



HAL
open science

Entre analyse complexe et superanalyse

Pierre Bonneau, Anne Cumenge

► **To cite this version:**

| Pierre Bonneau, Anne Cumenge. Entre analyse complexe et superanalyse. 2009. hal-00424624v1

HAL Id: hal-00424624

<https://hal.science/hal-00424624v1>

Preprint submitted on 17 Oct 2009 (v1), last revised 3 Jan 2012 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ENTRE ANALYSE COMPLEXE ET SUPERANALYSE.

Pierre Bonneau, Anne Cumenge
Equipe Emile Picard, Institut de Mathématiques,
Université Paul Sabatier - 31062 Toulouse Cedex 9

pierre.bonneau@math.univ-toulouse.fr, anne.cumenge@math.univ-toulouse.fr

0. INTRODUCTION.

L'analyse complexe s'est fortement développée au 19^e siècle, en particulier avec les travaux de Cauchy, Riemann et Weierstass. Les essais de généralisation en dimension supérieure conduisirent à la construction des quaternions et des octonions. Toutefois, ces nouveaux objets s'avèrent alors un peu décevants au niveau de l'analyse. Par ailleurs, de fortes limitations à ce type de généralisations furent obtenues, entre autres par Frobenius avec une classification des algèbres associatives de division réelles de dimensions finies, ou par Bott et Milnor qui démontrèrent le théorème suivant.

Théorème ([BM]) : L'espace vectoriel \mathbb{R}^n possède une opération produit bilinéaire sans diviseur de 0 seulement pour $n=1,2,4$ ou 8 .

Pour $n=4$ et 8 , on obtient respectivement les quaternions et les octonions. Dans le cas de \mathbb{R}^2 , la condition d'intégrité est équivalente à l'existence d'un élément i de \mathbb{R}^2 tel que $1 + i^2 = 0$.

Sachant qu'il est impossible de trouver en dimensions supérieures des algèbres associatives de division, nous rechercherons des algèbres ayant de bonnes propriétés analytiques, c'est-à-dire dans lesquelles existe une théorie des fonctions analogue à l'analyse complexe. Par conséquent, nous essaierons d'étendre, en dimension supérieure à deux, le point de vue de Cauchy-Riemann sur l'analyse complexe (fonctions dérivables et représentation intégrale).

Nos résultats sont valables dans une algèbre commutative, mais pour accroître leur généralité, nous nous placerons dans le cadre de la superanalyse.

Il est à noter que, contrairement à l'analyse complexe ou quaternionique, nous ne disposons pas d'un opérateur de conjugaison sur les algèbres $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ – où les éléments de Λ_0 (resp. Λ_1) commutent (resp. anti-commutent) entre eux – et les superespaces $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ associés à Λ que nous considérons.

Nous définirons sur certains superespaces un opérateur d'' de Cauchy-Riemann dont le noyau coïncidera avec l'espace des fonctions superdifférentiables (S-différentiables en abrégé).

Des conditions (A_j) , $j = 0, 1$ sur Λ_j , à mettre en parallèle avec la relation complexe $1 + i^2 = 0$, s'imposent alors de manière naturelle lorsque nous cherchons une solution fondamentale de cet opérateur d'' .

Nous obtenons en particulier une formule de représentation avec opérateurs intégraux à noyaux explicites :

Théorème 0.1. *On suppose les conditions (A_0) et (A_1) satisfaites par l'algèbre $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$. Soit D ouvert de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ borné et à frontière C^1 et f forme différentielle continue sur \overline{D} et de classe C^1 dans D , alors*

$$f(x) = \int_{\partial D} f(y)K(y, x) - \int_D d'' f(y)K(y, x) + d'' \int_D f(y)K(y, x), \quad x \in D.$$

et un théorème de type Hartogs :

Théorème 0.2. *On suppose que la superalgèbre commutative Λ vérifie une propriété (\mathcal{P}) de positivité et toujours les conditions (A_0) et (A_1) . Alors une fonction f définie sur un domaine Ω de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ à valeurs dans Λ séparément S-différentiable en les variables $y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m$ est S-différentiable en tout point $x = (y, \theta)$ de Ω .*

Dans une première partie, nous précisons nos notations et rappellerons les principales notions de superanalyse, suivant, pour l'essentiel, la présentation de Khrennikov [K]. Nous fournirons aussi quelques exemples.

Dans la seconde partie, suivant le point de vue "riemannien" de l'analyse complexe, nous définirons un opérateur de Cauchy-Riemann dont le noyau est constitué des fonctions super-différentiables en les variables commutatives et "quasi"-super-différentiables en les variables anti-commutatives.

La troisième partie sera dévolue à la recherche de représentations intégrales pour les fonctions définies dans un super-espace et à valeurs dans notre algèbre. C'est dans ce paragraphe qu'apparaîtront les conditions (A_0) et (A_1) , qui fourniront une superanalyse aux propriétés étonnamment voisines de l'analyse complexe. Les représentations intégrales seront alors l'outil que nous utiliserons pour étudier les propriétés des fonctions super-différentiables.

Dans la quatrième partie, nous donnerons les premières propriétés d'analyticité de ces fonctions.

La cinquième partie sera consacrée à la démonstration d'un théorème analogue au théorème de Hartogs sur l'analyticité séparée des fonctions holomorphes et d'un théorème de prolongement des fonctions super-différentiables.

L'objectif de l'article n'est pas un recensement exhaustif des propriétés des fonctions super-différentiables ; il essaie de souligner une étrange proximité, sous certaines conditions, entre l'analyse complexe et la superanalyse.

1. LA SUPERANALYSE.

Conformément à [K], nous noterons Λ une superalgèbre commutative réelle (en abrégé CSA).

Un \mathbb{R} -espace vectoriel Z_2 -gradué $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ muni d'une fonction parité σ définie sur les éléments homogènes par $\sigma(a) = 0$ (resp. 1) si $a \in \Lambda_0$ (resp. si $a \in \Lambda_1$) devient une superalgèbre si on le munit d'une structure d'algèbre associative unitaire dont la multiplication vérifie la propriété $\sigma(ab) = \sigma(a) + \sigma(b)$ (mod. 2) pour tout couple (a, b) d'éléments homogènes.

Le supercommutateur est défini sur les éléments homogènes par $[a, b] = ab - (-1)^{\sigma(a)\sigma(b)}ba$ (et prolongé par bilinéarité). Une superalgèbre est dite (super)commutative si pour tout couple (a, b) d'éléments homogènes $[a, b] = 0$.

Nous définissons le Λ_1 -annihilateur comme étant ${}^{\perp}\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda : \lambda\Lambda_1 = 0\}$. Toutes les CSA considérées ici seront de dimensions finies. Nous noterons (e_0, e_1, \dots, e_p) une base de Λ_0 (e_0 est l'élément unité de Λ), $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q) = (e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_{p+q})$ une base de Λ_1 , et définissons les coefficients de structure (d'algèbre) Γ de Λ par $e_i e_j = \sum_{k=0}^{p+q} \Gamma_{i,j}^k e_k$ pour $i, j = 0, 1, \dots, p+q$. On remarque que, d'après la définition d'une CSA, les coefficients Γ sont symétriques en (i, j) si i ou $j \in \{0, 1, \dots, p\}$, anti-symétriques si i et $j \in \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$.

On appelle superespace sur la CSA Λ tout \mathbb{R} -espace vectoriel

$$\mathbb{R}_{\Lambda}^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$$

où $n, m \in \mathbb{N}$.

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}_{\Lambda}^{n,m}$ et F une application de U dans Λ , nous disons que F est *superdifférentiable* (ou *S-différentiable*) en $x \in U$ s'il existe des éléments $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)$ de Λ , $j = 1, \dots, n+m$ tels que, pour tout $h \in \mathbb{R}_{\Lambda}^{n,m}$ tel que $x+h \in U$, on ait

$$F(x+h) = F(x) + \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) h_j + o(h)$$

avec $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0$ où $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{\Lambda}^{n,m}$.

Nous remarquons que $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)$ sont définis de façon unique par la condition ci-dessus, tandis que $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n+m}}(x)$ sont définis modulo ${}^{\perp}\Lambda_1$. La condition de S-différentiabilité de F exprime donc le fait que F est différentiable et que sa dérivée est définie par les opérateurs de multiplication par des éléments de Λ .

EXEMPLE 1. Si $\Lambda_1 = 0$ et $\Lambda_0 = \text{Vect}(e_0, e_1)$ avec $e_0 = 1$ et $e_1^2 = -e_0$, les fonctions S-différentiables sont les fonctions holomorphes et la superanalyse est alors l'analyse complexe.

EXEMPLE 2. (*Analyse hyperbolique.*) : $\Lambda_1 = 0$ et $\Lambda_0 = \text{Vect}(e_0, e_1)$ avec $e_0 = 1$ et $(e_1)^2 = e_0$.

$f = u e_0 + v e_1$ S-diff. $\iff \frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial v}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_0}$

Alors f , u et v vérifient l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0$.

Remarque : soient φ et ψ fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R} . Alors $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$ définie par $f(xe_0 + ye_1) = [\varphi(x + y) + \psi(x - y)]e_0 + [\varphi(x + y) - \psi(x - y)]e_1$ est S-différentiable, mais pas plus régulière que ne le sont φ et ψ .

EXEMPLE 3. Soit A une algèbre de Clifford réelle de dimension 2^k dont les générateurs e_1, \dots, e_k vérifient $e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}$; A peut s'écrire comme une superalgèbre $A = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ avec $\Lambda_0 = Vect\{e_I; |I| \text{ pair}\}$, $\Lambda_1 = Vect\{e_I; |I| \text{ impair}\}$, où $e_\emptyset = 1$, et si $I = (i_1, \dots, i_\nu)$, $e_I = e_{i_1} \dots e_{i_\nu}$.

EXEMPLE 4. Supposons Λ_1 et Λ_0 de dimensions respectives 4 et 6, avec la table de multiplication suivante :

\times	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	ε_2	$-\varepsilon_1$	ε_4	$-\varepsilon_3$
e_2	e_2	e_3	0	0	0	0	0	0	0	0
e_3	e_3	$-e_2$	0	0	0	0	0	0	0	0
e_4	e_4	e_5	0	0	e_4	e_5	0	0	0	0
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	e_5	$-e_4$	0	0	0	0
ε_1	ε_1	ε_2	0	0	0	0	0	0	$-e_3$	e_2
ε_2	ε_2	$-\varepsilon_1$	0	0	0	0	0	0	e_2	e_3
ε_3	ε_3	ε_4	0	0	0	0	e_3	$-e_2$	0	0
ε_4	ε_4	$-\varepsilon_3$	0	0	0	0	$-e_2$	$-e_3$	0	0

L'ensemble des nilpotents de Λ_0 est ici $Vect(e_2, e_3)$ donc l'algèbre Λ_0 n'est isomorphe à aucun produit d'algèbres $\prod_{j=1}^s L_j$, où les L_j sont des extensions de \mathbb{R} .

2. L'OPÉRATEUR DE CAUCHY-RIEMANN EN SUPERANALYSE.

Soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ dans $\Lambda = \Lambda_0 \times \Lambda_1$. Il sera commode, comme dans [K], d'écrire $x \in \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ sous la forme $x = (y, \theta)$ avec $y \in \Lambda_0^n$ et $\theta \in \Lambda_1^m$. Ainsi $f(x) = f(y, \theta) = f(y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) = \sum_{k=0}^p f_k(x)e_k + \sum_{l=1}^q f_{p+l}(x)\varepsilon_l$, avec $y_i = \sum_{k=0}^p y_i^k e_k \in \Lambda_0$ et $\theta_j = \sum_{l=1}^q \theta_j^l \varepsilon_l$ où f_0, \dots, f_{p+q} sont des fonctions réelles. Par conséquent

$$\begin{aligned}
df(x) &= \sum_{k=0}^p df_k(x)e_k + \sum_{l=1}^q df_{p+l}(x)\varepsilon_l \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k'=0}^p \left[\sum_{k=0}^p \frac{\partial f_k}{\partial y_i^{k'}}(x)e_k + \sum_{l=1}^q \frac{\partial f_{p+l}}{\partial y_i^{k'}}(x)\varepsilon_l \right] dy_i^{k'} \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{l'=1}^q \left[\sum_{k=0}^p \frac{\partial f_k}{\partial \theta_j^{l'}}(x)e_k + \sum_{l=1}^q \frac{\partial f_{p+l}}{\partial \theta_j^{l'}}(x)\varepsilon_l \right] d\theta_j^{l'} \\
(2.1) \quad &= \sum_{i=1}^n \sum_{k'=0}^p \frac{\partial f}{\partial y_i^{k'}}(x) dy_i^{k'} + \sum_{j=1}^m \sum_{l'=1}^q \frac{\partial f}{\partial \theta_j^{l'}}(x) d\theta_j^{l'}
\end{aligned}$$

Définition : f est S-différentiable en x s'il existe $\frac{\partial f}{\partial y_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}(x), \frac{\partial f}{\partial \theta_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta_m}(x) \in \Lambda$ tels que si $h = (h_1, \dots, h_n, h'_1, \dots, h'_m) \in \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$,

$$\begin{aligned}
df(x)(h) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(x) h_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(x) h'_j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k'=0}^p \frac{\partial f}{\partial y_i^{k'}}(x) e_{k'} dy_i^{k'}(h) + \sum_{j=1}^m \sum_{l'=1}^q \frac{\partial f}{\partial \theta_j^{l'}}(x) \varepsilon_{l'} d\theta_j^{l'}(h)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire si

$$\begin{aligned}
\forall i = 1, \dots, n; \forall k' = 0, \dots, p; \quad \frac{\partial f}{\partial y_i}(x) e_{k'} &= \frac{\partial f}{\partial y_i^{k'}}(x), \\
\forall j = 1, \dots, m; \forall l' = 1, \dots, q; \quad \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(x) \varepsilon_{l'} &= \frac{\partial f}{\partial \theta_j^{l'}}(x),
\end{aligned}$$

ou encore, puisque $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial y_i^0}(x)$:

PROPRIÉTÉ : une fonction f Fréchet-différentiable en ses variables réelles est S-différentiable en $x \in \Lambda$ si

$$(2.2) \quad \frac{\partial f}{\partial y_i^{k'}}(x) = \frac{\partial f}{\partial y_i^0}(x)e_{k'}, \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ et } \forall k' = 1, \dots, p$$

$$(2.3) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \theta_j^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta_j^q}(x) \right) \in \Lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q) := \{(a\varepsilon_1, \dots, a\varepsilon_q), a \in \Lambda\}, \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Rappelons que $\frac{\partial f}{\partial \theta_j^l}(x)$ est défini modulo ${}^\perp \Lambda_1$.

