



HAL
open science

Catégorification des coefficients de la matrice de la représentation de Bureau

Abderrahmane Bouchair

► **To cite this version:**

Abderrahmane Bouchair. Catégorification des coefficients de la matrice de la représentation de Bureau. 2009. hal-00409477v1

HAL Id: hal-00409477

<https://hal.science/hal-00409477v1>

Preprint submitted on 11 Aug 2009 (v1), last revised 24 Nov 2010 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Catégorification des coefficients de la matrice de la représentation de Burau

Abderrahmane BOUCHAR
Département de Mathématiques
Université de Jijel
18000 Jijel, Algérie
courriel : abdebouchar@yahoo.com

Résumé

Nous catégorifions explicitement les coefficients de la matrice de la représentation de Burau en utilisant des méthodes géométriques élémentaires. Nous montrons que cette catégorification est fidèle dans le sens qu'elle détecte la tresse triviale.

Mots clés : Catégorification, groupe de tresses, homologie de Floer, représentation de Burau.

Abstract

We categorify the coefficients of the Burau representation matrix using elementary geometrical methods. We show the faithfulness of this categorification in the sense that it detects the trivial braid.

1 Introduction

Le groupe de tresse B_n introduit par Emile Artin en 1925 est engendré par $n - 1$ générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$. Les relations entre les générateurs sont :

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|j - i| \geq 2$
2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n - 2$.

L'une des représentations classiques des groupes de tresses est la représentation de Burau, définie par Burau en 1936 [Bur36], qui envoie le groupe B_n dans le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ dont les coefficients sont des polynômes sur \mathbb{Z} en une variable t et son inverse t^{-1} voir [Bir74] pour plus de détail. La représentation de Burau est réductible, elle se décompose en une représentation de dimension 1 et une représentation

irréductible de dimension $n - 1$ appelée la représentation de Burau réduite qu'on note par $\tilde{\rho} : B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, définie comme suit :

$$\sigma_i \mapsto I_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-2}$$

Où $-t$ dans le milieu de la matrice de taille 3×3 est toujours en position (i, i) .

Catégorifier un invariant qui est un polynôme à coefficients entiers consiste à construire une homologie dont la caractéristique d'Euler graduée redonne ce polynôme. L'homologie de Khovanov [Kho00] est une catégorification du polynôme de Jones. Il est naturel de se demander s'il existe une catégorification des coefficients de la matrice $\tilde{\rho}(\sigma)$, pour une tresse donnée σ dans B_n .

En 2001, M. Khovanov et P. Seidel [KS02] donnent une catégorification de la représentation de Burau. C'est une action de B_n sur la catégorie dérivée des modules gradués définis sur une famille de quotients d'algèbres de carquois. Ils expliquent la connection avec le point de vue de la géométrie symplectique. Ils montrent que cette catégorification est fidèle.

Dans ce papier, suivant les idées de M. Khovanov et P. Seidel, nous catégorifions, d'une manière géométrique naive, chaque coefficient de la matrice de la représentation de Burau et nous montrons le résultat de fidélité dans ce cadre. Dans la section 2, nous donnons une description homologique de la représentation de Burau. Ensuite, nous définissons le nombre d'intersection géométrique de deux courbes sur une surface. Soit $\sigma \in B_n$, et soit α_j, β_i deux courbes dans le disque troué D_n comme dans la figure 2.1. Dans la section 3, nous définissons le complexe de Floer $(CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)), \partial)$ où $CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ est le groupe abélien libre engendré par les points d'intersection de β_i avec $h_\sigma(\alpha_j)$. Nous montrons que la caractéristique d'Euler graduée de son homologie est égal au coefficient b_{ij} de la matrice $\tilde{\rho}(\sigma)$ en position (i, j) . Dans la section 4, nous montrons que cette homologie est invariante de tresses par isotopie i.e si h_σ, h'_σ sont deux difféomorphismes (représentent deux tresses géométriques) isotopes, alors les groupes de cohomologie associés $HF^*(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)), HF^*(\beta_i, h'_\sigma(\alpha_j))$ seront isomorphes. Dans la section 5, nous montrons que cette catégorification est fidèle dans le sens qu'elle détecte la tresse triviale.

2 Préliminaires

2.1 Représentation homologique de B_n

Soient $D = D^2$ le disque unité du plan complexe \mathbb{C} , P un ensemble fini de n points p_1, \dots, p_n dans l'intérieur de D appelés points enlevés. Définissons $\text{Diff}^+(D, P)$ comme étant le groupe des difféomorphismes $h : D \rightarrow D$ qui préservent l'orientation, laissant le bord fixe point par point et $h(P) = P$. Le groupe de difféotopies "mapping class group" que nous notons par $\text{MCG}(D, P)$ est $\pi_0(\text{Diff}^+(D, P))$, i.e le groupe quotient de $\text{Diff}^+(D, P)$ modulo le sous groupe de tels difféomorphismes dans $\text{Diff}^+(D, P)$ qui sont isotopes à l'identité relativement $\partial D \cup P$. Le groupe B_n est isomorphe au groupe $\text{MCG}(D, P)$.

