1)] prouve que \hat{h}_α est un relèvement projectif et lisse de la restriction f_α de f . Soient $E \in \text{Isoc}^\dagger(X/K)$ et E_α sa restriction à X_α : grâce à l'existence du carré cartésien (3.4.8.1) dans lequel \hat{h}_α est un relèvement projectif et lisse de f_α on conclut à l'aide du théorème (3.4.4) que

$$R^i f_{\text{arig}*}(X_{\alpha,0}/\overline{\mathcal{S}}_\alpha; E_\alpha) \in \text{Isoc}^\dagger(S_{\alpha,0}/K).$$

Montrons que celui-ci ne dépend que de $S_{\alpha,0}$ et non de $\overline{\mathcal{S}}_\alpha$.

Supposons donnés un k -schéma propre $\overline{\mathcal{S}}'_{\alpha,0}$, un \mathcal{V} -schéma formel propre $\overline{\mathcal{S}}'_\alpha$, une immersion ouverte dominante $j'_{\alpha,0} : S_{\alpha,0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}'_{\alpha,0}$ et une immersion fermée $i'_{\alpha,0} : \overline{\mathcal{S}}'_{\alpha,0} \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}'_\alpha$ tels que le morphisme $\overline{\mathcal{S}}'_\alpha \rightarrow \text{Spf}\mathcal{V}$ soit lisse sur un voisinage de $S_{\alpha,0}$ dans $\overline{\mathcal{S}}'_\alpha$. Notons $\overline{T}_{\alpha,0}$ l'adhérence schématique de $S_{\alpha,0}$ plongé diagonalement dans $\overline{\mathcal{S}}''_\alpha = \overline{\mathcal{S}}_{\alpha,0} \times_k \overline{\mathcal{S}}'_{\alpha,0}$ et $\overline{\mathcal{S}}''_\alpha = \overline{\mathcal{S}}_\alpha \hat{\times}_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}}'_\alpha$. On a un diagramme commutatif

$$(3.4.8.3) \quad \begin{array}{ccccc} S_{\alpha,0} & \xrightarrow{j_T} & \overline{T}_{\alpha,0} & \xrightarrow{i_T} & \overline{\mathcal{S}}''_\alpha \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow p_\alpha & & \downarrow \overline{p}_{1,\alpha} \\ S_{\alpha,0} & \xrightarrow{j_S} & \overline{\mathcal{S}}_{\alpha,0} & \xrightarrow{i_S} & \overline{\mathcal{S}} \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont induites par la première projection, les i (resp les j) sont des immersions fermées (resp ouvertes). Comme p_α est

propre, le foncteur $(p_\alpha, \bar{p}_{1,\alpha})^*$ est une équivalence de catégorie [B 3, (2.3.5)], [LS, 7.1] de la catégorie des isocristaux sur $S_{\alpha,0}/K$ surconvergent le long de $Z_{\alpha,0} = \bar{S}_{\alpha,0} \setminus S_{\alpha,0}$ dans la catégorie des isocristaux sur $S_{\alpha,0}/K$ surconvergent le long de $Z''_{\alpha,0} = \bar{T}_{\alpha,0} \setminus S_{\alpha,0}$. De plus $\bar{p}_{1,\alpha}$ est propre, et lisse sur un voisinage de $S_{\alpha,0}$ dans \bar{S}''_α , donc par le théorème (3.4.4) on a isomorphisme de changement de base

$$\bar{p}_{1\alpha}^* R^i f_{\text{orig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{S}_\alpha; E_\alpha) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\text{orig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{S}''_\alpha; E_\alpha),$$

et de même

$$\bar{p}_{2\alpha}^* R^i f_{\text{orig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{S}'_\alpha; E_\alpha) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\text{orig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{S}''_\alpha; E_\alpha),$$

d'où un isomorphisme canonique

$$(3.4.8.4) \quad R^i f_{\text{orig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{S}_\alpha; E_\alpha) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\text{orig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{S}'_\alpha; E_\alpha).$$

Ainsi $R^i f_{\text{orig}*}(X_{\alpha,0}/\bar{S}_\alpha; E_\alpha)$ ne dépend que de $S_{\alpha,0}$; de plus sur $S_{\alpha,0} \cap S_{\beta,0}$ ces isocristaux se recollent car on a des isomorphismes analogues à (3.4.8.4) et vérifiant la condition de cocycles. Ces données qui se recollent fournissent un isocristal surconvergent sur S/K [B 3, (2.3.2)], [LS, 8.1] noté

$$(3.4.8.5) \quad R^i f_{\text{rig}*}(E),$$

et c'est le seul possible d'après le théorème de pleine fidélité de Kedlaya [Ked 3, Theo 5.2.1] qui prouve que l'extension de l'isocristal surconvergent de $S_{\alpha,0} \cap S_{\beta,0}$ à $S_{\alpha,0}$ est unique.