Nous sommes ainsi amenés naturellement à traiter différemment les "variables commutatives" y_1, \dots, y_n et les "variables anti-commutatives" $\theta_1, \dots, \theta_m$.

2.1. Etude dans Λ_0^n . Oublions provisoirement les variables anti-commutatives et intéressons-nous aux variables y_1, \dots, y_n . Et, d'abord, considérons le cas $n=1$.

Soit f une fonction d'un ouvert U de Λ_0 dans Λ . Si $x = \sum_{k=0}^p x^k e_k \in U$, alors f est S-différentiable en x si $df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^0}(x) \sum_{k=0}^p e_k dx^k$ puisque, pour tout k , $\frac{\partial f}{\partial x^k}(x) = \frac{\partial f}{\partial x^0}(x)e_k$ comme nous venons de le voir. Dans le cas général, nous décomposerons $df(x)$ en une partie Λ_0 -linéaire notée $d'f(x)$ et un reste noté $d''f(x)$:

$$df(x) = d'f(x) + d''f(x)$$

avec

$$d'f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^0}(x) \sum_{k=0}^p e_k dx^k,$$

$$d''f(x) = \sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}(x) - e_k \frac{\partial f}{\partial x^0}(x) \right) dx^k.$$

Plus généralement, si ω est une forme différentielle définie dans U , à valeurs dans Λ , nous définissons

$$(2.4) \quad d'\omega = \sum_{k=0}^p e_k dx^k \frac{\partial \omega}{\partial x^0},$$

$$(2.5) \quad d''\omega = \sum_{k=1}^p dx^k \left(\frac{\partial \omega}{\partial x^k} - e_k \frac{\partial \omega}{\partial x^0} \right).$$

On vérifie immédiatement que $d'^2 = d''^2 = 0$ et donc $d''d' + d'd'' = 0$. Une fonction f est S-différentiable dans U si et seulement si $d''f = 0$ dans U . On généralise aisément au cas de plusieurs "variables commutatives". Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Lambda_0^n$ avec $x_i = \sum_{k=0}^p x_i^k e_k$, on définit pour ω une forme différentielle de degré quelconque définie dans un ouvert U de Λ_0^n , et à valeurs dans Λ ,

$$(2.6) \quad d''\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p dx_i^k \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i^k} - e_k \frac{\partial \omega}{\partial x_i^0} \right),$$

$$(2.7) \quad d'\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^p e_k dx_i^k \frac{\partial \omega}{\partial x_i^0}.$$

REMARQUE : dans le cas de $\Lambda_0 = \mathbb{C}$, la façon traditionnelle de définir l'opérateur de Cauchy-Riemann n'est pas la même que ci-dessus, puisque l'habitude est de faire éclater df en une partie \mathbb{C} -linéaire et une partie \mathbb{C} -antilinéaire. Cette procédure ne peut marcher ici car nous n'avons pas, dans le cas général, d'opérateur de conjugaison. Toutefois, l'opérateur de Cauchy-Riemann habituel dans \mathbb{C} et celui qui est défini ci-dessus ont le même noyau, l'ensemble des fonctions holomorphes. Et c'est ce qui nous importe, puisque notre objectif est l'étude des fonctions S-différentiables (c'est-à-dire, dans le cas de \mathbb{C} , des fonctions holomorphes).

2.2. Etude dans Λ_1^m . Occupons nous, maintenant, des "variables non-commutatives", et, tout d'abord, du cas d'une seule variable anti-commutative. Soit f une fonction définie dans un ouvert U de Λ_1 , à valeurs dans Λ . Si $\theta = \sum_{l=1}^q \theta^l \varepsilon_l \in U$, f est S-différentiable en θ s'il existe un élément $\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta)$ de Λ tel que, pour tout $l = 1, \dots, q$, $\frac{\partial f}{\partial \theta^l}(\theta) = \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta)\varepsilon_l$.

Mais, contrairement au cas des "variables commutatives", il n'existe, en général, aucun moyen canonique pour déterminer le coefficient multiplicatif $\frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta)$ de l'application Λ_1 -linéaire $d'f(\theta)$; autrement dit, il n'existe, en général, aucun moyen naturel pour décomposer $df(\theta)$ en une partie Λ_1 -linéaire et un reste. Pour conserver le maximum de souplesse dans le choix de ces projections associées de $df(\theta)$, nous supposons que nous disposons d'une norme $\| \cdot \|$ dans Λ (norme sous-additive $\|xx'\| \leq C\|x\|\|x'\|$) déduite d'un produit scalaire g ($e_i e_j = g_{i,j}$ pour $i, j = 0, 1, \dots, p+q$).

Nous cherchons à définir un opérateur d'' dont le noyau contient les fonctions S-différentiables. Nous pourrions effectuer une projection orthogonale de $(\frac{\partial f}{\partial \theta^1}(\theta), \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta^q}(\theta))$ sur $\Lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ afin de définir d'abord $d' = d - d''$ puis d'' , mais cela ne donne pas, en général, un opérateur d'' vraiment explicite et, partant, il semble difficile d'obtenir ainsi une solution fondamentale explicite pour l'opérateur d'' , ce qui sera l'objectif du paragraphe suivant.

d'' est bien plus explicite si nous supposons satisfaite la condition suivante :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & \text{il existe une suite finie } 1 = s_1 < s_2 < \dots < s_r < s_{r+1} = q + 1 \text{ telle que} \\ & \varepsilon_j = \varepsilon_{s_k} a_j \text{ si } s_k \leq j < s_{k+1} \text{ où } a_j \in \Lambda \text{ et } a_{s_1} = a_{s_2} = \dots = a_{s_r} = e_0 \end{aligned}$$

(en fait a_j est un élément de Λ_0).

Alors :

PROPRIÉTÉ : Sous la condition (2.8) sur Λ_1 , une fonction f est S-différentiable en $\theta \in \Lambda_1$ si

$$(2.9) \quad (\frac{\partial f}{\partial \theta^{s_1}}(\theta), \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta^{s_r}}(\theta)) \in \Lambda(\varepsilon_{s_1}, \dots, \varepsilon_{s_r})$$

$$(2.10) \quad \frac{\partial f}{\partial \theta^j}(\theta) = \frac{\partial f}{\partial \theta^{s_k}}(\theta) a_j \text{ si } s_k \leq j < s_{k+1}$$

La plus utile des deux relations ci-dessus lorsque nous chercherons à donner des propriétés de régularité des fonctions S-différentiables sur un ouvert de Λ_1 sera (2.10). Nous sommes donc amenés à poser

$$d''(= d''_\theta) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta^j \left(\frac{\partial}{\partial \theta^j} - a_j \frac{\partial}{\partial \theta^{s_k}} \right),$$

et

$$d' = d - d'' = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} d\theta^j a_j \frac{\partial}{\partial \theta^{s_k}}$$

On vérifie immédiatement que $d'^2 = d''^2 = 0$ et $d' d'' + d'' d' = 0$.

On généralise au cas de plusieurs "variables anti-commutatives" : Si $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \Lambda_1^m$ avec $\theta_i = \sum_{j=1}^q \theta_i^j \varepsilon_j$, on définit pour une forme différentielle ω définie dans un ouvert U de Λ_1^m ,

$$(2.11) \quad d'\omega = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} a_j d\theta_i^j \frac{\partial \omega}{\partial \theta_i^{s_k}}$$

$$(2.12) \quad d''\omega = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta_i^j \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta_i^j} - \frac{\partial \omega}{\partial \theta_i^{s_k}} a_j \right)$$

2.3. Cas général. Enfin, dans le cas d'un superespace $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ sur la CSA Λ , un élément x de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ est noté $x = (y, \theta) = (y_1, y_2, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) \in \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ avec $y_i = \sum_{j=0}^p y_i^j e_j$ et $\theta_k = \sum_{l=1}^q \theta_k^l \varepsilon_l$. Les variables anti-commutatives $\theta_1, \dots, \theta_m$ étant fixées, nous avons défini d''_y l'opérateur de Cauchy-Riemann dans Λ_0^n , $d''_y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p dy_i^j (\frac{\partial}{\partial y_i^j} - e_j \frac{\partial}{\partial y_i^0})$. Les variables commutatives y_1, \dots, y_n étant fixées, nous savons aussi définir d''_θ l'opérateur de Cauchy-Riemann dans Λ_1^m , nous pouvons définir l'opérateur de Cauchy-Riemann d'' dans $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ en posant $d'' = d''_y + d''_\theta$.

3. REPRÉSENTATION INTÉGRALE ET SOLUTION FONDAMENTALE DE d'' .

Si D est un ouvert de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ borné et à frontière lisse, si f est une forme continue dans \overline{D} et de classe C^1 dans D , nous cherchons une représentation intégrale de f , c'est-à-dire nous essayons d'écrire

$$(3.1) \quad f(x) = \int_{\partial D} f(y) K(y, x) - \int_D d'' f(y) K(y, x) + d'' \int_D f(y) K(y, x), \quad x \in D$$

Cette représentation intégrale peut s'écrire en termes de courants $d'' K(y, x) = [\Delta]$ où $[\Delta]$ est le courant d'intégration sur la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in D\}$ (voir [HP]). Un noyau $K(y, x)$ vérifiant cette dernière égalité est appelé solution fondamentale de l'opérateur de Cauchy-Riemann d'' . Chercher une formule de représentation intégrale pour d'' équivaut donc à chercher une solution fondamentale de d'' .

Soit $\Psi : \overline{D} \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ définie par $\Psi(y, x) = y - x$. Alors $[\Delta] = \Psi^*([0])$ où $[0]$ est le courant d'évaluation en $0 \in \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$. Donc $d'' K = [\Delta]$ s'écrit aussi $d'' \Omega = [0]$ si l'on pose $K = \Psi^* \Omega$ (le premier $d'' K$ porte sur les deux variables (x, y) , $d'' = d''_y + d''_x$, tandis que le second $d'' \Omega$ porte sur la variable $x' = y - x$ que nous noterons x).

Comme dans le paragraphe précédent, nous allons d'abord supposer que f est une forme en $x \in \Lambda_0$ (donc $n = 1$ dans un premier temps) et fixer les variables $\theta \in \Lambda_1^m$. Dans le cas $\Lambda_0 = \mathbb{C}$, une solution fondamentale de $d''\Omega = [0]$ est $\Omega = \frac{1}{2i\pi z}$. Mais pour $p > 1$, notre algèbre commutative Λ_0 n'est pas intègre (cf. [BM] ou le théorème de Frobenius classifiant les algèbres réelles associatives de division de dimensions finies). Nous n'avons pas non plus de conjugaison sur Λ_0 comme en analyse complexe ou quaternionique, et un noyau résolvant de type Bochner-Martinelli n'est pas envisageable.

Nous devons chercher une solution fondamentale sous une autre forme. Nous munissons Λ_0 d'une norme euclidienne $\| \cdot \|$ pour laquelle (e_0, \dots, e_p) est une base orthonormée (avec e_0 l'élément unité).

Lemme 3.1. *Soit $\Omega(x) = \frac{A(x)}{\|x\|^{p+k}}$ où $A(x) = \sum_{i=1}^p (-1)^i A_i(x) \widehat{dx}_i$ est une p -forme à coefficients $A_i(x)$ polynômes (en x_0, \dots, x_p) homogènes de degré k et vérifiant $d''\Omega = 0$ hors de 0. Alors $d''\Omega = - \left(\int_{\|x\| \leq 1} d''A \right) \times [0]$.*

PREUVE : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda_0)$ une fonction test.

$$\begin{aligned}
\langle d''\Omega, \varphi \rangle &= \langle \Omega, d''\varphi \rangle = \langle \Omega, \sum_{i=0}^p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - e_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right) dx_i \rangle \\
&= \int \sum_{i=1}^p \frac{A_i}{\|x\|^{p+k}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - e_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right) dx_1 \dots dx_p \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \sum_{i=1}^p \frac{A_i}{\|x\|^{p+k}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - e_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \right) dx_1 \dots dx_p \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| > \varepsilon} d \left[\sum_{i=1}^p \frac{A_i \varphi \widehat{dx}_i}{\|x\|^{p+k}} - \frac{A_i e_i \varphi \widehat{dx}_0}{\|x\|^{p+k}} \right] + \int_{\|x\| > \varepsilon} \varphi d''\Omega \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{p+k}} \int_{\|x\| = \varepsilon} \varphi \sum_{i=1}^p A_i \widehat{dx}_i (-1)^i - A_i e_i \widehat{dx}_0 \\
&= -\varphi(0) \int_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^p (-1)^i A_i \widehat{dx}_i - e_i A_i \widehat{dx}_0 \\
&= -\varphi(0) \int_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^p \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - e_i \frac{\partial A_i}{\partial x_0} \right) dx_1 \dots dx_p = -\varphi(0) \int_{\|x\| \leq 1} d''A.
\end{aligned}$$

Ainsi, grâce à ce lemme, pour obtenir une solution fondamentale pour d'' , nous allons chercher $\Omega(x) = \frac{A(x)}{\|x\|^{p+1}}$ avec $A(x)$ p -forme à coefficients polynômes homogènes de degré 1 vérifiant $\int_{\|x\| \leq 1} d''A \neq 0$.

