



HAL
open science

Automates probabilistes: problèmes décidables et indécidables

Hugo Gimbert, Youssef Oualhadj

► **To cite this version:**

Hugo Gimbert, Youssef Oualhadj. Automates probabilistes: problèmes décidables et indécidables. 2009. hal-00422888

HAL Id: hal-00422888

<https://hal.science/hal-00422888>

Submitted on 8 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Automates probabilistes : problèmes décidables et indécidables

Yousseuf Oualhadj

Université Bordeaux 1
Master S&T mention Informatique
Mémoire de recherche

Maître de stage : *Hugo Gimbert*

Bordeaux, le 7 octobre 2009

If you've never failed, you've never lived ...

Remerciements

Je tiens à remercier M. Gimbert, qui a proposé ce sujet de mémoire et qui a accepté de m'encadrer. Pendant ces quatre mois, il m'a apporté son soutien tant sur le plan scientifique que matériel. Il a su me transmettre sa rigueur scientifique et sa passion pour les méthodes formelles, particulièrement la théorie des jeux.

Je voudrais aussi remercier mon tuteur M. Zeitoun, qui d'une part m'a prodigué des conseils avisés, et d'une autre m'a donné l'envie de suivre le parcours Recherche.

Je tiens à saluer les personnes qui m'ont soutenu tout au long de ce travail, et qui ont été présentes jusqu'à la fin.

Résumé

Le modèle des automates probabilistes a été introduit par M. O Rabin [11] en 1963. Les recherches menées lors de ce stage se sont intéressées à deux problèmes connus concernant les automates probabilistes.

Le premier problème est le problème du vide : existe-t-il un mot accepté avec probabilité supérieure à λ avec $0 < \lambda < 1$? On fournit une explication détaillée de la preuve d'indécidabilité [8]. On prouve ensuite que deux états probabilistes suffisent à rendre le problème indécidable. On montre aussi que ce problème est décidable pour les automates avec un état probabiliste et pour les automates probabilistes en DAG.

Le second problème est le problème de la valeur isolée : existe-t-il des mots acceptés avec probabilité arbitrairement proche de λ ? On traite une question restée ouverte relative à ce problème : est-il possible de décider si la valeur 1 est isolée ? On prouve que ce problème n'est pas décidable.

Enfin, on explique comment simplifier la preuve de l'indécidabilité du vide en adaptant la preuve de Bertoni pour l'indécidabilité de la valeur isolée [2].

Table des matières

1	Introduction	11
2	Automates probabilistes	13
2.1	Formalismes	13
2.2	Langage accepté par un automate probabiliste	15
2.3	Lien avec les jeux stochastiques	15
3	Le problème du vide	17
3.1	Problème du vide	17
3.2	Preuve classique d'indécidabilité	17
3.3	Nouvelle preuve	25
3.4	Automates avec peu d'états probabilistes	28
3.4.1	Un état probabiliste : décidable	28
3.4.2	Deux états probabilistes : indécidable	30
3.5	Automates probabilistes en DAG	32
4	Le problème de la valeur isolée	33
4.1	Le problème de l'isolation du seuil	33
4.2	Preuve classique d'indécidabilité	33
4.3	Problème de la valeur 1	35
5	Directions de recherches	39
5.1	Variantes sur les automates probabilistes	39
5.2	Processus de décision Markoviens	41
5.3	Jeux stochastiques avec signaux	43
6	Conclusion	45
	Bibliographie	47

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce stage de Master est de développer l’algorithmique des automates probabilistes. Il y a deux questions algorithmiques centrales à propos des automates probabilistes. La première est le problème du vide : existe-t’il un mot accepté avec probabilité plus grande que λ avec $0 \leq \lambda \leq 1$? La seconde est le problème de l’isolation : existe-t-il des mots acceptés avec probabilité arbitrairement proche de λ ?

Le problème du vide pour les automates probabilistes a été montré indécidable pour la première fois par Paz dans [10]. Paz réduit un problème sur les langages hors contexte au problème du vide. Dans [3] toujours concernant le problème du vide, la question posée était à partir de combien d’états le problème du vide devient indécidable, la réponse pour un alphabet à deux lettres était que le problème est indécidable à partir de 46 états. Des travaux ultérieurs montrent que cette borne peut être ramenée à 25 toujours avec un alphabet binaire [6]. La question est encore ouverte pour les automates avec moins d’états. Dans ce mémoire on s’intéresse seulement aux états probabilistes, la question qu’on se pose est combien d’états probabilistes faut-il pour que le problème devienne indécidable ?

Le problème de l’isolation a été montré indécidable par Bertoni dans [2]. Bertoni a laissé ouvert les cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ c’est-à-dire la décidabilité de la question “existe-t’il des mots acceptés avec probabilité arbitrairement proche de 1 ?”.

Les recherches menées durant ce stage avaient pour but :

- a) De simplifier les preuves existantes d’indécidabilité.
- b) De trouver des classes d’automates pour lesquelles les problèmes du vide et du seuil deviennent décidables.
- c) De s’intéresser à la décidabilité du problème de l’isolation pour $\lambda = 1$.

On a obtenu plusieurs réponses à ces questions, ce qui est très encourageant.

Concernant a), on a prouvé l’indécidabilité du vide en adaptant les techniques de Bertoni pour le problème de l’isolation. Dans la section 3.3 on peut voir que cela donne une preuve nettement plus courte et claire que les preuves précédentes de Paz et Madani/Condon [8]. On explique aussi comment on peut utiliser une nouvelle variante du problème de correspondance de Post pour mettre en évidence une construction d’un automate probabiliste à 5 états pour lequel le problème du vide est indécidable.

Concernant b), on a obtenu deux résultats. Le premier est le théorème 3.2 page 28 qui montre que le problème du vide est décidable pour les automates avec un seul état

probabiliste. Le second est le résultat du théorème 3.3 page 30 qui dit que ce problème devient indécidable à partir de deux états probabilistes.

Concernant c), on a montré que la question de l'isolation pour $\lambda = 1$ est indécidable voir le théorème 4.3 page 36. La preuve d'indécidabilité est radicalement différente des preuves d'indécidabilité existantes. En effet, la preuve se base sur l'existence d'automates probabilistes dont la valeur est 1 si et seulement si la probabilité de certaines transitions est supérieure à $\frac{1}{2}$.

Chapitre 2

Automates probabilistes

2.1 Formalismes

Considérons un système \mathcal{A} , qui peut être dans un nombre fini d'états. À chaque instant, \mathcal{A} exécute une action, le nouvel état est choisi aléatoirement en fonction des probabilités de transition qui dépendent de l'état courant et de l'action exécutée.

Définition 2.1. Soit Q un ensemble fini. Une matrice de transition sur Q est une matrice carrée $M \in [0, 1]^{Q \times Q}$ telle que pour tout $q \in Q$, $\sum_{r \in Q} M_{q,r} = 1$. Pour tout état $q, r \in Q$ $M_{q,r}$ est la probabilité de transition de l'état q vers l'état r .

Définition 2.2. Un automate fini probabiliste \mathcal{A} est un tuple $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \mathcal{M}, q_0, F)$ où

Q : l'ensemble fini des états.

Σ : l'alphabet fini d'entrée.

\mathcal{M} : $\mathcal{M} = (M_a)_{a \in \Sigma}$ où $M_a \in [0, 1]^{Q \times Q}$ est la matrice de transition associée à la lettre a .

q_0 : l'état initial.

F : l'ensemble des états acceptants.

Définition 2.3. Soit Q un ensemble fini. On note $\mathcal{D}(Q)$ l'ensemble des distributions de probabilité sur Q , $\mathcal{D}(Q) = \{\delta \in [0, 1]^Q, \sum_{q \in Q} \delta(q) = 1\}$.

Définition 2.4. Soit Q un ensemble fini. On note $1|_q$ pour $q \in Q$ le vecteur ligne dont toutes les composantes valent 0 sauf q , $(1|_q)^t$ est sa transposée.

Définition 2.5. Soit $u = a_0 \dots a_n \in \Sigma^*$ un mot, le calcul de \mathcal{A} sur u est la suite $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n+1} \in \mathcal{D}(Q)$ telle que $\delta_0 = 1|_{q_0}$ et $\delta_{i+1} = \delta_i \cdot M_{a_i}$.

Pour $R \subseteq Q$ et $q \in Q$ on note $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(q_0 \xrightarrow{u} R) = \sum_{r \in R} \delta_{n+1}(r)$ et on note $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(u) = \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(q_0 \xrightarrow{u} F)$

est la probabilité que \mathcal{A} accepte le mot u .

Soit \mathcal{A} l'automate fini probabiliste suivant :

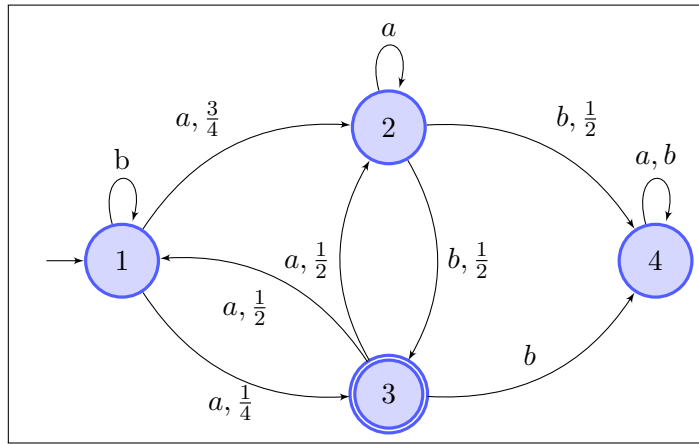


FIG. 2.1: Un automate fini probabiliste

$$Q : \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\Sigma : \{a, b\}$$

$$T : M_a = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q_0 : \{1\}$$

$$F : \{3\}$$

On étiquette les transitions de la façon suivante : (σ, p) avec σ est la lettre lue, p est la probabilité de transition.

\mathcal{A} est représenté graphiquement par la figure 2.1.

Le calcul de \mathcal{A} sur le mot ab

$$\begin{aligned} \delta_0 &= (1, 0, 0, 0) \\ \delta_1 &= (1, 0, 0, 0) \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0) \\ \delta_2 &= (0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

Le calcul s'arrête avec la distribution $(0, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4})$

Définition 2.6. Soient deux automates probabilistes \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 ($Q_i, \Sigma, \mathcal{M}_i, q_{0,i}, F_i$). On définit le produit synchronisé $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ ($Q, \Sigma, \mathcal{M}, q_0, F$) tel que $Q = Q_1 \times Q_2$, $q_0 = (q_{0,1}, q_{0,2})$, F est défini selon la mesure de probabilité qu'on veut calculer et les matrices de transitions sont de tailles $|Q_1 \times Q_2| \times |Q_1 \times Q_2|$ et pour chaque transition $q_1 \xrightarrow{u, p_1} q'_1$ de \mathcal{A}_1 et $q_2 \xrightarrow{u, p_2} q'_2$ de \mathcal{A}_2 on définit la transition $(q_1, q_2) \xrightarrow{u, p_1 p_2} (q'_1, q'_2)$

Lemme 2.1. *Si $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est le produit synchronisé des automates probabilistes \mathcal{A} et \mathcal{B} alors :*

$$\mathbb{P}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((q_0, q'_0) \xrightarrow{w} (q, q')) = \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(q_0 \xrightarrow{w} q) \cdot \mathbb{P}_{\mathcal{B}}(q'_0 \xrightarrow{w} q')$$

Preuve. Supposons qu'il existe un mot $w = u_1 \dots u_n \in \Sigma^*$ tel que le calcul de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ sur ce mot s'arrête dans l'état (q_1, q_2) .

Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((q_0, q'_0) \xrightarrow{w} (q, q')) &= \pi_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}^0 \cdot M_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}^{u_1} \dots M_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}^{u_n} \cdot (1|_{(q, q')})^t \\ &= [\pi_{\mathcal{A}}^0 \cdot M_{\mathcal{A}}^{u_1} \dots M_{\mathcal{A}}^{u_n} \cdot (1|_q)^t] \cdot [\pi_{\mathcal{B}}^0 \cdot M_{\mathcal{B}}^{u_1} \dots M_{\mathcal{B}}^{u_n} \cdot (1|_{q'})^t] \\ &= \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(q_0 \xrightarrow{w} q) \cdot \mathbb{P}_{\mathcal{B}}(q'_0 \xrightarrow{w} q') \end{aligned}$$

□

Exemple 2.1.

Le calcul de l'exemple 2.1 s'est arrêté avec la distribution $(0, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4})$, la probabilité d'être dans l'état acceptant 3 est $\frac{3}{8}$, alors le mot ab est accepté avec probabilité $\frac{3}{8}$.