En utilisant la définition de B_n comme groupe de difféotopies, la représentation de Burau peut s'obtenir en ce faisant agir B_n sur l'homologie d'un revêtement cyclique infini du disque troué. Ce point de vue s'appelle la définition homologique de la représentation de Burau (voir [KT08] pour plus de détails).

Notons $D_n = D \setminus P$. Soit d_0 un point base sur le bord de D . Le groupe $\pi_1(D_n, d_0)$ est libre, engendré par n générateurs x_1, \dots, x_n , où x_i représente un lacet dans D_n basé en d_0 qui tourne dans le sens direct autour du point p_i . Considérons l'épimorphisme de groupe $\varphi : \pi_1(D_n, d_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par

$$\gamma = x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_r}^{n_r} \mapsto \varphi(\gamma) = \sum_{i=1}^r n_i.$$

L'entier $\varphi(\gamma)$ représente le nombre algébrique total de tour de γ autour des points enlevés p_1, p_2, \dots, p_n . Soit \tilde{D}_n le revêtement régulier associé au noyau de φ . Le groupe de transformations de revêtement \tilde{D}_n est isomorphe à \mathbb{Z} , engendré multiplicativement par t . Le groupe d'homologie $H_1(\tilde{D}_n)$ a une structure de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module libre de rang $n - 1$, où t agit par transformation de revêtement.

Un difféomorphisme $h \in \text{Diff}^+(D, P_n)$ (h représente un élément de B_n) se relève d'une manière unique à un automorphisme $\tilde{h} : \tilde{D}_n \rightarrow \tilde{D}_n$ qui fixe la fibre au dessus de d_0 point par point. \tilde{h} induit un automorphisme de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module $\tilde{h}_* : H_1(\tilde{D}_n) \rightarrow H_1(\tilde{D}_n)$. L'application $h \mapsto \tilde{h}_*$ définit un homomorphisme de groupes équivalent à la représentation de Burau réduite $\tilde{\rho}$.

Soit $\sigma \in B_n$. Supposons que $\tilde{\rho}(\sigma) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}$ est la matrice de la représentation de Burau associée à σ . A l'aide de la notion d'intersection

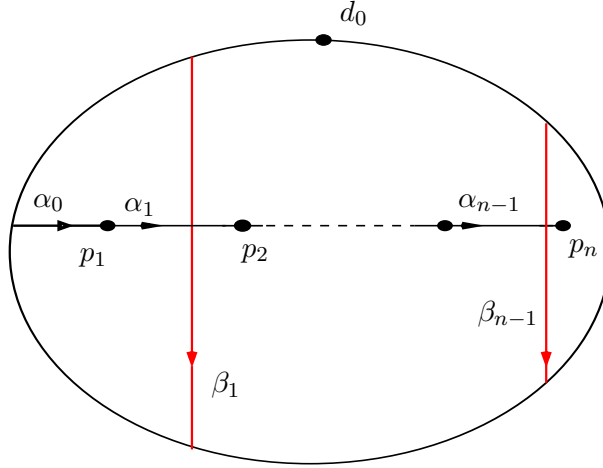


FIG. 1 –

algébrique de deux courbes, nous retrouvons les coefficients b_{ij} comme suit : Soit $h_\sigma \in \text{Diff}^+(D, P)$ un difféomorphisme (représente σ). Pour tout $i = 1, \dots, n-1$, soit α_i le segment de p_i vers p_{i+1} , et soit β_i une corde verticale à extrémités dans le bord ∂D , orienté de haut en bas et qui passe entre les points enlevés p_i et p_{i+1} , voir la figure 2.1. Choisissons $\tilde{d}_0 \in \partial \tilde{D}_n$ un point au dessus de d_0 et choisissons deux relevés $\widetilde{h_\sigma(\alpha_j)}, \tilde{\beta}_i \subset \tilde{D}_n$ de $h_\sigma(\alpha_j)$ et β_i respectivement. Alors

$$b_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (t^k \tilde{\beta}_i \cdot \widetilde{h_\sigma(\alpha_j)}) t^k, \quad (1)$$

Où $(t^k \tilde{\beta}_i \cdot \widetilde{h_\sigma(\alpha_j)}) \in \mathbb{Z}$ est le nombre algébrique d'intersection standard des arcs orientés $t^k \tilde{\beta}_i$ et $\widetilde{h_\sigma(\alpha_j)}$ dans \tilde{D}_n .

Remarque 1 Autrement dit, b_{ij} est l'intersection de Blanchfield des courbes β_i et $h_\sigma(\alpha_j)$.

Dans tout ce qui suit, $\sigma \in B_n$ une tresse à n brins. Un difféomorphisme $h_\sigma \in \text{Diff}^+(D, P)$ représente σ . Les courbes α_j, β_i sont comme dans la figure 2.1 pour certain $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$.

