



HAL
open science

Lois d'échelle et transitions fractal – non fractal en géographie

Maxime Forriez, Philippe Martin, Laurent Nottale

► **To cite this version:**

Maxime Forriez, Philippe Martin, Laurent Nottale. Lois d'échelle et transitions fractal – non fractal en géographie. 2009. hal-00419906v2

HAL Id: hal-00419906

<https://hal.science/hal-00419906v2>

Preprint submitted on 18 May 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Lois d'échelle et transitions fractal – non fractal en géographie

Scaling laws and fractal – non fractal transitions in geography

Maxime Forriez*, Philippe Martin* et Laurent Nottale**

* Université d'Avignon et des Pays du Vaucluse – UMR 6012 ESPACE

** Observatoire de Paris-Meudon

Résumé. Le concept de transition fractal – non fractal fut introduit initialement dans un cadre de physique fondamentale. Il est fondé sur le constat que le monde est globalement organisé de manière scalaire (comme fonction de l'échelle). Cette transition décrit le passage d'états non fractals (indépendants de l'échelle) à des états fractals (explicitement dépendants de l'échelle) et se manifeste localement sur des gammes d'échelles assez courtes. Ce concept permet de comprendre comment certains systèmes peuvent paraître non fractals à certaines échelles et fractals à d'autres.

Abstract. The concept of fractal – non fractal transition has been initially introduced in a physical framework. It is based on the fact that the world is generally organized according to scales. This transition describes the passage from non fractal (scale independent) states to fractal (scale-dependent) states and manifests itself locally on rather short ranges of scales. It allows one to understand how some systems may seem to be non-fractal at some scales and fractal at others. We establish three possible fractal laws of fractal – non fractal transitions, which we fit to geographic (urban and physical) data in order to demonstrate the essential character for geography of these structuring in scale.

Mots-clés. Dépendance d'échelle, géographie physique, géographie urbaine, indépendance d'échelle, relativité d'échelle,

Keywords. Scale dependence, physical geography, urban geography, scale independence, scale relativity

La géographie dans son approche la plus quantitative problématise ses questions fondamentales à partir de l'espace entendu comme un ensemble de lieux dotés d'attributs et pouvant être localisés par une (structure filaire), deux (carte), voire trois (bloc-diagramme) coordonnées. Dans cette perspective, le temps peut constituer une quatrième dimension de tout espace géographique.

Le propos envisagé ici, qui s'appuie sur la géométrie fractale développée et popularisée par Benoît Mandelbrot (1977), postule que ce cadre d'analyse à quatre dimensions n'est pas suffisant et qu'il faut lui adjoindre une cinquième dimension qui est celle des échelles¹. Il est dès lors possible d'inverser le questionnement, et ainsi, de ne plus chercher à expliquer une entité particulière perçue et conçue à une échelle en fonction d'informations issues d'observations ou de mesures faites à des échelles différentes, mais de penser directement les rapports entre les informations obtenues, ou concernant des échelles différentes, mais continues. Adopter une telle posture c'est donc changer la position de l'observateur qui se place alors au niveau des rapports scalaires, et non plus en situation surplombante, à une échelle particulière. La mesure de ce rapport entre l'information obtenue à une échelle et celle obtenue à une autre définit la dimension fractale qui est l'expression numérique du taux de variation de l'information lorsque l'on passe d'une échelle à une autre. L'information dépend donc bien globalement de l'échelle. On dit qu'elle est dépendante d'échelle. Toutefois, il existe des cas où cette information ne dépend pas de l'échelle, ou plus exactement, des cas dans lesquels le taux de variation est nul. Cette situation est celle de l'indépendance d'échelle.

À partir de là, il est possible de s'interroger sur ce taux, sur son niveau, et sur sa variation en fonction des échelles. Plusieurs cas apparaissent alors : -1- soit le taux est constant et on est en situation d'invariance d'échelle sur une gamme scalaire limitée ; -2- soit ce taux varie localement au sens où il varie sur quelques échelles d'une valeur constante à une autre valeur constante, dans ce cas on est en situation de multifractalité ; -3- soit la variation est progressive, voire très progressive (sur une gamme assez large d'échelles), et dans ce cas, on est dans une situation de dimension fractale variable manifestée par une courbure continue dans un graphique bi logarithmique, pour toutes échelles consécutives, en fonction de l'échelle. C'est alors formellement un cas d'accélération d'échelle qui ne sera pas développé dans ce présent article afin de pouvoir faire l'objet d'un prochain travail ; -4- soit la variation se fait (en général sur une courte gamme d'échelles) entre un régime indépendant d'échelle (taux nul) et un régime dépendant d'échelle (taux constant non nul ou variable) auquel cas on est dans la situation de la transition : fractal – non fractal considérée dans ce présent article. Cette situation pouvant se présenter soit uniquement à l'une des extrémités de la gamme scalaire étudiée, soit aux deux, du côté des petites et des grandes échelles.

Dans cette perspective, ces petites gammes scalaires locales, limitées ou un peu plus larges sont des échelles de coupure internes qui sont à bien différencier des échelles de coupure externes qui sont en rapport avec les niveaux au-delà ou en deçà desquels on n'a plus d'information. Par exemple, pour une information stockée dans un modèle numérique de terrain (MNT), c'est, d'une part, la taille du MNT, et d'autre part, la taille du pas du MNT. Pour une carte, ce serait la taille de la carte et la résolution la plus fine du dessin. Ceci est l'occasion de définir ce qu'est la résolution d'une variable. Dans le cas d'un système non fractal (qui ne dépend pas explicitement de l'échelle), la notion de résolution peut être

¹ Ceci n'a rien pour surprendre les géographes qui ont toujours considéré -1- que certaines entités présentent une cohérence et une taille correspondant à une échelle particulière (un niveau) qui peuvent être exprimées à travers des représentations dans des cartes, à des échelles graphiques particulières, -2- que la compréhension de ces entités envisagées au niveau de leur cohérence perçue nécessite d'obtenir des informations à des niveaux scalaires différents plus petits ou plus grands. Par exemple, la compréhension d'une ville sera grandement accrue si l'on dispose d'informations sur ses quartiers, sur ses îlots ou sur le réseau urbain dans lequel elle est insérée.

considérée comme caractérisant une propriété de l'appareil de mesure lui-même, et non de la variable : ainsi, une mesure de longueur sur une surface lisse à une résolution de 1 mm donnera le même résultat, mais plus précis, qu'à une résolution de 1 cm. Par contre, dans le cas d'une géométrie fractale, les variables internes au système montrent elles-mêmes une dépendance d'échelle explicite : ainsi, sur une surface fractale, des mesures de longueur d'une courbe (elle-même fractale) donnent des résultats en termes de longueurs qui varient fortement en fonction de la résolution de la mesure. La variable de position devenant alors une fonction explicite de la résolution, on est amené à considérer celle-ci comme une propriété caractérisant la variable elle-même (et plus généralement l'état d'échelle du système de coordonnées), propriété géométrique mesurée par l'appareil de mesure. Du point de vue de la description mathématique, cela signifie qu'une coordonnée fractale n'est plus un nombre x , mais une fonction $x(\varepsilon)$ de la résolution ε , et qu'une grandeur dépendant de cette coordonnée devient une fonction à deux variables $f(x(\varepsilon), \varepsilon)$.

La transition fractal – non fractal, quasiment inconnue en géographie, est un concept issu de la théorie de la relativité d'échelle (Nottale, 1993). Cet article a pour objectif de montrer l'importance de cette notion pour la compréhension de phénomènes fractals en géographie, tant humaine que physique. En effet, on la retrouve régulièrement dans tous les calculs de mesure de dimension fractale ; aucun « filtre » ne pouvant la supprimer (Lesne, 2004). Sa simple existence montre qu'un objet géographique peut être fractal ou non fractal sans aucune contradiction, mais sur des portions de gammes d'échelles différentes, continues et contiguës.

Avant de poursuivre sur sa manifestation perçue empiriquement, sur sa traduction dans des graphiques bi logarithmiques et sur sa description formelle dans le cadre de la relativité d'échelle, il est nécessaire de rappeler ce qu'est une fractale. Très généralement, une fractale est une organisation multi-échelle (Mandelbrot, 1977 ; 1982). Dès que l'on effectue un zoom sur une fractale, « automatiquement » une nouvelle organisation scalaire apparaît. Il s'agit donc d'une organisation qui se développe en cascade dans les échelles. Ainsi, pour qu'un objet soit appelé fractal, il est nécessaire d'avoir au moins deux niveaux de structuration ; l'irrégularité comme idée générique ne suffit pas pour définir une fractale. En première approximation, grâce à la théorie de la relativité d'échelle, on peut également préciser qu'il s'agit d'une organisation spatiale ou temporelle non différentiable (Nottale, 1993 ; 2002). En d'autres termes par un point de l'ensemble considéré (point dans un espace en une, deux ou trois dimensions ; points d'une ligne, d'une surface, d'un volume), il est possible de faire passer plus d'une tangente : celle-ci peut avoir une valeur différente avant et après le point, ou dépendre explicitement de l'échelle. Par ailleurs, une fractale peut posséder différents niveaux d'organisation, c'est-à-dire sur une large gamme d'échelles. Sur les portions successives de cette gamme, les rapports scalaires peuvent être constants ou variable (Nottale, 1993). Cette organisation scalaire peut alors se traduire dans l'espace tangible, dans l'espace géographique, parfois morphologiquement, par des discontinuités et des limites en géographie (Martin, 2003 ; Forriez, 2005 ; Forriez, 2007).

Une des mesures les plus courantes d'un objet fractal est sa dimension². Dans cet article, la méthode de comptage par des boîtes carrées³ (Barnsley, 1988) a été retenue comme

² Pour un objet fractal, on appelle dimension fractale la limite mathématique de la variation du logarithme d'une variable (longueur, surface, volume, temps, *etc.*) par rapport au logarithme de sa résolution. Cette dimension peut être entière (dans certaines fractales déterministes comme la courbe de Peano), réelle (cas le plus courant), complexe (cas des fractales log-périodiques), voire infinie quand la dimension fractale n'existe pas, et qu'il s'agit d'une fonction dépendant d'autres paramètres.