2.2 Langage accepté par un automate probabiliste

On appelle langage stochastique tout langage reconnu par un automate probabiliste, soit \mathcal{A} un automate probabiliste, on note $(\mathcal{L}_{\mathcal{A}}, \lambda)$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$ l'ensemble des mots acceptés par \mathcal{A} avec probabilité supérieure à λ .

Langage non régulier Une fois le seuil λ fixé, les automates probabilistes ont un pouvoir expressif assez puissant, ils peuvent en effet exprimer les langages hors contexte [10]. Dans la section 3.2 on explique la construction d'un automate probabiliste qui accepte le langage $a^n b^n$ avec probabilité arbitrairement proche de 1, $\forall \varepsilon > 0$ l'automate accepte $a^n b^n$ avec probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$ et accepte les autres mots avec probabilité inférieure à ε .

Langage régulier Il existe une classe d'automates probabilistes qui a un pouvoir expressif moins important, c'est la classe des automates probabilistes qui possèdent un seuil isolé, (cf définition 4.1) ils capturent exactement les langages réguliers [11].

Exemple 2.2.

Considérons l'automate de la figure 2.2, cet automate accepte le langage $(a^ b, \frac{1}{3})$. Remarquons que le seuil $\frac{1}{3}$ est isolé pour cet automate. En effet il n'existe pas de mot $w \in \Sigma^*$ tel que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w)$ soit arbitrairement proche de $\frac{1}{3}$*

2.3 Lien avec les jeux stochastiques

Les jeux stochastiques, introduits par Shapley [13], constituent une extension du modèle des processus de décision Markoviens. Dans le cas de jeux à un seul joueur, on dispose d'un graphe (l'arène de jeu) avec deux types de sommets. Des sommets appartenant aux joueurs et des sommets qui appartiennent au hasard. Dans le cas de jeux à deux joueurs on définit deux types de joueurs. Le premier appelé "Maximiser", son but est de maximiser la probabilité que la partie soit gagnée. Le second appelé "Minimiser", son but est de minimiser la probabilité que la partie soit gagnée. Soit le jeu stochastique de la figure 2.3 :

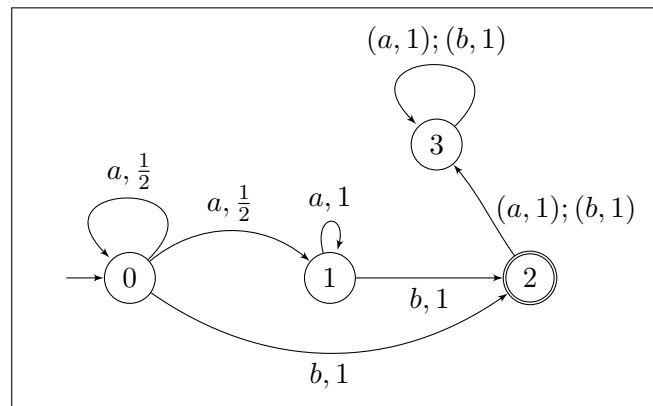


FIG. 2.2: Automate probabiliste \mathcal{A} acceptant le langage a^*b avec probabilité supérieure à $\frac{1}{3}$

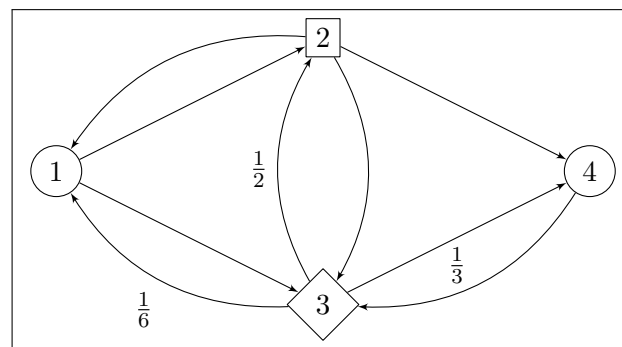


FIG. 2.3: Un jeu stochastique à deux joueurs

"Maximiser" contrôle les sommets $\{1, 4\}$, "Minimiser" contrôle le sommet $\{2\}$ et le sommet $\{3\}$ n'est contrôlé par aucun des joueurs, c'est le hasard qui décide pour lui. Une partie sera gagnée si "Maximiser" atteint le sommet $\{4\}$.

Généralement on peut distinguer deux types de jeux : les jeux à information parfaite et les jeux à information partielle.

Les jeux à information parfaite Sont des jeux dans lesquels les joueurs ont une connaissance parfaite de l'état actuel du jeu et de la suite des états par lesquels est passé le jeu.

Les jeux à information partielle Sont des jeux dans lesquels les joueurs ne disposent que d'une partie des informations qui concernent l'état de la partie. Dans le cas le plus extrême, on peut imaginer que les joueurs sont aveugles et la seule information qu'ils possèdent est la description de l'arène du jeu et la suite des actions qu'ils ont eux-même choisis.

Dans ce cas leur stratégie ne dépend que du temps : c'est un mot infini sur l'alphabet des actions. Dans le cas des jeux à un joueur on retrouve le modèle des automates probabilistes.

Chapitre 3

Le problème du vide

Dans ce chapitre on s'intéresse au problème du vide pour les automates probabilistes. On commence d'abord par introduire le problème, ensuite on explique la preuve de [8] qui utilise une réduction du problème du mot vide pour les machines à deux compteurs, puis on donne une nouvelle preuve inspirée par l'article de Bertoni [2] sur le problème de l'isolation du seuil en réduisant le problème de correspondance de Post. Par la suite on étudie la décidabilité de quelques classes d'automates probabilistes en s'intéressant dans un premier temps au nombre d'états probabilistes et dans un second temps en s'intéressant à la structure de l'automate.

3.1 Problème du vide

Pour tout modèle décisionnel, une question naturelle qu'on se pose concerne l'existence d'entrée sur lesquels le modèle répond positivement. Pour les automates probabilistes cette question se traduit par le problème suivant :

Problème 1.

Étant donné un automate probabiliste \mathcal{A} et un seuil $0 < \lambda < 1$, décider s'il existe un mot u accepté par \mathcal{A} avec probabilité $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(u) \geq \lambda$

$\lambda = 0$ Dans ce cas le problème est décidable pour le vérifier il suffit de chercher un chemin entre l'état initial et un état acceptant. S'il existe un chemin entre l'état initial et un état acceptant, il existe alors un mot accepté avec probabilité non nulle, sinon il n'existe pas de mot accepté avec probabilité non nulle.

$\lambda = 1$ Il faut trouver un mot tel que tous les calculs sur ce mot sont acceptants.

Dans le cadre général le problème est indécidable. C'est Paz qui fut le premier à faire la preuve [10] en réduisant un problème indécidable sur les langages hors contexte [5].

3.2 Preuve classique d'indécidabilité

Dans cette section, on explique une preuve de Madani [8] pour l'indécidabilité du problème du vide. Nous avons accompli un effort certain de formalisation alors que la preuve originale est juste esquissée. Pour montrer que le problème 1 n'est pas décidable on réduit le problème du mot vide pour les machines à deux compteurs au problème

du vide pour les automates probabilistes. Dans la réduction de la preuve on utilise un automate probabiliste qui prend en entrée des séquences qui codent des calculs de machines à deux compteurs. Pour vérifier qu'une séquence est bien un calcul d'une machine à deux compteurs, un automate probabiliste doit être capable de vérifier les compteurs de ces machines. Afin de pouvoir réaliser ce test pour des compteurs codés en unaire, le problème revient à tester pour un mot $a^i b^j$ si $i = j$.

La proposition 3.1 nous montre l'existence d'un automate probabiliste qui reconnaît les mots $a^i b^j$ tels que $i = j$ avec probabilité arbitrairement proche de 1.

Proposition 3.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un automate fini probabiliste \mathcal{A}_ε sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ tel que $\forall i, j \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(a^i b^j) &\geq 1 - \varepsilon \quad \text{si } i = j \\ \mathbb{P}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(a^i b^j) &\leq \varepsilon \quad \text{si } i \neq j\end{aligned}$$

Avant d'entamer la preuve de cette proposition on aura besoin de quelques résultats intermédiaires, le premier est un lemme sur les probabilités conditionnelles.

Lemme 3.1. *Soient A et B deux événements indépendants alors :*

$$\mathbb{P}(A\bar{B}|\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B) \geq 1 - \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\bar{B}|\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B) &= \frac{\mathbb{P}(A\bar{B})}{\mathbb{P}(\bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}B)} \\ &= \left(1 + \frac{\mathbb{P}(\bar{A}B)}{\mathbb{P}(A\bar{B})}\right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}\right)^{-1}\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$ on trouve

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{\mathbb{P}(\bar{A}B)}{\mathbb{P}(A\bar{B})}\right)^{-1} &\geq \left(1 + \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)}\right)^{-1} \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}\end{aligned}$$

□

Ensuite on décrit les détails de l'algorithme utilisé pour le test d'égalité faible développé dans [1] et inspiré par les travaux de Freivalds [4].

On définit un automate probabiliste qui sur une entrée $a^i b^j$ effectue les actions suivantes :

1. Pour chaque lettre a , on lance deux pièces.
2. Pour chaque lettre b , on lance deux pièces.
3. Pour chaque lettre a et pour chaque lettre b , on lance une pièce.
4. Pour chaque lettre a et pour chaque lettre b , on lance une pièce.
5. On vérifie si $i \equiv j [k]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, k appelé le facteur discriminant est un paramètre choisi par l'utilisateur.

Ensuite en fonction des résultats obtenus dans 1,2,3,4,5, l'automate s'arrête sur l'un des trois états : {correct, suspect, indécision}.

Si $i \neq j$ [k] l'automate s'arrête dans un état suspect. Sinon l'état final est déterminé en fonction des événements suivants :

A : avoir que des faces lors des calculs de 1 ou lors des calculs de 2.

B : avoir que des faces lors des calculs de 3 ou lors des calculs de 4.

Événements	Réponse
A et B	indécision
A et $\neg B$	suspect
$\neg A$ et B	correct
$\neg A$ et $\neg B$	indécision

Calculons les probabilités des événements A et B :

$$- \mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{4}\right)^i + \left(\frac{1}{4}\right)^j - \left(\frac{1}{4}\right)^{i+j}$$

$$- \mathbb{P}(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} + \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} - \left(\frac{1}{4}\right)^{i+j}$$

Dans la figure 3.1 un automate probabiliste qui accepte son entrée avec probabilité $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(a^i b^j) = \mathbb{P}(A)$ et dans la figure 3.2 un automate probabiliste qui accepte son entrée avec probabilité $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}(a^i b^j) = \mathbb{P}(B)$ On a donc pour un mot $a^i b^j$, $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(a^i b^j) = \left(\frac{1}{4}\right)^i + \left(\frac{1}{4}\right)^j - \left(\frac{1}{4}\right)^{i+j}$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}(a^i b^j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} + \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} - \left(\frac{1}{4}\right)^{i+j}$.

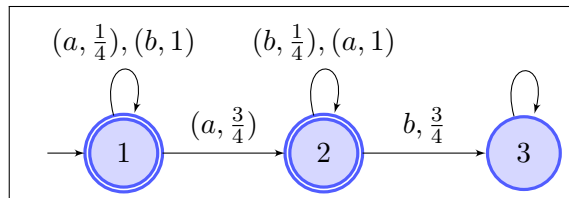


FIG. 3.1: Automate fini probabiliste \mathcal{A}

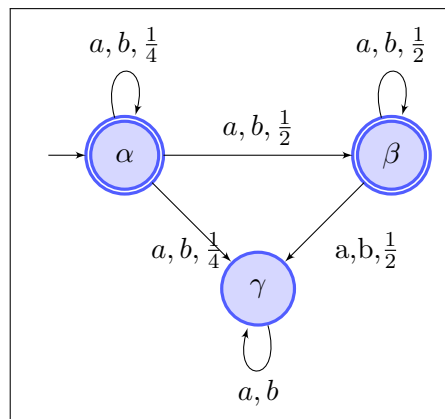


FIG. 3.2: Automate fini probabiliste \mathcal{B}

Dans notre cas on a besoin d'un automate qui effectue les deux tests de façon parallèle et non séquentielle. Pour cette raison on considère l'automate $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}}, \Sigma, \mathcal{M}, (1, a), F)$ $suspect = \{(1, c), (2, c)\}$, $correct = \{(3, a), (3, b)\}$, $indécision = Q \setminus correct \cup suspect$, $\Sigma = \{a, b\}$ et \mathcal{M} contient les deux tables de transitions des figures 3.3 et 3.4.

a	$(1, \alpha)$	$(2, \alpha)$	$(3, \alpha)$	$(1, \beta)$	$(2, \beta)$	$(3, \beta)$	$(1, \gamma)$	$(2, \gamma)$	$(3, \gamma)$
$(1, \alpha)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	0
$(2, \alpha)$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0
$(3, \alpha)$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$
$(1, \beta)$	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0
$(2, \beta)$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$(3, \beta)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
$(1, \gamma)$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
$(2, \gamma)$	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$(3, \gamma)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

FIG. 3.3: table de transition pour la lettre a

b	$(1, \alpha)$	$(2, \alpha)$	$(3, \alpha)$	$(1, \beta)$	$(2, \beta)$	$(3, \beta)$	$(1, \gamma)$	$(2, \gamma)$	$(3, \gamma)$
$(1, \alpha)$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0
$(2, \alpha)$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$
$(3, \alpha)$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$
$(1, \beta)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
$(2, \beta)$	0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$(3, \beta)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
$(1, \gamma)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$(2, \gamma)$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$(3, \gamma)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

FIG. 3.4: table de transition pour la lettre b

Maintenant que nous avons un automate probabiliste qui nous permet de savoir lequel des événements A ou B est réalisé, calculons la probabilité que le test retourne *suspect* et la probabilité qu'il retourne *correct*.

