HAL open science

Introduction aux algèbres de Hopf pour des questions diophantiennes.

Michel Waldschmidt

To cite this version:

Michel Waldschmidt. Introduction aux algèbres de Hopf pour des questions diophantiennes.. conférence internationale Maroc-Québec Théorie des nombres et applications, May 2003, Casablanca, Maroc. pp.199-218. hal-00411381

HAL Id: hal-00411381

https://hal.science/hal-00411381v1

Submitted on 27 Aug 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ann. Sci. Math. Québec **28** (2004), no. 1-2, 199–218.

INTRODUCTION AUX ALGÈBRES DE HOPF POUR DES QUESTIONS DIOPHANTIENNES

MICHEL WALDSCHMIDT

RÉSUMÉ. Les algèbres de Hopf ont été introduites en topologie algébrique, puis dans la théorie des représentations des groupes de Lie et des groupes algébriques. Elles jouent maintenant un rôle important dans l'étude des groupes quantiques. Nous présentons deux questions diophantiennes dans lesquelles elles interviennent. Dans la première, ce sont des algèbres de Hopf bicommutatives (commutatives et cocommutatives) : Stéphane Fischler les a utilisées pour obtenir des lemmes d'interpolation sur des groupes algébriques linéaires à partir de lemmes de zéros, fournissant par la même occasion une interprétation algébrique de la dualité de Fourier-Borel. Dans la deuxième, certaines algèbres de Hopf sont commutatives, d'autres sont cocommutatives, mais elles ne sont pas bicommutatives. Il s'agit de l'étude des nombres *multizêta* encore appelés *polyzêta* ou *valeurs zêta multiples* (MZV ou *Multiple Zeta Values* en anglais).

ABSTRACT. Hopf algebras have been introduced in algebraic topology, then in the theory of representations of Lie groups and algebraic groups. They play now an important role in the study of quantum groups. We present two diophantine investigations where Hopf algebras play a role. In the first one they are bicommutative (commutative and co-commutative): they enable Stéphane Fischler to deduce from known zero estimates on linear algebraic groups new interpolation lemmas which play a role in transcendental number theory. This new approach also provides an algebraic interpretation of the Fourier-Borel duality. In the second one, some of the Hopf algebras which occur are commutative, others are co-commutative, but they are not bicommutative. They occur in the study of Multiple Zeta Values (MZV).

1. Algèbres, cogèbres, bigèbres, algèbres de Hopf. (Les références pour cette partie sont les suivantes : [A] Chapitre 2, §1; [K] Chapitre III, [S], §1; [Wat] Chapitre I, §1.4.)

Soit **k** un corps. Bien que cela ne soit pas essentiel, nous supposerons **k** de caractéristique nulle et algébriquement clos – en fait on peut même se limiter au corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques ou au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Rappelons qu'une **k**-*algèbre* (A, m, η) est un **k**-espace vectoriel A muni d'un *produit*

$$m : A \otimes A \to A$$

Reçu le 12 novembre 2003 et, sous forme définitive, le 7 février 2005.

©Association mathématique du Québec

et d'une *unité*

$$\eta : \mathbf{k} \longrightarrow A$$

qui sont des applications **k**-linéaires telles que les deux diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{k} \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes \mathrm{Id}"] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \mathbf{k} \arrow[l, "\mathrm{Id}\otimes \eta"'] \arrow[d] \\
A \arrow[r, equal] & A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

Le premier exprime l'associativité, le second, le fait que $\eta(1)$ soit l'élément unité de l'anneau A.

Une **k**-algèbre est *commutative* si le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

dans lequel $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$ est la permutation des facteurs, commute.

Une **k**-*cogèbre* (A, Δ, ε) est un **k**-espace vectoriel A muni d'un *coproduit*

$$\Delta : A \to A \otimes A$$

(on utilise la notation Δ pour « diagonale ») et d'une *co-unité*

$$\varepsilon : A \longrightarrow \mathbf{k}$$

qui sont des applications **k**-linéaires telles que les deux diagrammes suivants (obtenus à partir des précédents en renversant le sens des flèches) soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes \mathrm{Id}"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes \Delta"'] & A \otimes A \otimes A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, equal] \arrow[d] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, "\Delta"] & A \arrow[d] \\
\mathbf{k} \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\varepsilon\otimes \mathrm{Id}"] \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes \varepsilon"'] & A \otimes \mathbf{k}
\end{tikzcd}$$

Une **k**-cogèbre est *cocommutative* si le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\Delta"'] & = & A \arrow[d, "\Delta"] \\ A \otimes A & & A \otimes A \arrow[ll, "\tau"] \end{tikzcd}$$

commute.

Une **k**-*bigèbre* $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est une **k**-algèbre (A, m, η) munie d'une structure de cogèbre (A, Δ, ε) qui est *compatible* en ce sens que Δ et ε sont des morphismes d'algèbre :

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y), \quad \varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y).$$

Une *algèbre de Hopf* $(H, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ est une bigèbre $(H, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ munie d'une *antipode*

$$S : H \to H$$

qui est une application **k**-linéaire telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[d, "\mathrm{Id} \otimes S"'] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\eta \circ \varepsilon"'] & H \otimes H \arrow[d, "S \otimes \mathrm{Id}"] \\ H \otimes H \arrow[r, "m"'] & H & H \otimes H \arrow[l, "m"] \end{tikzcd}$$

L'antipode est alors un antihomomorphisme pour m et pour Δ :

$$S(xy) = S(y)S(x) \quad \text{et} \quad \Delta \circ S = (S \otimes S)(\tau \circ \Delta) \quad \text{où } \tau(a \otimes b) = b \otimes a.$$

Une algèbre de Hopf est *bicommutative* si elle est à la fois commutative et cocommutative.

Dans une algèbre de Hopf les éléments *primitifs*, c'est-à-dire ceux qui satisfont

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x,$$

vérifient aussi $\varepsilon(x) = 0$ et $S(x) = -x$. Ils forment une algèbre de Lie pour le crochet

$$[x, y] = xy - yx.$$

Les éléments dits *group-like* sont les éléments non nuls $x \in H$ pour lesquels

$$\Delta(x) = x \otimes x.$$

Ils sont inversibles, satisfont $\varepsilon(x) = 1$ et $S(x) = x^{-1}$, et forment un groupe multiplicatif.

2. Premiers exemples. (Pour ce chapitre, les références sont [A], Chapitre 2, §1 et [S]; pour la section 2.6, la référence est [P].)

2.1. L'algèbre $\mathbf{k}G$. Soit G un groupe fini noté multiplicativement. On considère l'algèbre $\mathbf{k}G$ du groupe G sur $\mathbf{k}$, qui est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de base G. L'application

$$m : \mathbf{k}G \otimes \mathbf{k}G \to \mathbf{k}G$$

prolonge le produit

$$(x, y) \mapsto xy$$

de G par linéarité. L'unité

$$\eta : \mathbf{k} \to \mathbf{k}G$$

envoie 1 sur 1_G.

On définit un coproduit et une co-unité

$$\Delta : \mathbf{k}G \to \mathbf{k}G \otimes \mathbf{k}G \ \text{ et } \ \varepsilon : \mathbf{k}G \to \mathbf{k}$$

en prolongeant

$$\Delta(x) = x \otimes x \ \text{ et } \ \varepsilon(x) = 1 \ \text{ pour } \ x \in G$$

par linéarité. L'antipode

$$S : \mathbf{k}G \to \mathbf{k}G$$

est l'application $\mathbf{k}$-linéaire définie par

$$S(x) = x^{-1} \ \text{ pour } \ x \in G.$$

Comme $\Delta(x) = x \otimes x$ pour $x \in G$, cette algèbre de Hopf $\mathbf{k}G$ est cocommutative. Elle est commutative si et seulement si le groupe G est commutatif.