³ Cette méthode de calcul consiste à estimer la forme de l'objet à une résolution donnée ε en utilisant un maillage carré couvrant la totalité de l'objet dont la taille du carré (son côté) varie. Dans chaque grille, on compte le nombre de carrés $N(\varepsilon)$ contenant un « morceau » de l'objet étudié. En reportant, dans un espace bi logarithmique ε et $N(\varepsilon)$, on obtient, en règle générale, une droite dont l'opposé de la pente correspond à la dimension fractale.

méthode de mesure pour mettre en évidence la transition fractal – non fractal, parce que c'est la plus simple à programmer, qu'elle possède un effet de bord connu (donc limité), et que c'est au final la plus efficace.

1. Le concept de transition fractal – non fractal

Ce concept est issu de la théorie de la relativité d'échelle (Nottale, 1993 ; 1997 ; 1998 ; 2009). Toutefois, il est bon de rappeler que la théorie de la relativité d'échelle ne se limite pas à cette notion qui est déjà, elle, largement suffisante pour éclaircir et dépasser certaines limites de l'approche fractale appliquée aux objets géographiques. Cela étant, la transition fractal – non fractal est loin d'être un concept simple et évident.

1.1. La théorie de la relativité : construction

Issue de la physique, cette théorie se construit autour de trois principes premiers qui ont été généralisés (Nottale, 1993 ; 1998) : le principe de relativité⁴, le principe de covariance⁵ et le principe d'équivalence⁶.

En physique, ces principes ont été initialement appliqués aux états de position, d'orientation et de mouvement du système de coordonnées. Les grandeurs qui définissent ces états sont de natures fondamentalement relatives, impossibles à caractériser de manière absolue. L'origine d'un système de coordonnées ne peut être définie que relativement à un autre système. Il en est de même de son orientation, de sa vitesse et de son accélération. Plus récemment, ces principes ont été appliqués, dans le cadre de la théorie de la relativité d'échelle, à l'état d'échelle du système de coordonnées, défini par la résolution de l'observation ou de la mesure : de même que seule une différence de vitesse a un sens, jamais une vitesse absolue, seul un rapport d'échelle a un sens, aucune échelle ne peut être définie de manière absolue.

Dès lors, il est possible de dresser un tableau de comparaison entre la relativité du mouvement et la relativité d'échelle (Tableau 1). Dans les deux cas, il existe deux sortes de variables associées aux systèmes de coordonnées : les variables qui caractérisent l'état du système de coordonnées et les variables qui définissent le système de coordonnées. Toutefois, entre la relativité du mouvement et la relativité d'échelle, il existe une analogie assez forte. Il faut tout de suite préciser que dans de nombreux cas les solutions sont extrêmement différentes. Il ne s'agit donc là que d'une analogie méthodologique. Ainsi, la résolution peut-elle être rapprochée d'une vitesse ; l'accélération, d'une sorte « d'accélération d'échelle » ; l'espace, de la longueur le long d'une fractale et le temps, de la dimension fractale variable.

⁴ Le principe de relativité est un principe philosophique formulé initialement par Galilée et généralisé par Albert Einstein. Il s'énonce de la manière suivante : « les lois fondamentales de la nature doivent être valides quel que soit l'état du système de coordonnées choisi ». Il faut rappeler que l'idée de relativité au sens einsteinien du terme ne doit en aucun cas être confondue avec le sens qu'a donné à ce mot le courant postmoderniste.

⁵ Le principe de covariance est la mise en œuvre mathématique du principe de relativité. La forme des équations doit être invariante sous les différents changements de système de coordonnées. Il est important de souligner qu'il s'agit bien dans ce cas de la forme des équations différentielles, et non de leurs solutions.

⁶ Le principe d'équivalence précise les conditions de relativité de tel ou tel « objet » d'étude. Par exemple, dans le cadre de la relativité générale du mouvement, il y a équivalence locale entre un champ de gravitation et un repère uniformément accéléré.

Relativité	Variables définissant le système de coordonnées	Variables caractérisant l'état du système de coordonnées
Mouvement	Espace	Vitesse
	Temps	Accélération
Échelle	Logarithme de la longueur sur une fractale	Résolution
	Dimension fractale variable	« Accélération d'échelle »

Tableau 1. Tableau de comparaison entre la relativité du mouvement et la relativité d'échelle

1.2. La théorie de la relativité : méthode

Dans cet article, on étudiera seulement les effets des changements d'état d'échelle (de résolution) du système de coordonnées⁷. Dans ce cadre, l'objectif de la relativité d'échelle est de trouver les lois régissant les transformations de l'espace des échelles (où les variables qui caractérisent l'échelle sont les résolutions spatio-temporelles). Pour illustrer le propos, la variable utilisée (dont on cherche la dépendance en fonction de la résolution) sera la longueur d'un objet fractal. Il en découle que l'espace de travail est une sorte d'espace des phases défini par le logarithme de la résolution (espace des échelles) et le logarithme de la longueur (espace des positions ordinaires, mais mesurées en logarithme, car c'est ici sa dépendance d'échelle qui est considérée). Un objet fractal est certes non différentiable, mais cette non-différentiabilité peut toutefois être décrite par l'introduction d'un espace des échelles qui reste lui différentiable.

La construction d'un tel espace s'opère en deux temps. Tout d'abord, il faut construire un opérateur différentiel de dilatation par la méthode dite de Gell-Mann-Lévy (Nottale, 2002). On pose d'abord une transformation d'échelle infinitésimale $d\rho$ entre ε' et ε :

$$\varepsilon' \rightarrow \varepsilon(1+d\rho)$$

Ensuite, on applique une transformation sur une longueur L dépendant de la résolution :

$$L(\varepsilon') = L(\varepsilon(1+d\rho)) = L(\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \ln \varepsilon} L(\varepsilon) d\rho + \dots^8$$

Par ce petit développement, on constate que l'on ne travaille pas directement avec la résolution, mais avec son logarithme.

Fort de cet outil, il reste à trouver les lois d'échelle possibles. Pour cela, un simple développement limité de Taylor permet d'obtenir autant de lois que l'on veut en ne faisant dépendre la solution que de la longueur.

$$\frac{\partial L}{\partial \ln \varepsilon} = \beta(L) = a + bL + cL^2 + \dots$$

⁷ Il faut préciser que, dans la théorie de la relativité plus complète, ceux-ci sont à articuler avec les changements de position, d'orientation et de mouvement.

⁸ L'emploi du d rond (∂) signifie une différentiation partielle par rapport à une des variables d'une fonction dépendant de plusieurs variables. C'est le cas ici où, même quand ce n'est pas explicité, les grandeurs considérées dépendent de variables spatiales et scalaires.

1.3. Les lois de transformation d'échelle

Mathématiquement, la relativité d'échelle montre que la possibilité de lois d'échelle est infinie (Nottale, 1993). En revanche, physiquement, elle montre également qu'elles sont limitées à quelques cas : la loi sans transition, la loi avec une transition (Nottale, 1993) et la loi avec deux transitions (Auffray & Nottale, 2008). Chacune de ces lois correspond à une complexification du développement limité de Taylor précédent.

La première loi, la loi sans transition, correspond à l'invariance d'échelle⁹ connue par tous les fractalistes. Par ailleurs, l'invariance d'échelle n'est qu'un cas particulier de lois beaucoup plus générales : les lois dépendantes d'échelle. En relativité d'échelle, l'invariance d'échelle va être traduite par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial \ln \varepsilon} = bL \Leftrightarrow L(\varepsilon) = L_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D-D_T} \quad 10$$

Cette loi ne se rencontre, strictement, que pour des objets mathématiques idéaux qui n'auraient aucune limite inférieure ni supérieure dans leur déploiement en échelle. Dans les fractales réelles, il doit vraisemblablement exister, au minimum, une transition fractal – non fractal.

La loi avec une transition fractal – non fractal (Nottale, 1993) s'obtient par diverses méthodes. Il s'agit d'une brisure « spontanée » de l'invariance d'échelle. Au-delà ou en deçà d'une certaine résolution, l'organisation multi-échelle de l'objet sera indépendante de la résolution (non fractal), ou, au contraire, dépendante de la résolution (fractal). L'équation différentielle permettant d'obtenir un tel objet fractal s'écrit :

$$\frac{\partial L}{\partial \ln \varepsilon} = a + bL \Leftrightarrow L(\varepsilon) = L_0 \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D-D_T} \right]$$

Dans ce cas, la longueur L_0 est une véritable longueur caractéristique à partir de laquelle l'objet mesuré n'est pas fractal, puis à une certaine échelle ε_0 l'objet change de nature et devient fractal (Figure 1). On nomme une telle échelle, échelle de coupure. Entre les deux lois, ε_0 change de nature : dans le cas invariant d'échelle, ε_0 n'est pas absolu alors que dans le cas fractal – non fractal, il s'agit réellement de l'échelle à partir de laquelle la fractalité apparaît ou disparaît. Toutefois, il est fondamental de noter que la partie fractale existe dans la partie non fractale, mais elle ne « s'exprime » pas ; de même, la partie non fractale existe dans la partie fractale, mais elle n'est pas apparente d'où les pointillés sur la Figure 1.

⁹ Il est fondamental de rappeler que l'association des termes « fractale », « invariance d'échelle » et « autosimilarité » doit être effectuée avec prudence. En effet, toute fractale autosimilaire dont la forme géométrique est identique à toutes les échelles est invariante d'échelle, mais toute fractale invariante d'échelle n'est pas autosimilaire. Ainsi, ce sont bien trois concepts interdépendants qu'il ne faut surtout pas placer au même niveau. L'autosimilarité, par exemple, n'existe quasiment pas dans les fractales naturelles. Les formes que l'on observe ne sont pas identiques lorsque l'on change d'échelle comme dans le cas de la courbe de Helge von Koch. Généralement, elles ne sont que statistiquement semblables. Par contre, beaucoup de fractales observées notamment en géographie sont invariantes d'échelle, mais la simple observation de ces objets permet rarement de prétendre qu'ils soient autosimilaires.