On raisonne de manière analogue pour $R^i f_{\text{conv}*}(E)$ et le carré du théorème est clairement commutatif.

L'assertion sur les changements de base $S' \rightarrow S$ résulte du théorème (3.4.4). \square

Corollaire (3.4.8.6). *Sous les hypothèses (3.4.8), supposons que f définit X comme une intersection complète relativement à S dans un espace projectif sur S [Et 5, déf (3.2.5)]. Alors les conclusions du théorème (3.4.8.2) demeurent valides.*

Démonstration. Avec les notations de [Et 5, (3.2.5.2)], chaque $f_{\alpha,\beta} : X_{\alpha,\beta} \rightarrow S_{\alpha,\beta}$ se relève d'après [Et 5, cor (3.2.6)] en un morphisme projectif et lisse au-dessus de \mathcal{V} et donne lieu à un diagramme commutatif tel que (3.4.8.1) en remplaçant \bar{S}_α par $\bar{S}_{\alpha,\beta}$, et on conclut comme pour (3.4.8.2). \square

On a la variante suivante du théorème (3.4.8.2) :

Théorème (3.4.9). *Supposons que le théorème (3.4.8.2) est vrai pour tout morphisme projectif et lisse $f : X \rightarrow S$ avec S un k -schéma affine et lisse (donc sans faire l'hypothèse X_α plat sur \mathcal{V}). Soient S un k -schéma lisse et séparé et $f : X \rightarrow S$ un k -morphisme projectif et lisse. Alors, pour tout entier $i \geq 0$, on a un diagramme commutatif de foncteurs naturels induits par f et définis à la manière de (3.4.8.5)*

$$\begin{array}{ccc} \text{Isoc}^\dagger(X/K) & \xrightarrow{R^i f_{rig*}} & \text{Isoc}^\dagger(S/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Isoc}(X/K) & \xrightarrow{R^i f_{conv*}} & \text{Isoc}(S/K) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs d'oubli.

De plus ces foncteurs commutent à tout changement de base $S' \rightarrow S$ entre k -schémas lisses et séparés; en particulier ils commutent aux passages aux fibres en les points fermés de S .

Démonstration. Il suffit de décomposer S en schémas affines et lisses sur k et d'opérer les recollements comme dans la preuve de (3.4.8.2). \square

Références

- [B 1] P. Berthelot : *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* , Lecture Notes in Math. 407, Springer (1974).
- [B 2] P. Berthelot : *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p* , Bulletin de la SMF, mémoire n° 23, t. 114 / fasc 2, (1986) 7-32.
- [B 3] P. Berthelot : *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Prépublication 93-03 de Rennes (1996).
- [B 4] P. Berthelot : *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, Invent. Math. 128, (1997) 329-377.
- [B 5] P. Berthelot : *Cohomologie rigide*, § 3, préprint (14/09/89) non publié.
- [B 6] P. Berthelot : *Cohomologie rigide et théorie de Dwork : le cas des sommes exponentielles*, Astérisque n° 119-120 (1984), 17-49.
- [Bo-Dw-R] S. Bosch, B. Dwork, Ph. Robba : *Un théorème de prolongement pour des fonctions analytiques*, Math. Ann. 252 (1980) 165-173.
- [B-G-R] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert : *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 261, Springer Verlag (1984).
- [Bo-Lü 1] S. Bosch, W. Lütkebohmert : *Formal and rigid geometry I. Rigid Spaces*, Math. Ann. 295, (1993) 291-317.
- [Bo-Lü 2] S. Bosch, W. Lütkebohmert : *Formal and rigid geometry II. Flattening techniques*, Math. Ann. 296, (1993) 403-429.
- [Bour] N. Bourbaki : *Algèbre [A] chap. I à VII ; Algèbre commutative [AC] chap. I à X ; Topologie Générale [TG] chap. I à X*.
- [C-E] H. Cartan, S. Eilenberg : *Homological Algebra*, Princeton University Press, (1956).
- [C-T] B. Chiarellotto, N. Tsuzuki : *Cohomological descent of rigid cohomology for étale coverings*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 109, (2003).
- [EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné : *Eléments de Géométrie Algébrique* : Chap. I, Springer Grundlehren 166 ; Chap. II, III, IV, Pub. Math. IHES n° 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.
- [Et 1] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 107, (2002), 111-138.