2.2 Intersection géométrique des courbes

Soit Σ une surface orientable compacte connexe éventuellement à bord. Soit P un ensemble fini de points dans l'intérieur de Σ . Nous utilisons ici la même notation que Khovanov-Seidel [KS02], une courbe de (Σ, P) est un sous ensemble c dans Σ qui est soit une courbe simple fermée de $\Sigma \setminus (\partial \Sigma \cup P)$ et essentielle, soit l'image d'un plongement $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ transverse au bord telle

que $\gamma^{-1}(\partial\Sigma \cup P) = \{0, 1\}$. Deux courbes c_1, c_2 de (Σ, P) sont isotopes s'il existe une isotopie dans $\text{Diff}^+(\Sigma, \partial\Sigma; P)$ qui envoie c_1 sur c_2 . Notons que les extrémités sur $\partial\Sigma$ restent fixe le long de l'isotopie.

Soit c_1, c_2 deux courbes simples fermées et essentielles. Le nombre d'intersection géométrique de c_1 et c_2 , noté $i(c_1, c_2)$, est le nombre minimal de points d'intersection d'un représentant dans la classe d'isotopie de c_1 avec un représentant de la classe d'isotopie de c_2 . Rappelons qu'un bigone (élémentaire¹) est un disque plongé dans Σ dont le bord est formé d'un arc de c_1 et d'un arc de c_2 et son intérieur ne coupe pas $c_1 \cup c_2$. Nous avons la proposition suivante

Proposition 2 *Soient c_1 et c_2 deux courbes simples fermées de Σ , essentielles et se coupant transversalement. Alors $i(c_1, c_2) = |c_1 \cap c_2|$ si et seulement si c_1 et c_2 ne bordent aucun bigone élémentaire.*

Pour la preuve voir ([FLP79], proposition 3.10) ou ([PR00], proposition 3.2).

La proposition 2 se généralise au cas des courbes non fermées, En utilisant le nombre d'intersection géométrique, noté I , défini par M. Khovanov et P. Seidel [KS02]. Ils indiquent que la preuve donnée dans [FLP79] se généralise avec une légère modification. Le nombre d'intersection géométrique $I(c_1, c_2)$ de deux courbes c_1 et c_2 de (Σ, P) est défini comme suit : supposons que $c_1 \cap c_2 \cap \partial\Sigma = \emptyset$, alors $I(c_1, c_2) = 2$ si c_1, c_2 sont deux courbes simples fermées isotopes, et

$$I(c_1, c_2) = \inf\{|(c_1 \cap c'_2) \setminus P| + \frac{1}{2}|c_1 \cap c'_2 \cap P|; c'_2 \simeq c_2\}, \quad (2)$$

sinon. Dans le cas que nous allons considérer, les deux définitions du nombre d'intersection géométrique coïncident.

Dans [Abo08] M. Abouzaid définit l'homologie de Floer pour certaine classe de courbes immergées dans une surface et l'utilise pour définir la catégorie de Fukaya de cette surface. Nous donnons la définition suivante :

Définition 3 *Etant donnés deux points $x, y \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$. On appelle bigone de x vers y une immersion à reparamétrage orienté près $u : \mathbb{D} \rightarrow D_n$ du demi disque $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : \|z\| \leq 1, \text{Re}z \geq 0\}$, qui envoie $-i$ sur x , i sur y et vérifie les conditions suivantes :*

- $u(\mathbb{D} \cap i\mathbb{R}) \subset \beta_i$,
- $u(\mathbb{D} \cap S^1) \subset h_\sigma(\alpha_j)$.

¹Ce mot est ajouté pour distinguer entre cette définition et la définition 3 qui est plus générale.

On note $\mathcal{M}(x, y)$ l'ensemble des bigones de x vers y . Si $u \in \mathcal{M}(x, y)$, on note α_{xy} et β_{xy} les sous arcs de $h_\sigma(\alpha_j)$ et β_i respectivement, qui bordent le bigone u . Dans tout le texte sauf mention du contraire, on suppose que β_i est une corde verticale. On associe à u un signe $\varepsilon(u)$ défini comme suit : $\varepsilon(u) = 1$ si l'orientation de β_i coïncide avec son orientation comme bord de u et $\varepsilon(u) = -1$ sinon.

Soit x un point d'intersection, et soit V_x un voisinage de x dans D_n . Un model local de x est une application orientée de V_x dans un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^2 qui envoie $h_\sigma(\alpha_j)$ sur l'axe des abscisses et β_i sur l'axe des ordonnées. Cela nous permet de comparer les ordonnées des points d'intersection sur la courbe β_i .

Remarque 4 *Si $u \in \mathcal{M}(x, y)$ est un bigone de signe positif, alors $\text{Im}(x) < \text{Im}(y)$ où $\text{Im}(x)$ désigne la partie imaginaire de x vu comme un nombre complexe. Si V_x, V_y sont deux voisinages de x et y respectivement, alors $V_x \cap u$ et $V_y \cap u$ sont des coins convexes qui se trouvent respectivement, dans le premier et le quatrième quadrant.*

Si le signe de U est négatif, alors $\text{Im}(x) > \text{Im}(y)$ et $V_x \cap u, V_y \cap u$ se trouvent respectivement, dans le deuxième et troisième quadrant.