Lemme 3.2. Soient les événements A et B décrits plus haut on a :

$$\frac{\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))}{\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A))} \geq \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) &= 4^{-i} + 4^{-j} - 2^{-i-j} - 2^{-i-j} \\ &= 2^{-i}(2^{-i} - 2^{-j}) - 2^{-j}(2^{-i} - 2^{-j}) \\ &= (2^{-i} - 2^{-j})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \geq 1 &\Rightarrow \frac{1 - \mathbb{P}(B)}{1 - \mathbb{P}(A)} \geq 1 \\ &\Rightarrow \frac{\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))}{\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A))} \geq \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2. *Soit un mot $a^i b^j$ tel que $i \equiv j \pmod{k}$ alors :*

- Si $i = j$, $\mathbb{P}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((1, a) \xrightarrow{a^i b^j} \text{suspect}) = \mathbb{P}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((1, a) \xrightarrow{a^i b^j} \text{correct})$
- Si $i \neq j$, $\mathbb{P}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((1, a) \xrightarrow{a^i b^j} \text{suspect}) \geq 2^k \mathbb{P}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((1, a) \xrightarrow{a^i b^j} \text{correct})$

Preuve. D'après le lemme 2.1 on a $\mathbb{P}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}(\text{suspect}) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}(\text{correct}) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A))$.

- Dans le cas où $i = j$

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{4}\right)^i + \left(\frac{1}{4}\right)^i - \left(\frac{1}{4}\right)^{2i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} - \left(\frac{1}{4}\right)^{2i} = \mathbb{P}(B)$$

donc $\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A))$ d'où $\mathbb{P}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}(\text{suspect}) = \mathbb{P}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}(\text{correct})$

- Dans le cas où $i \neq j$ on peut supposer que $j = i + lk$, on trouve alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \left(\frac{1}{4}\right)^i + \left(\frac{1}{4}\right)^{i+lk} - \left(\frac{1}{4}\right)^{2i+lk} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2lk} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+2lk}\right] \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}(A) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} \tag{3.1}$$

Remarquons aussi que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} - \left(\frac{1}{4}\right)^{i+j} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+lk-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{4i+2lk} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+lk-1} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+lk+1}\right] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+lk-1} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}(B) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+lk-1} \tag{3.2}$$

La probabilité que $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ s'arrête dans un état *suspect* est $\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))$ et la probabilité qu'il s'arrête dans un état *correct* est $\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A))$.

Calculons le ratio

$$\frac{\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))}{\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A))}$$

le lemme 3.2 nous donne :

$$\frac{\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))}{\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A))} \geq \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Ensuite les équations (3.1) et (3.2) nous donnent

$$\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \geq \frac{2^{-2i}}{2^{-2i-lk+1}} = 2^{k-1} \geq 2^k$$

Ce qui montre que retourner *suspect* est 2^k fois plus probable que retourner *correct*.

□

Preuve proposition 3.1.

On définit l'automate $\mathcal{A}_\varepsilon(Q, \Sigma, \mathcal{M}, q_0, F)$ avec $Q = (Q_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}})^n$, $\Sigma = \{a, b\}$ ($n \geq -\ln(\frac{\varepsilon}{2})$) chaque état de \mathcal{A}_ε sera de la forme (q_1, \dots, q_n) si le calcul s'arrête sur un état tel que $q_i \in \text{suspect}$, $\forall i \in [0, n]$ alors le mot est rejeté. Le seul moyen pour que \mathcal{A}_ε rejette son entrée est que dans les n copies le calcul s'arrête dans un état *suspect*. D'après la proposition 3.2 dans le cas où $i = j$ cela se produit avec probabilité inférieure à $\frac{1}{2^n}$ donc l'entrée sera acceptée avec probabilité $1 - \frac{1}{2^n} \geq 1 - \varepsilon$. Dans le cas où $i \neq j$ mais $i \equiv j [k]$ on a :

$$\mathbb{P}(A\bar{B}) \geq \mathbb{P}(A\bar{B} | A\bar{B} \vee \bar{A}B)$$

D'après le lemme 3.1 on a :

$$\mathbb{P}(A\bar{B} | A\bar{B} \vee \bar{A}B) \geq 1 - \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

La proposition 3.2 nous donne :

$$\mathbb{P}(A\bar{B} | A\bar{B} \vee \bar{A}B) \geq 1 - 2^{-k}$$

Donc une entrée sera rejetée avec probabilité supérieure à $(1 - 2^{-k})^n$, en posant $k \geq \ln_2(1 - \sqrt[n]{1 - \varepsilon})$ on trouve $(1 - 2^{-k})^n \geq 1 - \varepsilon$, finalement on accepte une entrée où $i \neq j$ et $i \equiv j [k]$ avec probabilité inférieure ε . Il suffit à présent de calculer le produit $\mathcal{A}_n \times \mathcal{A}'_k$ tel que \mathcal{A}'_k est un automate fini déterministe qui accepte une entrée $a^i b^j$ si et seulement si $i \equiv j [k]$. Un mot sera accepté par $\mathcal{A}_n \times \mathcal{A}'_k$ si le calcul s'arrête dans un état acceptant pour \mathcal{A}_n et pour \mathcal{A}'_k . Ceci termine la preuve de la proposition 3.1 □

La proposition 3.1 nous montre comment tester l'égalité de deux compteurs avec un automate probabiliste. Il faut maintenant trouver un moyen pour coder le calcul d'une machine à deux compteurs par un mot. Ensuite il faut prouver l'existence d'un automate probabiliste qui accepte ce mot avec probabilité proche de 1 si et seulement si la machine accepte le mot vide.

Définition 3.1. Une machine à deux compteurs est une machine $M = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, Q_f, a, b)$ où Q est l'ensemble des états, Σ est l'alphabet de la machine, $\delta : Q \times \Sigma \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow Q \times \{-1, 0, 1\}^2$ est la fonction de transition, Q_0 (resp Q_f) l'ensemble des états initiaux (resp états acceptants), a et b sont deux compteurs. La bande de la machine est infinie dans les deux sens et supposée être en lecture seule. M peut faire les tests suivants : $a == 0$ $b == 0$. Une transition est choisie selon l'état courant, la lettre lue et les valeurs des compteurs ensuite elle peut exécuter les instructions suivantes :

- incrémente a .
- incrémente b .
- décrémente a (si $a > 0$).
- décrémente b (si $b > 0$).

Un calcul est acceptant s'il termine dans un état acceptant.

a_k^i avec $i \in \mathbb{N}$ signifie que le compteur a possède la valeur i à l'instant k .

Proposition 3.3. Pour toute machine de Turing à deux compteurs $M(Q_M, \Sigma, \delta, Q_0, Q_f, a, b)$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on peut construire un automate fini probabiliste \mathcal{A}_ε tel que : M accepte le mot vide si et seulement s'il existe un mot $w \in \Sigma^*$ tel que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(w) \geq 1 - \varepsilon$

Preuve. Soit $M(Q_M, \Sigma, \Gamma, \delta, Q_0, Q_f, a, b)$ une machine à deux compteurs. On construit un automate probabiliste \mathcal{A} sur l'alphabet $\Sigma = \{Q_M, \#, a, b\}$ qui vérifiera si une suite de configurations de la machine M est un calcul acceptant. On code cette suite avec le mot suivant $w = q_0 a_0^i b_0^j \# q_1 a_1^i b_1^j \# \dots \# q_m a_m^i b_m^j$. L'automate probabiliste \mathcal{A} devra faire les vérifications suivantes :

1. $q_0 \in Q_0$
2. $q_m \in Q_f$
3. $\forall k \in [0, m] : q_{k+1} a_{k+1}^i b_{k+1}^j = \delta(q_k a_k^i b_k^j)$

Les tests 1 et 2 peuvent êtres réalisés avec des automates finis déterministes par contre pour le test 3 on doit vérifier que les compteurs ont été mis à jour correctement, pour cela on pose r_k (resp s_k) comme étant l'action effectuée sur le compteur a (resp b) à l'instant k , on peut alors écrire $a_{k+1}^i = a_k^i + r_k$ et $b_{k+1}^j = b_k^j + s_k$ avec $r_k, s_k \in \{-1, 0, 1\}$. En utilisant l'automate de la proposition 3.1 une transition correcte sera acceptée avec probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$ et une transition incorrecte sera acceptée avec probabilité inférieure à ε . On aura donc besoin d'un automate probabiliste pour le compteur a , un pour le compteur b et d'un automate déterministe pour les autres tests, on peut alors définir \mathcal{A} comme étant le produit synchronisé de ces automates. On définit un ensemble S de trois états : $\{\text{ok}, \text{ko}, \text{indécis}\}$. Sur une entrée w , \mathcal{A} vérifiera toutes les transitions puis choisit d'aller dans un état de S , ce choix est réalisé de la façon suivante :

- (a) Il choisit ok si et seulement si toutes les transitions ont été acceptées.
- (b) Il choisit ko si et seulement si toutes les transitions ont été rejetées.
- (c) Il choisit indécis si certaines transitions ont été acceptées et d'autres rejetées.

Soit $m \in \mathbb{N}$, montrons que si $w \in \Sigma^*$ est un calcul correct alors :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(Q_0 \xrightarrow{w} \text{ok} | \neg \text{indécis}) \geq 1 - \varepsilon \quad (3.3)$$

et si $w \in \Sigma^*$ est un calcul incorrect alors :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(Q_0 \xrightarrow{w} \text{ko} | \neg \text{indécis}) \leq \varepsilon \quad (3.4)$$

Remarquons d'abord que (a) nous donne $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(Q_0 \xrightarrow{w} \text{ok}) \geq (1 - \varepsilon)^m$ et que (b) nous donne $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(Q_0 \xrightarrow{w} \text{ko}) \leq \varepsilon^m$ d'où :

$$\frac{\mathbb{P}(\text{ko})}{\mathbb{P}(\text{ok})} \leq \left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^m \quad (3.5)$$

Et

$$\frac{\mathbb{P}(\text{ok})}{\mathbb{P}(\text{ko})} \geq \left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right)^m \quad (3.6)$$

Calculons $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(Q_0 \xrightarrow{w} \text{ok} | \neg \text{indécis})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(Q_0 \xrightarrow{w} \text{ok} | \neg \text{indécis}) &= \mathbb{P}(\text{ok} | \text{ok} \cup \text{ko}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{ok})}{\mathbb{P}(\text{ok} \cup \text{ko})} \\ &= \left(1 + \frac{\mathbb{P}(\text{ko})}{\mathbb{P}(\text{ok})} \right)^{-1} \end{aligned}$$

(3.5) nous donne :

$$\left(1 + \frac{\mathbb{P}(\text{ko})}{\mathbb{P}(\text{ok})} \right)^{-1} \geq \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^m \right)^{-1}$$

Comme $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \geq \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^m$ on trouve :

$$\left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^m\right)^{-1} \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{-1} = 1 - \varepsilon$$

Ce qui nous donne (3.3).

Calculons $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(Q_0 \xrightarrow{w} \text{ko} | \neg \text{indécis})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(Q_0 \xrightarrow{w} \text{ko} | \neg \text{indécis}) &= \mathbb{P}(\text{ko} | \text{ok} \cup \text{ko}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{ko})}{\mathbb{P}(\text{ko} \cup \text{ok})} \\ &= \left(1 + \frac{\mathbb{P}(\text{ok})}{\mathbb{P}(\text{ko})}\right)^{-1} \end{aligned}$$

(3.6) nous donne :

$$\left(1 + \frac{\mathbb{P}(\text{ok})}{\mathbb{P}(\text{ko})}\right)^{-1} \leq \left(1 + \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^m\right)^{-1}$$

Comme $\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^m \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ on trouve :

$$\left(1 + \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^m\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{-1} = \varepsilon$$

Ce qui nous donne (3.4).