REMARQUE : hors de 0, $d''\Omega = 0$ s'écrit $\frac{d''A}{\|x\|^{p+1}} - \frac{p+1}{2} \frac{d''\|x\|^2}{\|x\|^{p+3}} \wedge A = 0$, c'est-à-dire

$d''A - d'' \log \|x\|^{p+1} \wedge A = 0$. Si ω est une forme régulière (hors de 0), définissons l'opérateur T par :

$$T(\omega) = d''\omega - d'' \log \|x\|^{p+1} \wedge \omega.$$

Il est immédiat que $T^2 = 0$. On a donc envie de choisir $A = T(v)$ où v est une $(p-1)$ -forme, de façon à avoir $d''\Omega = 0$ hors de 0. Mais on vérifie qu'alors $\int_{\|x\| \leq 1} d''A = 0$ et donc, d'après le lemme, on obtiendrait $d''\Omega = 0$ au lieu de $d''\Omega = [0]$.

Par conséquent, nous considérons

$$(3.2) \quad \Omega = \frac{1}{\|x\|^{p+1}} \sum_{j=1}^p (-1)^j \widehat{dx}_j \sum_{k=0}^p b_j^k x_k = \frac{A}{\|x\|^{p+1}}.$$

où $b_j^k \in \Lambda$ et $x = \sum_{k=0}^p x_k e_k$. Nous allons choisir les éléments b_j^k de Λ de façon à obtenir $d''\Omega = 0$ hors de 0. Par un calcul direct,

$$(3.3) \quad d''\Omega = \left[\sum_{j=1}^p \frac{b_j^j - e_j b_j^0}{\|x\|^{p+1}} - (p+1) \frac{x_j e_0 - x_0 e_j}{\|x\|^{p+3}} \sum_{k=0}^p b_j^k x_k \right] dx_0 dx_1 \dots dx_p.$$

$d''\Omega = 0$ s'écrit donc

$$(3.4) \quad \sum_{j=1}^p (b_j^j - e_j b_j^0) - \frac{p+1}{\|x\|^2} \left[\sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^p x_j x_k b_j^k - \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^p x_0 x_k e_j b_j^k \right] = 0$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^p (b_j^j - e_j b_j^0) - \frac{p+1}{\|x\|^2} \left[-x_0^2 \sum_{j=1}^p e_j b_j^0 + \sum_{j=1}^p x_j^2 b_j^j + \sum_{j=1}^p x_0 x_j (b_j^0 - \sum_{k=1}^p e_k b_k^j) + \sum_{1 \leq j < k} x_j x_k (b_j^k + b_k^j) \right] = 0.$$

Il faut donc annuler le polynôme obtenu en multipliant par $\|x\|^2$ le premier membre, ce qui donne :

$$\begin{cases} b_j^0 = \sum_{k=1}^p e_k b_k^j; & j = 1, 2, \dots, p \\ b_j^k + b_k^j = 0; & j, k = 1, \dots, p; j \neq k \\ b_j^j = -\sum_{k=1}^p e_k b_k^0 = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^p (b_k^k - e_k b_k^0); & j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

La première ligne permettra de définir b_j^0 quand nous connaîtrons les b_k^j . La deuxième ligne donnera b_k^j quand nous connaîtrons b_j^k pour $j < k$. La dernière ligne exprime d'abord que tous les b_j^j sont égaux à une constante $b = -\sum_{k=1}^p e_k b_k^0$ et s'écrit donc, compte tenu des deux premières :

$$\begin{aligned} b &= -\sum_{k=1}^p e_k b_k^0 = -\sum_{k=1}^p e_k \sum_{l=1}^p e_l b_l^k = -\sum_{k,l=1}^p e_k e_l b_l^k \\ &= -\sum_{k=1}^p e_k^2 b_k^k - \sum_{k < l} e_k e_l b_l^k - \sum_{l < k} e_k e_l b_l^k \\ &= -\sum_{k=1}^p e_k^2 b - \sum_{k < l} e_k e_l (b_k^l + b_l^k) \\ &= -b \sum_{k=1}^p e_k^2. \end{aligned}$$

ou encore

$$(3.5) \quad b \sum_{k=0}^p e_k^2 = 0.$$

Alors trois cas se présentent.

Si $\sum_{k=0}^p e_k^2$ n'a pas de diviseur de 0, nécessairement $b = 0$ et donc $\int_{\|x\| \leq 1} d''A = 0$: nous n'avons pas de représentation intégrale.

Si $\sum_{k=0}^p e_k^2$ non nul a des diviseurs de 0, on prend pour b l'un de ces diviseurs et alors $\int_{\|x\| \leq 1} d''A$ est non inversible : nous n'avons pas une bonne représentation intégrale.

Enfin, si Λ_0 vérifie la condition (A_0) suivante :

$$(A_0) \quad \sum_{k=0}^p e_k^2 = 0,$$

nous prenons pour b un élément inversible de Λ , par exemple, $b = e_0$, et choisissons $b_j^k = 0$ si $j \neq k$; nous déduisons alors du lemme 3.1, puisque $\int_{\|x\| \leq 1} d''A = (p+1)e_0 \text{Vol}(B(0,1))$ où $\text{Vol}(B(0,1))$ est le volume de la boule unité de Λ_0 :

Proposition 3.2.

$$\Omega_0 = \frac{-1}{(p+1)\text{Vol}(B(0,1))\|x\|^{p+1}} \sum_{j=1}^p (-1)^j (x_0 e_j + x_j e_0) \widehat{dx_j}$$

est une solution fondamentale de d'' dans Λ_0 .

EXEMPLES : La condition (A_0) est vérifiée dans les exemples 1, 4 et, lorsque $k \equiv 2$ modulo 4, dans l'exemple 3 du paragraphe 1. Elle ne l'est pas dans le second exemple (ce serait d'ailleurs en contradiction avec la proposition 4.4 du paragraphe 4).

La condition (A_0) sera toujours supposée vérifiée dans la suite.

• Occupons nous, maintenant, de chercher une solution fondamentale pour l'opérateur d'' défini sur Λ_1 . De façon à disposer d'une expression explicite pour d'' , nous supposons satisfaite la condition (2.8); par conséquent, nous avons :

$$d'' = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta^j \left(\frac{\partial}{\partial \theta^j} - a_j \frac{\partial}{\partial \theta^{s_k}} \right),$$

Nous munissons Λ_1 d'un produit scalaire en supposant que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ est une base orthonormée, notons $\| \cdot \|$ la norme associée, et cherchons une solution fondamentale de la forme :

$$(3.6) \quad \Omega = \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{j-1} \widehat{d}\theta^j \sum_{l=1}^q \frac{b_j^l \theta^l}{\|\theta\|^q}$$

On calcule $d''\Omega$ hors de 0, et l'on note $dV = d\theta^1 \wedge \dots \wedge d\theta^q$,

$$\begin{aligned} d''\Omega &= \frac{1}{\|\theta\|^q} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (b_j^j - a_j b_j^{s_k}) dV \\ &\quad - \frac{q}{\|\theta\|^{q+2}} \left[\sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (\theta^j - a_j \theta^{s_k}) d\theta^j \right] \left[\sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} (-1)^{j-1} \widehat{d}\theta^j \sum_{l=1}^q b_j^l \theta^l \right] dV \\ &= \frac{1}{\|\theta\|^q} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (b_j^j - a_j b_j^{s_k}) dV - \frac{q}{\|\theta\|^{q+2}} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (\theta^j - a_j \theta^{s_k}) \left(\sum_{l=1}^q b_j^l \theta^l \right) dV. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|\theta\|^{q+2} d''\Omega \widehat{dV} &= \|\theta\|^2 \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (b_j^j - a_j b_j^{s_k}) \\ &\quad - q \left(- \sum_{k=1}^r (\theta^{s_k})^2 \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_k} + \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (\theta^j)^2 b_j^j \right) \\ &\quad + q \sum_{s_k < s_{k'}} \theta^{s_k} \theta^{s_{k'}} \left(\sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_{k'}} + \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j b_j^{s_k} \right) \\ &\quad - q \left[\sum_{k=1}^r \sum_{k'=1}^r \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} \theta^{s_k} \theta^j \left(b_j^{s_k} - \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_l b_l^j \right) + \sum_{\substack{j < k \\ j, k \neq s_0, \dots, s_r}} \theta^j \theta^k (b_j^k + b_k^j) \right]. \end{aligned}$$

On veut que $d''\Omega$ soit nul hors de 0, ce qui s'écrit donc :

$$\begin{aligned} b_j^k + b_k^j &= 0 \text{ si } j \neq k, \text{ } j \text{ et } k \notin \{s_1, \dots, s_r\} \\ b_j^{s_k} &= \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_l b_l^j \\ 0 &= \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_{k'}} + \sum_{s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j b_j^{s_k} \\ &\quad \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (b_j^j - a_j b_j^{s_k}) = q b_j^j = -q \sum_{j=s_{k_0}+1}^{s_{k_0+1}-1} a_j b_j^{s_{k_0}} \text{ pour tout } k_0 \in 0, \dots, r. \end{aligned}$$

Comme dans le cas de Λ_0 , la première ligne définit b_k^j à partir de b_j^k si $j < k$ et la deuxième définit $b_j^{s_k}$ à partir des b_j^k . La troisième ligne est une conséquence des deux premières. En effet, d'après les deux premières lignes, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_{k'}} + \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j b_j^{s_k} &= \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} \sum_{l=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j a_l b_l^j + \sum_{j=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j a_l b_l^j \\ &= \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} \sum_{l=s_{k'}+1}^{s_{k'+1}-1} a_j a_l (b_l^j + b_j^l) = 0. \end{aligned}$$

Enfin, la quatrième ligne exprime évidemment que tous les b_j^j sont égaux à une constante $b \in \Lambda$. Dès lors, la dernière égalité de la quatrième ligne s'écrit :

$$b = - \sum_{j=s_{k_0}+1}^{s_{k_0}+1-1} a_j b_j^{s_{k_0}} = - \sum_{j=s_{k_0}+1}^{s_{k_0}+1-1} \sum_{l=s_{k_0}+1}^{s_{k_0}+1-1} a_j a_l b_l^j = - \sum_{j<l} a_j a_l (b_j^l + b_l^j) - \sum_{j=s_{k_0}+1}^{s_{k_0}+1-1} a_j^2 b,$$

c'est-à-dire :

$$b \sum_{j=s_{k_0}}^{s_{k_0}+1-1} a_j^2 = 0$$

quand la première égalité de la quatrième ligne s'écrit :

$$b = \frac{-1}{r} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j b_j^{s_k} = \frac{-1}{r} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} \sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j a_l b_l^j = \frac{-1}{r} \sum_{k=1}^r \sum_{j<l} a_j a_l (b_j^l + b_l^j) - \frac{b}{r} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} a_j^2.$$

Comme l'on veut, tout comme dans Λ_0 , que b soit un élément inversible de Λ , afin d'obtenir une bonne formule de représentation intégrale, nous sommes amenés à imposer à Λ_1 la condition suivante :

(A₁) : Il existe une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ de Λ_1 vérifiant (2.8) et telle que $\forall k = 1, \dots, r : \sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} a_j^2 = 0$.

Dès lors que la condition (A₁) est satisfaite, nous pouvons écrire une solution fondamentale explicite pour l'opérateur d'' sur Λ_1 ; par exemple, prenant $b = e_0$ et $b_j^k = 0$ si $j \neq k$, $j, k \geq 2$, nous obtenons comme candidat :

$$(3.7) \quad \Omega_1 = \frac{-1}{q \text{Vol}(B(0,1)) \|\theta\|^q} \sum_{k=1}^r \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{j-1} (\theta^j e_0 + \theta^{s_k} a_j) \widehat{d\theta^j}.$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une solution fondamentale, nous devons étudier la singularité en 0, ce qui se fait de façon analogue au cas de Λ_0 , à l'aide du lemme 3.1 (voir aussi, ci-dessous, la démonstration dans $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$, dont le cas présent est un cas particulier).

EXEMPLE. Si l'on prend $\Lambda_1 = \varepsilon_1 \Lambda_0$, alors la condition (A₁) se ramène à la condition (A₀) si l'on pose $\varepsilon_j = \varepsilon_1 e_{j-1}$.

La condition (A₁) sera supposée satisfaite dans toute la suite.

Désormais, il reste à chercher une solution fondamentale pour d'' défini sur un superspace $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$. Nous supposons toujours satisfaites les conditions (A₀) et (A₁), et, dans ces conditions, en notant un élément x de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} : x = (y, \theta) = (y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m)$ avec $y_i = \sum_{j=0}^p y_i^j e_j$ et $\theta_k = \sum_{l=1}^q \theta_k^l \varepsilon_l$, nous avons défini, à la fin du paragraphe précédent, l'opérateur de Cauchy-Riemann par :

$$d'' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p dy_i^j \left(\frac{\partial}{\partial y_i^j} - e_j \frac{\partial}{\partial y_i^0} \right) + \sum_{l=1}^m \sum_{k=0}^r \sum_{t=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta_l^t \left(\frac{\partial}{\partial \theta_l^t} - \frac{\partial}{\partial \theta_l^{s_k}} a_t \right).$$