Soit $u \in \mathcal{M}(x, y)$ vu comme une application. On appelle nombre de multiplicité par rapport à u d'un point $w \in D_n$ le nombre, noté $n_u(w)$, de points dans l'image réciproque de w par u .

$$n_u(w) = \#u^{-1}(w).$$

Le comportement du nombre de multiplicité près des arcs α_{xy} et β_{xy} est comme suit. Si on traverse α_{xy} ou β_{xy} le nombre de multiplicité fait une variation de un. Près des points x et y , le nombre de multiplicité est égal à 1 à l'intérieur du bigone et 0 ailleurs, comme le prouve le lemme suivant.

Lemme 5 *Soit u un bigone de x vers y . Alors $n_u(x) = n_u(y) = 1$.*

Preuve. Soit γ un arc plongé dans D_n d'extrémités x et y telle que $\gamma \cup \beta_{xy}$ borde un petit disque, noté \mathcal{D}' , dans D_n . On voit \mathcal{D}' comme l'image de la surface bordé par $[-i, i] \cup \gamma_+$ dans le demi disque \mathbb{D} par un plongement u' , où γ_+ est un arc simple plongé dans \mathbb{D} envoyé sur γ par u' . Soit V_x et V_y deux voisinages de x et y respectivement, on peut choisir ces voisinages suffisamment petits de telle sorte que

$$\gamma \cap V_x = \alpha_{xy} \cap V_x, \gamma \cap V_y = \alpha_{xy} \cap V_y. \quad (3)$$

Alors les arcs obtenus de γ et α_{xy} dans la surface D_n privée de $\gamma \cap V_x$ et $\gamma \cap V_y$ sont homotopes à extrémités fixes (ici l'homotopie vient du fait que

$\mathcal{D} \cap S^1$ et γ_+ sont homotopes dans \mathbb{D} , Donc d'après (théorème 3.1, [Ep66]), ces arcs sont isotopes à extrémités fixes. Donc on peut réduire le nombre de multiplicité à l'extérieur des deux voisinages V_x et V_y sans le changer à l'intérieur. D'où

$$n_g(w) = n_{g'}(w) = 1, \forall w \in V_x \cap \mathcal{D}' \quad (4)$$

□

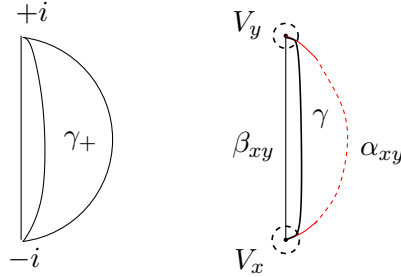


FIG. 2 –

3 Complexe de chaînes

Etant donnée une tresse à n brins σ . Choisissons $h_\sigma \in \text{Diff}^+(D, P_n)$ un représentant de σ . Prenant deux arcs α_j, β_i donnés comme dans la figure 2.1. A chaque couple $(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)), 1 \leq i, j \leq n - 1$, nous associons un complexe de chaînes $(CF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)), \partial^{l,k}), l, k \in \mathbb{Z}$. $CF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ est le groupe abélien libre engendré par les points d'intersections de β_i avec $h_\sigma(\alpha_j)$, où k, l sont respectivement les degrés d'Alexander et de Maslov que nous allons les définir.

Nous munissons l'ensemble des générateurs d'un degré d'Alexander $A(x) = k$, où k est l'exposant paru dans la formule (1) section 2.

Rappelons qu'une *Fourchette* dans (D, P_n) est un arbre F plongé dans D formé de trois arêtes et quatre sommets d_0, p_i, p_j et z tels que $F \cap \partial D = \{d_0\}, F \cap P_n = \{p_i, p_j\}$, et les trois arêtes ont z comme sommet commun. L'arête $M(F)$ qui joint les deux sommets d_0 et z s'appelle le *manche* de F . L'union des deux autres arêtes est un arc plongé à extrémités $\{p_i, p_j\}$, appelé les *dents* de F noté $d(F)$. Cette notion de fourchette a été utilisé indépendamment par Dan Krammer en 2000, puis par Stephen Bigelow [Big01] pour montrer que le groupe de tresses B_n est linéaire.

Pour tout $j = 1, \dots, n - 1$, notons par F_j la fourchette dans (D, P_n) qui a comme dents l'arc α_j et $\partial M(F_j) = \{d_0, z_j\}$ où $z_j \in \beta_i \cap \alpha_j$.

Etant donnée un générateur x . Définissons un chemin plongé dans D_n paramétré par $\gamma : I \rightarrow D_n$ comme suit :
 Notons par γ_1 l'arc de d_0 à z_j le long de $M(F_j)$.
 γ_2 l'arc de z_j vers x le long de $h_\sigma(\alpha_j)$.
 γ_3 l'arc de x à d_0 le long de β_i .
 Posons $\gamma = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$. γ est C^1 régulier par morceaux. Nous déformons légèrement les courbes β_i et $h_\sigma(\alpha_j)$ au voisinage des points x, z_j de sorte que les angles au points d'intersection seront droits ($\pm\frac{\pi}{2}$). Nous munissons l'ensemble des générateurs d'un degré de Maslov μ défini par

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 d(\arg(\gamma'(t)))$$

Où $\arg(\gamma'(t))$ désigne l'argument du vecteur tangent $\gamma'(t)$. Autrement dit, $\mu(x)$ est le nombre de demi-tours faits par le vecteur tangent $\gamma'(t)$.