- [Et 2] J.-Y. Etesse : *Descente étale des F -isocristaux surconvergents et rationalité des fonctions L de schémas abéliens*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 35, (2002), 575-603.
- [Et 3] J.-Y. Etesse : *Introduction to L - functions of F -isocrystals*, in *Geometric Aspects of Dwork Theory*, Vol. II, de Gruyter, (2004), 701-710.
- [Et 4] J.-Y. Etesse : *Images directes et fonctions L en cohomologie rigide*, hal.00262316/ arXiv :0803.1580.
- [Et 5] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité II*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, vol 122, (2009), 205-234.
- [Et 6] J.-Y. Etesse : *Images directes II : F -isocristaux convergents*, hal-00425919/arXiv : 0910.4434.
- [Et 7] J.-Y. Etesse : *Images directes III : Images directes de F -isocristaux surconvergents*, hal-00425922/arXiv : 0910.4435.
- [Et 8] J.-Y. Etesse : *Cohomologie syntomique : liens avec la cohomologie étale et la cohomologie rigide*, hal-00425926/ arXiv : 0910.4436.
- [Et 9] J.-Y. Etesse : *Fonctions L en cohomologie rigide*, préprint.
- [G-K 1] E. Große-Klönne : *de Rham-Kohomologie in der rigiden Analysis*, Preprintreihe der Universität Münster SFB 478, Heft 39 (1999).
- [G-K 2] E. Große-Klönne : *Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf*, Journal für die reine und angewandte Math. 519,(2000), 73-95.
- [G] A. Grothendieck : *Fondements de la Géométrie Algébrique*, Extraits du Séminaire Bourbaki 1957-1962, Secrétariat Mathématique (1962).
- [J] C. U. Jensen : *Les Foncteurs Dérivés de \varprojlim et leur Applications en Théorie des Modules*, Lecture Notes in Math. 254, Springer (1972).
- [K] N. Katz : *Nilpotent connections and the monodromy theorem : application of a result of Turritin*, Pub. Math. IHES 39(1970), 175-232.
- [Ked 1] K. Kedlaya : *Finiteness of rigid cohomology with coefficients*, Preprint, arxiv : math.AG/0208027. Duke Math. J. 134 (2006), 15-97.
- [Ked 2] K. Kedlaya : *Full faithfulness for overconvergent F -crystals*, in *Geometric Aspects of Dwork Theory*, Vol. II, de Gruyter (2004), 819-835.

- [Ked 3] K. Kedlaya : *Semistable reduction for overconvergent F -isocrystals, I : Unipotence and logarithmic extensions*, Preprint, arxiv : math.NT/0405069 v3, 24 Jul 2005. *Compositio Math.* 143 (2007), 1164-1212.
- [LS] B. Le Stum : *Rigid Cohomology*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press (2007).
- [Lü] Lütkebohmert W. : *Formal-algebraic and rigid-analytic geometry*, *Math. Ann.* 286 (1990), 341-371.
- [M-T] S. Matsuda, F. Trihan : *Image directe supérieure et unipotence*, *J. Reine Angew. Math.* 569 (2004), 47-54.
- [Shi 1] A. Shiho : *Crystalline Fundamental Groups II- Log Convergent Cohomology and Rigid Cohomology*, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 9 (2002), 1-163.
- [Shi 2] A. Shiho : *Relative Log Convergent Cohomology and Relative Rigid Cohomology I*, arXiv : 0707.1742v1 [math.NT] 12 Jul 2007.
- [Shi 3] A. Shiho : *Relative Log Convergent Cohomology and Relative Rigid Cohomology II*, arXiv : 0707.1743v1 [math.NT] 12 Jul 2007.
- [SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, *Lecture Notes in Math.* 269, 270, 305, Springer (1972, 1973).
- [Tri] Trihan F. : *Image directe supérieure et unipotence*, Preprint University of Tokyo (2001).
- [Tsu] N. Tsuzuki : *On base change theorem and coherence in rigid cohomology*, *Documenta Mathematica, Extra Volume : Kazuya Kato's Fiftieth Birthday* (2003), 891-918.