Le groupe des éléments dits group-like est G : la structure d'algèbre de Hopf permet donc de *retrouver* G *à partir de* $\mathbf{k}G$.

2.2. L'algèbre $\mathbf{k}^G$. De nouveau, soit G un groupe multiplicatif fini. On considère la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}^G$ constituée par les applications $G \to \mathbf{k}$. Comme $\mathbf{k}$-espace vectoriel, une base de $\mathbf{k}^G$ est formée des δ_g ($g \in G$), avec le symbole de Kronecker

$$\delta_g(g') = \begin{cases} 1 & \text{pour } g' = g; \\ 0 & \text{pour } g' \neq g. \end{cases}$$

On définit le produit m par

$$m(\delta_g \otimes \delta_{g'}) = \delta_g \delta_{g'}.$$

Ainsi m est commutatif et $m(\delta_g \otimes \delta_g) = \delta_g$ pour $g \in G$. L'unité $\eta : \mathbf{k} \to \mathbf{k}^G$ envoie 1 sur l'élément $\sum_{g \in G} \delta_g$.

On définit un coproduit $\Delta : \mathbf{k}^G \to \mathbf{k}^G \otimes \mathbf{k}^G$ et une co-unité $\varepsilon : \mathbf{k}^G \to \mathbf{k}$ par

$$\Delta(\delta_g) = \sum_{g'g''=g} \delta_{g'} \otimes \delta_{g''} \quad \text{et} \quad \varepsilon(\delta_g) = \delta_g(1_G).$$

Ce coproduit Δ est cocommutatif si et seulement si le groupe G est commutatif. On définit l'antipode S par

$$S(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}.$$

Remarque 2.1. On peut identifier $\mathbf{k}^G \otimes \mathbf{k}^G$ avec $\mathbf{k}^{G \times G}$ en posant

$$\delta_g \otimes \delta_{g'} = \delta_{(g,g')}.$$

2.3. Dualité. Les algèbres de Hopf $\mathbf{k}G$ et $\mathbf{k}^G$ sont *duales* l'une de l'autre : un accouplement non dégénéré est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{k}G \times \mathbf{k}^G &\longrightarrow \mathbf{k} \\ (g_1, \delta_{g_2}) &\longmapsto \delta_{g_2}(g_1). \end{aligned}$$

La base G de $\mathbf{k}G$ est duale de la base $(\delta_g)_{g\in G}$ de $\mathbf{k}^G$.

2.4. L'algèbre $\mathfrak{R}(G)$. Soit G un groupe topologique compact, disons sur $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathfrak{R}(G)$ l'ensemble des applications continues $f : G \to \mathbb{C}$ telles que, t décrivant G, les translatées $f_t : x \mapsto f(tx)$ engendrent un espace vectoriel de dimension finie.

On définit un coproduit Δ, une co-unité ε et une antipode S sur $\mathfrak{R}(G)$ par les conditions

$$\Delta f(x, y) = f(xy), \quad \varepsilon(f) = f(1), \quad Sf(x) = f(x^{-1})$$

pour $x, y \in G$. Alors $\mathfrak{R}(G)$ est une algèbre de Hopf commutative.

2.5. L'algèbre $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie ayant une loi classiquement notée par le crochet $[\cdot, \cdot]$. On désigne par $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante universelle, qui est le quotient $\mathfrak{T}(\mathfrak{g})/\mathfrak{I}$ de l'algèbre tensorielle $\mathfrak{T}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ par l'idéal bilatère $\mathfrak{I}$ engendré par les éléments de la forme $XY - YX - [X, Y]$. On définit un coproduit Δ, une co-unité ε et une antipode S sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ par

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \varepsilon(x) = 0, \quad S(x) = -x$$

pour $x \in \mathfrak{g}$. Ainsi $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf cocommutative. L'ensemble des éléments primitifs de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ n'est rien d'autre que $\mathfrak{g}$: grâce à la structure d'algèbre de Hopf, *on retrouve* $\mathfrak{g}$ *dans* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

2.6. Dual restreint et dual gradué. Le dual d'une cogèbre est une algèbre, mais si (A, m, η) est une algèbre, l'espace vectoriel dual A^* n'est en général pas une cogèbre pour l'opération duale m^* de m, car m^* envoie A^* dans $(A \otimes A)^*$ qui contient strictement $A^* \otimes A^*$ si A n'est pas de dimension finie. On définit le *dual restreint* de (A, m) comme l'ensemble des formes linéaires $\lambda \in A^*$ telles que $m^*(\lambda) \in A^* \otimes A^*$. Alors *si* $(H, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ *est une algèbre de Hopf, son dual restreint est une algèbre de Hopf.*

Si G est un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors les deux algèbres de Hopf $\mathfrak{R}(G)$ et $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ sont duales l'une de l'autre (voir par exemple [Wat] Chapitre I, §2.4 et [S]).

Nous aurons besoin plus loin d'une autre notion de dualité, pour des algèbres de Hopf graduées. Soit

$$A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n,$$

une $\mathbf{k}$-algèbre graduée où chaque A_n, $n \geq 0$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de A avec $A_0 = \mathbf{k}$ et $A_n A_m \subset A_{n+m}$ pour n et m entiers ≥ 0. Alors $A \otimes A$ est graduée par

$$(A \otimes A)_n = \sum_{i+j=n} A_i \otimes A_j.$$

Une algèbre de Hopf $(H, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ est *graduée* si chacune des trois applications m, Δ et S transforme un élément homogène en un élément homogène de même degré.

Le *dual gradué* $A^\vee$ de A est la somme directe

$$A^\vee = \bigoplus_{n \geq 0} A_n^*.$$

Si $(H, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ *est une algèbre de Hopf graduée, son dual gradué est une algèbre de Hopf.*

D'après le théorème de Milnor-Moore ([P] §3.3) *une algèbre de Hopf commutative graduée est libre,* et *une algèbre de Hopf cocommutative graduée est isomorphe à l'algèbre enveloppante de ses éléments primitifs.*

3. Algèbres de Hopf bicommutatives de type fini. (Nous suivons ici principalement [A] Chapitre 4, §2.)

3.1. L'algèbre $\mathbf{k}[X]$. On munit l'algèbre des polynômes en une variable $H = \mathbf{k}[X]$ d'une structure d'algèbre de Hopf en prenant pour coproduit Δ, pour co-unité ε et pour antipode S les morphismes d'algèbres déterminés par

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \varepsilon(X) = 0 \quad \text{et} \quad S(X) = -X.$$

On peut identifier $\mathbf{k}[X] \otimes \mathbf{k}[X]$ avec $\mathbf{k}[T_1, T_2]$, en envoyant $X \otimes 1$ sur T_1 et $1 \otimes X$ sur T_2; alors

$$\Delta P(X) = P(T_1 + T_2), \quad \varepsilon P(X) = P(0), \quad SP(X) = P(-X).$$

Comme le groupe additif $\mathbf{G}_a$ est caractérisé par $\mathbf{G}_a(\mathbf{K}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[X], \mathbf{K})$ pour $\mathbf{K}$ surcorps de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}[\mathbf{G}_a] = \mathbf{k}[X]$, on conclut que $\mathbf{k}[\mathbf{G}_a]$ *est une algèbre de Hopf bicommutative de type fini.*

3.2. L'algèbre $\mathbf{k}[Y, Y^{-1}]$. L'algèbre de polynômes de Laurent $H = \mathbf{k}[Y, Y^{-1}]$ peut être munie d'une structure d'algèbre de Hopf en définissant un coproduit Δ par $\Delta(Y) = Y \otimes Y$, une co-unité ε par $\varepsilon(Y) = 1$ et une antipode S par $S(Y) = Y^{-1}$.