¹⁰ L_0 est une longueur initiale ; ε_0 est une échelle de référence, c'est-à-dire la résolution de l'objet ; D_T est la dimension topologique de l'objet mesuré (égale à 1 dans le cas considéré de la longueur d'une courbe) ; $D = D_T - b$ est la dimension fractale.

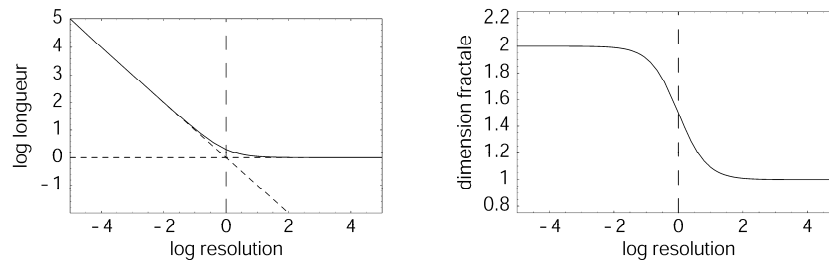


Figure 1. Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective ($\delta = D - 1$) dans le cas de lois « d'inertie d'échelle » (Nottale, 1993)

Enfin, on peut définir une loi avec deux transitions fractal – non fractal qui s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial \ln \varepsilon} = a + bL + cL^2 \Leftrightarrow L(\varepsilon) = L_0 \frac{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^{D-D_f} \right]}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right)^{D-D_f} \right]}.$$

Cette loi est essentielle, voire fondamentale, car c'est elle que l'on retrouve généralement dans le calcul d'une dimension fractale de boîte standard (Lesne, 2004).

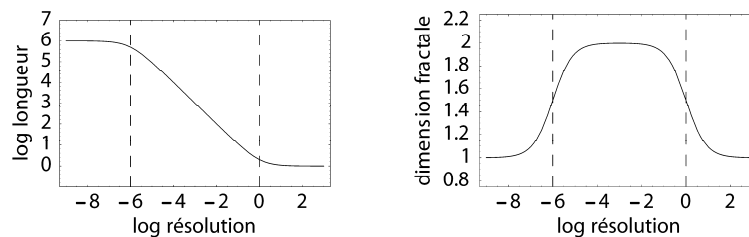


Figure 2. Dépendance d'échelle de la longueur et de la dimension d'échelle effective ($\delta = D - 1$) dans le cas de lois avec deux transitions (Auffray & Nottale, 2008)

La transition observée formalise donc des gammes scalaires spécifiques qui permettent de définir des échelles de coupure, résolution à partir de laquelle l'information est fractale ou elle est non fractale. En réalité, il existe deux types d'échelles de coupure : les échelles de coupure virtuelles qui sont les plus courantes, et qui sont généralement des artefacts de calcul, mais aussi les échelles correspondant aux limites de l'information de l'objet : sa résolution initiale et son étendue, c'est-à-dire sa taille maximale. À l'opposé, les échelles de coupure réelles matérialisent un changement radical dans l'organisation scalaire indépendante de l'objet, donc en deçà et au-delà de deux échelles de coupure liées à l'information disponible sur l'objet. L'un des problèmes est qu'il n'existe pas réellement de méthode pour les différencier.

Comme cela a été indiqué ci-dessus, la relativité d'échelle ne peut être limitée au seul concept de transition fractal – non fractal. Il existe déjà d'autres possibilités : la dimension fractale variable *via* une force d'échelle, la dimension fractale divergente, la covariance d'échelle, *etc.*, auxquelles s'ajoutent des corrections que l'on peut apporter à ces trois lois comme la correction log-périodique ou l'utilisation de la multifractalité¹¹. Il est cependant probable que d'autres lois d'échelle soient à découvrir.

¹¹ Le terme est employé dans le sens qui a été défini en introduction.

2. L'utilisation de ce concept pour les objets géographiques

La transition fractal – non fractal est très générale. C'est sur elle que l'on peut faire reposer l'explication fondamentale de la finitude perçue du monde. À un tout autre niveau, plusieurs exemples de mesures opérées sur des objets géographiques montrent l'existence de cette ou ces transitions. On peut toutefois distinguer trois cas, mais il faut rappeler que l'objectif principal de ces mesures est de mettre en évidence ces transitions dans différentes situations. Celles-ci ne seront évoquées que pour montrer l'intérêt d'une telle modélisation en géographie. On réserve la possibilité de faire ailleurs des développements thématiques.

2.1. Le cas du nuage de points

La répartition des chefs-lieux de communes dans le Nord de la France peut être considérée comme un nuage de point (Figure 3) ; dans ce cas, la dimension topologique $D_T = 0$ et la variable dont on étudie la dépendance n'est plus une longueur, mais un nombre (Forriez & Martin, 2008 ; Martin & Forriez, 2008). Le nuage ainsi constitué montre une répartition assez régulière avec, très localement, des zones de plus faible densité et des alignements qu'il faut peut-être rapprocher du système de drainage, c'est-à-dire des vallées et des vallons. La question est alors de savoir sur quelles bases scalaires est constituée cette distribution spatiale. Pour cela, une dimension fractale par comptage de boîtes carrées a été calculée (Figure 4). Chacun peut alors constater qu'il s'agit d'un modèle avec une transition fractal – non fractal¹².

En conséquence, sans occuper tous les points possibles de l'espace topologique, le nuage du regroupement initial des habitations sur un territoire s'avère particulièrement dense, ce qui définit un rapport au territoire spécifique d'un vieux pays agricole relativement densément peuplé, donc ayant développé un niveau de productivité agraire déjà non négligeable. D'une certaine façon, c'est l'organisation spatiale et scalaire antérieure à la révolution industrielle du charbon et de l'acier que l'on étudie ici, et il n'est absolument pas illogique qu'un établissement humain fondé sur l'utilisation d'une énergie solaire très diffuse tende à couvrir l'ensemble de l'espace géographique disponible d'autant que la productivité agraire était alors relativement faible par rapport à l'actuel. C'est donc la mémoire du vieux fond rural français de plaines et de bas plateaux qui refait ici surface. Deux siècles d'urbanisations historiquement exceptionnelles ne l'ont donc pas effacé.

¹² La première se manifeste aux grandes échelles. Elle correspond au fait que les carrés en fonction de leur taille, à ces grandes échelles, ne contiennent qu'un point par carré. Ainsi, quoi que l'on fasse la valeur obtenue sera toujours égale au nombre total de chefs-lieux, soit 2 963. En effet, cette échelle de coupure correspond à un seuil au-delà duquel l'information du nuage de point en termes de résolution est minimale. En deçà de carrés de 2,7 km (pour lire cette valeur sur la **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**, il suffit de calculer l'exponentielle du nombre correspondant sur l'axe des abscisses, dans ce cas $\ln(\varepsilon) = 1$), il n'y a pas d'information. Ensuite, avec une transition très lente – ce qui laisse penser que l'échelle de coupure est « réelle » – on atteint une gamme d'échelles où se manifeste une invariance d'échelle, et où la dimension fractale s'établit à $1,701 \pm 0,004$. Enfin, si l'on veut être complet, une seconde échelle de coupure se manifeste à une résolution d'environ 245 km ($\ln(\varepsilon) = 5,5$). Elle correspond à la taille maximale de l'information. En effet, au-delà d'un certain carré, on va toujours compter le même nombre de carrés, c'est-à-dire un carré contenant tout le nuage de points, et ce, quelle que soit la taille du carré.

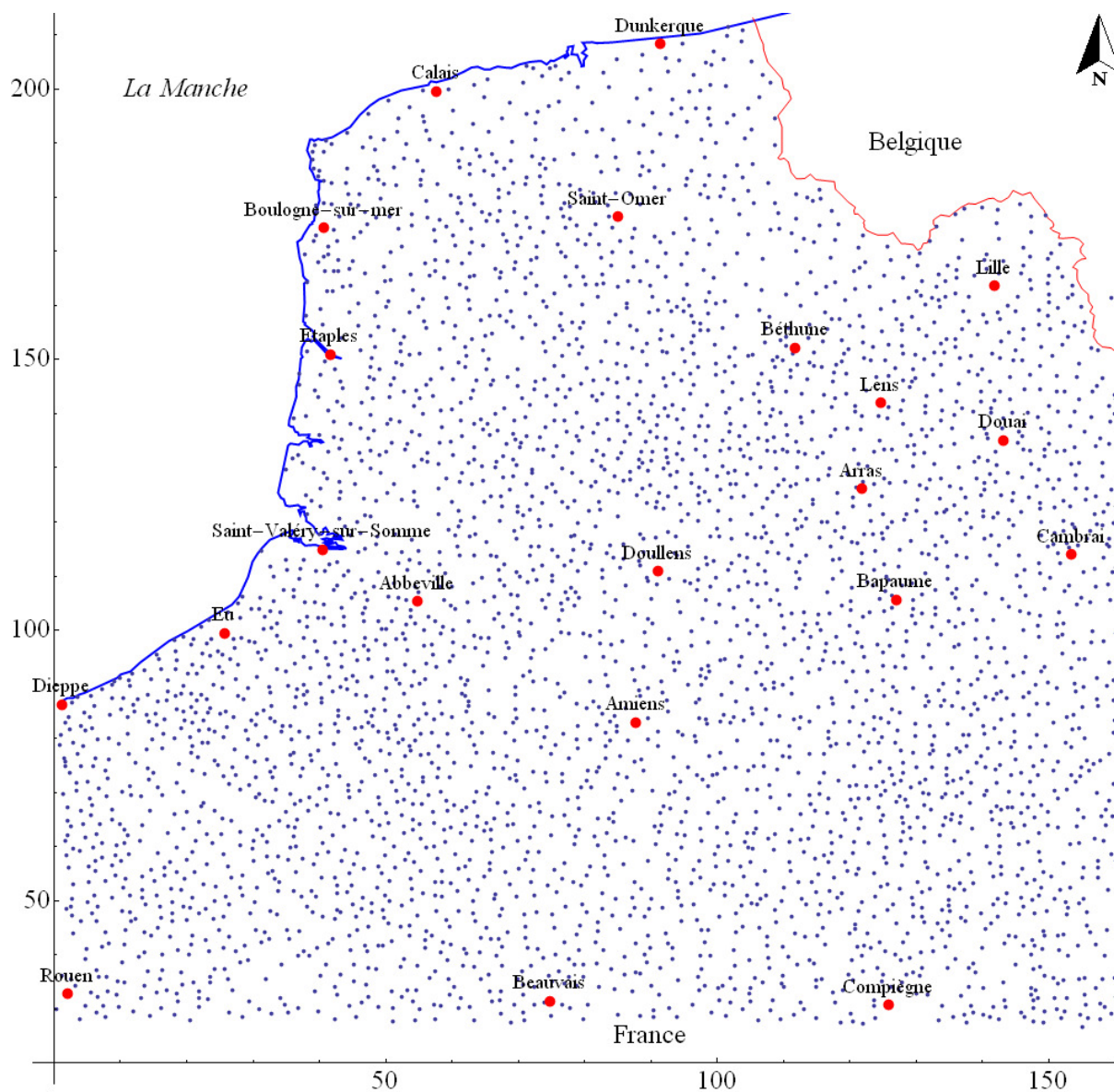


Figure 3. Répartition des regroupements d'habitations sur les territoires communaux dans le nord de la France
 Les axes représentant la latitude et la longitude sont exprimés en kilomètre.