La différentielle $\partial : CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)) \rightarrow CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ est définie sur un générateur x par

$$\partial x = \sum_{\substack{y \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j) \\ u \in \mathcal{M}(x,y)}} \varepsilon(u) \cdot y. \quad (5)$$

Proposition 6 *La différentielle ∂ augmente le degré de Maslov par un et respecte le degré d'Alexander.*

Preuve. Soit x, y deux générateurs de $CF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$. Si u est un bigone élémentaire de x vers y , alors le vecteur tangent fait un demi-tour le long de α_{xy} . Donc nous avons $\mu(x, y) = \mu(y) - \mu(x) = 1$. Si u n'est pas élémentaire. Alors nous pouvons se ramener au premier cas par une isotopie qui fait éliminer des bigones élémentaires. Mais le nombre de demi-tours est un invariant par isotopie, car un entier qui se déforme d'une manière continue est forcément constant. Donc $\mu(x, y) = 1$.

Montrons que ∂ respecte le degré d'Alexander k . Supposons que $A(x) = k$ et $A(y) = k'$, alors $k - k'$ est le nombre de tours que l'on fait autour des points enlevés en parcourant la courbe qui va de x à y le long de $h_\sigma(\alpha_j)$ et de y à x le long de β_i . Mais cette courbe borde un bigone. Donc $k - k' = 0$. D'où $k = k'$. \square

Proposition 7 *L'homomorphisme ∂ est une différentielle. i.e $\partial \circ \partial = 0$.*

Pour montrer la proposition 7, nous avons besoin des lemmes qui suivent.

Lemme 8 *Etant donnés trois points x, y, z dans $\beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$, un bigone u de x vers y , et un bigone v de y vers z .*

1. Si $z \in \beta_{xy}$ et y_0 un point de β_{yz} . S'il existe un bigone de x vers y_0 , alors $y \in \alpha_{xy_0}$ (i.e la courbe α_{xy_0} doit passer par le point y).
2. Si $z \notin \beta_{xy}$ et y_0 un point de β_{xy} , alors $\mathcal{M}(z, y_0) = \phi$.

Preuve. L'argument est le même dans les deux cas. Supposons qu'il existe

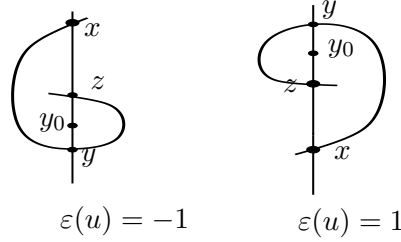


FIG. 3 –

un bigone de x vers y_0 telle que $y \notin \alpha_{xy_0}$. Si le signe de u est positif, alors d'après la remarque 4, nous aurons $Im(x) > Im(y_1)$. Mais ceci est contradictoire avec l'hypothèse (voir la figure 3).

Si le signe du bigone u est négatif, alors $Im(x) < Im(y_1)$. Ce qui est impossible. Donc $y \in \alpha_{xy_0}$. \square

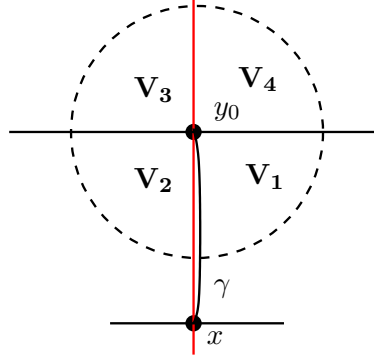


FIG. 4 –

Le lemme suivant joue un rôle fondamental dans notre démonstration.

Lemme 9 *Etant donnés trois points distincts x, y_0 et y_1 dans $\beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$ et un bigone de x vers y_0 . Alors*

1. S'il existe un bigone de x vers y_1 tel que α_{xy_1} contient le point y_0 , alors $y_1 \in \beta_{xy_0}$.
2. S'il existe un bigone de y_1 vers y_0 tel que $\alpha_{y_1y_0}$ contient x , alors $y_1 \in \beta_{xy_0}$.

Preuve.

1. Soient u_0 un bigone de x vers y_0 , u_1 un bigone de x vers y_1 . Supposons que $y_0 \in \alpha_{xy_1}$. Soit V_{y_0} un petit voisinage de y_0 dans D_n . Alors $V_{y_0} \cap (D_n - (\sigma\alpha_i \cup \beta_j))$ est formé de quatre composantes V_1, V_2, V_3 et V_4 , Voir la figure 4. Montrons d'abord que $n_{u_1}(y_0) = 1$. Supposons que le nombre de multiplicité de y_0 par rapport à u_1 est égal à $m + 1$, où $m \in \mathbb{N}$. Soit γ une courbe plongée dans D_n d'extrémités x et y_0 , comme dans la figure 4. Remarquons que m est égal à la somme algébrique de points d'intersection de γ avec la courbe α_{xy_1} . Puisque $n_{u_0}(x) = n_{u_0}(y_0) = 1$, d'après le lemme 5, alors la somme algébrique de points d'intersection de γ avec α_{xy_0} est égal à 0. Par ailleurs, en utilisant la principe de Jordan pour les courbes simples fermées dans le plan, on obtient que la somme algébrique des points d'intersection de γ avec $\alpha_{xy_1} \setminus \alpha_{xy_0}$ est égal aussi à 0. D'où $m = 0$.