L'isomorphisme d'algèbres entre $H \otimes H$ et $\mathbf{k}[T_1, T_1^{-1}, T_2, T_2^{-1}]$ déterminé par

$$Y \otimes 1 \mapsto T_1, \quad 1 \otimes Y \mapsto T_2$$

permet d'expliciter

$$\Delta P(Y) = P(T_1 T_2), \quad \varepsilon P(Y) = P(1), \quad SP(Y) = P(Y^{-1}).$$

Le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ est caractérisé par $\mathbf{G}_m(\mathbf{K}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[Y, Y^{-1}], \mathbf{K})$. Donc on a $\mathbf{k}[\mathbf{G}_m] = \mathbf{k}[Y, Y^{-1}]$ et $\mathbf{k}[\mathbf{G}_m]$ est encore une *algèbre de Hopf bicommutative de type fini.*

3.3. L'algèbre $H = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_{d_0}, Y_1, Y_1^{-1}, \ldots, Y_{d_1}, Y_{d_1}^{-1}]$. Soient $d_0 \geq 0$ et $d_1 \geq 0$ deux entiers avec $d = d_0 + d_1 > 0$. L'algèbre de Hopf

$$\mathbf{k}[X]^{\otimes d_0} \otimes \mathbf{k}[Y, Y^{-1}]^{\otimes d_1}$$

est isomorphe à

$$H = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_{d_0}, Y_1, Y_1^{-1}, \ldots, Y_{d_1}, Y_{d_1}^{-1}],$$

donc à $\mathbf{k}[G]$ avec $G = \mathbf{G}_a^{d_0} \times \mathbf{G}_m^{d_1}$.

Selon [A] Chapitre 4 (p. 163), la catégorie des $\mathbf{k}$-groupes algébriques linéaires est anti-équivalente à la catégorie des $\mathbf{k}$-algèbres de Hopf de type fini et cocommutatives[1]. Par conséquent, *la catégorie des groupes algébriques linéaires commutatifs sur* $\mathbf{k}$ *est anti-équivalente à la catégorie des algèbres de Hopf bicommutatives de type fini sur* $\mathbf{k}$.

Un groupe algébrique linéaire commutatif et connexe sur $\mathbf{k}$ est de la forme $G = \mathbf{G}_a^{d_0} \times \mathbf{G}_m^{d_1}$. L'hypothèse que G est connexe signifie que l'algèbre de Hopf $H = \mathbf{k}[G]$ est intègre. Dans ces conditions, l'espace vectoriel des éléments primitifs de H a pour dimension d_0, tandis que le rang des éléments dits group-like est d_1.

3.4. L'algèbre $\mathrm{Sym}(W) \otimes \mathbf{k}\Gamma$**.** D'une part, si W est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension ℓ_0, alors $\mathrm{Sym}(W)$ est une algèbre de Hopf bicommutative de type fini. Si $\partial_1, \ldots, \partial_{\ell_0}$ est une base de W sur $\mathbf{k}$, alors $\mathrm{Sym}(W)$ est isomorphe à $\mathbf{k}[\partial_1, \ldots, \partial_{\ell_0}]$, donc à $\mathbf{k}[\mathbf{G}_a^{\ell_0}]$. D'autre part, si Γ est un $\mathbf{Z}$-module de type fini sans torsion (libre) de rang ℓ_1, alors l'algèbre de groupe $\mathbf{k}\Gamma$ est une algèbre de Hopf bicommutative intègre de type fini isomorphe à $\mathbf{k}[\mathbf{G}_m^{\ell_1}]$.

Ainsi *la catégorie des algèbres de Hopf bicommutatives intègres et de type fini est équivalente à la catégorie des couples* (W, Γ) *où* W *est un* $\mathbf{k}$*-espace vectoriel de dimension finie et* Γ *un* $\mathbf{Z}$*-module libre de type fini :*

$$H \simeq \mathrm{Sym}(W) \otimes \mathbf{k}\Gamma.$$

La dimension de l'espace des éléments primitifs est ℓ_0, et le rang des éléments dits group-like est ℓ_1.

4. Les deux catégories $\mathfrak{C}_1$ **et** $\mathfrak{C}_2$ **de Fischler.** On prend désormais $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{Q}}$.

4.1. La catégorie $\mathfrak{C}_1$**.** On considère la catégorie $\mathfrak{C}_1$ dont

- *les objets* sont les triplets (G, W, Γ) avec $G = \mathbf{G}_a^{d_0} \times \mathbf{G}_m^{d_1}$ groupe algébrique linéaire connexe commutatif sur $\overline{\mathbf{Q}}$, $W \subset T_e(G)$ sous-espace vectoriel rationnel sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et $\Gamma \subset G(\overline{\mathbf{Q}})$ sous-groupe de type fini sans torsion; de plus, G est minimal au sens suivant : aucun sous-groupe algébrique G^* de G distinct de G ne vérifie $W \subset T_e(G^*)$ et $\Gamma \subset G^*(\overline{\mathbf{Q}})$;
- *les morphismes* $f : (G_1, W_1, \Gamma_1) \to (G_2, W_2, \Gamma_2)$ sont donnés par un morphisme de groupes algébriques $f : G_1 \to G_2$ tel que $f(\Gamma_1) \subset \Gamma_2$ et que l'application linéaire tangente à f

$$df : T_e(G_1) \longrightarrow T_e(G_2)$$

  satisfasse $df(W_1) \subset W_2$.

On désigne par ℓ_0 la dimension de W et par ℓ_1 le rang de Γ.

[1] En caractéristique nulle, d'après [A], Corollaire 2.5.4, une algèbre de Hopf cocommutative est réduite.

4.2. La catégorie $\mathfrak{C}_2$. Soit H une algèbre de Hopf bicommutative intègre et de type fini sur $\overline{\mathbf{Q}}$. On désigne par d_0 la dimension du $\overline{\mathbf{Q}}$-espace vectoriel formé par les éléments primitifs et par d_1 le rang du groupe formé par les éléments dits group-like.

Soit H' encore une algèbre de Hopf bicommutative intègre et de type fini sur $\overline{\mathbf{Q}}$. On désigne maintenant par ℓ_0 la dimension du $\overline{\mathbf{Q}}$-espace vectoriel des éléments primitifs de H' et par ℓ_1 le rang des éléments dits group-like.

On considère un produit bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H' \longrightarrow \overline{\mathbf{Q}}$ tel que

$$\langle x, yy'\rangle = \langle \Delta x, y \otimes y'\rangle \quad \text{et} \quad \langle xx', y\rangle = \langle x \otimes x', \Delta y\rangle.$$

On utilise la notation

$$\langle \alpha \otimes \beta, \gamma \otimes \delta\rangle = \langle \alpha, \gamma\rangle\langle \beta, \delta\rangle.$$

La catégorie $\mathfrak{C}_2$ a pour

- *objets :* les triplets $(H, H', \langle\cdot,\cdot\rangle)$ formés de deux algèbres de Hopf bicommutatives intègres de type fini et d'un produit bilinéaire comme celui que nous venons de considérer;
- *morphismes :* les couples

$$(f, g) : (H_1, H_1', \langle\cdot,\cdot\rangle_1) \longrightarrow (H_2, H_2', \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$$

  où $f : H_1 \longrightarrow H_2$ et $g : H_2' \longrightarrow H_1'$ sont des morphismes d'algèbres de Hopf tels que

$$\langle x_1, g(x_2')\rangle_1 = \langle f(x_1), x_2'\rangle_2.$$

  On compose deux morphismes

$$(f_1, g_1) : (H_1, H_1', \langle\cdot,\cdot\rangle_1) \longrightarrow (H_2, H_2', \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$$

  et

$$(f_2, g_2) : (H_2, H_2', \langle\cdot,\cdot\rangle_2) \longrightarrow (H_3, H_3', \langle\cdot,\cdot\rangle_3)$$

  par

$$(f_2 \circ f_1, g_1 \circ g_2) : (H_1, H_1', \langle\cdot,\cdot\rangle_1) \longrightarrow (H_3, H_3', \langle\cdot,\cdot\rangle_3).$$

4.3. Équivalence des deux catégories. Les deux catégories précédentes ont été introduites par S. Fischler [F1] qui démontre :

Théorème 4.1 (S. FISCHLER)**.** *Les deux catégories $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ sont équivalentes. Cette équivalence est contravariante et respecte les paramètres d_0, d_1, ℓ_0, ℓ_1.*

La motivation principale de [F1] est d'établir de nouveaux *lemmes d'interpolation*. Le théorème 4.1 permet de les obtenir par dualité à partir des *lemmes de zéros* qui sont connus.

