



**HAL**  
open science

## Mesure de compatibilité et recherche de solutions régulières en contact pénalisé

Guillaume Vermot Des Roches, Etienne Balmès, Hachmi Ben Dhia, Rémi Lemaire

► **To cite this version:**

Guillaume Vermot Des Roches, Etienne Balmès, Hachmi Ben Dhia, Rémi Lemaire. Mesure de compatibilité et recherche de solutions régulières en contact pénalisé. 9e colloque national en calcul des structures, May 2009, Giens, France. hal-00414399

**HAL Id: hal-00414399**

**<https://hal.science/hal-00414399v1>**

Submitted on 9 Sep 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mesure de compatibilité et recherche de solutions régulières en contact pénalisé

G. Vermot des Roches<sup>1,3</sup>, E. Balmes<sup>1,2</sup>, Hachmi Ben Dhia<sup>3</sup>, Rémi Lemaire<sup>4</sup>

<sup>1</sup>SDTools

44, Rue Vergniaud, 75013, Paris - FRANCE  
{vermot,balmes}@sdtools.com

<sup>2</sup>Arts et Metiers ParisTech, CNRS, Laboratoire LMSP,  
151, boulevard de l'hôpital, 75013, Paris - FRANCE

<sup>3</sup>Ecole Centrale Paris, CNRS, Laboratoire MSS-MAT,  
Grande Voie des Vignes, 92295, Chatenay-Malabry - FRANCE  
hachmi.ben-dhia@ecp.fr

<sup>4</sup>Robert Bosch (France) SAS, Chassis Systems Brakes  
126, Rue de Stalingrad, 93700, Drancy - FRANCE  
remi.lemaire@fr.bosch.com

---

**Résumé** — L'utilisation de modèles éléments finis d'objets industriels complexes pose une problématique de compatibilité des maillages aux interfaces, en particulier dans le cas du contact. Cette incompatibilité génère des problèmes de convergence et de régularité des solutions. L'étude présentée ici étend le concept de la  $(1-\varepsilon)$ -compatibilité introduite par Ben Dhia et Balmès et l'applique à la problématique du contact entre solides tridimensionnel présentant des maillages incompatibles.

**Mots clés** — contact, incompatibilité, interface, pénalisation, régularisation,  $(1-\varepsilon)$ -compatibilité

---

## 1 Introduction

La recherche d'une flexibilité maximale dans la modélisation éléments finis de systèmes industriels complexes nécessite une discrétisation fine et différenciée par zones. Les techniques de maillage libre largement déployées dans l'industrie ainsi que les méthodes adaptatives/correctives conduisent à la présence d'interfaces incompatibles. La transmission d'efforts à travers de telles interfaces est problématique et a fait l'objet de nombreux travaux. De façon très partielle, on peut citer des approches posant le problème comme un couplage de modèles [1, 2] ou en lien avec la synthèse modale en introduisant la notion de modes d'interface [3, 4]. La présente contribution étend les idées présentées en [5] à la gestion de contact entre maillages volumiques tridimensionnels.

La section 2 définit un produit scalaire sur la zone de contact effective et montre comment la décomposition en valeur singulière de l'opérateur associé conduit à la définition d'un sous-espace vectoriel presque compatible, ou  $(1 - \varepsilon)$ -compatible, sur les surfaces candidates au contact. Cette approche ne touche pas aux maillages d'origine, traite les contacts partiellement recouvrants, et

traite les deux surfaces de façon identique. Il est ensuite proposé de ne considérer que la cinématique  $(1 - \varepsilon)$ -compatible pour calculer les efforts de contact.

En section 3, un modèle académique de cube troué permet d'illustrer les enjeux et le cas industriel d'une plaquette de frein la généralité de la procédure.

## 2 Cinématique presque compatible et couplage

### 2.1 Produit scalaire sur la surface de contact

La résolution du problème de contact entre deux solides  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , est définie entre deux interfaces candidates au contact  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Les cas visés par la méthodologie proposée utilisent des maillages incompatibles, des cinématiques différentes (degrés d'interpolation, forme de faces, ...) et des interfaces partiellement non recouvrantes.

Pour analyser la compatibilité, on suppose l'existence d'un outil permettant de mailler l'interface correspondant au sous-ensemble en contact de  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ , noté  $\Gamma$  et montré en figure 1.