La composante V_1 est incluse dans l'intérieur du bigone u_0 . Donc $n_{u_1}(w_1) = 1$ pour tout $w_1 \in V_1$. Soit w_2 un point de V_2 . alors $n_{u_1}(w_2) = 1$ ou 0. Mais le deuxième cas est impossible, sinon le nombre de multiplicité par rapport à u_1 des points de V_3 sera -1 . Donc le nombre de multiplicité par rapport à u_1 des points des deux composantes voisines V_1 et V_2 ne change pas. Ceci implique que $V_{y_0} \cap (\beta_i \setminus \beta_{xy_0})$ n'est pas incluse dans β_{xy_1} . D'où $\beta_{xy_1} \subset \beta_{xy_0}$.

2. Le même argument de (1) au voisinage du point x .

□

Lemme 10 Soient x, y, z trois points dans $\beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$, $u \in \mathcal{M}(x, y)$ et $v \in \mathcal{M}(y, z)$. Alors il existe un point $y_0 \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$, un bigone v_0 de y_0 vers z , et un bigone u_0 de x vers y_0 tel qu'on a l'une des inégalités suivantes

$$\varepsilon(u) = \varepsilon(u_0) = \varepsilon(v_0) \neq \varepsilon(v). \quad (6)$$

$$\varepsilon(u) \neq \varepsilon(u_0) = \varepsilon(v_0) = \varepsilon(v). \quad (7)$$

Le point y_0 est unique, dans le sens : si y_1 un point dans $\beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$ avec $\mathcal{M}(x, y_1) \neq \phi$ alors $\mathcal{M}(y_1, z) = \phi$.

Preuve. L'existence de y_0 vient du fait que l'intérieur de $u \cup v$ ne contient pas des points enlevés, donc la courbe $h_\sigma(\alpha_j)$ doit couper transversalement le bord du bigone u en un point y_0 qui se trouve sur la courbe β_i . Les inégalités (6) et (7) découlent directement (voir la figure 5).

Montrons l'unicité de y_0 . Supposons qu'il existe un point y_1 qui vérifie le lemme et montrons que $y_1 = y_0$. On distingue quatre cas illustrés par la figure 5.

cas 1. $\varepsilon(u) = \varepsilon(v_0) = 1$ et $\varepsilon(v) = -1$.

Soit y_1 un point dans $\beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$ telle que $\mathcal{M}(y_1, z) \neq \phi$. Alors l'arc

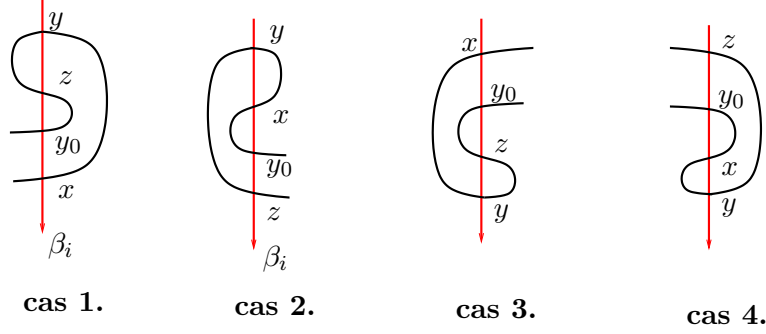


FIG. 5 –

α_{y_1z} doit passer par l'un des deux points x ou y_0 . Mais le premier cas est impossible, supposons que $x \in \alpha_{y_1z}$. Donc α_{y_1z} contient le point y . D'après le lemme 9, y_1 est un point de β_{yz} . Mais dans ce cas, l'arc qui lie les deux points x et y_1 le long de $h_\sigma(\alpha_j)$ ne contient pas le point y . Donc $\mathcal{M}(x, y_1) = \phi$ d'après le lemme 8, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $y_0 \in \alpha_{y_1z}$. Le point y_1 appartient à l'arc β_{y_0z} . D'autre part, $\mathcal{M}(x, y_1) = \phi$ pour $y_1 \in \beta_{y_0z} - \{y_0\}$ encore d'après le lemme 9. D'où $y_1 = y_0$.

cas 2. $\varepsilon(u) = 1$ et $\varepsilon(v) = \varepsilon(v_0) = -1$.

Supposons qu'il existe un bigone de x vers un point y_1 . Alors l'arc α_{xy_1} contient soit le point y_0 ou le point z , mais le deuxième cas est impossible, supposons que $z \in \alpha_{xy_1}$. Donc α_{xy_1} contient le point y . D'après le lemme 9, on a $y_1 \in \beta_{xy}$. Donc l'arc qui joint les deux points z et y_1 le long de $h_\sigma(\alpha_j)$ ne passe pas par le point y . En utilisant le lemme 8, on obtient $\mathcal{M}(z, y_1) = \phi$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Donc $y_0 \in \alpha_{xy_1}$. En utilisant le lemme 9, on a $y_1 \in \beta_{xy_0}$. D'autre part, $\mathcal{M}(y_1, z) = \phi$ si $y_1 \in \beta_{xy_0} - \{y_0\}$. D'où $y_1 = y_0$.

cas 3. $\varepsilon(u) = \varepsilon(v_0) = -1$ et $\varepsilon(v) = 1$.