Un lemme de zéros (voir par exemple [Wa1] §2.1) donne une minoration du degré d'un polynôme non nul ayant de nombreux zéros (en des points donnés, avec éventuellement des multiplicités données). Quand on considère le système d'équations linéaires correspondant, les inconnues étant les coefficients du polynôme, le lemme de zéros

donne une minoration pour le rang d'une matrice : plus précisément, si la matrice est rectangulaire suffisamment allongée, alors elle est de rang maximal. Dans ces conditions, le lemme d'interpolation fournit une minoration pour une matrice qui est essentiellement la transposée de la précédente (et de nouveau, si la matrice est rectangulaire suffisamment allongée, alors elle est de rang maximal). Il s'interprète en disant que si D est un entier suffisamment grand, il existe un polynôme de degré $\leq D$ qui prend des valeurs données en des points donnés (éventuellement avec des multiplicités).

Obtenir par cette dualité des lemmes d'interpolation à partir de lemmes de zéros n'est possible que pour les groupes algébriques commutatifs *linéaires*. Les lemmes de zéros sont connus plus généralement pour les groupes algébriques commutatifs (donc pour les variétés abéliennes et semi-abéliennes), mais la dualité ne s'étend pas à ce cadre plus général, et il faut d'autres arguments à S. Fischler [F2] pour obtenir des lemmes d'interpolation valables pour les groupes algébriques commutatifs non linéaires.

4.4. Dualité de Fourier-Borel. La catégorie $\mathfrak{C}_2$ est naturellement munie d'une involution contravariante, qui consiste à permuter H et H'. L'involution correspondante de la catégorie équivalente $\mathfrak{C}_1$ est la *dualité de Fourier-Borel*. Elle échange (d_0, d_1) et (ℓ_0, ℓ_1).

Dans le cas le plus simple, la dualité de Fourier-Borel s'écrit, pour s, t entiers ≥ 0 et x, y nombres complexes,

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^s \left(z^t e^{xz}\right)_{z=y} = \left(\frac{d}{dz}\right)^t \left(z^s e^{yz}\right)_{z=x}.$$

Fixons s entier ≥ 0, $y \in \mathbb{C}$ et considérons la fonctionnelle analytique

$$\mathsf{L}_{sy} : f \longmapsto \left(\frac{d}{dz}\right)^s f(y);$$

sa transformée de Fourier-Borel est une fonction entière de la variable complexe ζ : c'est l'image de $f_\zeta(z) = e^{z\zeta}$, à savoir

$$\mathsf{L}_{sy}(f_\zeta) = \zeta^s e^{y\zeta}.$$

La formule de dualité pour t entier ≥ 0 résulte de

$$\mathsf{L}_{sy}(z^t f_\zeta) = \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^t \mathsf{L}_{sy}(f_\zeta).$$

La dualité de Fourier-Borel s'étend aux fonctions de plusieurs variables[2]. Pour $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$, posons

$$D_{\underline{v}} = v_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

Soient $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{\ell_0}$, $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_{d_0}$, $\underline{x}$ et $\underline{y}$ dans $\mathbb{C}^n$, $\underline{t} \in \mathbf{N}^{d_0}$ et $\underline{s} \in \mathbf{N}^{\ell_0}$. Pour $\underline{z} \in \mathbb{C}^n$, posons

$$(\mathbf{u}\underline{z})^{\underline{t}} = (\underline{u}_1\underline{z})^{t_1} \cdots (\underline{u}_{d_0}\underline{z})^{t_{d_0}} \quad \text{et} \quad D_{\mathbf{w}}^{\underline{s}} = D_{\underline{w}_1}^{s_1} \cdots D_{\underline{w}_{\ell_0}}^{s_{\ell_0}}.$$

Alors

$$D_{\mathbf{w}}^{\underline{s}}\big((\mathbf{u}\underline{z})^{\underline{t}} e^{\underline{x}\underline{z}}\big)\big|_{\underline{z}=\underline{y}} = D_{\mathbf{u}}^{\underline{t}}\big((\mathbf{w}\underline{z})^{\underline{s}} e^{\underline{y}\underline{z}}\big)\big|_{\underline{z}=\underline{x}}.$$

[2]Dans le corollaire 13.21 de [Wa1] p. 488, il faut lire $\underline{z} \in \mathbb{C}^n$ au lieu de $\underline{z} \in \mathbb{C}^d$.

5. Algèbres de Hopf non bicommutatives. (La référence pour la section 5.4 est [R] Chapitre 1, tandis que pour la section 5.5, c'est [H].)

5.1. L'algèbre $\mathfrak{Z}$ des valeurs multizêta numériques. On désignera par $\mathfrak{S}$ l'ensemble des suites $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbf{N}^k$ avec $k \geq 0$, $s_1 \geq 2$, $s_i \geq 1$ $(2 \leq i \leq k)$. Le *poids* $|\underline{s}|$ de $\underline{s}$ est $s_1 + \cdots + s_k$, tandis que k est la *profondeur de* $\underline{s}$. Pour $\underline{s} \in \mathfrak{S}$ posons

$$\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1 > \cdots > n_k \geq 1} n_1^{-s_1} \cdots n_k^{-s_k}.$$

Par convention, la suite vide ($k = 0$) a pour poids 0, pour profondeur 0 et la valeur de zêta est 1. Ces nombres $\zeta(\underline{s})$ sont appelés polyzêtas, nombres d'Euler-Zagier ou encore *Multiple Zeta Values* (MZV) selon les auteurs (voir [C]).

Quand on se restreint à la profondeur $k = 1$, on obtient les valeurs $\zeta(2), \zeta(3), \ldots$ de la fonction zêta de Riemann aux entiers positifs, qui avaient déjà été introduites et étudiées par Euler. Celui-ci avait aussi considéré des MZV de profondeur 2, à savoir $\zeta(s_1, s_2)$.

On désigne par $\mathfrak{Z}$ le $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les nombres

$$(2i\pi)^{-|s|}\zeta(\underline{s}) \quad (\underline{s} \in \mathfrak{S}).$$

Nous allons voir que, pour $\underline{s}$ et $\underline{s}'$ dans $\mathfrak{S}$, le produit $\zeta(\underline{s})\zeta(\underline{s}')$ est *de deux manières différentes* une combinaison linéaire de nombres $\zeta(\underline{s}'')$. Dans l'immédiat il nous en suffit d'une.