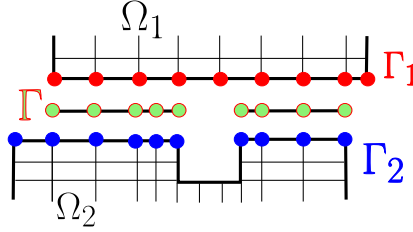


Figure 1: Définition de l'interface de transfert  $\Gamma$

La première étape de la méthode proposée consiste à définir un produit scalaire sur  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ . Pour aider à la compréhension, on choisit ici de présenter ce produit scalaire comme l'énergie de déformation d'un contact pénalisé, associé à une densité surfacique de raideur de contact  $k$ . On a donc

$$E_p = \int_{\Gamma} k (u(q_1) - u(q_2))^2 dS \quad (1)$$

Comme proposé en [5], on cherche à approcher ce produit scalaire aussi précisément que possible. La solution numérique mise en oeuvre pour les applications présentées, est une triangulation de Delaunay sur l'ensemble des noeuds de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  effectivement en contact. A partir de ce maillage de  $\Gamma$ , l'énergie du contact pénalisé considéré est alors approchée par quadrature numérique

$$E_p = \sum_{x_i} k w_i J(x_i) (u_i(q_1) - u_i(q_2))^2 \quad (2)$$

avec un calcul du jeu  $g = \{u_1(q_1) - u_2(q_2)\}^T \{n\}$  utilisant les approximations cinématiques liées aux maillages de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . En pratique, le jeu est calculé sur les  $N_{\Gamma}$  point d'intégration de  $\Gamma$  et est relié linéairement aux degrés de liberté par des matrices d'observation du déplacement normal d'interface  $[C_{N_i}^1]_{N_{\Gamma} \times N_{\Gamma_1}}$  (resp.  $[C_{N_i}^2]_{N_{\Gamma} \times N_{\Gamma_2}}$ ) de  $\Gamma_1$  (resp. de  $\Gamma_2$ ). On a donc

$$\{g\}_i = [C_{N_i}^1] \{q_1\} - [C_{N_i}^2] \{q_2\} \quad (3)$$

et le calcul de l'énergie de contact pénalisé par

$$E_p = \left\{ \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix} \right\}^T \left[ \begin{matrix} C_{N_i}^1 & -C_{N_i}^2 \end{matrix} \right]^T \left[ \begin{matrix} \ddots & & & \\ & k w_i J(x_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} C_{N_i}^1 & -C_{N_i}^2 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix} \right\} \quad (4)$$

Cette formulation met en évidence un produit scalaire défini sur  $\Gamma$ , en considérant une pénalisation  $k$  uniforme. La matrice du produit scalaire ainsi introduit est notée  $[A]$  et peut être décomposée en blocs

$$E_p = \{q\}^T [A] \{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

## 2.2 Un calcul de compatibilité robuste

La  $(1-\varepsilon)$ -compatibilité définie en [5] compare l'écart en norme d'un vecteur d'une interface et de sa projection sur l'interface en vis-à-vis. Un vecteur de  $\Gamma_1$  est par définition orthogonal à tout vecteur de  $\Gamma_2$  de telle sorte qu'un vecteur  $\{q_1\} \in \Gamma_1$  et son projeté  $\pi_2^1 \{q_1\} \in \Gamma_2$  vérifient

$$[A_{21}] \{q_1\} - [A_{22}] \pi_2^1 \{q_1\} = 0 \quad (6)$$

Ceci conduit à une formulation de la  $(1-\varepsilon)$ -compatibilité sous la forme d'un quotient de Rayleigh

$$C_2^1(\{q_1\})^2 = \frac{\|\{q_1\}\|_A}{\|\pi_2^1 \{q_1\}\|_A} = \frac{\{q_1\}^T [A_{21}]^T [A_{22}]^{-1} [A_{21}] \{q_1\}}{\{q_1\}^T [A_{11}] \{q_1\}} \quad (7)$$

Cette formulation pose un problème de robustesse car lors de recouvrements très partiels, les matrices  $[A_{11}]$  et  $[A_{22}]$  sont très mal conditionnées. Pour comprendre le problème il suffit de perturber légèrement un maillage compatible pour que certains éléments aient ou non une intersection avec  $\Gamma$ .

On propose donc ici de calculer la décomposition en valeurs singulières (SVD) de  $A$  (et non de  $A_{21}$  comme proposé en [5]).  $A$  étant symétrique, on a

$$[A] = \left[ \dots \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{Bmatrix} \dots \right] \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \sigma_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \{U\}^T \quad (8)$$

Les vecteurs  $\{u_i\}$  associés aux valeurs singulières  $\sigma_i$  faibles sont clairement compatibles, car l'énergie de déformation dans  $\Gamma$  est faible. Les DDL d'éléments à faible recouvrement sont alors naturellement obtenus car l'énergie induite dans  $\Gamma$  est faible. Les vecteurs associés à de grandes valeurs singulières sont eux incompatibles. Le résultat de la décomposition en valeur singulière est donc une base  $[U_\varepsilon^n]$  de mouvement presque compatibles définis sur  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ .

## 2.3 Utilisation de la cinématique presque compatible

Comme indiqué en [5], les vecteurs presque compatibles peuvent être utilisés dans une approche primale (on suppose  $\{q_1\} = [\dots u_i^1 \dots] \{q_R^1\}, \dots$ ) ou duale (le travail des efforts de contact sur les paires  $\{u_i^1\}, -\{u_i^2\}$  est nul).

L'approche visée ici est l'implémentation d'un contact pénalisé avec une raideur de contact exponentielle. L'approche duale n'est donc pas exploitable directement. Par ailleurs l'approche primale a une tendance connue à générer du verrouillage (discuté en [3]). On propose donc ici un compromis qui consiste à construire un pseudo-inverse permettant d'estimer le déplacement  $(1-\varepsilon)$ -compatible sur les deux surfaces puis de calculer les efforts de contact à partir des jeux associés à ces déplacements corrigés.

Pour  $\Gamma_n$ , le déplacement  $(1-\varepsilon)$ -compatible est défini comme une combinaison linéaire des vecteurs de  $[U_\varepsilon^n]$

$$\{q_n^\varepsilon\}_{N_{\Gamma_n} \times N_\varepsilon} = [U_\varepsilon^n]_{N_{\Gamma_n} \times N_\varepsilon} \{\alpha_n\}_{N_\varepsilon} \quad (9)$$

où  $\{\alpha_n\}$  est solution du problème de minimisation

$$\{\alpha_n\} = \min_{\{\alpha\}} \|[U_\varepsilon^n] \{\alpha\} - \{q_n\}\|_{\mathcal{X}} \quad (10)$$

qui définit le pseudo inverse. Le choix d'une bonne norme  $\mathcal{K}$  est largement ouvert. Il ne peut s'agir d'une restriction de  $A$ , car cette norme est mal conditionnée pour les recouvrements partiels. On a ici utilisé l'identité mais une norme en déplacement ou en déformation sur  $\Gamma_n$  semblerait adaptée. Au final, on utilise donc une expression modifiée du jeu

$$\{g\}_i = \left[ C_{Ni}^1 [U_\varepsilon^1] [U_\varepsilon^1]^+ \right] \{q_1\} - \left[ C_{Ni}^2 [U_\varepsilon^2] [U_\varepsilon^2]^+ \right] \{q_2\} \quad (11)$$

Il est utile de noter que le mouvement étant régularisé, la règle d'intégration utilisée maintenant peut être beaucoup moins riche que celle utilisée pour construire l'opérateur  $A$  servant au calcul de compatibilité.

### 3 Application numérique

#### 3.1 Un modèle de démonstration

Afin d'illustrer la problématique ainsi que les solutions apportées, on pose le problème d'un cube troué maillé finement sur lequel est appuyé un cube plein maillé grossièrement comme présenté en figure 2b. Les cubes sont guidés en translation verticale, la base du cube bas est encadrée et une pression uniforme est appliquée à la surface supérieure du cube haut.

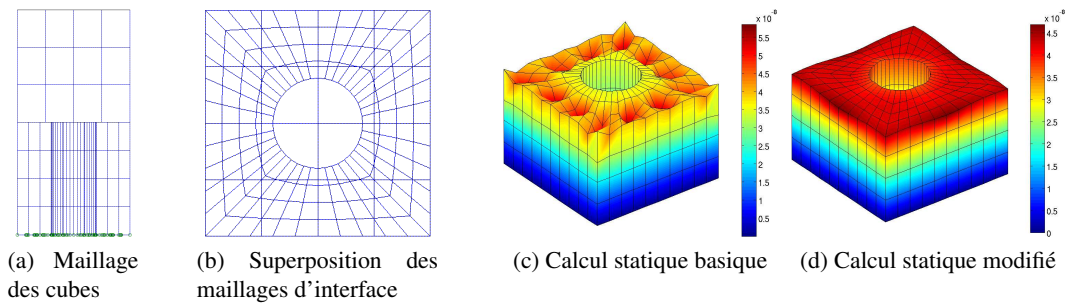


Figure 2: Modèle du cube troué et résultat du calcul statique avec un point d'intégration par élément de contact. La norme du déplacement vertical est tracée

Dans le cas où la surface grossière est choisie comme surface maître pour une raison externe, le calcul en contact donne un résultat peu précis. La figure 2c montre le résultat du calcul statique du contact en utilisant un point d'intégration (Gauss) par élément de la surface maître.