On définit l'automate probabiliste \mathcal{A}_ε sur le même alphabet et avec le même espace d'état que \mathcal{A} . \mathcal{A}_ε lit des suites de calcul de M , séparées par $\#\#$. \mathcal{A}_ε accepte (resp rejette) cette entrée dès qu'il accepte (resp rejette) toutes les transitions de l'un des calculs, il rejette également s'il a été indécis pour tous les calculs. Soit k tel que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(\text{indécis})^k \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

- Si M accepte le mot vide avec un calcul $q_0 a_0^i b_0^j \# q_1 a_1^i b_1^j \# \dots \# q_m a_m^i b_m^j$ alors en prenant le mot suivant :

$$w = \underbrace{q_0 a_0^i b_0^j \# q_1 a_1^i b_1^j \# \dots \# q_m a_m^i b_m^j \# \# \dots \# \# q_0 a_0^i b_0^j \# q_1 a_1^i b_1^j \# \dots \# q_m a_m^i b_m^j}_{k \text{ fois}}$$

d'après (3.3) on a $\mathbb{P}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(w) \geq 1 - \varepsilon$.

- Si M n'accepte pas le mot vide alors soit $w_0 \# \# w_1 \# \# \dots \# \# w_l$ une suite de calcul de M . Comme M n'accepte pas le mot vide ces calculs ne peuvent être corrects. Si \mathcal{A}_ε accepte $w_0 \# \# w_1 \# \# \dots \# \# w_l$ il existe alors $i \leq l$ tel que \mathcal{A}_ε a été indécis pour $w_0 \# \# w_1 \# \# \dots \# \# w_{i-1}$ et a accepté w_i . D'après (3.4) $\mathbb{P}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(w_i) \leq \varepsilon$

□

Théorème 3.1. *Le problème du vide pour les automates probabilistes est indécidable.*

Preuve. Soit une machine à deux compteurs M , d'après la proposition 3.3 alors il existe un automate probabiliste \mathcal{A} qui accepte un mot avec probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$ si et seulement si M accepte le mot vide. Supposons qu'il existe un algorithme qui décide si \mathcal{A} accepte un mot avec une probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$ alors on pourrait décider si M accepte le mot vide, or ce problème est indécidable donc le problème du vide est indécidable pour les automates probabilistes. □

Cette preuve établit l'indécidabilité du problème du vide pour les automates probabilistes. Dans la prochaine section on retrouve le même résultat avec une nouvelle preuve qui réduit le problème de correspondance de Post au problème du vide.

3.3 Nouvelle preuve

Dans cette section on propose une nouvelle preuve pour l'indécidabilité du problème du vide. Cette nouvelle preuve est inspirée par le papier de Bertoni [2] sur le problème de l'isolation du seuil. On va aussi se restreindre au cas $\lambda = \frac{1}{2}$, qui est aussi difficile que le cas général.

Proposition 3.4. *Étant donné un automate probabiliste \mathcal{A} et un rationnel $0 < \lambda < 1$ tel que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) \geq \lambda$ avec $w \in \Sigma^*$, il existe un automate probabiliste \mathcal{A}' tel que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}'}(w) \geq \frac{1}{2}$*

Preuve. Soit \mathcal{A} un automate probabiliste et soit un rationnel $0 < \lambda < 1$ tel que $\exists w \in \Sigma^* : \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) \geq \lambda$. On peut toujours trouver un automate probabiliste \mathcal{B} tel que $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}(w) \geq 1 - \lambda$, on pose $\mathcal{A}' = \frac{1}{2}\mathcal{A} + \frac{1}{2}\mathcal{B}$ alors :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{A}'}(w) = \frac{1}{2}\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{\mathcal{B}}(w) \geq \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}(1 - \lambda) = \frac{1}{2}$$

□

La preuve se fait par réduction du problème de correspondance de Post. Le problème de correspondance de Post est le suivant :

Problème 2.

Donnée : deux alphabets finis Σ, K et deux homomorphismes $\psi_1, \psi_2 : \Sigma^* \rightarrow K^*$

Question : Existe-t-il un mot $w \in \Sigma^*$ tel que $\psi_1(w) = \psi_2(w)$?

Ce problème est indécidable la preuve se fait par réduction du problème de l'arrêt pour les machines de Turing [9].

Dans la suite on pose $K = \{0, 1, \dots, k - 2\}$.

On définit la fonction $r : K^* \rightarrow [0, 1]$ de la façon suivante :

$$r(w_1 \dots w_m) = \sum_{i=1}^m w_i k^{i-m-1}$$

Cette fonction représente la valeur du mot $\tilde{w} = w_m \dots w_1$ en base $\frac{1}{k}$. Soit $\varphi : \Sigma^* \rightarrow [0, 1]$ définie par $\varphi = r \circ \psi$.

Bertoni montre dans [2] que pour tout ψ , il existe \mathcal{A}_ψ tel que $\forall w \in \Sigma^*, \mathbb{P}_{\mathcal{A}_\psi}(w) = \varphi(w)$. En effet soit l'automate probabiliste $\mathcal{A}_\psi = (Q, \Sigma, M, q_{in}, q_{out})$ avec $Q = \{q_{in}, q_{out}\}$ et

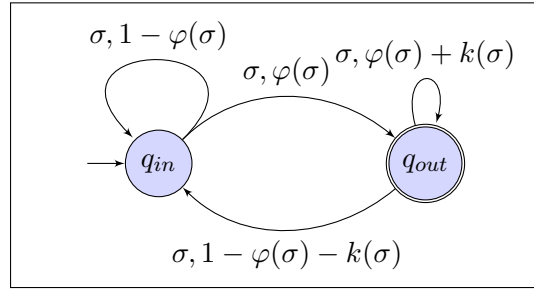
$$\forall \sigma \in \Sigma : M(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 - \varphi(\sigma) & \varphi(\sigma) \\ 1 - \varphi(\sigma) - k(\sigma) & \varphi(\sigma) + k(\sigma) \end{bmatrix} \text{ où } k(\sigma) = k^{-|\psi(\sigma)|}.$$

Exemple 3.1.

Considérons l'alphabet suivant $\Sigma = \{a, b\}$. On obtient alors l'automate de la figure 3.5. avec $\sigma = \{a, b\}$, $\psi(a) = 1$, $\psi(b) = 0$, $\varphi(a) = \frac{1}{3}$, $\varphi(b) = 0$.

Ce qui nous donne les matrices de transitions suivantes :

$$M(a) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad M(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

FIG. 3.5: Automate probabiliste \mathcal{A}_ψ .

Calculons la probabilité que le mot $w = ab$ soit accepté

$$\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}$$

Comme

$$\varphi(w) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

On a bien que

$$\varphi(w) = \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w)$$

Afin de montrer que le problème du vide est indécidable on va d'abord s'intéresser au problème suivant :

Problème 3.

Étant donné un automate probabiliste \mathcal{A} , décider s'il existe un mot u accepté par \mathcal{A} avec probabilité $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(u) = \frac{1}{2}$

Lemme 3.3. *Le problème 3 est indécidable.*

Preuve. Soient ψ_1 et ψ_2 deux homomorphismes, et soit $\varphi_i = r \circ \psi_i$ avec $i \in \{1, 2\}$. Il existe alors deux automates probabilistes \mathcal{A}_{ψ_1} et \mathcal{A}_{ψ_2} . Considérons l'automate suivant : $\frac{1}{2}\mathcal{A}_{\psi_1} + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{A}}_{\psi_2}$ cet automate peut être représenté graphiquement par la figure 3.6, on voudrait savoir s'il existe un mot w tel que

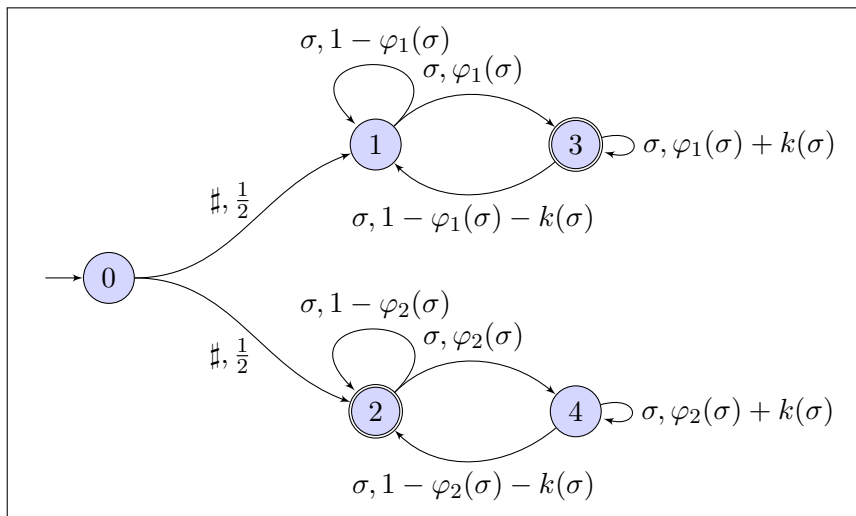
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbb{P}_{\mathcal{A}_{\psi_1}}(w) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{\bar{\mathcal{A}}_{\psi_2}}(w) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\varphi_1(w) + \frac{1}{2}(1 - \varphi_2(w)) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \varphi_1(w) = \varphi_2(w) \\ &\Leftrightarrow \psi_1(w) = \psi_2(w) \end{aligned}$$

Un tel mot existe si et seulement si PCP admet une solution, ceci montre que le problème 3 est indécidable. \square

Dans la suite, on utilise le fait que le problème 3 se réduit au problème du vide pour enfin conclure que le problème du vide est indécidable.

Lemme 3.4. *Soit \mathcal{A} un automate probabiliste, étant donné un réel $0 < \lambda < 1$ il existe un automate probabiliste \mathcal{A}' et il existe un réel $0 < \mu < 1$ tel que :*

$$(\exists w \in \Sigma^* : \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) = \lambda) \Leftrightarrow (\exists w \in \Sigma^* : \mathbb{P}_{\mathcal{A}'}(w) \geq \mu) \quad (3.7)$$

FIG. 3.6: Automate probabiliste $\frac{1}{2}\mathcal{A}_{\psi_1} + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{A}}_{\psi_2}$.

Preuve. Soit un automate probabiliste \mathcal{A} et soit un mot $w \in \Sigma^*$ et un rationnel $0 < \lambda < 1$ alors :

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) = \lambda) &\Leftrightarrow (\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) - \lambda = 0) \\
 &\Leftrightarrow ((\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) - \lambda)^2 \leq 0) \\
 &\Leftrightarrow (\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w)^2 - 2\lambda\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) + \lambda^2 \leq 0) \\
 &\Leftrightarrow (\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w)(\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) - 2\lambda) + \lambda^2 \leq 0) \\
 &\Leftrightarrow (\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w)(2\lambda - \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w)) \geq \lambda^2)
 \end{aligned}$$

En prenant $\mu = \lambda^2$ et \mathcal{A}' l'automate qui génère l'événement $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w)(2\lambda - \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w))$ on vérifie (3.7) ce qui termine la preuve. \square

Avec les lemmes 3.3 et 3.4 on peut conclure en donnant une nouvelle preuve, qui d'une façon plus simple établit le résultat du théorème 3.1

Preuve. Le lemme 3.4 nous donne :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbb{P}_{\mathcal{A} \times \bar{\mathcal{A}}}(w) \geq \frac{1}{4}$$

Ce qui montre que le problème 3 se réduit au problème du vide. D'autre part le lemme 3.3 montre que décider le problème 3 n'est pas possible, on conclut que le problème du vide est indécidable pour les automates probabilistes. \square

Une approche différente : Il existe une autre façon de voir les choses, avec laquelle on construit un automate plus petit pour lequel le problème du vide est indécidable. D'abord on introduit le problème de correspondance de Post lexicographique (PCPL).

Définition 3.2. *Un ordre lexicographique est un ordre que l'on définit sur les suites finies d'éléments d'un ensemble ordonné. Sa définition est une généralisation de l'ordre du dictionnaire. Par exemple soit $a, b \in \Sigma$ avec $a \leq b$, alors on a : $aa <_{lex} ab <_{lex} b$*

Problème 4.

Donnée : deux alphabets finis Σ, K et deux homomorphismes $\psi_1, \psi_2 : \Sigma^* \rightarrow K^*$

Question : Existe-t-il un mot $w \in \Sigma^*$ tel que $\psi_1(w) \geq_{lex} \psi_2(w)$?