Le produit de séries fournit une des deux familles de relations quadratiques : ce sont les *relations de mélange provenant des séries*. Par exemple, la relation

$$\sum_{n \geq 1} n^{-s} \sum_{m \geq 1} m^{-s'} = \sum_{n > m \geq 1} n^{-s} m^{-s'} + \sum_{m > n \geq 1} m^{-s'} n^{-s} + \sum_{n \geq 1} n^{-s-s'}$$

s'écrit

$$\zeta(s)\zeta(s') = \zeta(s, s') + \zeta(s', s) + \zeta(s + s'). \tag{5.1}$$

Le même argument permet clairement d'écrire $\zeta(\underline{s})\zeta(\underline{s}')$ comme une somme de $\zeta(\underline{s}'')$; la structure d'algèbre harmonique de Hoffman (voir plus loin) nous permettra d'écrire ces relations de façon plus conceptuelle. En tout cas, il en résulte que $\mathfrak{Z}$ est une sous-$\mathbf{Q}$-algèbre de $\mathbb{C}$ doublement filtrée par le poids et la profondeur.

Quand $C_\bullet$ est une algèbre de Lie graduée, on désigne par $\mathfrak{U}C_\bullet$ son algèbre enveloppante universelle et par

$$\mathfrak{U}C_\bullet^\vee = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathfrak{U}C)_n^*$$

son dual gradué, qui est une algèbre de Hopf commutative.

Conjecture 5.2 (GONCHAROV [G]). *Il existe une algèbre de Lie graduée $C_\bullet$ et un isomorphisme d'algèbres filtrées par le poids à gauche et par la profondeur à droite*

$$\mathfrak{Z} \simeq \mathfrak{U}C_\bullet^\vee.$$

Dans cette théorie les algèbres de Hopf apparaissent donc de façon conjecturale. Mais, comme nous allons le voir, elles y sont aussi de manière non conjecturale quand on formalise les relations quadratiques reliant les MZV.

5.2. Codage des valeurs multizêta. Soit $X = \{x_0, x_1\}$ un alphabet constitué de deux lettres. On considère le monoïde libre (avec le produit de concaténation)

$$X^* = \{x_{\varepsilon_1} \cdots x_{\varepsilon_k} \ ; \ \varepsilon_i \in \{0,1\}, \ (1 \le i \le k), \ \ k \ge 0\}$$

sur X; il est formé des monômes non commutatifs sur les lettres x_0, x_1, qui sont aussi les mots sur l'alphabet X. Le mot vide (élément neutre de ce monoïde X^*) sera désigné par e.

Pour s entier ≥ 1, on pose $y_s = x_0^{s-1}x_1$, et pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathfrak{S}$, on pose

$$y_{\underline{s}} = x_0^{s_1-1}x_1 \cdots x_0^{s_k-1}x_1 = y_{s_1} \cdots y_{s_k}.$$

On établit ainsi une correspondance bijective entre l'ensemble $\mathfrak{S}$ et l'ensemble $\{e\} \cup x_0X^*x_1$ formé du mot vide et des mots qui commencent par x_0 et se terminent par x_1. La profondeur k et le poids $|\underline{s}|$ de $\underline{s}$ s'avèrent être respectivement le nombre de lettres x_1 et le nombre total de lettres dans $y_{\underline{s}}$.

5.3. Représentation intégrale des valeurs multizêta. Soit $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathfrak{S}$. On pose $p = |\underline{s}|$ et on définit un élément $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ de $\{0,1\}^p$ par

$$y_{\underline{s}} = x_{\varepsilon_1} \cdots x_{\varepsilon_p}.$$

Noter que $\varepsilon_1 = 0$ et que $\varepsilon_p = 1$.

On pose encore

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}\cdot$$

On vérifie alors ([K], §XIX.11), pour $\underline{s} \in \mathfrak{S}$,

$$\zeta(\underline{s}) = \int_{1>t_1>\cdots>t_p>0} \omega_{\varepsilon_1}(t_1) \cdots \omega_{\varepsilon_p}(t_p). \tag{5.2}$$

Exemples. Comme $y_2 = x_0x_1$ et $y_3 = x_0^2x_1$, on obtient les représentations intégrales de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ suivantes :

$$\zeta(2) = \int_0^1 \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{1-t_2} \quad \text{et} \quad \zeta(3) = \int_0^1 \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3}\cdot$$

De même avec $y_{(2,1)} = y_2y_1 = x_0x_1^2$, on trouve

$$\zeta(2,1) = \int_0^1 \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3}\cdot$$

Remarquons à ce propos que le changement de variables

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto (1-t_3, 1-t_2, 1-t_1)$$

donne

$$\zeta(2,1) = \zeta(3).$$

Le produit de deux intégrales comme (5.2) est une combinaison linéaire d'intégrales du même type. En effet, le produit cartésien de deux simplexes est réunion disjointe (aux bords près, qui n'interviennent pas dans les intégrales) de simplexes, ce qui montre que le produit des deux intégrales

$$\int_{1>t_1>\cdots>t_p>0} \omega_{\varepsilon_1}(t_1)\cdots\omega_{\varepsilon_p}(t_p)\cdot\int_{1>t_{p+1}>\cdots>t_{p+p'}>0} \omega_{\varepsilon_{p+1}}(t_{p+1})\cdots\omega_{\varepsilon_{p+p'}}(t_{p+p'})$$

est l'intégrale sur

$$1>u_1>\cdots>u_{p+p'}>0$$

du *mélange* de $\omega_{\varepsilon_1}\cdots\omega_{\varepsilon_p}$ avec $\omega_{\varepsilon_{p+1}}\cdots\omega_{\varepsilon_{p+p'}}$:

$$\int_{\substack{1>t_1>\cdots>t_p>0\\ 1>t_{p+1}>\cdots>t_{p+p'}>0}} \omega_{\varepsilon_1}(t_1)\cdots\omega_{\varepsilon_p}(t_p)\omega_{\varepsilon_{p+1}}(t_{p+1})\cdots\omega_{\varepsilon_{p+p'}}(t_{p+p'})$$
$$=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p,p'}}\int_{1>u_1>\cdots>u_{p+p'}>0}\omega_{\varepsilon_{\sigma(1)}}(u_1)\cdots\omega_{\varepsilon_{\sigma(p+p')}}(u_{p+p'}),$$

où $\mathfrak{S}_{p,p'}$ est le sous-ensemble du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{p+p'}$ formé des σ qui vérifient

$$\sigma^{-1}(i)<\sigma^{-1}(j)\quad\text{pour}\quad 1\le i<j\le p\quad\text{et pour}\quad p+1\le i<j\le p+p'.$$

On écrit cette dernière somme sous la forme

$$\int_{1>u_1>\cdots>u_{p+p'}>0}(\omega_{\varepsilon_1}\cdots\omega_{\varepsilon_p})ш(\omega_{\varepsilon_{p+1}}\cdots\omega_{\varepsilon_{p+p'}}).$$

Par exemple, de la relation formelle

$$(\omega_0\omega_1)ш(\omega_0\omega_1)=2\omega_0\omega_1\omega_0\omega_1+4\omega_0^2\omega_1^2,$$

on déduit

$$\zeta(2)^2=2\zeta(2,2)+4\zeta(3,1).$$

Pour $y_{\underline{s}}\in x_0X^*x_1$, on pose $\hat{\zeta}(y_{\underline{s}})=\zeta(\underline{s})$. Cela définit une application $\hat{\zeta}:\{e\}\cup x_0X^*x_1\to\mathbf{R}$ avec $\hat{\zeta}(e)=1$.

Soit $\mathfrak{H}$ l'algèbre libre $\overline{\mathbf{Q}}\langle X\rangle$ sur X (algèbre de polynômes en deux variables non commutatives x_0 et x_1; c'est aussi le $\overline{\mathbf{Q}}$-espace vectoriel de base X^*, muni du produit de concaténation). C'est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre $\mathrm{Lie}(X)$ sur X. Elle est graduée par le poids.

Un élément $P\in\mathfrak{H}$ s'écrit comme une combinaison linéaire finie

$$P=\sum_{w\in X^*}\langle P|w\rangle w$$

avec des coefficients $\langle P|w\rangle\in\overline{\mathbf{Q}}$.