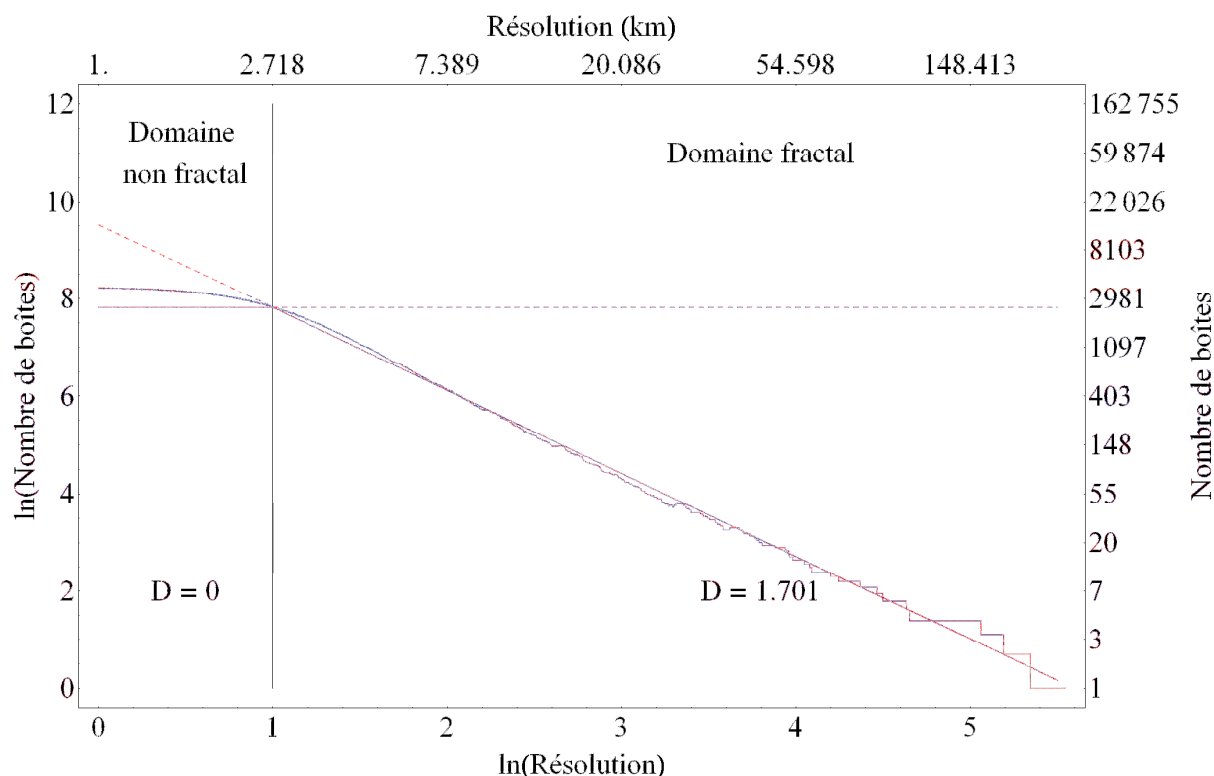


Figure 4. Dimension fractale obtenue par comptage de boîtes carrées sur le nuage de points matérialisant les regroupements d'habitations sur les territoires communaux du nord de la France

En toute rigueur, il faudrait choisir un seuil, puisque la transition fractal – non fractal est progressive, qui, par exemple, peut être défini par rapport à un taux de variation, c'est-à-dire la « fonction dérivée par rapport à $\ln(\varepsilon)$ » (Figure 9). Par ailleurs, si on observe en détail la courbe tracée sur le graphique bi logarithmique, il apparaît très clairement un mouvement convexe-concave, la concavité étant tout juste initiée à partir d'un point d'inflexion que l'on peut empiriquement situer en $\ln(\varepsilon) = 1$. Ceci permet de postuler l'existence d'une seconde échelle de coupure vers $\ln(\varepsilon) = 5,5$ soit environ 245 km. Par ailleurs, la valeur de la pente est remarquable en cela qu'elle est, pour ce nuage de points, supérieure à la valeur de la dimension d'une courbe ou d'une droite euclidienne. Dans le cas d'une dimension fractale par comptage de boîtes carrées, la limite supérieure possible est $D = 2$. Tous les points lieux de cet espace en deux dimensions seraient alors occupés.

À partir de là, il n'y a aucune raison de se limiter à des calculs dans un espace à deux dimensions. En fonction des données dont on dispose, et afin de traiter un nuage de points distribués dans un espace à trois dimensions, on a choisi de prendre en compte les entrées de cavités (généralement des avens) du plateau d'Albion que draine la Fontaine-de-Vaucluse (Gaubert & Le Falher, 1990 ; Gaubert & Le Falher, 1995¹³).

Il faut insister sur le fait que l'effectif de ces entrées renvoie à un état de l'art spéléologique au moment où a été publié l'inventaire. Autrement dit, leur nombre est appelé à croître. En d'autres termes, si la carte des agglomérations communales peut être considérée comme ne devant pas changer, du moins pas sur un temps historiquement court (siècle), il n'en est pas de

¹³ Le tome 1 (Gaubert & Le Falher, 1990) concerne un ensemble de neuf communes (de Ferrassières au nord à Gignac au sud) qui s'étend de l'ouest du Pays de Sault et de la commune de Saint-Saturnin-lès-Apt. Le tome 2 (Gaubert & Le Falher, 1995) couvre quinze communes de la partie ouest du massif soit environ de Fontaine-de-Vaucluse au sud-ouest au pays de Sault au nord-est, le Ventoux *stricto sensu* et ses contreforts devraient être inventoriés ainsi que la montagne de Lure, dans un ultime tome (carte in Gaubert & Le Falher, 1995, p. 148-149).

même pour l'effectif des cavités en zone karstique. Ceci conduit à relativiser les valeurs numériques obtenues dans ce karst même s'il est plus que probable que l'organisation scalaire d'ensemble soit stable. Il serait d'ailleurs intéressant, en prenant l'information disponible à différentes dates, de voir comment évoluent les valeurs numériques. Cela étant, il faut aussi rappeler que si ces entrées reconnues sont liées à l'activité spéléologique, leur position est, elle, à mettre en rapport avec des dynamiques exo et endo karstiques au premier rang desquelles il faut noter les processus locaux d'aplanissement en fond de poljé, de glyptogenèse plus classique en surface et de cavernement. Sans oublier bien sûr toutes les dynamiques géologiques qui contrôlent très largement l'énergie du système (hauteur de chute) et la qualité de l'encaissant (calcaire, dolomie, *etc.*) ni les éléments de la dynamique externe (hauteur de pluies, *etc.*). Pour résumer, l'existence de chaque point est liée à l'histoire spéléologique du secteur, alors que la position de chaque entrée est liée à l'histoire géologique du massif et au fonctionnement de l'ensemble (Martin, 1991 ; Martin, 1996 ; Martin, 1997 ; Martin, 2004). La formalisation de la répartition spatiale des entrées de cavités sur le plateau d'Albion (Figure 5) permet de calculer une dimension fractale par comptage de boîtes cubiques (Figure 6). La loi trouvée est une loi avec une transition fractal – non fractal¹⁴.