Le calcul des mouvements compatibles par la SVD (8) donne une base de déplacement sur chacune des interfaces. Les différentes formes obtenues sont tracées en figure 3. L'interpénétration générée par les mouvements de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  est tracée sur  $\Gamma$ , représentée par une triangulation de Delaunay des points de Gauss.

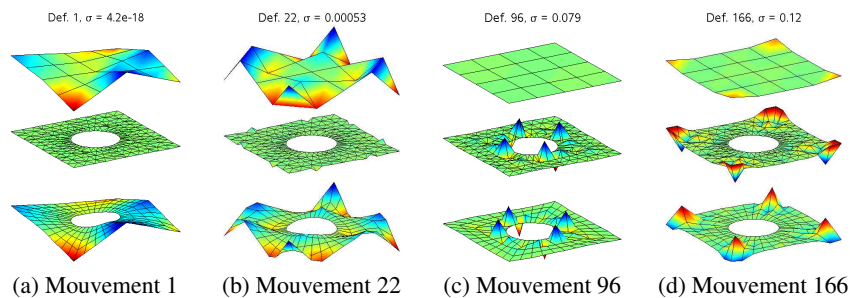


Figure 3: Mouvements compatibles calculés par la SVD (8) de  $A$ .

Les mouvements parfaitement compatibles comme en figure 3a ne génèrent pas d'interpénétration. Les mouvements non compatibles ont une valeur singulière non nulle, sont mal transmis et un différentiel entre les deux surfaces est apparent.

Pour générer une observation compatible, il a d'abord été mis en place une procédure de tri permettant une sélection de points de Gauss de  $\Gamma$ . Dans le cas du cube, on obtient 24 points de Gauss à garder de manière optimisée et il apparaît clairement en figure 4a que l'approche proposée contraint la cinématique du maillage fin. La visualisation des matrices d'observation (duales des efforts de contact) montre que le passage de  $[C_{Ni}^1]$  à  $[C_{Ni}^1 [U_\epsilon^1] [U_\epsilon^1]^+]$  conduit à une répartition sur le voisinage du point de contact. On peut noter que la procédure d'association des formes  $(1 - \epsilon)$ -compatibles à des points spécifiques n'est pas robuste dans le cadre général.

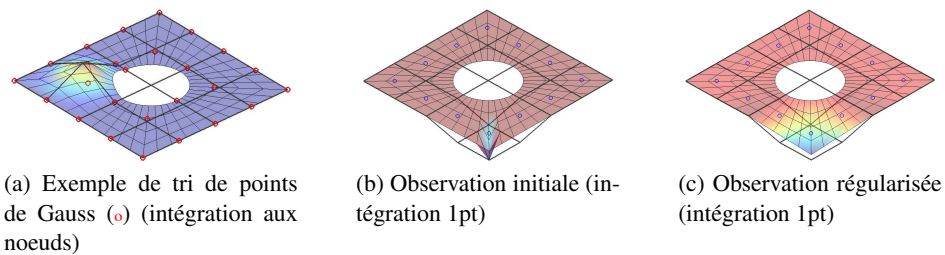


Figure 4: Tri des mouvements compatibles et observation

L'utilisation de l'observation régularisée permet de mieux approcher la réponse exacte, comme illustré en figure 5 et 2d. Ceci peut être appliqué à diverses lois d'intégration du maillage sous-jacent, en comparaison avec la solution de référence prise ici comme étant le résultat d'un calcul avec la surface raffinée comme maître et une règle d'intégration à 9 points. Dans tous les cas la solution régulière est une amélioration nette de la solution initiale.

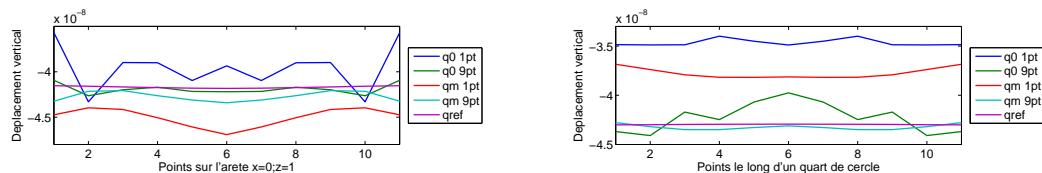


Figure 5: Solution régularisée (qm) et comparaison avec les solutions non régulières (q0). Les déplacements sont calculés le long d'une arête de  $\Gamma_2$ , et le long d'un quart de tour du trou.