On note $\mathfrak{H}^0=\overline{\mathbf{Q}}e+x_0\mathfrak{H}x_1$ la sous-algèbre de $\mathfrak{H}$ engendrée, comme $\overline{\mathbf{Q}}$-espace vectoriel, par $\{e\}\cup x_0X^*x_1$. On étend $\hat{\zeta}$ en une application $\overline{\mathbf{Q}}$-linéaire $\mathfrak{H}^0\to\mathbb{C}$.

Le produit de mélange $ш : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ est défini de manière inductive par les conditions

$$u ш e = e ш u = u \quad \text{et} \quad xu ш yv = x(u ш yv) + y(xu ш v)$$

pour x et y dans X, u et v dans X^*. Il munit à la fois $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}^0$ de structures d'algèbres commutatives $\mathfrak{H}_ш$ et $\mathfrak{H}^0_ш$.

Pour u et v dans $x_0X^*x_1$, les relations quadratiques provenant du produit d'intégrales s'écrivent simplement

$$\hat{\zeta}(u ш v) = \hat{\zeta}(u)\hat{\zeta}(v).$$

Ainsi $\hat{\zeta} : \mathfrak{H}^0_ш \to \mathbb{C}$ *est un morphisme d'algèbres commutatives.*

5.4. Algèbres de Hopf non bicommutatives. Une structure d'algèbre de Hopf sur $\mathfrak{H}$ est donnée par le coproduit

$$\Delta P = P(x_0 \otimes 1 + 1 \otimes x_0, x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1),$$

la co-unité $\varepsilon(P) = \langle P \mid e\rangle$ et l'antipode (*miroir*)

$$S(x_1 \cdots x_n) = (-1)^n x_n \cdots x_1$$

pour $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ dans X. On obtient ainsi *l'algèbre de Hopf de concaténation (ou de décomposition)*

$$(\mathfrak{H}, \cdot, e, \Delta, \varepsilon, S)$$

qui est cocommutative, mais pas commutative. On vérifie, pour $P \in \mathfrak{H}$,

$$\Delta P = \sum_{u,v \in X^*} (P|u ш v) u \otimes v \tag{5.3}$$

(voir par exemple [R], Théorème 3.1).

L'algèbre $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ munie du produit

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (ac) \otimes (bd)$$

est l'algèbre du monoïde produit $X^* \times X^*$. La diagonale $\delta : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ est l'unique morphisme d'algèbres tel que $\delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour tout $x \in X$.

Critère de Friedrichs. *L'ensemble des éléments primitifs de $\mathfrak{H}$ est l'algèbre de Lie libre* $\mathrm{Lie}(X)$ *sur* X.

Donc pour $P \in \mathfrak{H}$, on a

$$P \in \mathrm{Lie}(X) \Longleftrightarrow (P|u ш e) = 0 \quad \text{et} \quad (P|u ш v) = 0 \quad \text{pour tout } u, v \text{ dans } X^* \setminus \{e\}.$$

De (5.3) on déduit que *le dual du produit de concaténation* est le coproduit $\Phi : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ défini par

$$\langle \Phi(w) \mid u \otimes v\rangle = \langle uv \mid w\rangle.$$

Ainsi

$$\Phi(w) = \sum_{\substack{u,v \in X^* \\ uv = w}} u \otimes v.$$

L'algèbre de Hopf de mélange (ou de factorisation) est

$$(\mathfrak{H}, ш, e, \Phi, \varepsilon, S).$$

Elle est commutative, mais pas cocommutative.

L'algèbre $\mathfrak{H}$ est graduée par la longueur des mots. Pour $i \geq 0$, notons $\overline{\mathbf{Q}}\langle X\rangle^i$ l'espace des polynômes homogènes de poids i :

$$\overline{\mathbf{Q}}\langle X\rangle = \bigoplus_{i\geq 0} \overline{\mathbf{Q}}\langle X\rangle^i.$$

Le dual de $\overline{\mathbf{Q}}\langle X\rangle^i$ est isomorphe à $\overline{\mathbf{Q}}\langle X\rangle^i$ lui-même; donc $\overline{\mathbf{Q}}\langle X\rangle$ est isomorphe à son propre dual gradué. Ainsi l'algèbre de Hopf de mélange $(\mathfrak{H}, ш, e, \Phi, \varepsilon, S)$ est le dual gradué de l'algèbre de concaténation $(\mathfrak{H}, \cdot, e, \Delta, \varepsilon, S)$.

5.5. Algèbre Harmonique de M. Hoffman. La sous-algèbre $\mathfrak{H}^0 = \overline{\mathbf{Q}}e + x_0\mathfrak{H}x_1$ de $\mathfrak{H}$ est aussi l'algèbre libre $\overline{\mathbf{Q}}\langle Y\rangle$ sur l'alphabet infini

$$Y = \{y_2, y_3, \dots\}.$$

Posons encore $y_1 = x_1$. La sous-algèbre $\mathfrak{H}^1 = \overline{\mathbf{Q}}e + \mathfrak{H}x_1$ de $\mathfrak{H}$ est encore l'algèbre libre sur $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$.

Le produit de *quasi-mélange* (encore appelé *stuffle*)

$$\star : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$$

est défini de façon inductive par

$$x_0^n \star w = w \star x_0^n = wx_0^n$$

pour tout $w \in X^*$ et tout $n \geq 0$, et il est défini par

$$y_s u \star y_t v = y_s(u \star y_t v) + y_t(y_s u \star v) + y_{s+t}(u \star v)$$

pour u et v dans X^*, s et t entiers ≥ 1. Il munit $\mathfrak{H}$ d'une structure d'algèbre commutative $\mathfrak{H}_\star$, avec des sous-algèbres $\mathfrak{H}_\star^0 \subset \mathfrak{H}_\star^1 \subset \mathfrak{H}_\star$, et les relations quadratiques provenant des développements en séries – dont l'exemple le plus simple est (5.1) – montrent que $\hat{\zeta} : \mathfrak{H}_\star^0 \to \mathbb{C}$ *est un morphisme d'algèbres commutatives.*

On munit $\overline{\mathbf{Q}}\langle Y\rangle$ d'une structure d'algèbre de Hopf commutative *(algèbre de Hopf de quasi-mélange)* en définissant le coproduit comme le morphisme d'algèbres satisfaisant

$$\Delta(y_i) = y_i \otimes e + e \otimes y_i$$

pour tout $i \geq 2$, la co-unité ε par

$$\varepsilon(P) = \langle P \mid e\rangle$$

et l'antipode S par

$$S(y_{s_1} \cdots y_{s_k}) = (-1)^k y_{s_k} \cdots y_{s_1}.$$

Le produit harmonique $\star$ est étroitement lié à la théorie des séries *quasi-symétriques* de la manière suivante (travaux de Stanley, 1974 notamment, voir [R], ainsi que [C] et [H]).

On désigne par $\underline{t} = (t_1, t_2, \dots)$ une suite de variables commutatives. À une suite finie $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$, où chaque s_j est un entier ≥ 1, on associe la série

$$M_{\underline{s}}(\underline{t}) = \sum_{\substack{n_1 \geq 1, \dots, n_k \geq 1 \\ n_i \neq n_j \, (i \neq j)}} t_{n_1}^{s_1} \cdots t_{n_k}^{s_k}.$$

L'espace des séries entières à coefficients algébriques engendré par ces $M_{\underline{s}}$ est désigné par Sym et ses éléments sont appelés *séries symétriques*. Une base de Sym est donnée par les séries $M_{\underline{s}}$ avec $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k$ et $k \geq 0$.