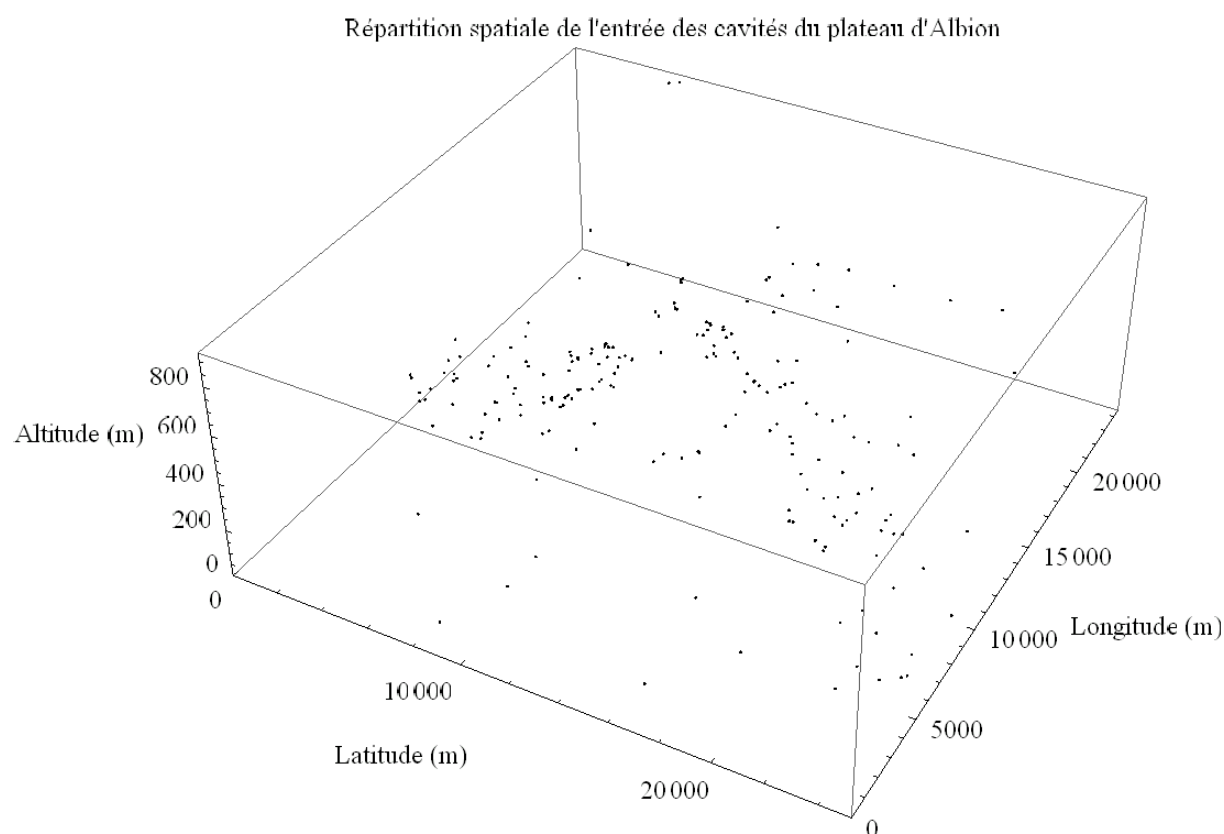


Figure 5. Répartition des entrées de cavités sur le plateau d'Albion (Vaucluse)

¹⁴ Quatre éléments remarquables peuvent être perçus sur cette Figure 6. -1- La valeur limite du nombre de boîtes aux grandes échelles est d'environ 220, soit $\ln(N(\varepsilon)) = 5,4$. -2- L'échelle de coupure de la transition non fractal – fractal s'estime à $\ln(\varepsilon) = 7,4$ (soit 1 636 m). -3- La valeur de la dimension fractale obtenue vaut $1,441 \pm 0,008$. -4- La valeur de $\ln(\varepsilon)$ pour un nombre de boîtes égal à 1, soit $\ln(N(\varepsilon)) = 0$, est ici voisine de $\ln(\varepsilon) = 10,1$ (soit 24 343 m), ce qui est évidemment à rapporter à la taille du plateau, donc à la taille de l'entité géographique : karst qui n'a pas été ici pris dans toute son ampleur. Cela étant, l'extension d'un karst n'est évidemment pas infinie, et il y aura toujours une limite, donc un nombre maximal de boîtes, sauf à intégrer progressivement ce qui est autre, sur ses marges.

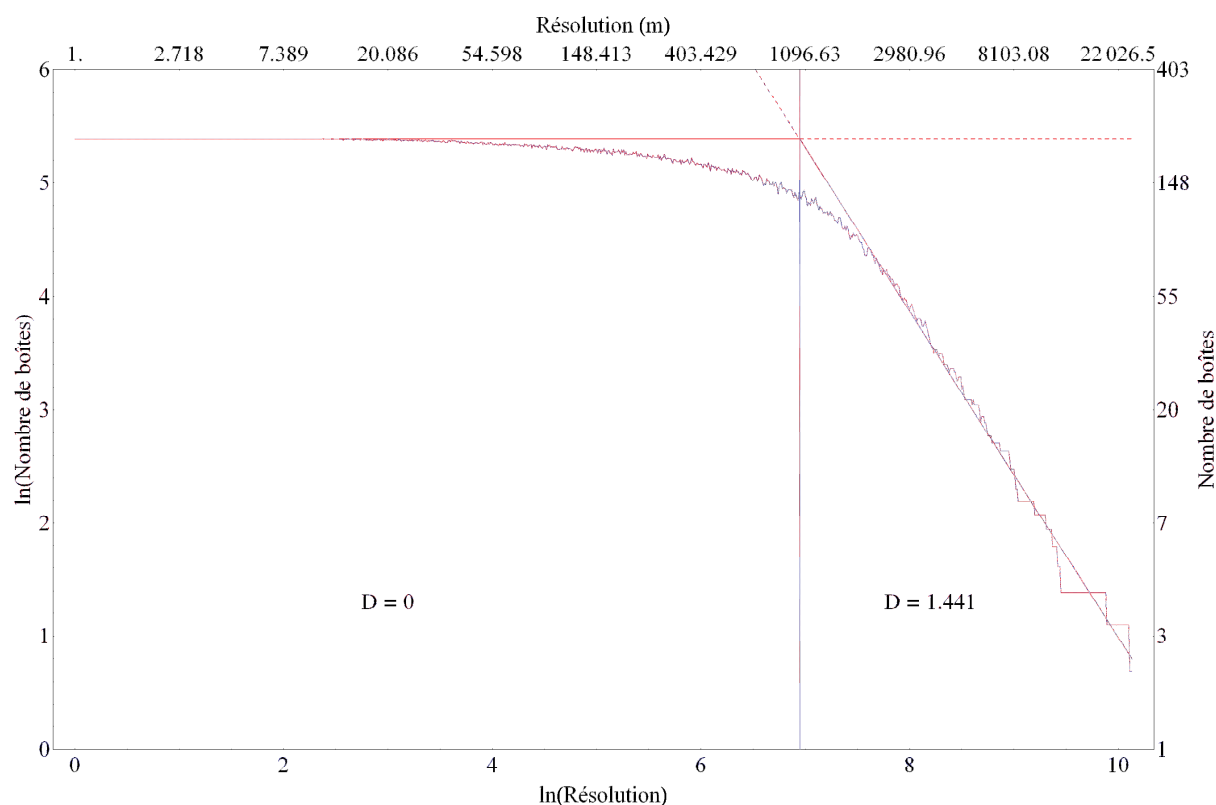


Figure 6. Dimension fractale par comptage de boîtes cubiques de la répartition des entrées de cavités sur le plateau d'Albion

La valeur de la dimension fractale est estimée à $1,441 \pm 0,008$, mais il reste à savoir si cette valeur changera en fonction des nouvelles découvertes. Une suppression aléatoire d'entrées pourrait peut-être répondre à cette question en l'absence de données historiques, une fois l'inventaire complet terminé.

La transition observée permet de définir le nombre de boîtes maximal au-delà duquel leur effectif ne change pas. Ainsi, ce n'est qu'à ce niveau scalaire là que la question de la densité prend un sens, car elle ne dépend plus de l'échelle d'observation puisque la structure est non fractale.

À partir de là, on peut essayer de proposer une démarche analogue dans le cas d'un élément réticulaire, et montrer une nouvelle fois, l'existence de ces transitions fractal – non fractal.

2.2. Le cas avec un élément réticulaire

Le réseau hydrographique amont et pérenne des Gardons tel que le définit l'IGN dans la base de données CARTHAGE (Figure 7) peut servir de base au calcul d'une dimension fractale par comptage de boîtes carrées (Figure 8 et Figure 9) dans un espace topologique à deux dimensions (Rodríguez-Iturbe & Rinaldo, 1997 ; Hauchard *et al.*, 1999). Il est ici fait abstraction des hauteurs. Il s'agit donc d'étudier une projection, mais, en principe, la dimension fractale est peu affectée par cet effet (Mandelbrot, 1982). La Figure 8 montre bien deux domaines¹⁵.

¹⁵ Le premier correspond aux plus grandes échelles ($0 < \ln(\varepsilon) < \ln(6,4)$) tandis que le second correspond aux plus petites ($\ln(6,4) < \ln(\varepsilon) < \ln(10,7)$) avec un angle net au voisinage de $\ln(\varepsilon) = 6,4$ (soit 600 m). L'ajustement d'un modèle puissance sur les grandes échelles livre une dimension très proche de 1 ($1,007 \pm 0,007$) qui correspond à

Par ailleurs, d'une certaine manière, on peut aussi comparer la structure des entrées de cavités qui est presque une équirépartition, à celle des talwegs et crêtes qui renvoie à une différenciation spatiale plus forte, alors même que les deux dimensions fractales sont semblables (Martin, 1999). Ceci permet encore de souligner la spécificité de cette approche scalaire par rapport à une approche spatiale classique, que formalise l'analyse spatiale en géographie. On soulignera enfin que la transition non fractal – fractal s'effectue dans ce cas sur une très petite gamme d'échelles, contrairement aux cas précédents. La question est donc d'une part de savoir pourquoi, et d'autre part d'établir si c'est une coupure réelle ou virtuelle, car liée aux données.

Il faut noter que la gamme scalaire non fractale est importante et qu'il n'y apparaît pas de courbure. En d'autres termes en deçà du seuil correspondant à la coupure, les sous-parties du réseau hydrographique se présentent comme des segments de droite, et cela, en tous lieux du réseau en fonction de l'information dont on dispose. Ces segments de talweg ne peuvent donc pas être expliqués par la pente (lorsque celle-ci est forte, le cheminement est rectiligne) dans la mesure où elle est certes forte en amont, mais pas en aval. Par ailleurs, d'un point de vue dynamique, on sait bien que le changement entre un écoulement aréolaire, en nappe, et un écoulement linéaire en rigole qui produit la glyptogénèse, donc l'affirmation des talwegs dans la topographie, se fait à des échelles bien plus grandes, donc de façon bien plus locale, et en fonction d'un réseau de drainage bien plus développé que le réseau pérenne. C'est le réseau fonctionnant exceptionnellement qui dépend lui de l'intensité des précipitations et de l'état de saturation des sols ou des formations superficielles qu'il faudrait pouvoir étudier, ce qui n'est guère possible de façon extensive. C'est vraisemblablement alors qu'apparaîtrait le passage entre les morphologies aréolaires et linéaires.