Lemme 3.5. PCPL est indécidable.

Le problème du vide est existe-t-il un mot w tel que $\mathbb{P}(w) \geq \frac{1}{2}$? Considérons l'automate généré par l'événement suivant $\frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}(1 - \varphi_2)$, cet automate peut être représenté graphiquement par la figure 3.6, on voudrait savoir s'il existe un mot w tel que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi_1(w) + \frac{1}{2}(1 - \varphi_2(w)) \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \varphi_1(w) \geq \varphi_2(w) \\ &\Leftrightarrow \psi_1(w) \geq_{Lex} \psi_2(w) \end{aligned}$$

Un tel mot existe si et seulement si PCPL admet une solution, une preuve du lemme 3.5 nous permettrait d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.1. *Le problème du vide pour les automates probabilistes avec 5 états est indécidable.*

3.4 Automates avec peu d'états probabilistes

Dans cette section on va étudier deux cas spéciaux, le premier est celui des automates avec un état probabiliste et le second cas est celui des automates avec deux états probabilistes. Un état probabiliste est un état par lequel sort une transition probabiliste.

3.4.1 Un état probabiliste : décidable

Théorème 3.2. *Le problème du vide pour les automates avec un état probabiliste est décidable.*

Définition 3.3. *La valeur d'un état q est la plus grande probabilité qu'un mot soit accepté par l'automate \mathcal{A} à partir de l'état q :*

$$val_{\mathcal{A}}(q) = \sup_{w \in \Sigma^*} \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(q \xrightarrow{w} F)$$

Si de plus q est l'état initial alors :

$$val(\mathcal{A}) = val_{\mathcal{A}}(q)$$

Preuve. Soit \mathcal{A} un automate avec un seul état probabiliste i , supposons aussi que i est l'état initial de \mathcal{A} . On veut calculer la valeur de \mathcal{A} .

$$val(\mathcal{A}) = \sup_{w \in \Sigma^*} \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(i \xrightarrow{w} F)$$

On appelle p et q les deux successeurs directs de i . On note les langages réguliers reconnus à partir des états p et q par l'automate $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{i\} : \mathcal{L}_p$ et \mathcal{L}_q . On note aussi $\mathcal{L}_{q \rightarrow i}$ l'ensemble des mots qui étiquettent un chemin de q vers i .

Nous allons montrer que $val(\mathcal{A})$ ne peut avoir que quatre valeurs possibles : 0 ou x ou $1 - x$ ou 1.

Dans un premier temps, nous montrons ce résultat pour les automates dont les états acceptants sont absorbants, ensuite on généralise le résultat.

$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_q = \emptyset$: Cela veut dire qu'aucun état acceptant n'est accessible à partir des états p et q . Comme ces états sont les seuls successeurs directs de i on conclut que $val(\mathcal{A}) = 0$.

$\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q \neq \emptyset$: Avec cette hypothèse il existe un mot $u \in \mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q$, en lisant ce mot à partir de p et de q on atteint l'ensemble des états acceptants donc $val(\mathcal{A}) = 1$.

$\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_q = \emptyset$:

1. $\mathcal{L}_p \neq \emptyset$ et $\mathcal{L}_q \neq \emptyset$

i) $\mathcal{L}_q \cap \mathcal{L}_{p \rightarrow i} \neq \emptyset$ Soit $u \in \mathcal{L}_q \cap \mathcal{L}_{p \rightarrow i}$ alors :

$$\begin{aligned} (u \in \mathcal{L}_q) &\Rightarrow (\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(q \xrightarrow{u} F) = 1) \Rightarrow (\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(i \xrightarrow{au} F) = 1 - x) \\ (u \in \mathcal{L}_{p \rightarrow i}) &\Rightarrow (\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(p \xrightarrow{u} i) = 1) \Rightarrow (\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(i \xrightarrow{au} i) = x) \end{aligned}$$

Comme F est absorbant on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(i \xrightarrow{(au)^n} F) &= 1 - x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(i \xrightarrow{(au)^n} i) &= x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

de même on montre que $val_{\mathcal{A}} = 1$ quand $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_{q \rightarrow i} \neq \emptyset$

ii) $(\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_{q \rightarrow i} = \emptyset)$ et $(\mathcal{L}_{p \rightarrow i} \cap \mathcal{L}_q = \emptyset)$, avec cette hypothèse on ne peut pas repasser par l'état i donc la plus grande probabilité d'atteindre F est $\max(x, 1 - x)$.

2. $(\mathcal{L}_p \neq \emptyset$ et $\mathcal{L}_q = \emptyset)$ ou $(\mathcal{L}_q \neq \emptyset$ et $\mathcal{L}_p = \emptyset)$, dans ce cas on ne peut atteindre F qu'à partir de l'état p ou qu'à partir de l'état q donc la plus grande probabilité est x dans le premier cas et $1 - x$ dans le second.

Dans le cas où l'ensemble des états acceptants n'est pas absorbant on considère l'ensemble des mots qui étiquettent un chemin de F vers F noté $\mathcal{L}_{F \rightarrow F}$, on garde la même preuve en changeant $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_{q \rightarrow i}$ par $\mathcal{L}_p \cap \mathcal{L}_{q \rightarrow i} \cap \mathcal{L}_{F \rightarrow F}$ et $\mathcal{L}_q \cap \mathcal{L}_{p \rightarrow i}$ par $\mathcal{L}_q \cap \mathcal{L}_{p \rightarrow i} \cap \mathcal{L}_{F \rightarrow F}$. \square

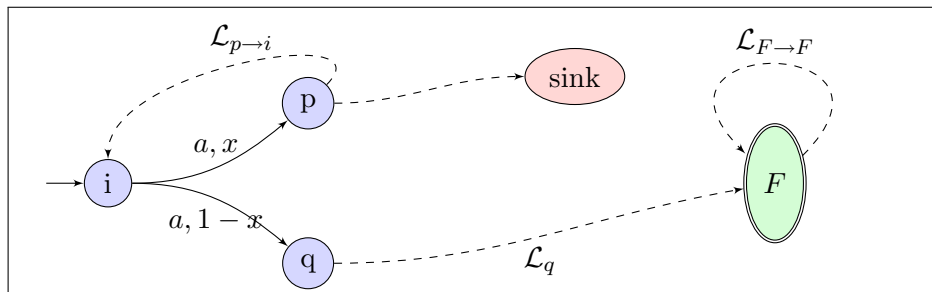


FIG. 3.7: Automate avec un état probabiliste

Remarque 3.1. Le test du vide pour les automates avec un état probabiliste et deux successeurs se fait en temps quadratique

3.4.2 Deux états probabilistes : indécidable

Théorème 3.3. *Le problème du vide pour les automates avec deux états probabilistes est indécidable.*

Preuve. Pour prouver ce théorème on va mettre en évidence un codage qui nous permet de simuler n'importe quel automate probabiliste par un automate probabiliste avec deux transitions probabilistes. Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \mathcal{M}, q_0, F)$ un automate probabiliste quelconque, on définit l'automate $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma', \mathcal{M}', q_0, F')$ qui a seulement deux états probabilistes et la propriété :

$$\forall w \in \Sigma^* \exists w' \in \Sigma'^* : \mathbb{P}_{\mathcal{A}'}(w') = \frac{1}{2}\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) + \frac{1}{2} \quad (3.8)$$

Exemple 3.2.

Soit l'automate \mathcal{A} de la figure 3.8. Chaque couple (lettre, état) de \mathcal{A} donne lieu à trois

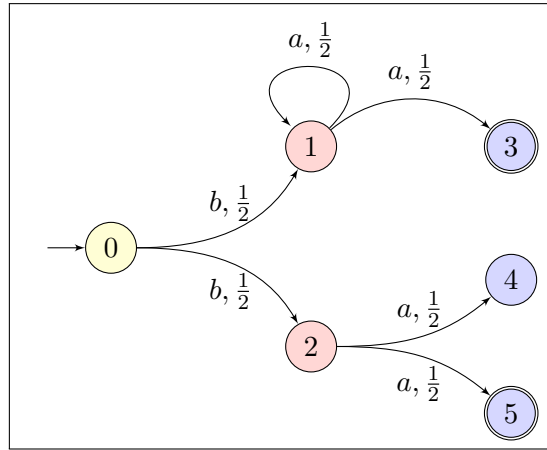


FIG. 3.8: Automate probabiliste \mathcal{A}

lettres de Σ' :

$$\begin{aligned} b &\rightarrow \{b_1, b_2, b_3\} \\ a &\rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}, \{a'_1, a'_2, a'_3\} \end{aligned}$$

On construit l'automate probabiliste \mathcal{A}' de la figure 3.9. Cet automate possède seulement deux états probabilistes $\{0, g_1\}$. Intuitivement on peut imaginer qu'on essaye de faire passer toutes les transitions probabilistes par un seul état g_1 de façon séquentielle alors que dans \mathcal{A} les transitions sont exécutées de manière parallèle. Comme on a ajouté de nouvelles lettres, l'automate \mathcal{A}' nous permet de contrôler les mots acceptés par \mathcal{A} , en effet il n'accepte que les séquences qui codent des mots acceptés par \mathcal{A} .

\mathcal{A}' est construit à partir de \mathcal{A} avec l'algorithme suivant :

- L'ensemble des états $Q' = Q \cup \{g_1, g_2, g'_2\}$ et $F' = F \cup F''$ (F'' est défini plus tard).
- L'alphabet $\Sigma' = f(\Sigma)$ avec $\forall \sigma \in \Sigma : f(\sigma) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \dots \{\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \sigma_3^{(n)}\}$ avec n le nombre de transitions qui utilisent la lettre σ .
- Pour chaque transition non déterministe $p \xrightarrow{\sigma, \frac{1}{2}} q$, $p \xrightarrow{\sigma, \frac{1}{2}} q'$ on crée dans \mathcal{A}' les transitions suivantes :

- i) $p \xrightarrow{\sigma_1} g_1$
- ii) $g_1 \xrightarrow{\sigma_2, \frac{1}{2}} g_2$

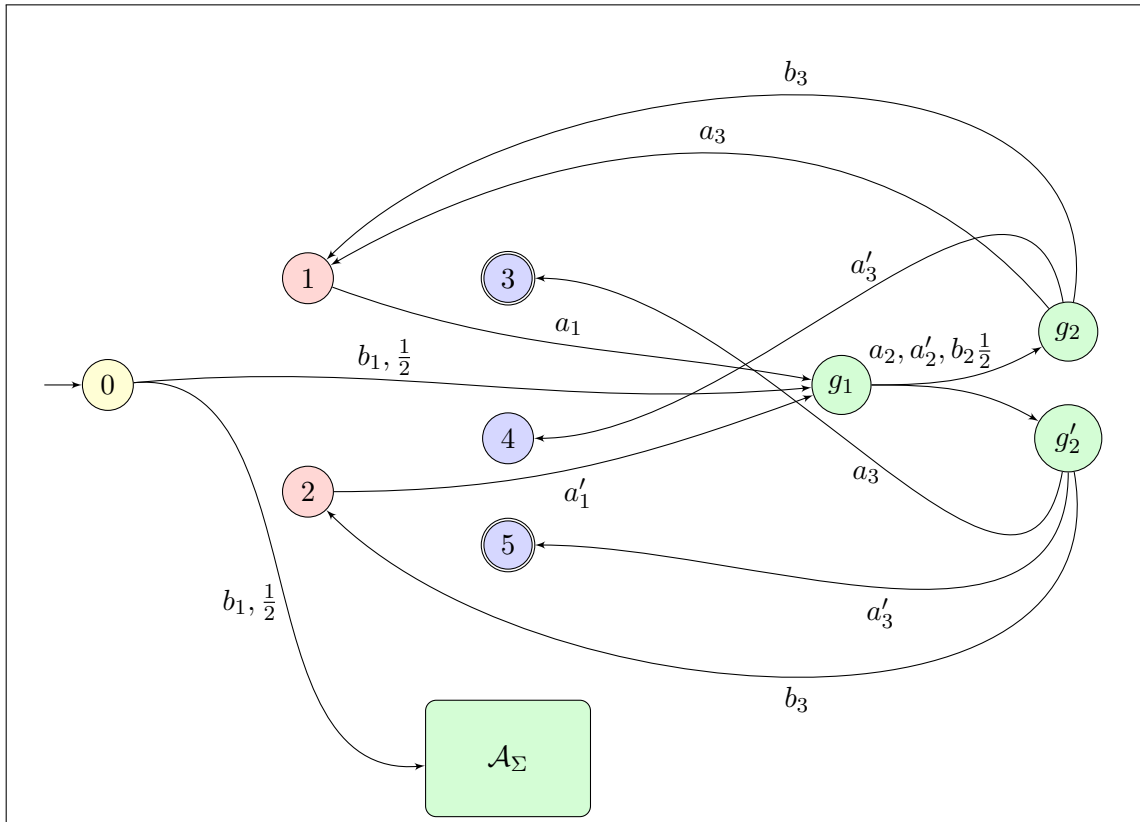


FIG. 3.9: Réduction du problème du vide général au problème du vide pour les automates avec deux états probabilistes. Les états probabilistes sont g_1 et 0 .

$$\text{iii) } g_1 \xrightarrow{\sigma_2, \frac{1}{2}} g'_2$$

$$\text{iv) } g_2 \xrightarrow{\sigma_3} q$$

$$\text{v) } g'_2 \xrightarrow{\sigma_3} q'$$

- On construit l'automate $\mathcal{A}_\Sigma = (Q', \Sigma', \delta, q'_0, F'')$ un automate déterministe qui accepte son entrée $w' \in \Sigma'^*$ si et seulement s'il existe un mot $w \in \Sigma^*$ tel que $w' = f(w)$.
- On branche l'état initial de \mathcal{A}' avec \mathcal{A}_Σ en utilisant une transition probabiliste.