### 3.2 Application à des composants industriels

L'application industrielle concerne les modèles de frein à disque automobile conçus par Bosch. On se limite ici à une interface patin/disque dont la régularité de la solution peut poser problème. Les composants sont maillés séparément et librement par des tétraèdres à dix noeuds.

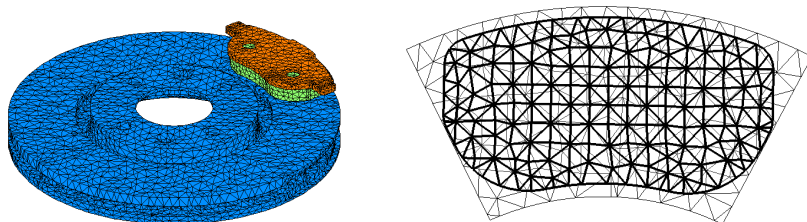


Figure 6: Modèle patin/disque de frein industriel

Le calcul de mouvements de la SVD (8) (figure 7) renvoie une grande gamme de valeurs singulières faibles. Ceci est dû aux recouvrements partiels entre les éléments des bords des deux surfaces, générant des termes faibles sur la diagonale de  $A$ . Les vecteurs notablement incompatibles (30 %) montrés dans la figure 7b, illustrent bien l'incompatibilité des deux maillages.

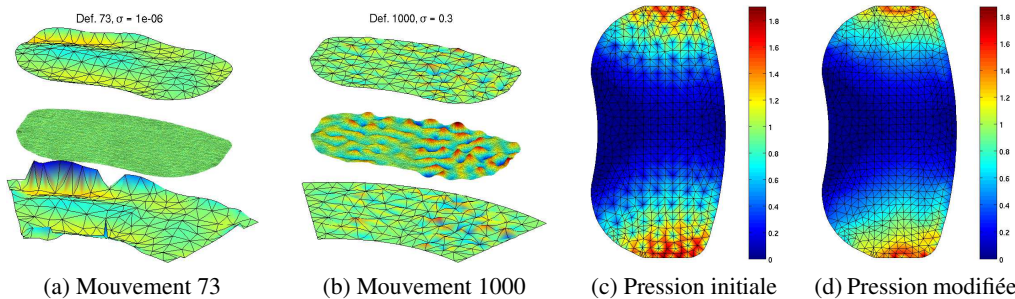


Figure 7: Quelques vecteurs  $(1 - \varepsilon)$ -compatibles, et résultats de pression statiques (en  $10^4 MPa$ ) tracés sur les points de Gauss de  $\Gamma$ . On note la différence de raffinement de la loi d'intégration du contact entre le calcul des mouvements compatibles et le calcul statique

Un résultat statique calculé en utilisant la plaquette comme surface maître en utilisant les techniques de sous intégration classique donnent des résultats très perturbés figure 7c. La loi d'intégration aux noeuds n'est pas suffisante pour obtenir une pression régulière, sauf en utilisant la régularisation figure 7d. Utiliser une règle à trois points, permet également de résoudre partiellement le problème au détriment de la taille du modèle.

## 4 Conclusion

La méthode de régularisation aux interfaces proposée dans ce papier permet, indépendamment de choix de modélisation externes, d'obtenir des champs de pression de contact satisfaisants. Ce critère est critique pour la convergence des calculs et la pertinence d'éventuels post-traitements. En particulier une simulation temporelle basée sur un calcul de contact statique nécessite un état initial propre. Enfin, cette méthode ne change en rien la taille du modèle ni la formulation des éléments sous-jacents au contact, et permet un choix du niveau d'intégration du contact sans nuire à la stabilité.

## Références

- [1] I. Babuska. The finite element method with lagrange multiplier. *Numer.Math.*, 20 :179–192, 1973.
- [2] C. Bernardi, Y. Maday, and A.T. Patera. Domain decomposition by the mortar element method. *Laboratoire d'analyse numérique, Paris VI Univ., Report 92013*, 1992.
- [3] E. Balmes. Use of generalized interface degrees of freedom in component mode synthesis. *International Modal Analysis Conference*, pages 204–210, 1996.
- [4] D. de Klerk, D.J. Rixen, and S. N. Voormeeren. General framework for dynamic substructuring : History, review and classification of techniques. *AIAA Journal*, 46(5) :1169–1181, 2008.
- [5] H. Ben Dhia and E. Balmes. Mesure de compatibilité et application aux problèmes de sous-structuration. *Colloque National en Calcul des Structures, Giens*, 2003.