À partir de là, et dans l'attente de travaux sur un réseau plus dense en termes de branche, et avec des données à bien plus grande échelle, il semble préférable de considérer cette échelle de coupure comme étant virtuelle et liée aux conditions techniques de la cartographie tout en imaginant assez bien que les outils utilisés : le stylo à encre de chine un temps, la table traçante aujourd'hui, font émerger brusquement une échelle au-dessous de laquelle l'information sur l'irrégularité de l'objet réseau est perdue. Sans quoi il paraît difficile d'expliquer pourquoi en dessous de $\ln(\varepsilon) = 6,4$ soit 600 m ou 2,4 cm sur une carte au $1 / 25\ 000^{\circ}$, la variation de l'information entre les échelles se fait à taux nul, alors même que sur le terrain tout observateur possède une perception d'une irrégularité certaine à ces échelles. Ces remarques sont à mettre en rapport avec les nombreuses analyses où apparaissent deux segments ainsi reliés. Ajoutons pour finir que la très faible fluctuation des dimensions fractales sur cette gamme scalaire comme le montre la Figure 9 semble très curieuse. Cette figure permettant de préciser l'ampleur un peu plus importante de la petite gamme scalaire de transition, et conduit à déplacer encore vers de plus petites échelles le point médian de la transition.

la dimension générale pour les parties du réseau déployées à ces échelles. Au-delà du point d'inflexion qui est une échelle de coupure, la dimension fractale change et atteint $1,646 \pm 0,006$.

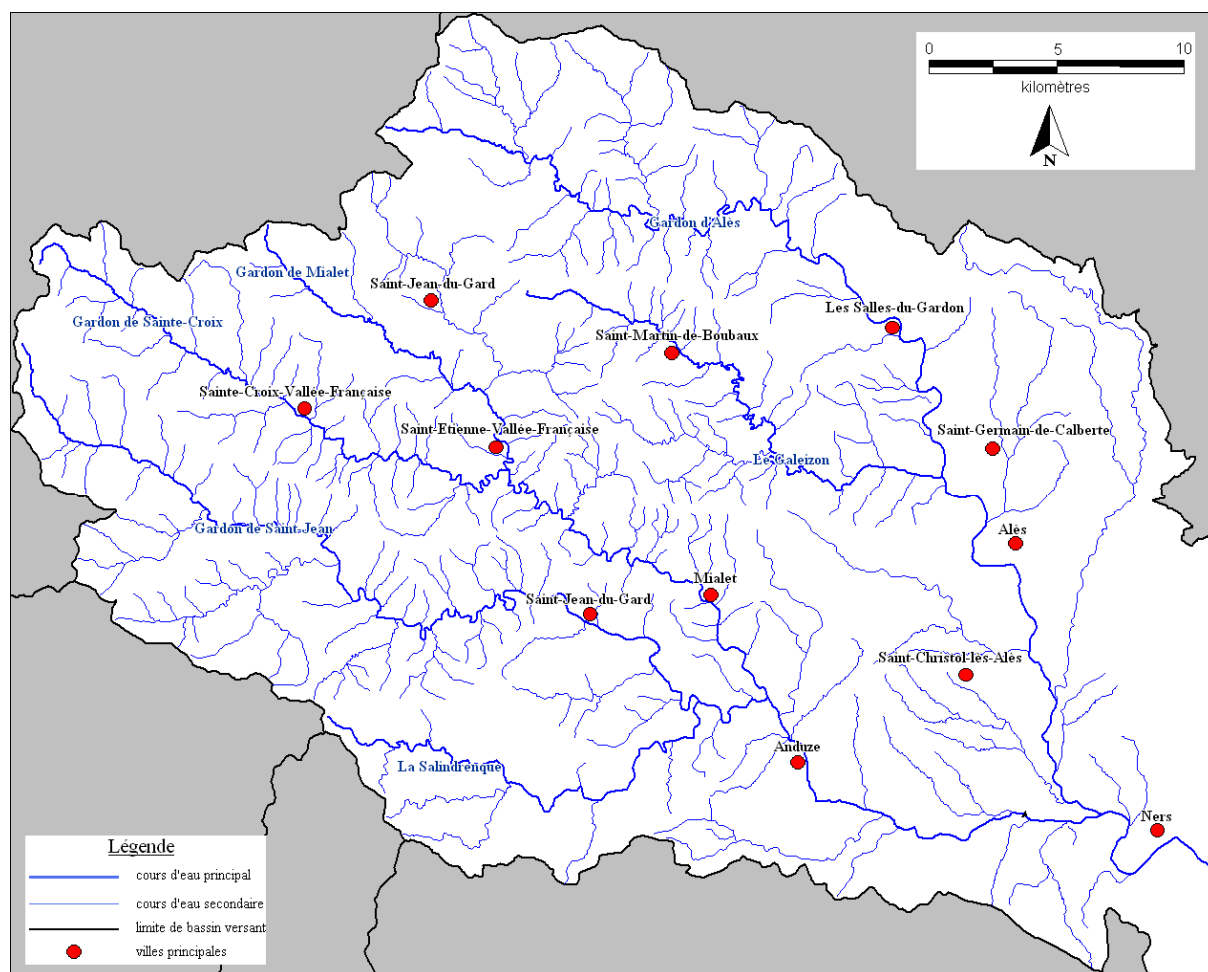


Figure 7. Le réseau hydrographique pérenne des Gardons en amont du Pont de Ners (Gard) selon l'IGN

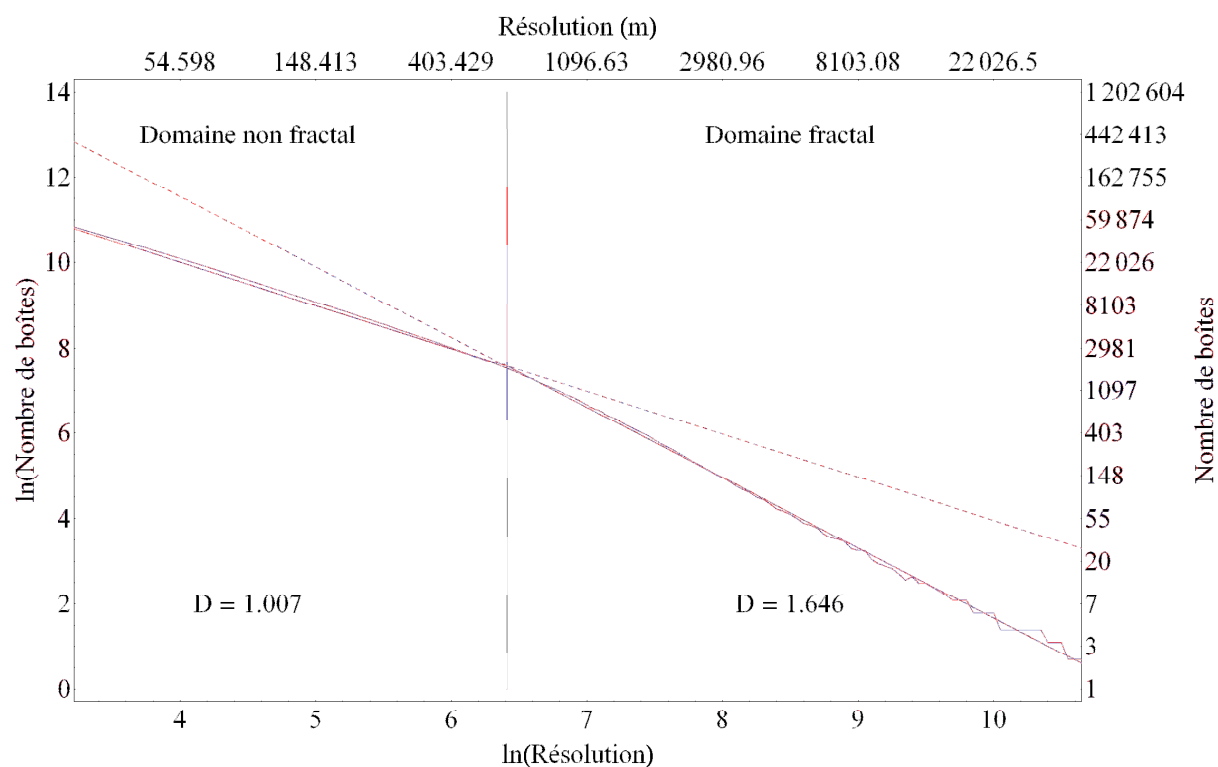


Figure 8. Dimension fractale par comptage de boîtes carrées du réseau arborescent des Gardons en amont du Pont de Ners (Gard)