Soit un mot $w \in \Sigma^*$ montrons qu'il existe un mot $w' \in \Sigma'^*$ qui vérifie (3.8).

Preuve. Soit $w \in \Sigma$, si w est accepté par \mathcal{A} avec probabilité λ alors par construction il existe un chemin étiqueté par le mot $w' = f(w)$ dans $\mathcal{A}' \setminus \mathcal{A}_\Sigma$ qui accepte le mot w' avec probabilité λ , de plus comme $w' = f(w)$ il sera donc accepté par \mathcal{A}_Σ , finalement comme \mathcal{A}' et \mathcal{A}_Σ sont branchés par une transition probabiliste on trouve finalement.

$$\begin{cases} \forall w \in \Sigma^* : \mathbb{P}_{\mathcal{A}'}(f(w)) = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} \\ \forall w' \notin f(\Sigma^*) : \mathbb{P}_{\mathcal{A}'}(w') = 0 \end{cases}$$

□

Comme $val(q) = \sup_{w \in \Sigma^*} \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(q \xrightarrow{w} F)$ l'équation (3.8) nous donne :

$$\forall q \in Q : val(A) = 2 \cdot val(\mathcal{A}') - 1$$

Supposons que l'on puisse décider le vide pour les automates à 2 états probabilistes, cette construction nous permettrait de tester le vide pour n'importe quel automate, ce qui montre que le problème du vide est indécidable pour les automates probabilistes à partir de 2 états probabilistes. \square

3.5 Automates probabilistes en DAG

Définition 3.4. *Un automate probabiliste en DAG est un automate probabiliste dans lequel il n'y a ni cycle ni boucle.*

Théorème 3.4. *le problème du vide pour les automates en DAG est décidable.*

Preuve. Soit un automate acyclique, on voudrait savoir s'il existe un mot u tel que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(u) > \frac{1}{2}$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de chemins, il suffit de tous les énumérer. \square

Remarque 3.2. *Le test du vide pour les automates probabilistes en DAG se fait en temps exponentiel.*

Chapitre 4

Le problème de la valeur isolée

Dans ce chapitre on s'intéresse au problème de l'isolation, on explique le problème puis on donne quelques intuitions sur l'intérêt de l'étude de ce problème. Comme lors du chapitre précédent on explique la preuve dans le cadre général. Finalement on étudiera le cas où le seuil est égal à 1, laissé ouvert par Bertoni [2], et on montre que ce cas particulier est lui aussi indécidable.

4.1 Le problème de l'isolation du seuil

On dira qu'un seuil $0 < \tau < 1$ est isolé si on ne peut pas s'y rapprocher de façon arbitraire, formellement on écrit :

Définition 4.1. Soit \mathcal{A} un automate probabiliste fini. On dit que la valeur τ est isolée pour \mathcal{A} si :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall w \in \Sigma^* : |\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) - \tau| \geq \varepsilon$$

Problème 5.

Donnée : un automate probabiliste \mathcal{A} et une valeur $0 < \tau < 1$.

Question : Est-ce que τ est isolé pour \mathcal{A} ?

Le pouvoir expressif des automates probabilistes est assez puissant pour capturer les langages hors contexte [10]. Par contre les automates qui possèdent un seuil isolé ont un pouvoir expressif moins important. En effet Rabin montre dans [11] qu'ils capturent seulement les langages réguliers, d'où l'intérêt pour le problème de l'isolation. Ce problème a été étudié par Rabin [10] et par Paz [12]. Finalement il a été montré indécidable par Bertoni [2]. Dans la section suivante on explique la preuve d'indécidabilité.

4.2 Preuve classique d'indécidabilité

Théorème 4.1. Le problème de la valeur isolée est indécidable.

Pour prouver l'indécidabilité du problème 5 on utilisera une réduction à partir de PCP.

Définition 4.2. Soient $x, y \in \Sigma^*$ on note par $x \wedge y$ le plus grand suffixe commun à x et y . On note

$$E(\psi_1, \psi_2) = \bigcup_{w \in \Sigma^*} \psi_1(w) \wedge \psi_2(w)$$

Proposition 4.1. *On ne peut pas décider si l'ensemble E est infini ou pas. En effet ce problème est montré indécidable [7] en réduisant le problème de l'arrêt pour les machines de Turing*

Dans la suite on utilise le codage défini dans la section 3.3 page 25, pour tout homomorphisme ψ il existe un automate probabiliste \mathcal{A}_ψ tel que pour tout mot $w \in \Sigma^*$: $\mathbb{P}_{\mathcal{A}_{\psi_i}}(w) = r \circ \psi(w)$ avec r est la valeur du mot $\psi(\tilde{w})$ en base $\frac{1}{k}$

Lemme 4.1. *Soit $w \in \Sigma^*$, si $\psi_1(w)$ et $\psi_2(w)$ ont un suffixe commun de longueur supérieure à n alors $|\varphi_1(w) - \varphi_2(w)| \leq k^{-n+1}$*

Remarque 4.1. *Le lemme 4.1 se justifie par le fait que la fonction φ lit les mots de la droite vers la gauche.*

Lemme 4.2. $\exists \varepsilon > 0, \forall w \in \Sigma^* |\varphi_1(w) - \varphi_2(w)| > \varepsilon$ si et seulement si $\text{Card}(E) < \infty$.

Preuve. On commence par montrer le sens \Rightarrow , on procède par contre appposé. Supposons d'abord que $\text{Card}(E) = \infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $\text{Card}(E) = \infty$ il contient un mot de longueur supérieure ou égale à n , on peut écrire :

$$\exists w \in \Sigma^* : |\psi_1(w) \wedge \psi_2(w)| \geq n \Rightarrow |\varphi_1(w) \wedge \varphi_2(w)| \leq \frac{1}{k^{n-1}}$$

Comme n est arbitraire, 0 n'est pas isolé pour $\bigcup_{w \in \Sigma^*} \varphi_1(w) - \varphi_2(w)$. Ce qui montre que si 0 est isolé pour $\bigcup_{w \in \Sigma^*} \varphi_1(w) - \varphi_2(w)$ alors $\text{Card}(E) < \infty$

On montre maintenant le sens \Leftarrow , on procède toujours par contre appposé. Supposons que 0 n'est pas isolé pour $\bigcup_{w \in \Sigma^*} \varphi_1(w) - \varphi_2(w)$ alors :

$$\begin{aligned} \forall n > 0 : \exists w \in \Sigma^* : \varphi_1(w) - \varphi_2(w) > \frac{1}{k^n} \\ \Rightarrow \forall n > 0 : \exists w \in \Sigma^* : \psi_1(w) \wedge \psi_2(w) < n - 1 \end{aligned}$$

Comme n est choisit arbitrairement on a $\text{Card}(E) = \infty$, d'où $\text{Card}(E) < \infty$ implique que 0 est isolé pour $\bigcup_{w \in \Sigma^*} \varphi_1(w) - \varphi_2(w)$. \square

Théorème 4.2. *Quel que soit $\lambda \in]0, 1[$, le problème de l'isolation du seuil λ est indécidable*

Preuve. Soient ψ_1 et ψ_2 deux homomorphismes, et soit $\varphi_i = r \circ \psi_i$ avec $i \in \{1, 2\}$. On pose $p = \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}(1 - \varphi_2)$, il existe un automate probabiliste \mathcal{A} tel que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) = p(w)$, cet automate peut être représenté par la figure 3.6 utilisé dans la preuve de l'indécidabilité du vide page 27.

Supposons d'abord que $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Si on pouvait décider si λ est isolé pour $2\lambda p$ on pourrait alors décider si $\frac{1}{2}$ est isolé pour p car $|2\lambda p - \lambda| = 2\lambda|p - \frac{1}{2}|$.

Dans le cas où $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, considérons l'événement $q = 1 - 2(1 - \lambda)p$. Décider si λ est isolé pour q est la même chose que $\frac{1}{2}$ isolé pour p car $|q - \lambda| = 2(1 - \lambda)|p - \frac{1}{2}|$.

Dans les deux cas on remarque que le problème se réduit à savoir si $\frac{1}{2}$ est isolé par rapport à p .

Or

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 : |p - \frac{1}{2}| > \varepsilon &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall w \in \Sigma^* : \left| \frac{1}{2}\varphi_1(w) + \frac{1}{2}(1 - \varphi_2(w)) - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall w \in \Sigma^* : \frac{1}{2}|\varphi_1(w) - \varphi_2(w)| \geq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall w \in \Sigma^* : |\varphi_1 - \varphi_2| \geq \varepsilon \end{aligned}$$

On conclut que le problème de l'isolation du seuil est indécidable. \square

4.3 Problème de la valeur 1

Dans sa preuve d'indécidabilité Bertoni a laissé ouvert les cas où $\lambda = 1$ et $\lambda = 0$. Dans cette section on s'intéresse à ces cas particuliers et nous montrerons que ces problèmes sont indécidables.

Problème 6.

Donnée : Un automate probabiliste \mathcal{A} .

Question : Est-ce que 1 est isolé par rapport à \mathcal{A} ?

Lemme 4.3. Soit \mathcal{A}_λ automate de la figure 4.1 alors :

$$(\text{val}(\mathcal{A}_\lambda) = 1) \Leftrightarrow \left(\lambda > \frac{1}{2} \right).$$

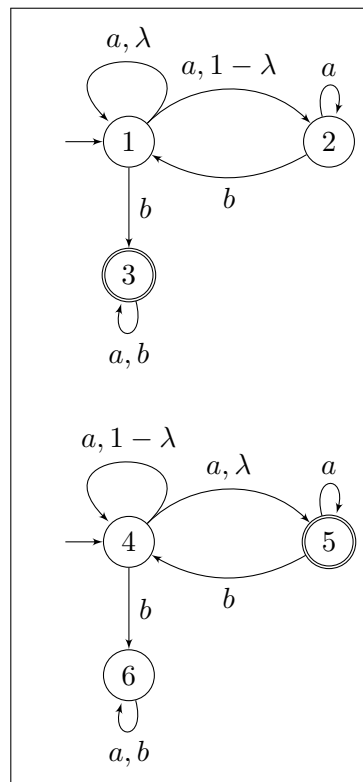


FIG. 4.1: \mathcal{A}_λ

Preuve. Remarquons que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}_\lambda}(1 \xrightarrow{a^n b} 3) = \lambda^n$ et que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}_\lambda}(4 \xrightarrow{a^n b} 6) = (1 - \lambda)^n$. Soit (n_k) une suite croissante dans \mathbb{N} , en lisant le mot $w = a^{n_0} b a^{n_1} b \dots a^{n_i} b$ on trouve :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{\mathcal{A}_\lambda}(1 \xrightarrow{w} 3) = 1 - \prod_{k \geq 0} (1 - \lambda^{n_k}) \\ \mathbb{P}_{\mathcal{A}_\lambda}(4 \xrightarrow{w} 6) = (1 - \lambda)^{n_1} + (1 - (1 - \lambda)^{n_1})(1 - \lambda)^{n_2} + \dots \leq \sum_{k \geq 0} (1 - \lambda)^{n_k} \end{cases}$$