Nous notons

$$(3.8) \quad \begin{cases} \widehat{dy_i^j} &= dy_1^0 \dots dy_1^p \dots dy_i^0 \dots \widehat{dy_i^j} \dots dy_i^p \dots dy_n^0 \dots dy_n^p \dots d\theta_1^1 \dots d\theta_1^q \dots d\theta_m^1 \dots d\theta_m^q, \\ \widehat{d\theta_k^l} &= dy_1^0 \dots dy_1^p \dots dy_n^0 \dots dy_n^p \dots d\theta_1^1 \dots d\theta_1^q \dots d\theta_k^1 \dots \widehat{d\theta_k^l} \dots d\theta_k^q \dots d\theta_m^1 \dots d\theta_m^q, \\ dV &= dy_1^0 \dots dy_1^p \dots dy_n^0 \dots dy_n^p \dots d\theta_1^1 \dots d\theta_1^q \dots d\theta_m^1 \dots d\theta_m^q. \end{cases}$$

et, au vu des résultats précédents, cherchons une solution fondamentale de d'' sous la forme

$$\Omega = \frac{1}{\|x\|^{n(p+1)+qm}} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (-1)^{(p+1)(i-1)+j} \widehat{dy_i^j} \sum_{\alpha=0}^p A_i^{j,\alpha} y_i^\alpha \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{t=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{n(p+1)+t-1} \widehat{d\theta_l^t} \sum_{\beta=1}^q B_l^{t,\beta} \theta_l^\beta \right)$$

où $A_i^{j,\alpha}$ et $B_l^{t,\beta}$ sont des éléments de Λ . Par un calcul direct, nous obtenons $d''\Omega$, hors de 0 :

$$\begin{aligned} d''\Omega &= \frac{1}{\|x\|^{n(p+1)+qm}} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (A_i^{j,j} - e_j A_i^{j,0}) + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{t=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (B_l^{t,t} - a_t B_l^{t,s_k}) \right] dV \\ &\quad - \frac{n(p+1) + qm}{\|x\|^{n(p+1)+qm+2}} \left[\sum_i \sum_j (y_i^j - e_j y_i^0) dy_i^j + \sum_l \sum_k \sum_t (\theta_l^t - a_t \theta_l^{s_k}) d\theta_l^t \right] \times \\ &\quad \times \left[\sum_i \sum_j (-1)^{(i-1)(p+1)+j} \widehat{dy}_i^j \sum_{\alpha} A_i^{j,\alpha} y_i^{\alpha} + \sum_l \sum_k \sum_t (-1)^{n(p+1)+t-1} \widehat{d\theta}_l^t \sum_{\beta} B_l^{t,\beta} \theta_l^{\beta} \right] dV \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \|x\|^{n(p+1)+qm+2} d''\Omega \widehat{dV} &= \|x\|^2 \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (A_i^{j,j} - e_j A_i^{j,0}) + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{t=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (B_l^{t,t} - a_t B_l^{t,s_k}) \right] \\ &\quad - (n(p+1) + qm) \left(- \sum_i (y_i^0)^2 \sum_j A_i^{j,0} e_j + \sum_{i,j} (y_i^j)^2 A_i^{j,j} - \sum_{l,k} (\theta_l^{s_k})^2 \sum_t B_l^{t,s_k} a_t \right. \\ &\quad + \sum_{l,k} \sum_t (\theta_l^t)^2 B_l^{t,t} + \sum_i y_i^0 \sum_j y_i^j (A_i^{j,0} - \sum_{\alpha=1}^p A_i^{\alpha,j} e_{\alpha}) \\ &\quad + \sum_{1 \leq \alpha < j} y_i^{\alpha} y_i^j (A_i^{j,\alpha} + A_i^{\alpha,j}) + \sum_{l,k} \theta_l^{s_k} \sum_t \theta_l^t (B_l^{t,s_k} - \sum_{\beta} B_l^{\beta,t} a_{\beta}) \\ &\quad \left. + \sum_l \sum_{\substack{\beta < \beta' \\ \beta, \beta' \neq s_0, \dots, s_r}} \theta_l^{\beta} \theta_l^{\beta'} (B_l^{\beta,\beta'} + B_l^{\beta',\beta}) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $d''\Omega$ est nul hors de 0 si et seulement si :

$$\begin{cases} A_i^{j,\alpha} &= -A_i^{\alpha,j}; j \neq \alpha > 0 \\ B_l^{\beta,\beta'} &= -B_l^{\beta',\beta}; \beta \neq \beta' \\ A_i^{j,0} &= \sum_{\alpha=1}^p A_i^{\alpha,j} e_{\alpha} \\ B_l^{t,s_k} &= \sum_{\beta} B_l^{\beta,t} a_{\beta} \\ A_i^{j,j} &= - \sum_j A_i^{j,0} e_j = \frac{1}{n(p+1)+qm} \left[\sum_i \sum_j (A_i^{j,j} - e_j A_i^{j,0}) + \sum_{l,k,t} (B_l^{t,t} - a_t B_l^{t,s_k}) \right] \\ B_l^{t,t} &= - \sum_{t=s_{k_0}+1}^{s_{k_0+1}-1} B_l^{t,s_{k_0}} a_t = \frac{1}{n(p+1)+qm} \left[\sum_i \sum_j (A_i^{j,j} - e_j A_i^{j,0}) + \sum_{l,k,t} (B_l^{t,t} - a_t B_l^{t,s_k}) \right] \end{cases}$$

D'après les deux dernières lignes de ce système d'équations, les éléments $A_i^{j,j}$ et $B_l^{t,t}$ de Λ sont tous égaux à une constante $A \in \Lambda$. Compte tenu de cette remarque, les deux dernières lignes sont conséquences des quatre premières et des conditions A_0, A_1 . Le système se réduit donc aux quatre premières lignes. On peut donc choisir arbitrairement les constantes $A, A_i^{j,\alpha}$ et $B_l^{\beta,\beta'}$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p; \alpha = 1, \dots, p; \alpha < j; l = 1, \dots, m; \beta < \beta'$). Dès lors la troisième ligne donne $A_i^{j,0}$, la première $A_i^{\alpha,j}$ ($\alpha < j$), la quatrième B_l^{t,s_k} , la deuxième $B_l^{\beta',\beta}$ ($\beta < \beta'$). Par exemple, choisissons $A = e_0$ et $A_i^{j,\alpha} = B_l^{\beta,\beta'} = 0$. On obtient $A_i^{j,0} = e_j$ et $B_l^{t,s_k} = a_t$ si $s_k < t < s_{k+1}$; posons

$$\tilde{\Omega} = \frac{1}{\|x\|^{n(p+1)+qm}} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (-1)^{(p+1)(i-1)+j} (y_i^j e_0 + y_i^0 e_j) \widehat{dy}_i^j + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{t=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{n(p+1)+t-1} (\theta_l^t e_0 + \theta_l^{s_k} a_t) \widehat{d\theta}_l^t \right].$$

Il reste maintenant à étudier la singularité de $\tilde{\Omega}$; si $\varphi = \varphi(y, \theta)$ est une fonction C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$, alors

$$\begin{aligned}
\langle d''\tilde{\Omega}, \varphi \rangle &= \langle \tilde{\Omega}, d''\varphi \rangle \\
&= \langle \tilde{\Omega}, \sum_{i,j} \left(\frac{d\varphi}{dy_i^j} - e_j \frac{d\varphi}{dy_i^0} \right) dy_i^j + \sum_{l,k,t} \left(\frac{d\varphi}{d\theta_l^t} - a_t \frac{d\varphi}{d\theta_l^{s_k}} \right) d\theta_l^t \rangle \\
&= \int \frac{1}{\|x\|^{n(p+1)+qm}} \sum_{i,j} (y_i^j e_0 + y_i^0 e_j) \left(\frac{d\varphi}{dy_i^j} - e_j \frac{d\varphi}{dy_i^0} \right) + \sum_{l,k,t} (\theta_l^t e_0 + \theta_l^{s_k} a_t) \left(\frac{d\varphi}{d\theta_l^t} - a_t \frac{d\varphi}{d\theta_l^{s_k}} \right) dV \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \frac{1}{\|x\|^{n(p+1)+qm}} \left(\sum_{i,j} (y_i^j e_0 + y_i^0 e_j) \left(\frac{d\varphi}{dy_i^j} - e_j \frac{d\varphi}{dy_i^0} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l,k,t} (\theta_l^t e_0 + \theta_l^{s_k} a_t) \left(\frac{d\varphi}{d\theta_l^t} - a_t \frac{d\varphi}{d\theta_l^{s_k}} \right) \right) dV \\
\langle d''\tilde{\Omega}, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} d \left[\frac{1}{\|x\|^{n(p+1)+qm}} \left(\varphi \sum_{i,j} (y_i^j e_0 + y_i^0 e_j) ((-1)^{(p+1)(i-1)+j} \widehat{dy}_i^j - e_j (-1)^{(p+1)(i-1)} \widehat{dy}_i^0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \varphi \sum_{l,k,t} (\theta_l^t e_0 + \theta_l^{s_k} a_t) ((-1)^{n(p+1)+t-1} \widehat{d\theta}_l^t - a_t (-1)^{n(p+1)+s_k-1} \widehat{d\theta}_l^{s_k}) \right) \right] - \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \varphi d''\tilde{\Omega} \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\| = \varepsilon} \frac{\varphi}{\varepsilon^{n(p+1)+qm}} \left[\sum_{i,j} (y_i^j e_0 + y_i^0 e_j) ((-1)^{(p+1)(i-1)+j} \widehat{dy}_i^j - e_j (-1)^{(p+1)(i-1)} \widehat{dy}_i^0) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l,k,t} (\theta_l^t e_0 + \theta_l^{s_k} a_t) ((-1)^{n(p+1)+t-1} \widehat{d\theta}_l^t - a_t (-1)^{n(p+1)+s_k-1} \widehat{d\theta}_l^{s_k}) \right] \\
\langle d''\tilde{\Omega}, \varphi \rangle &= -\varphi(0) \int_{\|x\|=1} \sum_{i,j} (y_i^j e_0 + y_i^0 e_j) ((-1)^{(p+1)(i-1)+j} \widehat{dy}_i^j - e_j (-1)^{(p+1)(i-1)} \widehat{dy}_i^0) + \\
&\quad + \sum_{l,k,t} (\theta_l^t e_0 + \theta_l^{s_k} a_t) ((-1)^{n(p+1)+t-1} \widehat{d\theta}_l^t - a_t (-1)^{n(p+1)+s_k-1} \widehat{d\theta}_l^{s_k}) \\
&= -\varphi(0) \int_{\|x\| \leq 1} \left[\sum_{i,j} (e_0 - e_j^2) + \sum_{l,k,t} (e_0 - a_t^2) \right] dV \\
&= -\varphi(0) [n(p+1) + qm] e_0 \text{Vol}(B(0, 1)).
\end{aligned}$$

Donc, si l'on pose

$$(3.9) \quad \Omega = \frac{-\tilde{\Omega}}{[n(p+1) + qm] \text{Vol}(B(0, 1))}$$

Ω est une solution fondamentale de d'' dans $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$.

Nous pouvons résumer les résultats de ce paragraphe dans le théorème suivant.

Rappelons :

(**A**₀) : il existe une base $(e_0 = 1, e_1, \dots, e_p)$ de Λ_0 vérifiant

$$\sum_{k=0}^p e_k^2 = 0$$

(**A**₁) : il existe une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ de Λ_1 et une suite finie $s_1 = \varepsilon_1 < s_2 < \dots < s_r < s_{r+1} = q+1$ telles que, pour tout $j = 1, \dots, q$, il existe $a_j \in \Lambda_0$ vérifiant $\varepsilon_j = a_j \varepsilon_{s_k}$ si $s_k \leq j < s_{k+1}$, avec $a_{s_1} = a_{s_2} = \dots = a_{s_r} = e_0$ et

$$\sum_{j=s_k}^{s_{k+1}-1} a_j^2 = 0 \text{ pour tout } k = 1, 2, \dots, r.$$

On écrit tout élément x de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$:

$$x = (y, \theta) = (y_0, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m), \text{ avec } y_i = \sum_{j=0}^p y_i^j e_j \text{ et } \theta_k = \sum_{l=1}^q \theta_k^l \varepsilon_l.$$

L'opérateur de Cauchy-Riemann d'' est défini par :

$$d'' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p dy_i^j \left(\frac{\partial}{\partial y_i^j} - e_j \frac{\partial}{\partial y_i^0} \right) + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{t=s_k+1}^{s_{k+1}-1} d\theta_l^t \left(\frac{\partial}{\partial \theta_l^t} - a_t \frac{\partial}{\partial \theta_l^{s_k}} \right),$$

Théorème 3.3. *Si Λ_0 vérifie la condition (A_0) et Λ_1 la condition (A_1) , l'opérateur de Cauchy-Riemann d'' dans $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ admet une solution fondamentale Ω donnée par :*

$$(3.10) \quad \Omega = \frac{c(n, m, p, q)}{\|x\|^{n(p+1)+qm}} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (-1)^{(p+1)(i-1)+j} (y_i^j e_0 + y_i^0 e_j) \widehat{dy}_i^j \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{t=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{n(p+1)+t-1} (\theta_l^t e_0 + \theta_l^{s_k} a_t) \widehat{d\theta}_l^t \right]$$

où $c(n, m, p, q) = -((n(p+1) + qm)\text{Vol}(B(0, 1)))^{-1}$, et où \widehat{dy}_i^j et $\widehat{d\theta}_l^t$ sont définis en (3.8)

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ borné à frontière lisse, soit $\Psi : \overline{D} \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$ définie par $\Psi(x', x) = x' - x$. Définissons :

$$(3.11) \quad K(x', x) = \Psi^* \Omega = \frac{c(n, m, p, q)}{\|x' - x\|^{n(p+1)+qm}} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (-1)^{(p+1)(i-1)+j} ((y_i^j - y_i^j) e_0 + (y_i^0 - y_i^0) e_j) d(\widehat{y}_i^j - y_i^j) \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{t=s_k+1}^{s_{k+1}-1} (-1)^{n(p+1)+t-1} ((\theta_l^t - \theta_l^t) e_0 + (\theta_l^{s_k} - \theta_l^{s_k}) a_t) d(\widehat{\theta}_l^t - \theta_l^t) \right]$$

Le noyau K vérifie, si l'on pose $d'' = d''_{x'} + d''_x$:

$$d'' K(x', x) = d'' \Psi^* \Omega = \Psi^* d'' \Omega = \Psi^* [0] = [\Delta].$$

Nous pouvons réécrire cette dernière égalité dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.4. *Sous les hypothèses du théorème précédent, si f est une forme (ou une fonction) continue sur \overline{D} et de classe C^1 dans D , alors pour tout $x \in D$, nous avons :*

$$(3.12) \quad f(x) = \int_{\partial D} f(x') K(x', x) - \int_D d'' f(x') K(x', x) + d''_x \int_D f(x') K(x', x).$$

Il va sans dire que dans la formule de représentation intégrale ci-dessus, le dernier terme est nul si f est une fonction, et l'avant dernier aussi si f est une fonction S -différentiable, voire qS -différentiable (i.e. vérifiant $d'' f = 0$).

NOTATIONS. Lorsque $n = 1$ et $m = 0$ (resp. $n = 0$ et $m = 1$) nous noterons

$$(3.13) \quad K_0 = \Psi^* \Omega_0 \quad (\text{resp. } K_1 = \Psi^* \Omega_1),$$

où Ω_0 et Ω_1 sont définis dans la proposition 3.2 et en (3.7)

4. ANALYTICITÉ DES FONCTIONS qS -DIFFÉRENTIABLES.

Une application f Fréchet-différentiable sur D domaine de Λ_0^n à valeurs dans Λ est S -différentiable si et seulement $d'' f \equiv 0$ sur D . Nous avons déjà vu, au troisième paragraphe, que la situation n'est pas tout à fait la même lorsque les variables sont dans Λ_1 .