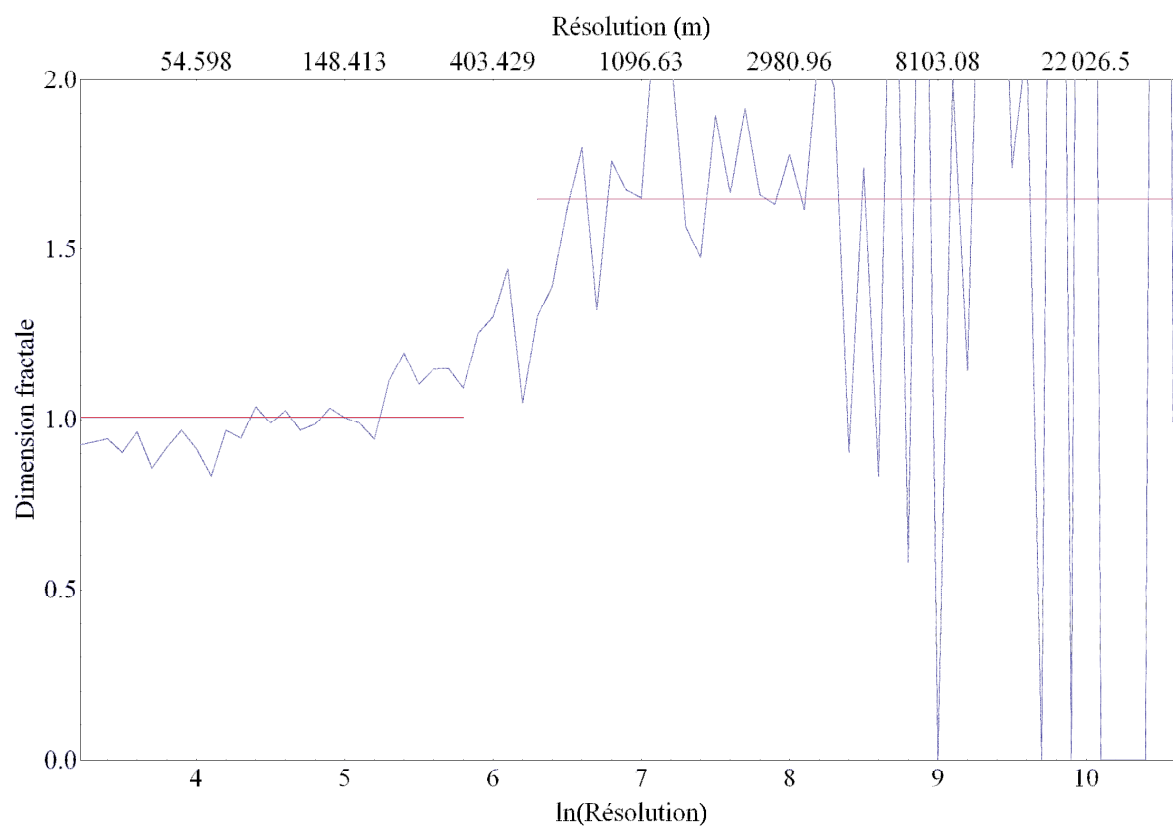


Figure 9. Variations locales de la dimension fractale par comptage de boîtes carrées du réseau des Gardons

Les ensembles de points, comme les organisations linéiques¹⁶, ont montré des structures multi-échelles correspondant à une loi de transformation d'échelle possédant une transition. Il convient donc maintenant de se poser la question de l'organisation scalaire des structures aréolaires ?

2.3. Le cas d'une organisation aréolaire urbaine

La Figure 10 représentant la ville d'Avignon, a été « capturée » en mars 2008 sur le site Internet *Mappy*. L'image possède une résolution très fine puisqu'un pixel équivaut à un mètre. Pour simplifier les choses, l'objet « ville » sera défini comme étant le négatif surfacique du réseau intra-urbain (Genre-Grandpierre & Frankhauser, 1998), et non par les éléments bâtis comme a pu le proposer Michael Batty et Paul Longley (1994), ainsi que Pierre Frankhauser (1994). L'objectif est ici de voir comment se structurent scalairement des surfaces délimitées par le réseau urbain à différentes échelles. Un calcul de dimension fractale par comptage de boîtes carrées a été réalisé sur ce qui apparaît en noir. Il fait apparaître globalement une invariance d'échelle avec $D = 1,792 \pm 0,009$.

Cela étant, il s'agit bien d'une loi avec deux transitions, les points extrêmes se répétant à l'infini (boîtes ayant atteint le niveau du pixel, boîtes couvrant toute la surface). Les échelles de coupure sont donc : un mètre aux grandes échelles et trois mille mètres (soit 12 « gros pixels » de 3 000 mètres de côté) aux petites échelles. L'image comportant beaucoup trop d'informations (24 154 952 pixels) pour que le système de calcul dont on dispose puisse estimer la taille des boîtes carrées jusqu'à l'étendue maximale de l'image (environ 15 kilomètres). Ainsi, la transition aux petites échelles est elle virtuelle ; comme l'est, dans ce cas, la transition aux grandes échelles car, en deçà de la surface obtenue, il existe d'autres structures qui pourraient être présentées sur une telle carte à cette résolution (le bâti par exemple).

Sur la gamme d'échelles investiguée du mètre à trois kilomètres et sur ces données qui sont particulièrement généralisantes puisque l'information utilisée fait abstraction de très nombreux objets urbains comme les cours ou les jardins, la ville apparaît globalement comme invariante d'échelle, ce qui n'est pas le cas même localement sur des hexagones de taille modeste (entre 400 et 550 m de centre à centre) dont l'information est limitée au bâti ou à la végétation intra-urbaine (Al Khalifeh, 2008). Bien évidemment, en deçà d'une certaine échelle, on sort d'une problématique d'urbanistes pour entrer dans celle d'architectes, mais encore faut-il que les données portent cette information. À l'autre extrémité de la gamme d'échelles, la transition attendue entre ce qui relève du domaine urbain et ce qui ressort de l'espace rural semble apparaître, mais cela devra être vérifié sur une base territoriale plus large. Les données mériteraient à ce niveau d'être complétées, d'autant que la ville d'Avignon ici considérée est une ville administrative donc limitée par le Rhône, alors que le Grand-Avignon franchit cette frontière qui fut longtemps politique, et qui reste psychologique.

Cet exemple montre, et c'est tout son intérêt, que la qualité des données appréciée au niveau de l'échelle la plus grande, mais aussi, et surtout envisagée en fonction de l'attribut que l'on souhaite analyser, est fondamentale. Le plan *Mappy* est très bien pour trouver une localisation, mais en aucun cas, il ne permet d'étudier la structuration spatiale d'un attribut très spécifique comme le bâti urbain. Cela étant, il permet d'apporter un éclairage certain, et soulever différentes questions.

Ceci pose donc la question fondamentale de la conceptualisation des attributs dont la structure spatiale et scalaire doit être étudiée. Que doit-on retenir ? Les trois cas précédant n'étaient, de ce point de vue, guère ambigus. Une bouche d'aven ou une entrée de grotte, c'est

¹⁶ Le néologisme « linéique » évite d'utiliser le terme « linéaire » qui est beaucoup trop connoté.

un point d'un territoire ; un réseau de drainage, c'est un ensemble de sommets et d'arcs, *etc.* Néanmoins, qu'est-ce qu'une ville ? Qu'est-ce que le bâti d'une ville ? On voit immédiatement que les réponses sont multiples et qu'elles ouvrent sur une généralisation qui ne permettra de ne faire ressortir que la « porteuse », la tendance d'ensemble, de l'organisation scalaire, à savoir, dans ce cas, l'invariance d'échelle.

Ceci conduit donc à envisager qu'un objet aussi complexe qu'une ville soit scalairement analysé selon de multiples informations, comme le bâti, la végétation intra-urbaine, le réseau de circulation, *etc.* dont certains s'excluront spatialement mutuellement alors que d'autres pourront être relatives à des attributs situés en un même lieu comme les immeubles à toitures en terrasse. Ce travail étant fait, il faudra alors voir comment toutes ces structures scalaires s'articulent dans un ensemble urbain.

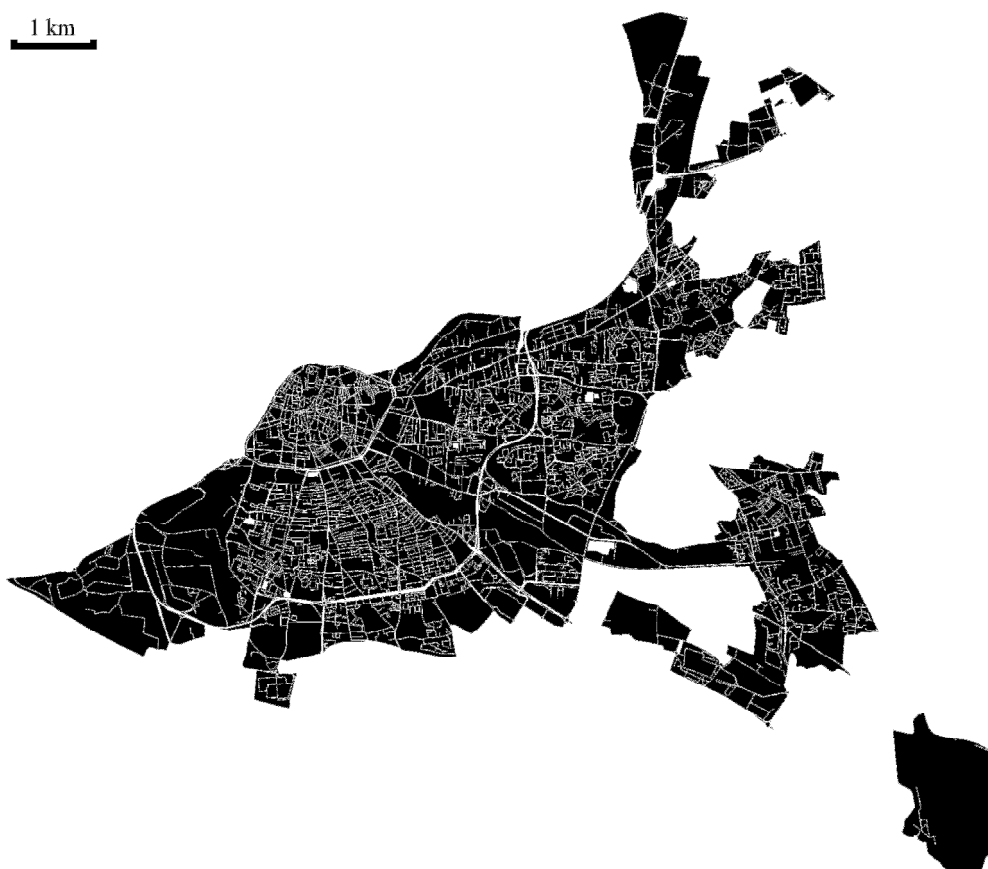


Figure 10. Représentation de la ville d'Avignon

3. Les conséquences en géographie de l'existence d'une telle transition

En conclusion, il apparaît donc que l'on dispose d'un cadre formel issu de la relativité d'échelle qui se décline en quelques lois remarquables. Si la situation d'invariance d'échelle apparaît facilement sur des gammes d'échelles plus ou moins importantes sur les exemples traités retrouvant en cela bien des travaux antérieurs, il n'en est pas de même pour la transition fractal – non fractal. Très clairement, il apparaît deux types de problèmes. Le premier est lié à la quantité d'information disponible qui peut conduire à faire apparaître des transitions bien réelles ou des artefacts. Il faudra à l'avenir préciser ce point et être capable de dire si l'on est dans l'un ou dans l'autre cas. La seconde difficulté est peut être plus délicate et subtile en ce sens qu'elle renvoie à la notion d'attribut en un lieu, lui-même dépendant de la problématique que l'on pose qui doit être suffisamment précise et performante pour dégager

un attribut incontestable comme peut l'être une altitude pour un relief. Reste que l'ajustement empirique de certaines lois théoriques sur de nombreux exemples devrait faire émerger des valeurs numériques pour les différents paramètres auxquels il faudra donner un sens géographique et il en sera de même pour les modèles eux-mêmes (sans, avec une ou avec deux transitions).