Une *série quasi-symétrique* est un élément de l'algèbre QSym engendrée par les séries

$$QM_{\underline{s}}(\underline{t}) = \sum_{n_1 > \cdots > n_k \geq 1} t_{n_1}^{s_1} \cdots t_{n_k}^{s_k},$$

où chaque $\underline{s}$ décrit l'ensemble des suites finies $(s_1, \dots, s_k)$ avec $k \geq 0$ et $s_j \geq 1$ pour $1 \leq j \leq k$. Notons que, pour $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ de longueur k,

$$M_{\underline{s}} = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} QM_{\underline{s}^\tau},$$

où $\mathfrak{S}_k$ est le groupe symétrique sur k éléments et $\underline{s}^\tau = (s_{\tau(1)}, \dots, s_{\tau(k)})$. Par conséquent, toute série symétrique est aussi quasi-symétrique, et Sym est une sous-algèbre de QSym. Dans ces conditions l'application $\overline{\mathbf{Q}}$-linéaire $\phi : \mathfrak{H}^1 \to \mathrm{QSym}$ définie par $y_{\underline{s}} \mapsto QM_{\underline{s}}$ est un isomorphisme de $\overline{\mathbf{Q}}$-algèbres de $\mathfrak{H}^1$ sur QSym.

Autrement dit, si on écrit

$$y_{\underline{s}} \star y_{\underline{s}'} = \sum_{\underline{s}''} y_{\underline{s}''}, \tag{5.4}$$

alors

$$QM_{\underline{s}}(\underline{t}) \, QM_{\underline{s}'}(\underline{t}) = \sum_{\underline{s}''} QM_{\underline{s}''}(\underline{t}),$$

ce qui signifie

$$\sum_{n_1 > \cdots > n_k \geq 1} t_{n_1}^{s_1} \cdots t_{n_k}^{s_k} \sum_{n'_1 > \cdots > n'_k \geq 1} t_{n'_1}^{s'_1} \cdots t_{n'_k}^{s'_k} = \sum_{\underline{s}''} \sum_{n''_1 > \cdots > n''_k \geq 1} t_{n''_1}^{s''_1} \cdots t_{n''_k}^{s''_k}.$$

La loi $\star$ donne ainsi une façon explicite d'écrire le produit de deux séries quasi-symétriques comme une somme de séries quasi-symétriques. De la définition de $\star$ on déduit que dans la formule (5.4), $\underline{s}''$ décrit l'ensemble des $(s''_1, \dots, s''_{k''})$ que l'on obtient à partir de $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ et $\underline{s}' = (s'_1, \dots, s'_{k'})$ en insérant, de toutes les manières possibles, des 0 dans la suite $(s_1, \dots, s_k)$ ainsi que dans la suite $(s'_1, \dots, s'_{k'})$ (y compris au début et à la fin), de telle sorte que les deux nouvelles suites ainsi obtenues aient la

même longueur k'', avec bien entendu $\max\{k, k'\} \leq k'' \leq k + k'$, et en additionnant les deux suites terme à terme. Par exemple,

$$\begin{array}{cccccccc} \underline{s} & s_1 & s_2 & 0 & s_3 & s_4 & \cdots & 0 \\ \underline{s}' & 0 & s'_1 & s'_2 & 0 & s'_3 & \cdots & s'_{k'} \\ \underline{s}'' & s_1 & s_2 + s'_1 & s'_2 & s_3 & s_4 + s'_3 & \cdots & s'_{k'}. \end{array}$$

Soit QSym^0 le sous-espace de QSym engendré par les $QM_{\underline{s}}(\underline{t})$ pour lesquels $s_1 \geq 2$. La restriction de ϕ à $\mathfrak{H}^0$ donne un isomorphisme de $\overline{\mathbf{Q}}$-algèbres de $\mathfrak{H}^0$ sur QSym^0. En spécialisant les éléments de QSym^0 par $t_n \to 1/n$ pour $n \geq 1$, on obtient une application qui envoie $QM_{\underline{s}}$ sur $\zeta(\underline{s})$. D'où les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{H} \arrow[d, phantom, "\bigcup"] & \\ \mathfrak{H}^1 \arrow[r, "\phi", "\sim"'] \arrow[d, phantom, "\bigcup"] & \mathrm{QSym} \arrow[d, phantom, "\bigcup"] \\ \mathfrak{H}^0 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\hat{\zeta}"'] & \mathrm{QSym}^0 \arrow[dl] \\ \mathbf{R} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y_{\underline{s}} \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & QM_{\underline{s}}(\underline{t}) \arrow[dl] \\ \zeta(\underline{s}) & \end{tikzcd}$$

En combinant les deux types de relations quadratiques on obtient des relations linéaires entre les MZV :

$$\hat{\zeta}(w ш w' - w \star w') = 0 \text{ pour } w \text{ et } w' \text{ dans } x_0 X^* x_1. \tag{5.5}$$

Ces *formules standard* (5.5) ne suffisent pas pour décrire toutes les relations linéaires entre MZV. Par exemple, la relation $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ n'en résulte pas. Cependant, de

$$y_1 ш y_2 = x_1 ш x_0 x_1 = x_1 x_0 x_1 + 2x_0 x_1^2 = y_1 y_2 + 2y_2 y_1$$

et

$$y_1 \star y_2 = y_1 y_2 + y_2 y_1 + y_3,$$

on déduit

$$y_1 ш y_2 - y_1 \star y_2 = y_2 y_1 - y_3.$$

Comme on l'a vu, on a $\zeta(2,1) = \zeta(3)$; donc $y_1 ш y_2 - y_1 \star y_2$ appartient au noyau de $\hat{\zeta}$. Mais cela ne résulte pas de (5.5) car $y_1 \notin x_0 X^* x_1$. Les *relations de Hoffman* complètent (5.5):

$$\hat{\zeta}(x_1 ш w - x_1 \star w) = 0 \text{ pour tout } w \text{ dans } x_0 X^* x_1. \tag{5.6}$$

Il a été suggéré en 2000 par Minh, Jacob, Oussous et Petitot [MJOP] que les relations standard (5.5) et les relations de Hoffman (5.6) suffisent à décrire toutes les relations linéaires entre les MZV. Ensuite Ihara et Kaneko [I-K] ont établi des relations apparemment plus générales, les *relations de mélange régularisées doubles*, et conjecturé

qu'elles engendrent le noyau de $\hat{\zeta}$, considéré comme application $\mathbf{Q}$-linéaire $\mathfrak{H}^0 \to \mathbb{C}$. La conjecture de Minh, Jacob, Oussous et Petitot est donc plus optimiste que celle de Ihara et Kaneko. Plusieurs spécialistes présagent que les relations de mélange régularisées doubles ne sont pas conséquences des relations standard et des relations de Hoffman — ce qui voudrait dire que la conjecture de Minh, Jacob, Oussous et Petitot n'est pas vraie, mais cette question n'est pas encore tranchée.

La conjecture 5.2 concernant la structure de l'algèbre $\mathfrak{Z}$ des valeurs zêta numériques demande de préciser quel est le noyau de $\hat{\zeta}$. C'est un des problèmes majeurs de l'analyse diophantienne. Une première étape consiste à étudier l'algèbre formelle des multizêta : c'est l'objet de travaux actuellement développés par J. Écalle.

Remerciements. Une mention spéciale doit être décernée à nos amis marocains pour la chaleur de leur réception et leur extraordinaire hospitalité. Lors de ce congrès, j'ai bénéficié de fructueux échanges avec Cornelius Greither que je remercie. Merci aussi à Stéphane Fischler qui a corrigé une première version de ce texte, et à Claude Levesque qui a lu la deuxième version.