DÉFINITION : $f : D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m \rightarrow \Lambda$ est quasiment S -différentiable (*qS-différentiable* en abrégé) si elle est Fréchet-différentiable sur D et telle que $d'' f \equiv 0$ sur D .

Si f est S -différentiable, alors elle est qS -différentiable.

Si $m = 0$, f est S -différentiable si et seulement si elle est qS -différentiable.

On suppose toujours vérifiées les conditions (A_0) et (A_1) sur Λ .

4.1. Premières propriétés des fonctions qS -différentiables. Etablissons tout d'abord quelques propriétés qui sont les analogues en super-analyse de propriétés des fonctions holomorphes.

Remarquons que certains énoncés supposeront simplement la qS -différentiabilité par rapport à chacune des variables appartenant à Λ_0 ou Λ_1 ; nous reviendrons dans le paragraphe suivant sur cette notion de qS -différentiabilité séparée.

Lemme 4.1. *Soit D un ouvert de Λ_0 ou Λ_1 ; si une suite (f_k) de fonctions qS -différentiables sur D converge vers f uniformément sur tout compact de D , alors f est qS -différentiable sur D .*

Il suffit de prouver l'uniforme convergence sur tout compact de D des suites $(D^\alpha f_k)_k$, pour tout multi-indice α de longueur $|\alpha| = 1$, puisqu'alors f sera Fréchet-différentiable sur D et les conditions $(\frac{\partial}{\partial y^i} - e_i \frac{\partial}{\partial y_0})(f) = 0$ si $D \subset \Lambda_0$ (ou bien $(\frac{\partial}{\partial \theta^i} - a_i \frac{\partial}{\partial \theta^{s_k}})(f) = 0$ pour $s_k \leq i < s_{k+1}$ si $D \subset \Lambda_1$) découleront des égalités analogues sur les f_k .

Soit G compact $\subset \Omega \subset \subset D \subset \Lambda_0$, où Ω est un ouvert à frontière de classe C^1 par morceaux, et ψ fonction à valeurs réelles, à support compact inclus dans Ω , $\psi \equiv 1$ au voisinage de G . D'après le corollaire 3.4 (et les notations (3.13)), pour tout $x \in G$:

$$\psi(x)(f_k - f_{k+j})(x) = \int_{\Omega \setminus G} (f_k - f_{k+j})(y) d''\psi(y) K_0(y, x)$$

Comme $|D^\alpha K_0(x, y)| \lesssim \|x - y\|^{-|\alpha| - p}$ uniformément en $x \in G$ et $y \in \Omega \setminus \text{supp}\psi$, on obtient le résultat par différentiation sous le signe somme.

L'estimation analogue $|D^\alpha K_1(x, y)| \lesssim \|x - y\|^{-|\alpha| - q + 1}$ donne le résultat lorsque $D \subset \Lambda_1$.

On en déduit :

Corollaire 4.2. *Soit f continue sur $P = \prod_{j=1}^{n+m} \Delta_j$ où chaque $\Delta_j, j = 1, \dots, n$ (resp. $j = n+1, \dots, m$) est un polydisque de Λ_0 (resp. Λ_1); si f est séparément qS -différentiable sur $\Omega \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ avec $\overline{P} \subset \Omega$, alors $y_j \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, y_j, \dots, a_n, b)$ est qS -différentiable sur Δ_j dès que $a_j \in \overline{\Delta_i}, \forall i \neq j$ et $b_i \in \overline{\Delta_i}, \forall i = 1, \dots, m$ (et mutatis mutandis pour $\theta_j \mapsto f(a, b_1, \dots, b_{j-1}, \theta_j, \dots, b_m)$).*

Une formule de représentation intégrale sur la frontière distinguée $\partial_0 P$ d'un polydisque de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$:

Proposition 4.3. *Soit $P = \prod_{j=1}^{n+m} \Delta_j$ où chaque $\Delta_j, j = 1, \dots, n$ (resp. $j = n+1, \dots, m$) est un polydisque de Λ_0 (resp. Λ_1) ouvert non vide. Si f est continue sur \overline{P} et séparément qS -différentiable sur P , alors pour tout $x = (y, \theta) = (y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) \in P$:*

$$(4.1) \quad f(y, \theta) = \int_{\partial_0 P} f(w_1, \dots, w_n, \tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{j=1}^n K_0(w_j, y_j) \cdot \prod_{j=n+1}^m K_1(\tau_j, \theta_j)$$

Nous pouvons écrire, en supposant $n \neq 0$ par exemple

$$f(y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) = \int_{\partial \Delta_1} f(w_1, y_2, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) K_0(w_1, y_1).$$

comme $y_2 \mapsto f(w_1, y_2, \dots, y_n, \theta)$ reste qS -différentiable pour $w_1 \in \partial \Delta_1$ d'après le corollaire 4.2, on peut itérer le processus, et appliquer le théorème de Fubini (f étant bornée sur P).

Proposition 4.4. *Si $f : D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m \rightarrow \Lambda$ est continue sur D et séparément qS -différentiable sur D par rapport à chacune de ses variables appartenant à Λ_0 ou Λ_1 , alors elle est qS -différentiable sur D ; elle est harmonique sur D , donc \mathbb{R} -analytique sur D .*

Soit un polydisque $P = \prod_{i=1}^n P_i(a_i, r_i) \cdot \prod_{j=1}^m P_j(b_j, \rho_j) \subset \subset D$ de frontière distinguée $\partial_0 P$.

D'après (4.1), pour $x = (y, \theta) = (y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m) \in \frac{1}{2}P$

$$f(x) = f(y, \theta) = \int_{\partial_0 P} f(z, \zeta) \prod_{j=1}^n K_0(z_j, y_j) \prod_{j=1}^m K_1(\zeta_j, \theta_j)$$

Pour tout $z_j \in \partial P_j(a_j, r_j)$, (resp. tout $\zeta_j \in \partial P_j(b_j, \rho_j)$), le noyau $K_0(z_j, y_j)$ (resp. $K_1(\zeta_j, \theta_j)$) est Fréchet- C^∞ sur $\{y_j / \|y_j - a_j\| < r_j/2\}$ (resp. $\{\theta_j / \|\theta_j - b_j\| < \rho_j/2\}$) et l'on a, pour tous les multi-indices α_j et β_j , avec ces conditions sur z_j, ζ_j, y_j et θ_j :

$$\|D_{y_j}^{\alpha_j} K_0(z_j, y_j)\| + \|D_{\theta_j}^{\beta_j} K_1(\zeta_j, \theta_j)\| \leq C \text{ste}(r_j, \rho_j).$$

On déduit alors de 4.1 que f est de classe C^∞ au sens de Fréchet sur $\frac{1}{2}P$ et par suite qS -différentiable sur $\frac{1}{2}P$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, n; \forall k = 0, \dots, p; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial (y_j^k)^2} &= \frac{\partial}{\partial y_j^k} \left(e_k \frac{\partial f}{\partial y_j^0} \right) = e_k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (y_j^0)^2} \\ \forall j = 1, \dots, m; \forall \ell = 1, \dots, r; \forall k, s_\ell \leq k < s_{\ell+1} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial (\theta_j^k)^2} &= a_k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (\theta_j^0)^2} \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=0}^p e_k^2 = \sum_{k=s_1}^{s_2-1} a_k^2 = \dots = \sum_{k=s_r}^q a_k^2 = 0$, f est harmonique par rapport à chacune des variables $y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m$, donc globalement harmonique puisqu'elle est de plus continue en (y, θ) .

4.2. **Analyticité.** Pour $j = 1, \dots, m$ et $\theta_j = \sum_1^q \theta_j^i \varepsilon_i$ notons :

$$(4.2) \quad Z(\theta_j) = \sum_{i=1}^q a_i \theta_j^i \quad \text{et, pour tout } k = 1, \dots, r : \pi_k(\theta_j) = \sum_{i=s_k}^{s_{k+1}-1} \theta_j^i \varepsilon_i$$

Une fonction f qS-différentiable sur $D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ est donc analytique réelle en les variables $(y_1^0, \dots, y_1^p, \dots, y_n^0, \dots, y_n^p, \theta_1^1, \dots, \theta_1^q, \dots, \theta_m^1, \dots, \theta_m^q)$.

En fait, une fonction qS-différentiable possède une propriété d'analyticité bien plus forte puisqu'elle est localement développable en série entière des variables $y_1 = \sum_{k=0}^p y_1^k, y_2, \dots, y_n, Z(\pi_1(\theta_1)), \dots, Z(\pi_r(\theta_1)), \dots, Z(\pi_1(\theta_m)), \dots, Z(\pi_r(\theta_m))$.

Proposition 4.5. *Soit $f : D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m \rightarrow \Lambda$ une fonction qS-différentiable sur D .*

Pour tout $(b, \beta) = (b_1, \dots, b_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \in D$, il existe $r > 0$ et des scalaires $A_{I,J} \in \Lambda$ où I et $J = (J_1, \dots, J_r)$ sont des multi-indices de \mathbb{N}^n et $(\mathbb{N}^m)^r$ respectivement, tels que pour $\|y_j - b_j\| < r, j = 1, \dots, n$ et $\|\theta_j - \beta_j\| < r, j = 1, \dots, m$

$$(4.3) \quad f(y, \theta) = \sum_{I, J_1, \dots, J_r} A_{I,J} (y - b)^I (Z_1(\theta - \beta))^{J_1} \dots (Z_r(\theta - \beta))^{J_r}$$

avec absolue convergence de la série. De plus :

$$(4.4) \quad I! J_1! \dots J_r! A_{I,J} = \frac{\partial^{|I|+|J_1|+\dots+|J_r|} f}{\partial y^I \partial (Z_1 \theta)^{J_1} \dots \partial (Z_r \theta)^{J_r}}(b, \beta)$$

Le développement (4.3) est valable sur tout polydisque P de centre (b, β) relativement compact dans D .

Nous avons noté

$$(y - b)^I = (y_1 - b_1)^{i_1} \dots (y_n - b_n)^{i_n} \text{ si } I = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$$

$$Z_k(\theta - \beta) = \left(Z(\pi_k(\theta_1 - \beta_1)), \dots, Z(\pi_k(\theta_m - \beta_m)) \right) \text{ où } Z(\pi_k(\theta)) \text{ est défini en (4.2)}$$

$$\left(Z_k(\theta - \beta) \right)^{J_k} = \left(Z(\pi_k(\theta_1 - \beta_1)) \right)^{j_k^1} \dots \left(Z(\pi_k(\theta_m - \beta_m)) \right)^{j_k^m} \text{ si } J_k = (j_k^1, \dots, j_k^m) \in \mathbb{N}^m$$

$$\frac{\partial^{|J_k|}}{\partial (Z_k \theta)^{J_k}} = \frac{\partial^{|J_k|}}{\partial (\theta_1^{s_k})^{j_k^1} \dots \partial (\theta_m^{s_k})^{j_k^m}}$$

Lemme 4.6. *Soit f un polynôme en les variables réelles (y^0, \dots, y^p) à coefficients dans Λ ; f est qS-différentiable si et seulement si f est un polynôme en la variable $y = \sum_{j=0}^p x^j e_j$.*

Il suffit de prouver la condition nécessaire pour les polynômes homogènes car la partie homogène d'ordre k d'un polynôme qS-différentiable est qS-différentiable. On raisonne par récurrence sur le degré d .

Si $d = 1$, f est \mathbb{R} -linéaire (à une constante près) et S-différentiable donc de la forme $f(y) = ay + f(0)$ où $a \in \Lambda$.

Soit f polynôme homogène en les variables réelles (y^0, \dots, y^p) de degré $d \geq 2$ et S-différentiable. En tant que polynôme, f est lisse au sens de Fréchet, et l'on a pour tout $k = 0, \dots, p$:

$$\forall j : \frac{\partial^2 f}{\partial y^j \partial y^k} = \frac{\partial}{\partial y^k} (e_j \frac{\partial f}{\partial y^0}) = e_j \frac{\partial}{\partial y^0} \left(\frac{\partial f}{\partial y^k} \right);$$

les $\frac{\partial f}{\partial y^k}$ sont donc S-différentiables, homogènes de degré $d - 1$, donc, par récurrence, il existe $b \in \Lambda_0$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y^0} = b(y)^{d-1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y^k} = e_k b(y)^{d-1}$; par intégration $f(y) = \int_0^1 df(ty).y dt = \frac{b}{d}(y)^d$.

Lemme 4.7. *Soit f un polynôme en les variables réelles $(\theta^1, \dots, \theta^q)$ à coefficients dans Λ ; f est qS-différentiable si et seulement si f est un polynôme en les variables $Z(\pi_1(\theta)), \dots, Z(\pi_r(\theta))$.*

La condition est clairement suffisante. On raisonne encore par récurrence sur d pour la preuve de la nécessité de la condition. Pour un polynôme homogène de degré $d = 1$, le résultat découle de la définition de la qS-différentiabilité. Il est aisé de vérifier la qS-différentiabilité de $\frac{\partial f}{\partial \theta^{s_j}}$ pour $j = 1, \dots, r$ si f est homogène de degré $d \geq 2$; par hypothèse de récurrence

$$\frac{\partial f}{\partial \theta^{s_j}}(\theta) = \sum_{k_1 + \dots + k_r = d-1} b_K^{(j)} (Z(\pi_1(\theta)))^{k_1} \dots (Z(\pi_r(\theta)))^{k_r}, \quad b_K^j \in \Lambda, j = 1, \dots, r;$$

D'où le résultat en appliquant la formule de Taylor et les relations $\frac{\partial f}{\partial \theta^k} = a_k \frac{\partial f}{\partial \theta^{s_j}}$ pour $s_j \leq k < s_{j+1}, k = 1, \dots, q$.