Les fractales sont donc fondamentales en géographie, car elles montrent qu'une mesure aussi précise soit-elle n'est jamais absolue ; elle dépend toujours de l'échelle. Toutefois, cette dépendance peut être négligeable si l'on se situe dans une gamme d'échelles non fractales, c'est-à-dire des gammes pour lesquelles l'information ne varie pas en fonction de la résolution. En conséquence, « l'entrée » ou la « sortie » en fractalité d'une organisation scalaire est essentielle à penser. Aussi, envisager quelle peut être dans l'espace la traduction des échelles de coupure doit être une préoccupation essentielle.

Par ailleurs, la fractalité enseigne que, plus une mesure est précise, plus cette mesure risque de diverger très rapidement. Alors que, en règle générale, c'est l'effet contraire qui est recherché. Autrement dit, plus la résolution est élevée, plus la gamme d'échelles non fractale sera courte.

Lorsqu'une transition fractal – non fractal apparaît, l'objet possédera un domaine où sa longueur, sa surface ou son volume, en fonction de la ou les dimensions calculées, ne seront plus constants, car celles-ci dépendront de la résolution mise en œuvre. Ceci montre bien que toute analyse spatiale, sur une configuration fractale, est scalairement dépendante, et qu'il faut donc explicitement entrer ces questions de résolutions dans les considérations développées en géographie. La dépendance d'échelle est donc un phénomène trop central dans l'analyse d'un espace géographique pour que la géographie ne s'en détourne. En effet, ce concept permet ni plus, ni moins que de résoudre ou de repenser la question du *Modifiable Area Unit Problem*¹⁷ (MAUP). Dans un domaine non fractal, le problème du MAUP possédera une solution, et inversement, dans un domaine fractal, il n'en aura aucune. Le changement d'échelle entraîne une dégradation de l'information dont on peut toutefois connaître le taux *via* la dimension fractale. Autrement dit, tout ensemble de lieux porteur d'un attribut spécifique pouvant être compris comme un objet géographique est potentiellement fractal, et il peut l'être d'autant plus que tout point en relativité d'échelle est potentiellement fractal. On voit donc bien ici le « danger » qui existe en toute occasion de raisonner en termes d'objets, c'est-à-dire en termes d'entités phénoménologiques immédiatement appréhendables par nos sens, et tout l'intérêt pour la géographie à raisonner de plus en plus en termes de relations ; lesquelles, au mieux prendront place dans un cadre théorique comme celui à cinq dimensions que définit la relativité d'échelle. Par ailleurs, il faut impérativement établir les gammes d'échelles sur lesquelles l'information collectée est fractale (quelle que soit la dimension) ou non fractale, afin d'éviter d'effectuer des calculs erronés dans le sens où ils dépendraient de l'échelle d'observation, comme dans le cas du calcul d'une densité.

La transition fractal – non fractal est donc un concept essentiel pour comprendre l'organisation scalaire d'une structure spatiale. Il permet, au final, de déplacer le problème de la fractalité d'un simple calcul de la dimension fractale (qui demeure fondamental) à une distinction entre échelle de coupure réelle et échelle de coupure virtuelle (Le Méhauté, 1990) mais aussi de mettre l'accent sur une dimension invisible, mais fondamentale, de l'espace géographique.

¹⁷ Problème du changement de superficie

Bibliographie

- Al Khalifeh S. (2008). *L'apport de la télédétection dans l'observation de l'étalement urbain. L'exemple de l'agglomération d'Avignon – France*. Avignon : Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, Thèse de doctorat de géographie, 417 p.
- Auffray C., Nottale L. (2008). « Scale relativity theory and integrative systems biology. 1. Founding principles and scale laws ». *Progress in biophysics and molecular biology*, n°97, p. 79-114.
- Barnsley M. (1988). *Fractals everywhere*. Londres : Academic Press, XIII-533 p.
- Batty M., Longley P. (1994). *Fractal cities. A geometry of form and function*. Londres : Academic press, XXII-394 p.
- Forriez M. (2005). *La motte de Boves permet-elle de mener une réflexion épistémologique commune en archéologie, en géographie et en histoire ?* Arras : Université d'Artois, Mémoire de master 1 d'histoire et de géographie, 156 p.
- Forriez M. (2007). *Construction d'un espace géographique fractal. Pour une géographie mathématique et recherche d'une théorie de la forme*. Avignon : Université d'Avignon, Mémoire de master 2 de géographie, 202 p.
- Forriez M., Martin, P. (2008). « De l'utilité de la théorie de la relativité d'échelle de Laurent Nottale. Partie 2. Application d'un modèle scalaire spatio-temporel ». *Géopoint 2006*, Avignon : Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p. 305-312.
- Frankhauser P. (1994). *La fractalité des structures urbaines*. Paris : Économica, coll. « Anthropos », 291 p.
- Gaubert G., Le Falher B. (1990). *Hydrologie et spéléologie des territoires alimentant en eau la fontaine de Vaucluse*. t. 1, *Les cavernes d'Albion*, Saint-Christol-d'Albion : Association de Recherches et d'Études Hydrologiques du Plateau d'Albion, 230 p. et 2 plans hors-texte.
- Gaubert G., Le Falher, B. (1995). *Hydrologie et spéléologie des territoires alimentant en eau la fontaine de Vaucluse*. t. 2, *Les arcanes du Vaucluse*, Saint-Christol-d'Albion : Association de Recherches et d'Études Hydrologiques du Plateau d'Albion, 338 p.
- Genre-Grandpierre C., Frankhauser, P. (1998). « La géométrie fractale – un nouvel outil pour évaluer le rôle de la morphologie des réseaux de transport public dans l'organisation spatiale des agglomérations ». *Les cahiers scientifiques du transport*, Lyon : n°33, p. 41-78
- Hauchard E., Delahaye D., Frankhauser P. (1999). « Analyse morphologique de talwegs et comportement scalant. Application des dimensions non entières à la géographie physique ». *L'Espace géographique*, n°3, p. 215-224.
- Le Méhauté A. (1990). *Les géométries fractales. L'espace-temps brisé*. Paris : Hermès, 198 p.
- Lesne A. (2004). « Fractales : les limites du réel ». *Tangente. L'aventure mathématique. Les Fractales. Art, nature et modélisation*, HS n°18, p. 102-108.
- Mandelbrot B. (1977). *The fractal geometry of nature*. New York : W. H. Freeman and Compagny, 460 p.
- Mandelbrot B. (1982). *The fractal geometry of nature*. San Francisco : W.H. Freeman, 468 p.
- Martin P. (1991). *Hydromorphologie des géosystèmes karstiques des versants nord et ouest de la Sainte-Baume (Bouche du Rhône, Var ; France). Étude hydrologique, hydrochimique et de vulnérabilité à la pollution*. Marseille : Thèse de l'Université d'Aix-Marseille II, 321 p.
- Martin, P. (1996). « De l'organisation des formes superficielles et souterraines du massif karstique de la Sainte Baume (B. du Rh, Var ; Fr.) ». *Ukpic*, n°8, Université de Fribourg, Suisse : M. Monbaron et S. Fierz éditeurs, p. 45-64.
- Martin P. (1997). « Structures hiérarchiques dans le karst de la Sainte Baume (B. du Rh, Var ; France) ». *12^e Congrès de spéléologie. Symposium 7*, vol. 1, Union internationale de spéléologie et Société suisse de spéléologie éditeurs, p. 129-132.

- Martin P. (1999). « Modélisation des structures spatiales du karst. Acte du colloque Karst 1999, Grands Causses – Vercors ». *Études de géographie physique, Travaux 1999*. Supplément au n°XXVIII, CAGEP – URA 903 du CNRS, Université de Provence, p. 135-140.
- Martin P. (2003). « Construire un objet géographique. Recherche d'une méthodologie ». In Maby, Jacques (s.d.), *Objets et indicateurs géographiques*. Avignon : Université d'Avignon et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, Coll. « Actes Avignon n°5 », p. 42-88
- Martin P. (2004). *Modélisation fractale et structurelle des formes en géographie. Réflexion développée à partir d'exemples karstiques*. 3 tomes, Avignon : HDR, 169 p., 314 p., 179 p.
- Martin P., Forriez M. (2008). « De l'utilité de la théorie de la relativité d'échelle de Laurent Nottale. Partie 1. Recherche d'un modèle scalaire spatio-temporel ». *Géopoint 2006*. Avignon : Groupe Dupont et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, 297-303 p.
- Nottale L. (1993). *Fractal space-time and microphysics. Towards a theory of scale relativity*. Singapour : World Scientific, 348 p.
- Nottale L. (1997). « Scale relativity ». In Dubrulle, B., Graner, F., Sornette, D., *Scale invariance and beyond*. EDP Sciences / Springer, p. 249-261.
- Nottale L. (1998). *La relativité dans tous ses états. Au-delà de l'espace-temps*. Paris : Hachette, coll. « Sciences », 320 p.
- Nottale L. (2002). « Relativité d'échelle, non différentiabilité et espace-temps fractal ». In Abry, P., Gonçalves, P., Levy Vehel, J., *Traité IC2. Traitement du signal et de l'image. Lois d'échelle, fractales et ondelettes*. Vol. 2, Chap. 7, Paris : Hermès-Lavoisier, p. 233-265.
- Nottale L. (2009). « Fractals in the quantum theory of space-time », in *Encyclopedia of complexity and systems science*. New York : Springer, p. 3858-3878
- Rodríguez-Iturbe I., Rinaldo A. (1997). *Fractal river basins. Chance and self-organisation*. Cambridge : Cambridge University Press editor, XIV-547 p.