Se fait de la même manière que le cas 1.

cas 4. $\varepsilon(u) = -1$ et $\varepsilon(v) = \varepsilon(v_0) = 1$. Similaire au cas 2.

□

Preuve de la proposition 7. Soit $x \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$, vu comme un générateur de $CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$. Donc

$$\partial \circ \partial(x) = \sum_{\substack{y \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j) \\ u \in \mathcal{M}(x, y)}} \sum_{\substack{z \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j) \\ v \in \mathcal{M}(y, z)}} \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) \cdot z. \quad (8)$$

Nous montrons que le coefficient de chaque générateur z s'annule. Supposons qu'il existe $u \in \mathcal{M}(x, y)$ et $v \in \mathcal{M}(y, z)$. En utilisant le lemme 10,

il existe deux bigones $u_0 \in \mathcal{M}(x, y_0)$ et $v_0 \in \mathcal{M}(y_0, z)$ tels que les coefficients $\varepsilon(u).\varepsilon(v), \varepsilon(u_0).\varepsilon(v_0)$ de z ont un signe opposé. Ceci signifie que les coefficients dans la formule (8) s'annulent par paires. D'où $\partial \circ \partial(x) = 0$. \square

Nous définissons $HF^l(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ comme étant le l -ième groupe de cohomologie du complexe de chaînes $CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$. C'est un \mathbb{Z} -module gradué de type fini. Nous définissons $HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ comme étant le l -ième groupe de cohomologie du sous complexe de degré k de $CF(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$. Donc nous avons la décomposition

$$HF^l(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)). \quad (9)$$

Notons par $HF^{l,k}(\sigma, i, j)$ la classe d'isomorphisme de $HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$.

Théorème 11 *Si σ est une tresse à n brins, alors pour chaque couple d'indice (i, j) , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la classe d'isomorphisme $HF^{l,k}(\sigma, i, j)$ est invariante de tresses par isotopie.*

La démonstration de ce théorème est reportée à la section 4. Nous montrons maintenant que le coefficient de la matrice de Burau réduite est égal à la caractéristique d'Euler graduée de cette homologie. Pour cela nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 12 *Soit x un point dans $\beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$. Alors $\mu(x)$ est pair si et seulement si $\text{sign}(x) = +1$, où $\text{sign}(x)$ est le signe d'intersection des courbes orientées β_i et $h_\sigma(\alpha_j)$ au point x .*

Preuve. Supposons que β_i et $h_\sigma(\alpha_j)$ se coupent aux points x et z à angle droit $(\pm \frac{\pi}{2})$. Soit $\tilde{\gamma}$ une courbe simple donnée comme dans la figure 6. Nous lisons la courbe γ aux points x et z . nous obtenons $\tilde{\gamma}\gamma$ une courbe simple fermée. Nous distinguons deux cas.

Cas1 : Si le signe d'intersection au point x est positif, alors

$$\begin{aligned} \int d(\arg((\tilde{\gamma}\gamma)'(t))) &= \int d(\arg(\gamma'(t))) + \int d(\arg(\tilde{\gamma}'(t))) + \pi, \\ 2n\pi &= \int d(\arg(\gamma'(t))) + 2\pi, \end{aligned}$$

où n est le degré de l'application $\tilde{\gamma}\gamma : S^1 \rightarrow S^1$. Alors $\mu(x) = 2n - 2$.

Cas2 : Si le signe d'intersection au point x est négatif, alors

$$\int d(\arg((\tilde{\gamma}\gamma)'(t))) = \int d(\arg(\gamma'(t))) + \int d(\arg(\tilde{\gamma}'(t))).$$

Donc $\mu(x) = 2n - 1$.

\square

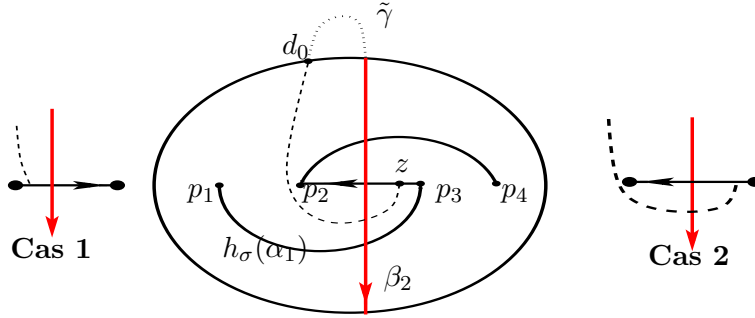


FIG. 6 –

Proposition 13 Soit σ une tresse à n brins. Pour chaque couple d'indice (i, j) , $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe un complexe de chaînes bigradué $(CF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)), \partial^{l,k})_{l,k \in \mathbb{Z}}$ tel que

$$b_{ij} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \cdot t^k \cdot \dim_{\mathbb{Q}} \left(HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \right). \quad (10)$$

Où b_{ij} est le coefficient de la matrice de Burau $\tilde{\rho}(\sigma)$ en position (i, j) .