Lemme 4.8. Soit $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$ un polynôme de degré d en les variables réelles $y^0, \dots, y^p, \theta^1, \dots, \theta^q$; f est qS-différentiable si et seulement si f s'écrit sous la forme :

$$f(y, \theta) = \sum_{\substack{|K|=0 \\ K=(k_0, k_1, \dots, k_r)}}^d A_K y^{k_0} (Z(\pi_1(\theta)))^{k_1} \dots (Z(\pi_r(\theta)))^{k_r} \quad \text{où } A_K \in \Lambda, \forall K \in \mathbb{N}^{r+1}.$$

PREUVE DU LEMME

Il suffit de le prouver pour les polynômes homogènes car la partie homogène d'ordre k d'un polynôme qS-différentiable (resp. S-différentiable) est qS-différentiable (resp. S-différentiable). On raisonne par récurrence sur le degré d . Lorsque $d = 1$, le résultat découle immédiatement des définitions de qS et S-différentiabilités. Soit donc f un polynôme en $y^0, \dots, y^p, \theta^1, \dots, \theta^q$ de degré $d \geq 2$ et tel que $d''f = 0$. Alors, nécessairement $d''(\frac{\partial f}{\partial y^0}) = 0$. Ou bien $\frac{\partial f}{\partial y^0} \equiv 0$ et $f(y, \theta) = \Psi(\theta)$ (puisque $\frac{\partial f}{\partial y^j} = e_j \frac{\partial f}{\partial y^0}$). Ou bien $\frac{\partial f}{\partial y^0}$ est un polynôme homogène de degré $d-1$ et qS-différentiable. Par l'hypothèse de récurrence, nous avons alors :

$$\frac{\partial f}{\partial y^0}(y, \theta) = \sum_{\substack{|K|=0 \\ K=(k_1, \dots, k_r)}}^{d-1} B_K y^{d-1-|K|} (Z(\pi_1(\theta)))^{k_1} \dots (Z(\pi_r(\theta)))^{k_r}, \quad \text{où } B_K \in \Lambda$$

$$\text{et toujours } \frac{\partial f}{\partial y^j} = e_j \frac{\partial f}{\partial y^0}$$

d'où en appliquant comme plus haut la formule de Taylor à $f(\cdot, \theta)$:

$$f(y, \theta) = \sum_{\substack{|K|=0 \\ K=(k_1, \dots, k_r)}}^{d-1} B'_K y^{d-|K|} (Z(\pi_1(\theta)))^{k_1} \dots (Z(\pi_r(\theta)))^{k_r} + \Psi(\theta), \quad \text{où } B'_K = B_K / (d - |K|), \forall K$$

d'où le résultat d'après le lemme 4.7 appliqué à Ψ .

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.5 : Soulignons que, en dehors de la diagonale, le noyau reproduisant $K_0(x, y)$ des fonctions S-différentiables sur un domaine de Λ_0 est lisse au sens de Fréchet, mais n'est pas S-analytique; nous ne pouvons donc pas raisonner exactement comme dans le cas holomorphe de une ou plusieurs variables, même pour passer du cas $n = 1$ au cas n quelconque. Et la même remarque vaut pour le noyau K_1 .

• Si $f : D \subset \Lambda_0 \rightarrow \Lambda$ est qS-différentiable sur D , elle est réelle analytique et pour tout $a \in D$, il existe des réels $r_k > 0$ tels que

$$(4.5) \quad f(x) = \sum_{J=(j_0, \dots, j_p) \in \mathbb{N}^{p+1}} \alpha_J (x^0 - a^0)^{j_0} \dots (x^p - a^p)^{j_p} \quad \text{où } \alpha_J \in \Lambda$$

avec absolue sommabilité pour $|x^k - a^k| < r_k$. Chaque composante homogène de la série étant S-différentiable, d'après le lemme 4.6 il existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ un élément $c_k \in \Lambda$ tel que

$$(4.6) \quad \sum_{\substack{|J|=k \\ J=(j_0, \dots, j_p)}} \alpha_J (x^0 - a^0)^{j_0} \dots (x^p - a^p)^{j_p} = c_k (x - a)^k;$$

d'où par associativité des familles sommables :

$$(4.7) \quad f(x) = \sum_0^\infty c_k (x - a)^k$$

avec convergence en norme de la série pour $\|x - a\| < \min_j r_j$.

En dérivant terme à terme le second membre de (4.5), on obtient, puisque e_0 est le neutre de Λ , en tenant compte de (4.6) où nous avons $c_k = \alpha_{(k, 0, \dots, 0)}$:

$$(4.8) \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_0^k}(a) = k! c_k \quad \text{soit encore } \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a) = k! c_k$$

Remarque : tout revient donc à dériver terme à terme (4.7).

• Soit f qS-différentiable sur $D \subset \Lambda_0^n$, $n \geq 2$; supposons $n = 2$ pour alléger l'écriture. Au voisinage d'un point $(a, b) \in D$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{\substack{I, J \in \mathbb{N}^{p+1} \\ I=(i_0, \dots, i_p), J=(j_0, \dots, j_p)}} \gamma_{I, J} (x^0 - a^0)^{i_0} \dots (x^p - a^p)^{i_p} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} \\ &= \sum_J \left[\sum_I \gamma_{I, J} (x^0 - a^0)^{i_0} \dots (x^p - a^p)^{i_p} \right] (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} \end{aligned}$$

avec sommabilité pour $\|x - a\| < r, \|y - b\| < \rho$.

Par propriétés des séries entières, pour tout J fixé, la famille $(\gamma_{I, J} (x_0 - a_0)^{i_0} \dots (x_p - a_p)^{i_p})_I$ est sommable, de somme $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{|I|=k} \gamma_{I, J} (x_0 - a_0)^{i_0} \dots (x_p - a_p)^{i_p})$; f est S-différentiable sur D , et donc la somme $\sum_I \gamma_{I, J} (x_0 - a_0)^{i_0} \dots (x_p - a_p)^{i_p}$ est S-différentiable sur $\{x, \|x - a\| < r\}$; appliquant le lemme 4.6 aux composantes homogènes de cette somme, nous obtenons

$$(4.9) \quad f(x, y) = \sum_{J \in \mathbb{N}^{p+1}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{k, J} (x-a)^k \right] (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} = \sum_{J, k} c_{k, J} (x-a)^k (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p}$$

avec $c_{k, J} = \gamma_{(k, 0, \dots, 0), J}$.

Les familles $(c_{k, J} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} (x-a)^k)_J$ sont sommables, mais $(x-a)^k$ peut être diviseur de zéro lorsque $k \neq 0$, et nous devons justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la sommabilité de $(c_{k, J} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p})_J$. nous avons $(x-a)^k = (x^0 - a^0)^k e_0 + \sum'$; la famille $(c_{k, J} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p} (x^0 - a^0)^k e_0)_J$ est sommable et il en sera de même pour $(c_{k, J} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p})_J$ dès que $x_0 \neq a_0$ ce qui est toujours vérifié pour un x proche de a convenablement choisi. Les sommes $\sum_J c_{k, J} (y^0 - b^0)^{j_0} \dots (y^p - b^p)^{j_p}$ étant S-différentiables, on conclut grâce au lemme 4.6 :

$$f(x, y) = \sum_{\ell, k=0}^{\infty} A_{k, \ell} (x-a)^k (y-b)^\ell \quad \text{avec } A_{k, \ell} = \gamma_{(k, 0, \dots, 0), (\ell, 0)}$$

Et l'on obtient par dérivation :

$$(4.10) \quad \ell! k! A_{k, \ell} = \frac{\partial^{\ell+k} f}{\partial (x^0)^k \partial (y^0)^\ell} (a, b) \quad \text{soit encore } \ell! k! A_{k, \ell} = \frac{\partial^{\ell+k} f}{\partial x^k \partial y^\ell} (a, b)$$

• soit f qS-différentiable sur un domaine $D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$; supposons $n = m = 1$, le cas général étant analogue.

La proposition 4.1 permet d'écrire au voisinage de $(a, \beta) \in D$:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} f(y, \theta) &= \sum_{\substack{J=(j_1, \dots, j_q) \in \mathbb{N}^q \\ I=(i_0, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^{p+1}}} \gamma_{I, J} (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p} (\theta^1 - \beta^1)^{j_1} \dots (\theta^q - \beta^q)^{j_q} \\ &= \sum_I \left(\sum_J \gamma_{I, J} (\theta^1 - \beta^1)^{j_1} \dots (\theta^q - \beta^q)^{j_q} \right) (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p} \end{aligned}$$

Pour tout multi-indice $I \in \mathbb{N}^{p+1}$, la série $\sum_J \gamma_{I, J} (\theta^1 - \beta^1)^{j_1} \dots (\theta^q - \beta^q)^{j_q}$ est absolument sommable, de somme $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|J|=k} \gamma_{I, J} (\theta^1 - \beta^1)^{j_1} \dots (\theta^q - \beta^q)^{j_q}$; par qS-différentiabilité de chaque partie homogène dans cette série, on déduit du lemme 4.7 l'écriture suivante de f au voisinage de (a, β) :

$$f(y, \theta) = \sum_I \left(\sum_{k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}} \alpha_{I, (k_1, \dots, k_r)} (Z(\pi_1(\theta - \beta)))^{k_1} \dots (Z(\pi_r(\theta - \beta)))^{k_r} \right) (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p}$$

où $\alpha_{I, (k_1, \dots, k_r)} = \gamma_{I, (j_{s_1}, 0, \dots, 0, j_{s_2}, 0, \dots, 0, j_{s_r}, 0, \dots, 0)}$.

On vérifie, comme précédemment, la sommabilité de chaque famille $(\alpha_{I, k_1, \dots, k_r} (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p})_I$; si $k_1 + \dots + k_r \neq 0$; choisissons $\theta = \beta + \sum_{\ell=1}^r \eta_\ell \varepsilon_{s_\ell}$, η_ℓ réel, $0 < \eta_\ell < 1$; alors $Z(\pi_1(\theta - \beta))^{k_1} \dots (Z(\pi_r(\theta - \beta))^{k_r}) = \eta_1^{k_1} \dots \eta_r^{k_r} e_0$ est inversible; la famille $(\alpha_{I, k_1, \dots, k_r} (Z(\pi_1(\theta - \beta)))^{k_1} \dots (Z(\pi_r(\theta - \beta)))^{k_r}) (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p})_{I=(i_0, \dots, i_p)}$ étant sommable pour η_1, \dots, η_r suffisamment petits, il en est de même de $(\alpha_{I, (k_1, \dots, k_r)} (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p})_I$. Chaque somme $\sum_I (\alpha_{I, (k_1, \dots, k_r)} (y^0 - a^0)^{i_0} \dots (y^p - a^p)^{i_p})_I$ est S-différentiable, ainsi que ses composantes polynomiales homogènes, il découle du lemme 4.6 le développement cherché :

$$f(y, \theta) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\substack{|K|=0 \\ K=(k_1, \dots, k_r)}} A_{\mu, K} (y-a)^\mu Z(\pi_1(\theta - \beta))^{k_1} \dots (Z(\pi_r(\theta - \beta)))^{k_r} \quad \text{avec } A_{\mu, K} = \alpha_{(\mu, 0, \dots, 0), K}$$

Dérivant terme à terme dans 4.11, on obtient ensuite par unicité du développement en série entière :

$$\mu!k_1!\dots k_r!A_{\mu,(k_1,\dots,k_r)} = \frac{\partial^{\mu+k_1+\dots+k_r}f}{\partial(y^0)^\mu\partial(\theta^{s_1})^{k_1}\dots\partial(\theta^{s_r})^{k_r}}(a,\beta) = \frac{\partial^{\mu+k_1+\dots+k_r}f}{\partial y^\mu\partial(\theta^{s_1})^{k_1}\dots\partial(\theta^{s_r})^{k_r}}(a,\beta)$$

La dernière assertion de la proposition découle de (4.4), de la proposition 4.9 ci-après et du théorème de prolongement des fonctions analytiques de variables réelles. Q.E.D.

INÉGALITÉS DE TYPE CAUCHY :

Lorsque f est continue sur \bar{P} (ou seulement bornée en norme sur P) et qS -différentiable sur $P = \prod_j \Delta_j(a_j; r_j)$, elle est de classe C^∞ au sens de Fréchet sur P et on peut prendre les dérivées dans la formule (4.1) pour $\|x_j - a_j\| < r_j/2$ pour tout $j = 1, \dots, n+m$; rappelons que

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} = \frac{\partial f}{\partial y_j^0} \text{ et } \frac{\partial^{|\beta|}f}{\partial(Z_k(\theta)^\beta)} = \frac{\partial^{|\beta|}f}{\partial(\theta_1^{s_k})^{\beta_1}\dots\partial(\theta_m^{s_k})^{\beta_m}}.$$

Nous obtenons :

Proposition 4.9. *Pour f qS -différentiable sur un polydisque $P = \prod_{j=1}^{n+m} \Delta_j(a_j; r_j)$ et continue sur \bar{P} , nous avons :*

$$(4.12) \quad \left\| \frac{\partial^{|I|+|J_1|+\dots+|J_r|}f}{\partial y^I \partial(Z_1(\theta))^{J_1}\dots\partial(Z_r(\theta))^{J_r}}(a) \right\| \leq c_{I,J_1,\dots,J_r} \cdot \sup_{\bar{P}} \|f\| \cdot r^{-[I,J_1,\dots,J_r]}$$

où $c_{I,J_1,\dots,J_r} \sim I!J_1!\dots J_r!$ lorsque $\min(|I|, |J_1|, \dots, |J_r|) \rightarrow +\infty$.

Nous avons noté pour $I = (i_1, \dots, i_n)$ et $J_k = (j_1^k, \dots, j_m^k)$, $k = 1, \dots, r$:

$$r^{-[I,J_1,\dots,J_r]} = r_1^{-i_1} \dots r_n^{-i_n} (r_{n+1})^{-j_1^1-\dots-j_1^r} \dots (r_{n+m})^{-j_m^1-\dots-j_m^r}.$$

Nous déduisons de ces inégalités et de la proposition 4.5 un résultat de type Liouville :

Corollaire 4.10. *Une fonction qS -différentiable et bornée en norme sur $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ est constante.*

5. DEUX THÉORÈMES DE TYPE HARTOGS

5.1. Un théorème de Hartogs de qS -différentiabilité séparée. Une fonction f séparément holomorphe par rapport à chaque variable z_j de \mathbb{C}^n , $j = 1, \dots, n$, sur un domaine Ω de \mathbb{C}^n est holomorphe sur Ω sans autre hypothèse de régularité globale sur f mais ce théorème de Hartogs n'est plus valable pour les fonctions \mathbb{R} -analytiques.