English extended abstract. We recall classical definitions:

A Hopf Algebra $(H, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ over a field $\mathbf{k}$ (say algebraically closed of zero characteristic) is an algebra (H, m, η) where

$$m : H \otimes H \to H$$

is a product and

$$\eta : \mathbf{k} \longrightarrow H$$

a unit, together with a co-algebra (H, Δ, ε) where

$$\Delta : H \to H \otimes H$$

is a co-product and

$$\varepsilon : H \longrightarrow \mathbf{k}$$

a co-unit, and with an antipode

$$S : H \to H,$$

which is a $\mathbf{k}$-linear map such that the diagram

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[d, "\mathrm{Id} \otimes S"'] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\eta \circ \varepsilon"'] & H \otimes H \arrow[d, "S \otimes \mathrm{Id}"] \\
H \otimes H \arrow[r, "m"'] & H & H \otimes H \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

commutes. We recall the definition of primitive elements, namely those $x \in H$ such that

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

and group-like elements

$$\Delta(x) = x \otimes x.$$

Next we give some basic examples: the algebras $\mathbf{k}G$ and $\mathbf{k}^G$ for a finite group G, a subalgebra $\mathfrak{R}(G)$ of $\mathbb{C}^G$ when G is a compact topological group, the universal enveloping algebra $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ of a Lie algebra $\mathfrak{g}$. We define the restricted dual and the graded dual of a graded Hopf algebra. The category of bicommutative Hopf algebras of finite type and without zero divisors is equivalent to the category of pairs (W, Γ) where W is a vector space of finite dimension and Γ a free $\mathbf{Z}$-module of finite type.

Assume from now on that $\mathbf{k}$ is the field $\overline{\mathbf{Q}}$ of algebraic numbers. Consider the category $\mathfrak{C}_1$ whose

- *objects* are the triples (G, W, Γ) where $G = \mathbf{G}_a^{d_0} \times \mathbf{G}_m^{d_1}$ is a commutative and connected linear algebraic group over $\overline{\mathbf{Q}}$, $W \subset T_e(G)$ is a subspace which is rational over $\overline{\mathbf{Q}}$ and $\Gamma \subset G(\overline{\mathbf{Q}})$ is a torsion free subgroup of finite type. Assume further that G is *minimal*: no algebraic subgroup G^* of G distinct from G has $W \subset T_e(G^*)$ and $\Gamma \subset G^*(\overline{\mathbf{Q}})$;
- *morphisms* $f : (G_1, W_1, \Gamma_1) \to (G_2, W_2, \Gamma_2)$ are given by morphisms of algebraic groups $f : G_1 \to G_2$ such that $f(\Gamma_1) \subset \Gamma_2$ and such that the tangent linear maps to f
$$df : T_e(G_1) \longrightarrow T_e(G_2)$$
satisfy $df(W_1) \subset W_2$.

Denote by ℓ_0 the dimension of W and by ℓ_1 the rank of Γ.

We introduce another category $\mathfrak{C}_2$ as follows.

Let H be a bicommutative Hopf algebra over $\overline{\mathbf{Q}}$ of finite type without zero divisors. Denote by d_0 the dimension of the $\overline{\mathbf{Q}}$-vector space of primitive elements and by d_1 the rank of group-like elements.

Let H' be also a bicommutative Hopf algebra over $\overline{\mathbf{Q}}$ of finite type without zero divisors, ℓ_0 the dimension of the $\overline{\mathbf{Q}}$-vector space of primitive elements and ℓ_1 the rank of group-like elements.

Consider a bilinear product $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H' \longrightarrow \overline{\mathbf{Q}}$ such that

$$\langle x, yy' \rangle = \langle \Delta x, y \otimes y' \rangle \quad \text{and} \quad \langle xx', y \rangle = \langle x \otimes x', \Delta y \rangle.$$

We use the notation
$$\langle \alpha \otimes \beta, \gamma \otimes \delta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle \langle \beta, \delta \rangle.$$

Here is the definition of the category $\mathfrak{C}_2$:

- *the objects* are the triples $(H, H', \langle \cdot, \cdot \rangle)$ with two Hopf algebras and a bilinear product as above;
- *the morphisms* are the pairs
$$(f, g) : (H_1, H_1', \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \longrightarrow (H_2, H_2', \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$$
where $f : H_1 \longrightarrow H_2$ and $g : H_2' \longrightarrow H_1'$ are Hopf algebras morphisms such that
$$\langle x_1, g(x_2') \rangle_1 = \langle f(x_1), x_2' \rangle_2.$$

These two categories were introduced by S. Fischler in [F1] where he proved:

Theorem 5.3 (S. FISCHLER). *Both categories $\mathfrak{C}_1$ and $\mathfrak{C}_2$ are equivalent. This equivalence is contravariant and compatible with the parameters d_0, d_1, ℓ_0, ℓ_1.*

The main motivation of [F1] is to prove new interpolation lemmas. Thanks to Theorem 5.3, one may deduce them from known zero estimates. Further, the natural involution on the category $\mathfrak{C}_2$ which permutes H and H' corresponds to the duality of Fourier-Borel on the category $\mathfrak{C}_1$.

In the last section we introduce non-bicommutative Hopf algebras related to multiple zeta values. This topic is the subject of [Wa2].

BIBLIOGRAPHIE

[A] E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 74, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980.

[C] P. Cartier, *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents*, Astérisque **282** (2002), 137–173.

[F1] S. Fischler, *Contributions à l'étude diophantienne des polylogarithmes et des groupes algébriques*, Thèse de doctorat; Paris, Université Paris VI, 2003 (`http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/29/88/index_fr.html`).

[F2] S. Fischler, *Interpolation on algebraic groups*, Compositio Math. **141** (2005), 907–925.

[G] A. B. Goncharov, *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes*, Math. Res. Lett. **5** (1998), 497–516.

[H] M. E. Hoffman, *Quasi-shuffle products*, J. Algebraic Combin. **11** (2000), 49–68.

[I-K] K. Ihara, M. Kaneko et D. Zagier, *Derivation relations and regularized double shuffle relations for multiple zeta values*, Prépublication MPIM 2004-100, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 2004.

[K] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.

[MJOP] H. N. Minh, G. Jacob, N. E. Oussous et M. Petitot, *Aspects combinatoires des polylogarithmes et des sommes d'Euler-Zagier*, Sém. Lothar. Combin. **43** (1999), Art. B43e, 29 pp. (`http://www.mat.univie.ac.at/~slc/wpapers/s43minh.html`).

[P] M. Petitot, *Combinatoire des algèbres de Hopf et applications*, EJC02 École Jeunes Chercheurs en Algorithmique et Calcul Formel, Université de Lille I, Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, 2002 (`http://www.lifl.fr/~ejc2002/local`).

[R] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 7, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.

[S] H.-J. Schneider, *Lectures on Hopf Algebras*, Trabajos de Matemática [Mathematical Works], vol. 31/95, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Córdoba, 1995 (`http://www.mate.uncor.edu/andrus/papers/Schn1.tex.gz`).

[Sw] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[Wa1] M. Waldschmidt, *Diophantine approximation on linear algebraic groups. Transcendence properties of the exponential function in several variables*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 326, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Wa2] M. Waldschmidt, *Hopf Algebras and Transcendental Numbers*, Applied Mathematics and Computation, Elsevier, 2003, pp. 197–219.

[Wat] W. C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 66, Springer-Verlag, New York-Berlin.

On trouvera d'autres références sur internet données par M. Hoffman à l'URL `http://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html`

M. WALDSCHMIDT
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS VI)
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU
UMR 7586 CNRS
PROBLÈMES DIOPHANTIENS, CASE 247
175, RUE DU CHEVALERET
F-75013 PARIS
FRANCE
COURRIEL : `miw@math.jussieu.fr`
`http://www.math.jussieu.fr/∼miw/`