On veut trouver une suite (n_k) telle que plus le mot w sera grand plus la probabilité $\mathbb{P}_{\mathcal{A}_\lambda}(1 \xrightarrow{w} 3)$ sera proche de 1, ce qui sera le cas si le système de contraintes suivant est satisfait :

$$\mathcal{C} = \begin{cases} 1 - \prod_{k \geq 0} (1 - \lambda^{n_k}) = 1 \\ \sum_{k \geq 0} (1 - \lambda)^{n_k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \prod_{k \geq 0} (1 - \lambda^{n_k}) = 0 \\ \sum_{k \geq 0} (1 - \lambda)^{n_k} = 0 \end{cases}$$

On commence par montrer le sens \Rightarrow), on procède par contre appposé. Supposons que $\lambda \leq \frac{1}{2}$, remarquons d'abord que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}_\lambda}(4 \xrightarrow{w} 6) = 1 - \prod_{k \geq 0} (1 - (1 - \lambda)^{n_k})$.

$$\begin{aligned} \left(\lambda \leq \frac{1}{2} \right) &\Rightarrow (\lambda \leq 1 - \lambda) \\ &\Rightarrow \left(1 - \prod_{k \geq 0} (1 - \lambda^{n_k}) \leq 1 - \prod_{k \geq 0} (1 - (1 - \lambda)^{n_k}) \right) \end{aligned}$$

Donc si $1 - \prod_{k \geq 0} (1 - \lambda^{n_k}) = 1$ alors $1 - \prod_{k \geq 0} (1 - (1 - \lambda)^{n_k}) \geq 1$ or on veut que $1 - \prod_{k \geq 0} (1 - (1 - \lambda)^{n_k}) = 0$, d'où :

$$(val(\mathcal{A}) = 1) \Rightarrow \left(\lambda > \frac{1}{2} \right)$$

On montre maintenant le sens \Leftarrow), pour cette partie de la preuve on utilise un résultat connu que l'on peut retrouver avec un développement limité qui dit :

$$\left(\sum_{k \geq 0} \lambda^{n_k} = \infty \right) \Rightarrow \left(\prod_{k \geq 0} (1 - \lambda^{n_k}) = 0 \right) \quad (4.1)$$

(4.1) nous donne :

$$\begin{cases} \sum_{k \geq 0} \lambda^{n_k} = \infty \\ \sum_{k \geq 0} (1 - \lambda)^{n_k} = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{C}$$

Supposons que $\lambda > \frac{1}{2}$ et montrons alors qu'il existe une suite croissante (n_k) qui vérifie le système de contrainte \mathcal{C} . Considérons la suite $n_k = \ln_\lambda \frac{1}{k} + K$. Remarquons que $\sum_{k \geq 0} (\lambda)^{n_k} =$

$$\lambda^K \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k} = \infty.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} 1 - \lambda &= \lambda^{\ln_\lambda(1-\lambda)} \\ &= \lambda^{\frac{\ln(1-\lambda)}{\ln \lambda}} \end{aligned}$$

Comme $\frac{\ln(1-\lambda)}{\ln \lambda} > 1$ alors il existe un $\beta > 1$ tel que $1 - \lambda = \lambda^\beta$ D'où $\sum_{k \geq 0} (1 - \lambda)^{n_k} = \sum_{k \geq 0} \lambda^{\beta \cdot n_k}$.

$$\text{Donc } \sum_{k \geq 0} \lambda^{\beta \cdot n_k} = \lambda^{\beta \cdot K} \sum_{k \geq 0} \lambda^{\beta \cdot \ln_\lambda \frac{1}{k}} = \lambda^{\beta \cdot K} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^\beta}.$$

Cette série converge, il suffit de choisir K tel que $\lambda^{\beta \cdot K} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k^\beta} \leq \varepsilon$ pour satisfaire le système de contraintes \mathcal{C} . □

Théorème 4.3. *Le problème de l'isolation pour le seuil 1 est indécidable.*

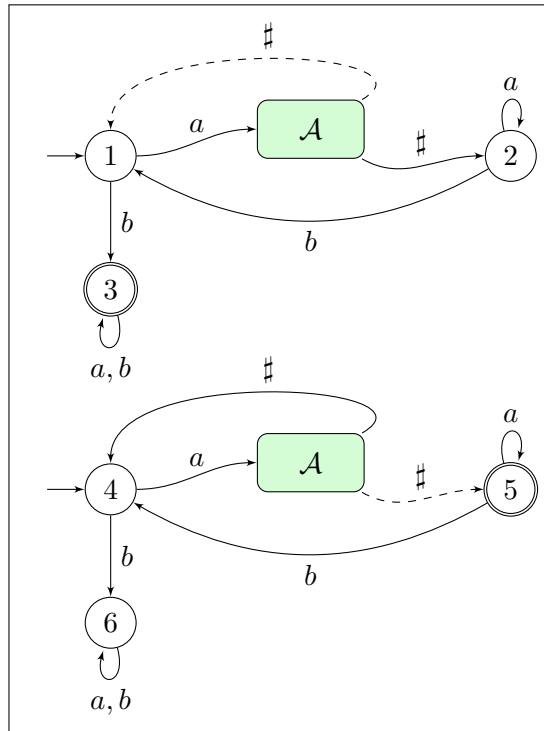


FIG. 4.2: Réduction du problème du vide au problème de la valeur 1

Preuve. Pour prouver le théorème on réduit le problème du vide au problème de la valeur 1. Pour réaliser cette réduction on propose la construction de la figure 4.2 en utilisant l'automate du lemme 4.3. Soit $\#$ une lettre qui n'est pas dans Σ . Ensuite on effectue la transformation suivante : On remplace les transitions probabilistes par l'automate \mathcal{A} . Les états finaux sont reliés avec les transitions en pointillé. On voudrait savoir s'il existe un mot $w \in \Sigma^*$ tel que $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) > \frac{1}{2}$. Si un tel mot existait alors à chaque fois que \mathcal{A} reçoit en entrée ce mot, la probabilité d'atteindre l'ensemble des états finaux serait supérieure à $\frac{1}{2}$, dans ce cas là, les transitions en pointillé auront une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$, en lisant le mot $\underbrace{w\#\dots w\#}_{k \text{ fois}}$, d'après le lemme 4.3 la valeur de ce nouvel automate serait 1, donc 1

n'est pas isolé par rapport à \mathcal{A}_λ . Réciproquement, supposons que quel que soit le mot w on a $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) \leq \frac{1}{2}$ alors la probabilité des transitions en pointillés sera inférieure à $\frac{1}{2}$, donc il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\forall w \in \Sigma^* : 1 - \mathbb{P}_{\mathcal{A}} \geq \varepsilon$ donc 1 est isolé par rapport à \mathcal{A}_λ .

Comme le problème du vide est indécidable on conclut que le problème de l'isolation pour le seuil 1 est indécidable. \square

Corollaire 4.3.1. *Le problème de l'isolation pour le seuil 0 est indécidable.*

Preuve. Soit \mathcal{A} un automate probabiliste. Si 1 est isolé par rapport à \mathcal{A} alors on peut écrire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall w \in \Sigma^* : 1 - \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w) \geq \varepsilon$$

Soit \mathcal{A}' un automate probabiliste qui accepte une entrée w avec probabilité

$$\mathbb{P}_{\mathcal{A}'}(w) = 1 - \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(w)$$

On aurait alors

$$\exists \varepsilon > 0, \forall w \in \Sigma^* : \mathbb{P}_{\mathcal{A}'}(w) \geq \varepsilon$$

Comme le problème de l'isolation pour le seuil 1 est indécidable il s'en suit que le problème de l'isolation pour le seuil 0 est indécidable. \square

Chapitre 5

Directions de recherches

5.1 Variantes sur les automates probabilistes

Les résultats de décidabilité trouvés concernant les automates avec un état probabiliste et les automates probabilistes en DAG sont encourageants. On se demande si ces résultats restent valables pour des versions modifiées ou enrichies. La première variante est la classe des automates probabilistes qui vérifient les propriétés suivantes :

- i) Dans chacune des composantes fortement connexes on trouve au plus un état probabiliste.
- ii) Les transitions $C_i \rightarrow C_{i+1}$ sont déterministes
- iii) Il existe un ordre sur les composantes tel que s'il existe une transition $C_i \rightarrow C_j$ alors $i < j$

Exemple 5.1.

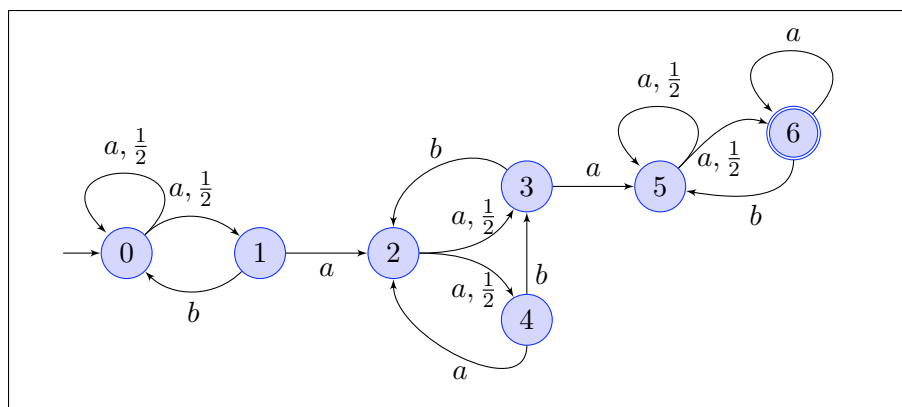


FIG. 5.1:

On considère les composantes suivantes :

$$C_0 = \{0, 1\}, C_1 = \{2, 3, 4\}, C_2 = \{5, 6\}$$

On considère aussi l'ordre suivant :

$$C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2$$

les valeurs de chaque automate induit par les composantes C_0 , C_1 et C_2 sont les suivantes : $val(\mathcal{A}_{C_0}) = \frac{1}{2}$, $val(\mathcal{A}_{C_1}) = \frac{1}{2}$ et $val(\mathcal{A}_{C_2}) = 1$. Ce qui est intéressant c'est que $val(\mathcal{A}) = 1$.

La seconde variante est une version modifiée des automates en DAG. On suppose que chaque lettre a probabilité $\frac{1}{2}$ de rester dans le même état (i.e. elle est "ignorée" par le système avec probabilité $\frac{1}{2}$). Dans la figure 5.2 on peut voir un automate qui appartient à cette classe. On peut voir qu'en lisant le mot ab^n on trouve : $\delta_\infty = (0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ donc

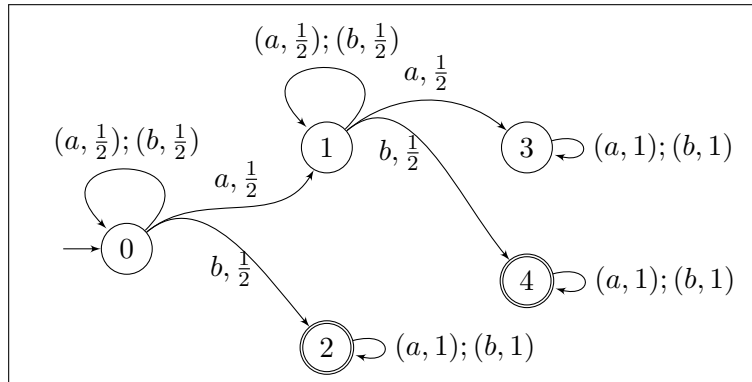


FIG. 5.2: Automate probabiliste \mathcal{A} qui a la propriété que chaque action est ignorée avec probabilité $\frac{1}{2}$. $val(\mathcal{A}) = 1$

$val(\mathcal{A}) = 1$. Par contre si on considère la figure 5.3 on trouve $val(\mathcal{B}) = \frac{1}{4}$ avec le mot ab .

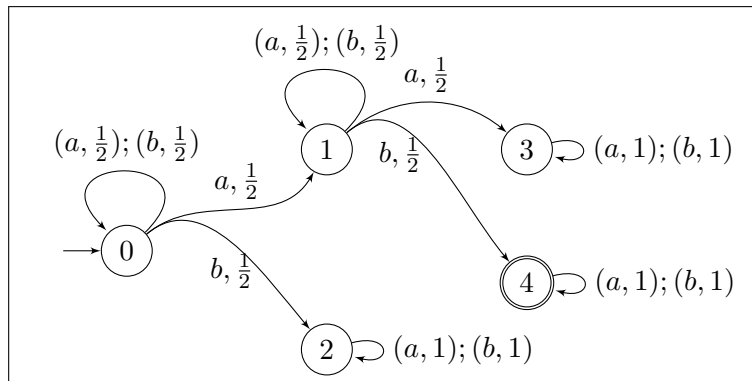


FIG. 5.3: Automate probabiliste \mathcal{B} qui a la propriété que chaque action est ignorée avec probabilité $\frac{1}{2}$. $val(\mathcal{B}) = \frac{1}{4}$

Les résultats obtenus sur les automates avec un état probabiliste et sur les automates en DAG nous donnent un espoir sur la décidabilité du vide pour ces deux variantes. Bien que très proche de la solution on ne dispose toujours pas d'une preuve convaincante.