Pour les fonctions S -différentiables, lorsque les coefficients Γ_{ij}^k vérifient une condition de positivité, nous obtenons un résultat de type Hartogs.

Notons $a_k = \sum_{\ell=0}^p a_k^\ell e_\ell$.

DÉFINITION : une CSA Λ vérifie la condition de positivité (\mathcal{P}) si, pour tous $X, Y, Y^1, \dots, Y^r \in \mathbb{R}^{p+q+1}$, on a

$$(\mathcal{P}_0) \quad \left(\sum_0^{p+q} (X_j)^2 \right) \sum_{\substack{k=0,\dots,p \\ j=0,\dots,p+q}} \left(\sum_{m=0}^{p+q} Y_m \Gamma_{mk}^j \right)^2 - 2 \sum_{k=0}^p \left(\sum_j X_j \sum_m Y_m \Gamma_{mk}^j \right)^2 \geq 0$$

$$(\mathcal{P}_1) \quad \|X\|^2 \sum_{\substack{i=1,\dots,r \\ j=0,\dots,p+q}} \sum_{s_i \leq k < s_{i+1}} \left(\sum_{m=0}^{p+q} Y_m^i \sum_{\ell=0}^p a_k^\ell \Gamma_{\ell m}^j \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^r \sum_{s_i \leq k < s_{i+1}} \left(\sum_j X_j \sum_m Y_m^i \sum_{\ell=0}^p a_k^\ell \Gamma_{\ell m}^j \right)^2 \geq 0$$

Il y a plusieurs façons d'exprimer la condition (\mathcal{P}_0) par exemple. Si l'on note I_d la matrice unité d'ordre d et $Z = Z(Y)$ la matrice de terme général $Z_k^j = \sum_m \Gamma_{mk}^j Y_m$, cette condition énonce que la matrice $(\sum_{j,k} (Z_k^j)^2) I_{p+1} - 2^t Z Z$ est positive.

Cette condition (\mathcal{P}_0) exprime aussi la positivité de la matrice

$$\|X\|^2 \sum_{i=0}^{p+q+1} {}^t \Gamma_{..}^i \Gamma_{..}^i - 2 {}^t W W$$

où l'on note $\Gamma_{..}^i$ la matrice à $p+1$ lignes et $p+q+1$ colonnes de terme général Γ_{jk}^i , et $W = W(X)$ la matrice d'ordre $p+q+1$ de terme général $W_{kl} = \sum_{j=0}^{p+q+1} \Gamma_{kl}^j X_j$.

Théorème 5.1. *On suppose que la CSA Λ vérifie la propriété (\mathcal{P}), ou la condition (\mathbb{P}) ci-dessous, et toujours les conditions (A_0) et (A_1). Alors une fonction f définie sur un domaine Ω de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$ a valeurs dans Λ séparément qS -différentiable en les variables $y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m$ est de classe C^1 au sens de Fréchet sur Ω et par suite est qS -différentiable en tout point $x = (y, \theta)$ de Ω .*

Rappelons que nous supposons toujours les conditions (A_0) et (A_1) vérifiées dans la suite.

Lemme 5.2. *Sous la condition (P) sur Λ , si f est une fonction qS -différentiable de $\Omega \subset \Lambda_0$ (ou $\Omega \subset \Lambda_1$) dans Λ alors $\log \|f\|$ est sous-harmonique sur Ω .*

Il suffit de vérifier la sous-harmonicité sur $\Omega' := \{y \in \Omega, f(y) \neq 0\}$. Supposons $\Omega \subset \Lambda_0$.

Pour une plus grande lisibilité des calculs, nous noterons ici $f = \sum_0^{p+q} f_j e_j$ et pour $y \in \Lambda_0 : y = \sum_0^p y_i e_i$. Nous allons vérifier la positivité sur Ω' de $\Delta \log \|f\|^2$.

$$(5.1) \quad \Delta \log \|f\|^2 = \frac{2\nu(f)}{\|f\|^4} \text{ où } \nu(f) = \|f\|^2 \left(\sum_{j=0}^{p+q} f_j \Delta f_j + \sum_{j=0}^{p+q} \sum_{k=0}^p \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)^2 \right) - 2 \sum_{k=0}^p \left(\sum_{j=0}^{p+q} f_j \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)^2$$

La fonction f est S -différentiable sur Ω donc harmonique et tous les f_j sont harmoniques sur Ω . Il découle par ailleurs de la S -différentiabilité de f (i.e. $\sum_{i=0}^p \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - e_i \frac{\partial f}{\partial y_0} \right) dx_i \equiv 0$ sur Ω) les relations :

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_k} = \sum_{m=0}^{p+q} \frac{\partial f_m}{\partial y_0} \Gamma_{mk}^j \text{ sur } \Omega, \forall j = 0, \dots, p+q, \forall k = 0, \dots, p.$$

Par suite :

$$\nu(f) = \left(\sum_{j=0}^{p+q} f_j^2 \right) \sum_{\substack{k=0, \dots, p \\ j=0, \dots, p+q}} \left(\sum_{m=0}^{p+q} \frac{\partial f_m}{\partial y_0} \Gamma_{mk}^j \right)^2 - 2 \sum_{k=0}^p \left(\sum_{j=0}^{p+q} f_j \sum_{m=0}^{p+q} \frac{\partial f_m}{\partial y_0} \Gamma_{mk}^j \right)^2$$

D'où le résultat grâce à la condition (P_0) .

Les calculs sont analogues si $\Omega \subset \Lambda_1$; on utilise simplement (P_1) et le fait que si $f(\theta)$ est qS -différentiable

$$\frac{\partial f_j}{\partial \theta_k} = \sum_{m=0}^{p+q} \sum_{\ell=0}^p a_k^\ell \Gamma_{\ell m}^j \frac{\partial f_m}{\partial \theta_{s_i}} \text{ sur } \Omega, \forall j = 0, \dots, p+q, \forall k = 1, \dots, q \text{ avec } s_i \leq k < s_{i+1}.$$

REMARQUE :

De façon identique à ce qui se passe dans la démonstration classique du théorème de Hartogs en analyse complexe, la sous-harmonicité de $\log \|f\|$ n'est utilisée ici que pour en déduire la continuité de la fonction $\|f\|$. Or ces propriétés, continuité ou caractère borné, ne dépendent pas de la norme choisie, ni de la métrique retenue pour définir le laplacien. Il semble donc légitime, pour le calcul du laplacien de $\log \|f\|$ de ne pas se contenter de la norme et de la métrique définies en considérant comme orthonormées les bases de Λ_0 et Λ déjà utilisées. Dans l'exemple 4, la fonction $f(x) = (e_0 + 2e_1 + 3e_3)x$ est S -différentiable et même Λ_0 -linéaire, mais $\log \|f\|$ n'est pas sous-harmonique (Rappelons que la norme $\|\cdot\|$ n'est pas multiplicative). Pourtant, dans une base contenant le vecteur $e_0 + 2e_1 + 3e_3$, elle devient sous-harmonique.

Nous allons, par conséquent, effectuer deux changements de bases dans Λ , et calculer $\Delta \log \|f\|$ dans ces nouvelles bases, c'est-à-dire avec $\|f\|''$ calculé avec la norme définie par la première des deux bases de Λ , et le laplacien Δ' défini par la nouvelle métrique induite par la deuxième base de Λ .

Soient (e'_0, \dots, e'_p) la nouvelle base de Λ_0 avec $e'_j = \sum_{i=0}^p p_{i,j} e_i$ et P la matrice de passage de (e_j) à (e'_j) , et $(e''_0, \dots, e''_{p+q})$ la nouvelle base de Λ avec $e''_\beta = \sum_{\alpha=0}^{p+q} q_{\alpha,\beta} e_\alpha$ et Q la matrice de changement de bases associée. On a $f = \sum_{\alpha=0}^{p+q} f_\alpha e_\alpha = \sum_{\beta=0}^{p+q} f''_\beta e''_\beta$. Donc

$$\|f\|''^2 = \|f''\|^2 = {}^t f {}^t Q^{-1} Q^{-1} f = \text{Tr}(f {}^t f Q^{-1} {}^t Q^{-1})$$

et, en notant $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ la matrice jacobienne de g ,

$$\Delta' \log \|f\|'' = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[{}^t P P \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\log \text{Tr}(f {}^t f Q^{-1} {}^t Q^{-1})) \right],$$

soit, après un calcul élémentaire, en notant $q_{\alpha\beta}^{-1}$ les éléments de Q^{-1} ,

$$(5.2) \quad \|f\|''^4 \Delta' \log \|f\|''$$

$$(5.3) \quad = \left(\sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta} f_{\beta} q_{\beta\alpha}^{-1} \right)^2 \right) \sum_{i,j,k,\alpha,\beta,\gamma} p_{ik} p_{jk} q_{\beta\alpha}^{-1} q_{\gamma\alpha}^{-1} f_{\gamma} \sum_{l,l'=0}^{p+q} \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_0^2} \Gamma_{ij}^{l'} \Gamma_{l,l'}^{\beta}$$

$$(5.4) \quad + \left(\sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta} f_{\beta} q_{\beta\alpha}^{-1} \right)^2 \right) \sum_{k,\delta} \left(\sum_{j,\gamma,\mu} p_{jk} q_{\gamma\delta}^{-1} \frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_0} \Gamma_{\mu j}^{\gamma} \right)^2$$

$$(5.5) \quad - 2 \sum_k \left(\sum_{i,\alpha,\beta,\gamma,\delta} p_{ik} q_{\beta\alpha}^{-1} q_{\gamma\alpha}^{-1} f_{\gamma} \frac{\partial f_{\delta}}{\partial x_0} \Gamma_{\delta i}^{\beta} \right)^2.$$

Nous recherchons la positivité de l'expression ci-dessus. Mais le premier terme n'est pas quadratique en f_γ et en $\frac{\partial^2 f_l}{\partial x_\alpha^2}$. Il ne peut donc être positif qu'en s'annulant, c'est-à-dire si pour tout $\gamma \in \{0, \dots, p+q\}$ et $l \in \{0, \dots, p+q\}$,

$$\sum_{i,j,k,\alpha,\beta,l} p_{ik} p_{jk} q_{\beta\alpha}^{-1} q_{\gamma\alpha}^{-1} \Gamma_{ij}^l \Gamma_{ll'}^\beta = 0,$$

donc

$$\sum_{i,j,k,\alpha,\beta} \langle e_i e_j e_l, e_\beta \rangle p_{ik} p_{jk} q_{\beta\alpha}^{-1} q_{\gamma\alpha}^{-1} = 0,$$

ou encore

$$\sum_\alpha \left\langle \sum_k (e'_k)^2 e_l, \sum_\beta q_{\beta\alpha}^{-1} e_\beta \right\rangle q_{\gamma\alpha}^{-1} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\left\langle \sum_k (e'_k)^2 e_l, \sum_\beta q_{\beta,\alpha}^{-1} e_\beta \right\rangle = 0 \quad \text{pour tout } l, \alpha.$$

Cela peut encore s'écrire, pour tout $Z \in \Lambda$ et tout l :

$$\left\langle \sum_k (e'_k)^2 e_l, Z \right\rangle = 0,$$

donc aussi

$$\sum_k (e'_k)^2 e_l = 0,$$

et finalement

$$\sum_k (e'_k)^2 = 0.$$

On voit donc ici que la condition $\sum_{k=0}^p (e'_k)^2 = 0$ sur la nouvelle base de Λ_0 est nécessaire et suffisante pour que le terme (5-3) soit nul.

Il reste maintenant à s'assurer de la positivité de la somme des deux derniers termes dans l'expression de $\Delta' \log \|f\|''$. En notant $X_\alpha = \sum_\beta q_{\beta\alpha}^{-1} f_\beta$ et $Y_\delta = \frac{\partial f_\delta}{\partial x_0}$, ceci s'écrit, pour tout X et Y de \mathbb{R}^{p+q+1} :

$$(5.6) \quad \|X\|^2 \sum_{k,\delta} \left(\sum_{j,\gamma,\mu} p_{jk} q_{\gamma\delta}^{-1} Y_\mu \Gamma_{\mu j}^\gamma \right)^2 - 2 \sum_k \left(\sum_{i,\alpha,\beta,\delta} p_{ik} q_{\beta\alpha}^{-1} X_\alpha Y_\delta \Gamma_{\delta i}^\beta \right)^2 \geq 0,$$

soit encore

$$(5.7) \quad \|X\|^2 \sum_{k,\delta} \left(\left\langle e'_k \sum_\mu Y_\mu e_\mu, \sum_\gamma q_{\gamma\delta}^{-1} e_\gamma \right\rangle \right)^2 - 2 \sum_k \left(\sum_\alpha \left\langle e'_k \sum_\delta Y_\delta e_\delta, \sum_\beta q_{\beta\alpha}^{-1} e_\beta \right\rangle X_\alpha \right)^2 \geq 0,$$

et, si nous posons $e''_\delta = \sum_\gamma q_{\gamma\delta}^{-1} e_\gamma$ et $Y = \sum_{\alpha=0}^{p+q} Y_\alpha e_\alpha$, nous pouvons encore écrire ceci :

$$(5.8) \quad \left(\sum_{\alpha=0}^{p+q} X_\alpha^2 \right) \sum_{k,\delta} \langle e'_k Y, e''_\delta \rangle^2 - 2 \sum_k \left(\sum_\alpha \langle e'_k Y, e''_\alpha \rangle X_\alpha \right)^2 \geq 0$$

(le produit scalaire est relatif à la base orthonormée (e_α)).

Finalement, nous pouvons remplacer, dans le théorème (5-1), la condition (P) par la condition (P) suivante :

il existe une base (e'_k) de Λ vérifiant $\sum_{k=0}^p (e'_k)^2 = 0$,

et il existe une base (e''_α) de Λ telle que pour tout $X = \sum_{\alpha=0}^{p+q} X_\alpha e_\alpha$ et Y de Λ ,

$$\left(\sum_{\alpha=0}^{p+q} X_\alpha^2 \right) \sum_{k,\delta} \langle e'_k Y, e''_\delta \rangle^2 - 2 \sum_k \left(\sum_\alpha \langle e'_k Y, e''_\alpha \rangle X_\alpha \right)^2 \geq 0.$$

Ici encore, le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est relatif à la base orthonormée (e_α) .

Avant de prouver le théorème 5.1, établissons quelques résultats préliminaires.

Le résultat suivant, d'essence purement topologique, découle du théorème de Baire et est classique :

Lemme 5.3. *Si f est séparément continue sur $D \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$, en $x' = (y_2, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_m)$ (pour y_1 fixé) et en y_1 (pour x' fixé) (resp. en $x' = (y_1, \dots, y_n, \theta_1, \dots, \theta_{m-1})$ (pour θ_m fixé) et en θ_m (pour x' fixé)), alors pour tout polydisque fermé d'intérieur non vide $\bar{P} = \prod_{j=1}^{n+m} \bar{P}_j \subset D$, il existe un polydisque ouvert non vide $\omega \subset \prod_{j=2}^{n+m} P_j$ tel que $\|f\|$ soit borné sur $P_1 \times \bar{\omega}$ (resp. $\omega \subset \prod_{j=1}^{n+m-1} P_j$ tel que $\|f\|$ soit borné sur $\bar{\omega} \times P_{n+m}$).*

En particulier, l'ensemble des points de D au voisinage desquels $\|f\|$ est bornée est dense dans D .

Lemme 5.4. *Soit f définie sur un polydisque $D = \prod_1^{n+m} D_j \subset \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$, où $n \neq 0$, et pour $j = 1, \dots, n$ (resp. $j = n+1, \dots, n+m$) $D_j = \{y_j \in \Lambda_0, \|y_j\| < R\}$ (resp. $D_j = \{\theta_j \in \Lambda_1, \|\theta_j\| < R\}$,); on suppose $f(y_1, y', \theta)$ qS-différentiable en (y', θ) sur $D' = \prod_2^{n+m} D_j$ pour y_1 fixé dans D_1 et qS-différentiable en $y_1 \in D_1$ pour (y', θ) fixé dans D' .*

S'il existe $0 < r < R$ et $(a', \beta) \in D'$ tels que $\|f\|$ soit bornée par M sur $P = \{(y, \theta), \|y_1\| < R, \|y_j - a'_j\| \leq r, \forall j = 2, \dots, n \text{ et } \|\theta_j - \beta_j\| \leq r, \forall j = 1, \dots, m\} := D_1 \times \bar{P}' \subset D$, alors nous avons sur $D_1 \times P'$:

$$(5.9) \quad f(y_1, y', \theta) = \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^{n-1} \\ J = (J^1, \dots, J^r) \in \mathbb{N}^{mr}}} A_{IJ}(y_1) (y' - a')^I Z_1(\theta - \beta)^{J^1} \dots Z_r(\theta - \beta)^{J^r},$$

où, pour tout multi-indice $(I; J) \in \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}^{rm}$ l'application A_{IJ} est qS-différentiable sur D_1 et telle que pour $y_1 \in D_1$:

$$(5.10) \quad \|A_{IJ}(y_1)\| r^{|I|+|J^1|+\dots+|J^r|} \leq \text{cste}(p, q, n, m) M$$

Lemme 5.5. *Soit f définie sur un polydisque $D = \prod_1^m D_j \subset \Lambda_1^m$, où $D_j = \{\theta_j \in \Lambda_1, \|\theta_j\| < R\}$; on suppose $f(\theta_1, \theta')$ qS-différentiable en θ' sur $D' = \prod_2^m D_j$ pour θ_1 fixé, et qS-différentiable en θ_1 sur D_1 pour θ' fixé dans D' .*

S'il existe $0 < r < R$ et $b' \in D'$ tels que $\|f\|$ soit bornée par M sur $P = \{\theta \mid \forall j = 2, \dots, m; \|\theta_j - b'_j\| \leq r \text{ et } \|\theta_1\| < R\} := D_1 \times P' \subset D$ alors

$$(5.11) \quad f(\theta_1, \theta') = \sum_{\substack{J = (J^1, \dots, J^r) \\ = (j_2^1, \dots, j_m^1; \dots; j_2^r, \dots, j_m^r) \in \mathbb{N}^{r(m-1)}}} A_J(\theta_1) Z_1(\theta' - b')^{J^1} \dots Z_r(\theta' - b')^{J^r}$$

où, pour tout multi-indice J , A_J est qS-différentiable sur D_1 et tel que pour $\theta_1 \in D_1$:

$$(5.12) \quad \|A_J(\theta_1)\| r^{|J^1|+\dots+|J^r|} \leq \text{cste}(q, m) M$$

PREUVE DES DEUX DERNIERS LEMMES. Pour $\|y_1\| < R$, $f(y_1, \dots)$ est qS-différentiable sur D' et (5.9) découle de la proposition 4.5 et les inégalités (5.10) sont celles de Cauchy (cf. proposition 4.9).

$$(5.13) \quad \begin{aligned} A_{IJ}(y_1) &= \frac{1}{I!J^1!\dots J^r!} \frac{\partial^{|I|+|J^1|+\dots+|J^r|} f}{\partial y_2^{i_2} \dots \partial y_n^{i_n} \partial (Z_1(\theta))^{J^1} \dots \partial (Z_r(\theta))^{J^r}}(y_1, a', \beta) \\ &= \frac{1}{I!J^1!\dots J^r!} \int_{\partial_0 P'} f(y_1, z', \tau) \prod_{k=2}^n \frac{\partial^{i_k} K_0(z_k, y_k)}{\partial y_k^{i_k}} \Big|_{y'=a'} \prod_{k=1}^m \frac{\partial^{j_k^1+\dots+j_k^r} K_1(\tau_k, \theta_k)}{\partial (\theta_k^{s_1})^{j_k^1} \dots \partial (\theta_k^{s_r})^{j_k^r}} \Big|_{\theta=\beta} \end{aligned}$$

la dernière égalité étant validée par le fait que f est bornée sur P .

Soit $a_1 \in D_1$ et $0 < \rho < R$ tel que $\Delta_1 = \{w, \|w - a_1\| < \rho\} \subset \subset D_1$; nous avons pour $\|y_1 - a_1\| < \rho/2$ et $(z', \tau) \in \bar{P}' \subset D'$

$$f(y_1, z', \tau) = \int_{\Delta_1} f(w, z', \tau) K_0(w, y_1)$$

par suite

$$\left| \frac{\partial f(y_1, z', \tau)}{\partial y_1^\nu} \right| \leq M \cdot \text{cste}(\rho) \quad \text{pour tout } \nu = 0, \dots, p$$

ce qui permet de prouver la Fréchet différentiabilité de A_{IJ} et d'écrire ensuite, à partir de (5.13) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{IJ}}{\partial y_1^\nu}(y_1) &= \frac{1}{I!J^1!\dots J^r!} \int_{\partial_0 P'} \frac{\partial f}{\partial y_1^\nu}(y_1, z', \tau) \prod_{k=2}^n \frac{\partial^{i_k} K_0(z_k, y_k)}{\partial y_k^{i_k}} \Big|_{y'=a'} \prod_{k=1}^m \frac{\partial^{j_k^1+\dots+j_k^r} K_1(\tau_k, \theta_k)}{\partial (\theta_k^{s_1})^{j_k^1} \dots \partial (\theta_k^{s_r})^{j_k^r}} \Big|_{\theta=\beta} \\ &= e_\nu \frac{\partial A_{IJ}}{\partial y_1^0}(y_1), \quad \forall \nu = 1, \dots, p \end{aligned}$$

d'où la qS-différentiabilité des A_{IJ} sur D_1 .

La preuve du lemme 5.5 est analogue.

PREUVE DU THÉORÈME 5.1 : tenant compte des lemmes ci-dessus, on termine la preuve comme celle du théorème de Hartogs pour les fonctions séparément holomorphes de plusieurs variables complexes (cf. [H] par exemple). Nous en rappelons le schéma ; la preuve du théorème se fait par récurrence, le résultat étant trivial pour $n + m = 1$.

Supposons le théorème vérifié pour $n + m - 1 \geq 1$ et, par exemple, $n \geq 2$. Soit $z \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $P = \{x \in \Omega, |z_j - x_j| < 2R, j = 1, \dots, n + m\} \subset \subset \Omega$; le lemme 5.3 assure l'existence de $0 < r < R$ et de $a = (a_1, a', \beta) \in \gamma P$, où $0 < \gamma \leq 1/2$ est une constante à préciser, $a' = (a_2, \dots, a_n) \in \Lambda_0^{n-1}$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \Lambda_1^m$, tels que $\|f\|$ soit bornée sur $\{x = (y_1, y', \theta), |y_1 - z_1| < R, \max_{2 \leq j \leq n} |y_j - a_j| \leq r, \max_{1 \leq j \leq m} |\theta_j - \beta_j| \leq r\}$. D'après la dernière assertion de la proposition 4.5, f s'écrit sur $D := \{x = (y_1, y', \theta), |y_1 - z_1| < R, \max_{2 \leq j \leq n} |y_j - a_j| < R, \max_{1 \leq j \leq m} |\theta_j - \beta_j| < R\}$:

$$(5.14) \quad f(y_1, y', \theta) = \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^{n-1} \\ J = (J^1, \dots, J^r) \in \mathbb{N}^{mr}}} A_{IJ}(y_1) (y' - a')^I (Z_1(\theta - \beta))^{J^1} \dots (Z_r(\theta - \beta))^{J^r},$$

D'après les lemmes 5.4 et 5.2, les fonctions $\log \|A_{I,J}(y_1)\|$ sont sous-harmoniques sur $D_1 = \{y_1, |y_1 - z_1| < R\}$ et il découle de (5.10) que les fonctions $(|I| + |J|)^{-1} \log \|A_{I,J}(y_1)\|$ sont majorées uniformément en $y_1 \in D_1$ et en I, J . Par ailleurs, étant donné $0 < \rho < R$, par sommabilité du second membre de (5.14), nous avons $\limsup_{|I|+|J|} (|I| + |J|)^{-1} \log \|A_{I,J}(y_1)\| \leq 1/\alpha\rho$ pour tout $y_1 \in D_1$, où $0 < \alpha \leq 1$ est une constante telle que pour $u \in \Lambda_1$, on a $\|u\| < R$ dès que $\|Z(\pi_k(u))\| \leq \alpha\rho$ pour tout k . Un résultat classique sur les fonctions sous-harmoniques (cf. [H] Théorème 1.6.13) permet alors d'obtenir pour tout compact K de D_1 : $\limsup_{|I|+|J|} (sup_K((|I| + |J|)^{-1} \log \|A_{I,J}(y_1)\|)) \leq 1/\alpha\rho$. La famille $(A_{I,J}(y_1)(y' - a')^I Z(\theta - \beta)^J)_{I,J}$ est donc uniformément sommable sur tout compact de αD ; tous ses termes étant continus sur αD , il en est de même de la somme f de la famille ; f est bien qS-différentiable sur un voisinage de z d'après la proposition 4.4.

Le cas $n < 2$ se traite de même, en faisant appel au lemme 5.5 lorsque $n = 0$.

5.2. Un théorème de prolongement de type Hartogs-Bochner. Grâce à la formule de représentation intégrale des fonctions S-différentiables donnée par le corollaire 3.4 et aux propriétés de l'opérateur d'' , nous obtenons :

Théorème 5.6. : *Sous les conditions (A_0) et (A_1) , si $\partial\Omega$ est le bord connexe d'un domaine Ω borné de $\Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$, avec $n + m \geq 2$, et f une fonction qS-différentiable au voisinage de $\partial\Omega$, alors f se prolonge en une fonction qS-différentiable sur Ω .*

L'opérateur d'' et le noyau K vérifient hors de la diagonale de $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m}$: $d''_x K^{(0)}(w, x) = -d''_w K^{(1)}(w, x)$ où $K^{(j)}(w, x)$ désigne la composante de degré j en x et $n(p+1) + mq - 1 - j$ en w du noyau K . Par suite, si D_1, D_2 sont des domaines à frontière de classe C^1 par morceaux, $D_1 \subset \subset \Omega \subset \subset D_2$ avec $\partial D_j \subset V, j = 1, 2$ où V est un voisinage ouvert de $\partial\Omega$ sur lequel f est qS-différentiable, les fonctions $F_j = \int_{\partial D_j} f(w) K^{(0)}(w, x), j = 1, 2$ sont qS-différentiables respectivement sur $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} \setminus \partial D_1$ et sur $\mathbb{R}_\Lambda^{n,m} \setminus \partial D_2$. Supposant par exemple $n \neq 0$, en appliquant le corollaire 4.10 à la fonction $(y_1, a', b) \in \Lambda_0 \times \Lambda_0^{n-1} \times \Lambda_1^m \mapsto F_1(y_1, a', b)$ pour chaque (a', b) tel que $\Lambda_0 \times \{(a', b)\} \cap \partial D_1 = \emptyset$, on montre ensuite, par prolongement analytique, que la fonction F_1 est nulle sur la composante connexe non bornée de $\overline{D_1}$. Par suite, la fonction F_2 est qS-différentiable sur Ω et prolonge f . La preuve du théorème est alors analogue à celle du Kugelsatz de Hartogs-Bochner donnée dans [LM] par exemple.

RÉFÉRENCES

- [BM] R. BOTT and J. MILNOR, On the parallelizability of the spheres, Bull. AMS, **64**, (1958), 87-89.
- [H] L. HÖRMANDER, Complex Analysis in Several Variables North Holland (1973).
- [HP] R. HARVEY and J. POLKING, Fundamental solutions in complex analysis, Parts 1 and 2, Duke Math. J., Vol 46, 253-340 (1978).
- [K] A. KHRENNIKOV, Superanalysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1999).
- [LM] I. LIEB and J. MICHEL, The Cauchy-Riemann complex, Integral Formulae and Neumann problem. Vieweg Aspects of Math., Wiesbaden (2002).