5.2 Processus de décision Markoviens

Définition 5.1. Une chaîne de Markov (LMC) est un tuple $\mathcal{M} = (Q, \pi_0, \Sigma, \mathcal{L}, \delta)$ où :

Q Ensemble fini d'états.

π_0 Distribution initiale sur les états.

Σ Ensemble fini d'observations.

$\mathcal{L} : Q \rightarrow \Sigma$ Fonction d'étiquetage.

$\delta : Q \rightarrow \mathcal{D}(Q)$ Fonction de transition probabiliste.

Exemple 5.2.

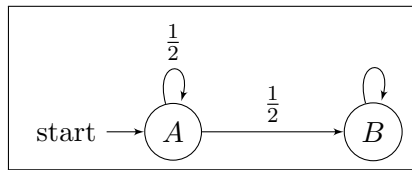


FIG. 5.4: Chaîne de Markov \mathcal{M}

Définition 5.2 (Équivalence). Soient deux chaînes de Markov \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 avec $\mathcal{M}_i = (Q_i, \pi_0^i, \Sigma, \mathcal{L}_i, \delta_i)$, $(i = 1, 2)$. On dit que \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont équivalentes si $\mathbb{P}_{\mathcal{M}_1}(o) = \mathbb{P}_{\mathcal{M}_2}(o)$ pour tout $o \in \Sigma^+$.

Définition 5.3. Un processus de décision Markovien (MDP) est un tuple $\mathcal{P} = (Q, \pi_0, \Sigma, \mathcal{L}, \Gamma, \delta)$ $Q, \pi_0, \Sigma, \mathcal{L}$ sont exactement les mêmes que pour les chaînes de Markov.

Γ Un ensemble fini d'actions.

$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow \mathcal{D}(Q)$ Fonction de transition probabiliste étiquetée par les actions

Définition 5.4. Une stratégie pour \mathcal{P} est une fonction $\lambda : Q^+ \rightarrow \mathcal{D}(\Gamma)$. La stratégie λ définit une chaîne de Markov $\mathcal{P}(\lambda)(Q_\lambda, \pi_\lambda^0, \Sigma, \mathcal{L}_\lambda, \delta_\lambda)$

Exemple 5.3.

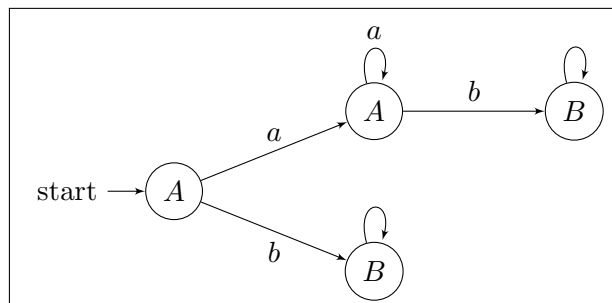


FIG. 5.5: Processus de décision Markovien \mathcal{P}

Définition 5.5. Soit une LMC \mathcal{M} et deux LMPDs \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . On note :

- $\mathcal{M} \sqsubseteq \mathcal{P}_1$ s'il existe une stratégie λ pour \mathcal{P}_1 tel que \mathcal{M} et $\mathcal{P}_1(\lambda)$ soient équivalentes.

- $\mathcal{P}_1 \sqsubseteq \mathcal{M}$ si \mathcal{M} et $\mathcal{P}_1(\lambda)$ sont équivalentes quel que soit la stratégie λ pour \mathcal{P}_1 .
- $\mathcal{P}_1 \sqsubseteq \mathcal{P}_2$ si pour toute stratégie λ pour \mathcal{P}_1 il existe une stratégie μ pour \mathcal{P}_2 tel que $\mathcal{P}_1(\lambda)$ et $\mathcal{P}_2(\mu)$ soient équivalentes. On dit alors que \mathcal{P}_1 raffine \mathcal{P}_2

Exemple 5.4.

L'ensemble des observations générées par \mathcal{M} 5.4 est A^+B avec probabilité 2^{-n} et A^+ avec probabilité 2^{-n+1} avec n le nombre A , en considérant la stratégie $\lambda(q) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \forall q \in Q_{\mathcal{P}}$ pour le LMDP \mathcal{P} 5.5, On obtient la chaîne de Markov induite par λ .

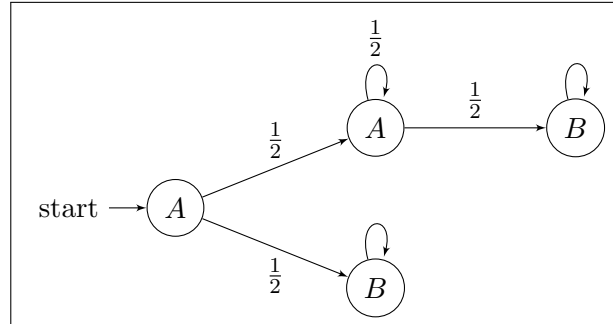


FIG. 5.6: Chaîne de Markov $\mathcal{P}(\lambda)$

Pour toute suite d'observations $\sigma \in \Sigma$ on a $\mathbb{P}_{\mathcal{P}(\lambda)}(\sigma) = \mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\sigma)$ donc $\mathcal{M} \sqsubseteq \mathcal{P}$.

Exemple 5.5.

Dans la figure 5.7 une chaîne \mathcal{M} et un processus \mathcal{P} .

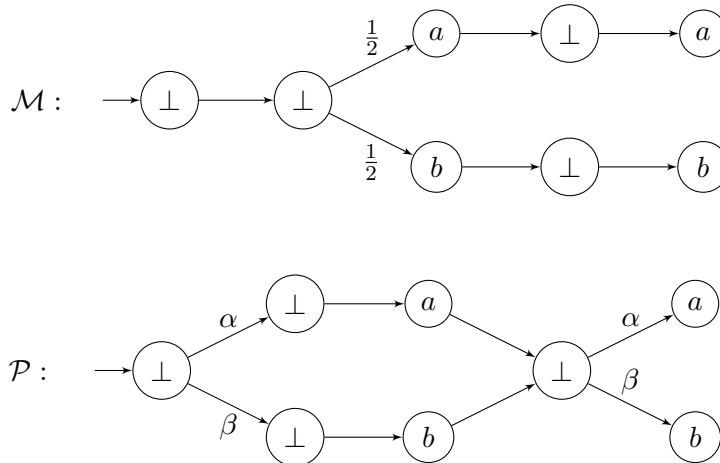


FIG. 5.7: Le processus en bas de la figure a besoin d'un bit de mémoire pour pouvoir simuler la chaîne de Markov

Quel que soit la stratégie de \mathcal{P} , il doit obligatoirement se rappeler si il a observé un a ou un b .

Cet exemple montre que les stratégies sans mémoire ne sont pas suffisantes pour simuler une chaîne de Markov. À présent on se pose les questions suivantes :

- a) Est-ce-que les stratégies à mémoire finie sont suffisantes pour simuler les chaînes de *Markov* ?
- b) Étant donné une chaîne de Markov \mathcal{M} et un processus de décision Markovien \mathcal{P} , peut on décider s'il existe une stratégie λ tel que $\mathcal{P}(\lambda)$?

Dans [3], un nouvel algorithme décide l'équivalence de deux chaînes de Markov étiquetées, il semble qu'en se basant sur les techniques utilisées, on pourrait dériver un algorithme qui décide le point b).

5.3 Jeux stochastiques avec signaux

Tout au long de ce travail on a pu constater que le modèle des automates probabilistes pouvait être vu comme un jeu à un joueur qui joue contre la nature et qui ne dispose d'aucune information, on peut considérer le joueur comme étant aveugle. On peut aussi imaginer un modèle moins extrême où le joueur reçoit des signaux qui l'informent sur l'état du jeu. Dans ce cas de figure les joueurs ne peuvent ni connaître l'état actuel de la partie ni l'action effectuée par leurs adversaires, mais ils reçoivent un signal à chaque fois qu'une action est jouée, ce signal informe les joueurs sur les configurations possibles de la partie avec une certaine probabilité. Une stratégie pour un joueur consiste à décider de la prochaine action en fonction des actions choisies et des signaux reçus. Une possible direction de recherche serait d'étudier ce modèle en s'inspirant des résultats obtenus pour les automates probabilistes.

Chapitre 6

Conclusion

Le but de ce mémoire était d'étudier les automates probabilistes en s'intéressant à la décidabilité de deux problèmes.

Le problème du vide Concernant ce problème, après avoir expliqué les détails de la preuve de Condon. On a proposé une nouvelle preuve plus simple, inspirée par le papier de Bertoni on réduit le problème de correspondance de Post au problème du vide pour les automates probabilistes. Cette preuve plus simple à formaliser nous a permis de voir comment on pourrait construire un automate probabiliste à 5 états, pour qui le problème du vide est indécidable, pour ce, il faudrait qu'on arrive à prouver que le problème de correspondance de post lexicographique (PCPL) est indécidable. Il serait intéressant de voir combien d'états on obtiendrait si on encode le même automate avec un alphabet à deux lettres pour le comparer avec les constructions déjà réalisées ¹. Ensuite on a cherché à paramétriser ce même problème en s'intéressant aux états probabilistes seulement. Avec cette nouvelle approche on a prouvé que le problème du vide était décidable pour les automates avec un état probabiliste, cela est dû principalement au fait que les parallélismes entre les états sont moins nombreux. Un deuxième résultat est que le test du vide est indécidable à partir de deux états probabilistes, la preuve se fait par réduction du cas général au cas avec deux états probabilistes. Dans la suite on a cherché d'autres classes décidables en s'intéressant à la structure de l'automate, on a trouvé que les automates probabilistes en DAG sont décidables pour le test du vide. Pour le moment nous ne disposons pas d'un algorithme efficace. il serait intéressant de voir si le problème peut être résolu en temps polynomial.

Le problème de l'isolation du seuil Bertoni fut le premier à montrer que ce problème est indécidable, dans cette preuve les cas extrêmes où $\lambda = 1$ et $\lambda = 0$ ont été laissés ouverts, c'est sur ces cas extrêmes que nous avons concentré nos efforts. On a montré que le cas $\lambda = 1$ est indécidable. La preuve qui nous permet d'établir ce résultat est radicalement différente de celle utilisée dans le cas $0 < \lambda < 1$. Finalement le cas $\lambda = 0$ est symétrique, il suffit de traiter le cas $\lambda = 1$ pour l'automate complémentaire.

¹Le plus petit automate probabiliste pour lequel le problème du vide est indécidable contient 25 états.

Bibliographie

- [1] R.J. Lipton A. Condon. On the complexity of space bounded interactive proofs. In *In 30th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 462–467, 1989.
- [2] Alberto Bertoni, Giancarlo Mauri, and Mauro Torelli. Some recursive unsolvable problems relating to isolated cutpoints in probabilistic automata. In *Proceedings of the Fourth Colloquium on Automata, Languages and Programming*, pages 87–94, London, UK, 1977. Springer-Verlag.
- [3] L. Doyen, T. A. Henzinger, and J.-F. Raskin. Equivalence of labeled markov chains. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 19(3) :549–563, 2008.
- [4] Rusins Freivalds. Probabilistic two-way machines. In *Proceedings on Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 33–45, London, UK, 1981. Springer-Verlag.
- [5] Seymour Ginsburg. *The Mathematical Theory of Context-Free Languages*. McGraw-Hill, Inc., New York, NY, USA, 1966.
- [6] Mika Hirvensalo. Improved undecidability results on the emptiness problem of probabilistic and quantum cut-point languages. In *SOFSEM '07 : Proceedings of the 33rd conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science*, pages 309–319, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer-Verlag.
- [7] John E. Hopcroft and Jeffrey D. Ullman. *Formal languages and their relation to automata*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1969.
- [8] Omid Madani, Steve Hanks, and Anne Condon. On the undecidability of probabilistic planning and related stochastic optimization problems. *Artificial Intelligence*, 147 :5–34, 2003.
- [9] Christos H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison Wesley, November 1993.
- [10] Azaria Paz. *Introduction to probabilistic automata (Computer science and applied mathematics)*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, 1971.
- [11] Michael O. Rabin. Probabilistic automata. *Information and Control*, 6(3) :230–245, 1963.
- [12] Michael O. Rabin. *Lectures on classical and probabilistic automata*. Academic Press, Inc., 1966.
- [13] L. Shapley. Stochastic games. In *Proceedings Of the National Academy of Science of the USA*, pages 1095–1100, 1953.