Preuve. C'est une conséquence directe du lemme 12 et la formule (1) donnée dans la section 2. \square

4 Invariance

Dans cette section nous montrons que l'homologie construite à la section 3 est invariante par isotopie. Rappelons que le groupe de tresses B_n est le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}^+(D, P_n)$ quotienté par la relation d'isotopie. Chaque difféomorphisme (représente une tresse géométrique) agit sur le disque D_n . Si deux difféomorphismes isotopes agiraient sur le disque troué, alors cette isotopie fait apparaître ou disparaître des bigones (élémentaires).

Soit σ une tresse à n brins. Dans tout ce qui suit, h_σ et h'_σ sont deux difféomorphismes isotopes par une isotopie qui ne fait apparaître qu'un bigone élémentaire d'un point x vers un point y . Notons par \mathcal{C} et \mathcal{C}' les deux complexes de chaînes associée à h_σ et h'_σ respectivement. Auparavant nous allons donner les lemmes suivants :

Lemme 14 (Elimination Gaussienne [BN07]) Soit $\mathcal{C} = (C^*, \partial)$ un complexe de chaînes sur \mathbb{Z} librement engendré. Soit $x \in C^l$ (resp. $y \in C^{l+1}$) telle que $C^l = \mathbb{Z}.x \oplus A$ (resp. $C^{l+1} = \mathbb{Z}.y \oplus B$). Si $\varphi : \mathbb{Z}.x \rightarrow \mathbb{Z}.y$ est un

isomorphisme de \mathbb{Z} -modules, alors le segment de complexe de \mathcal{C}

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{\begin{pmatrix} \kappa \\ \zeta \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ A \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi & \delta \\ \lambda & \xi \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} y \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \theta & \nu \end{pmatrix}} [C^{l+2}] \dots \quad (11)$$

est isomorphe au segment de complexe de chaînes suivant

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ \zeta \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ A \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \xi - \lambda\varphi^{-1}\delta \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} y \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \nu \end{pmatrix}} [C^{l+2}] \dots \quad (12)$$

ces deux complexes sont homotopiquement équivalents au segment de complexe

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{(\zeta)} [A] \xrightarrow{(\xi - \lambda\varphi^{-1}\delta)} [B] \xrightarrow{(\nu)} [C^{l+2}] \dots \quad (13)$$

Ici on utilise la notation matricielle pour la différentielle ∂ .

Lemme 15 Soit x, y, z et t quatre points d'intersection dans $\beta_i \cap h'_\sigma(\alpha_j)$.

Supposons que

- il existe un bigone élémentaire de x vers y ,
- il existe un bigone de z vers y ,
- il existe un bigone de z vers t dans \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

Alors $\mathcal{M}(x, t) = \phi$.

Preuve. L'argument est de comparer la position des points d'intersection

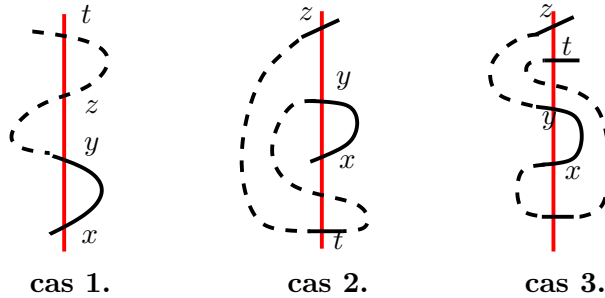


FIG. 7 –

x, y, z et t sur l'arc β_i vu comme l'axe des ordonnées. Supposons que $Im(x) < Im(y)$. Le cas inverse se démontre de la même manière. La courbe α_{zy} ne passe pas par le point x . Car si nous avions $x \in \alpha_{zy}$, d'après le lemme 9, nous aurons $z \in \beta_{xy}$, ce qui est contradictoire avec le fait que le bigone de x vers y est élémentaire. Comme $\mathcal{M}(z, y) \neq \phi$ et l'arc β_{xy} ne contient aucun point d'intersection, en vertu de la remarque 4, nous obtiendrons

$$Im(x) < Im(y) < Im(z), \quad (14)$$

Maintenant, supposons qu'il existe un bigone de x vers t . Donc la courbe α_{xt} ne doit pas passer par le point y , sinon $t \in \beta_{xy}$. Nous distinguons trois cas illustré par la figure 7.

Cas 1. $Im(x) < Im(y) < Im(z) < Im(t)$. En vertu de la remarque 4, nous aurons $Im(t) < Im(x)$. Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Cas 2. $Im(t) < Im(x) < Im(y) < Im(z)$. Comme la courbe α_{xt} ne passe pas par le point y , alors la courbe formé de $\alpha_{xy} \cup \alpha_{xt}$ union la courbe qui joint les deux points y et t le long de $h_\sigma(\alpha_j)$ sera fermée. Ce qui est impossible.

Cas 3. $Im(x) < Im(y) < Im(z) < Im(t)$. Similaire au cas 1.

□

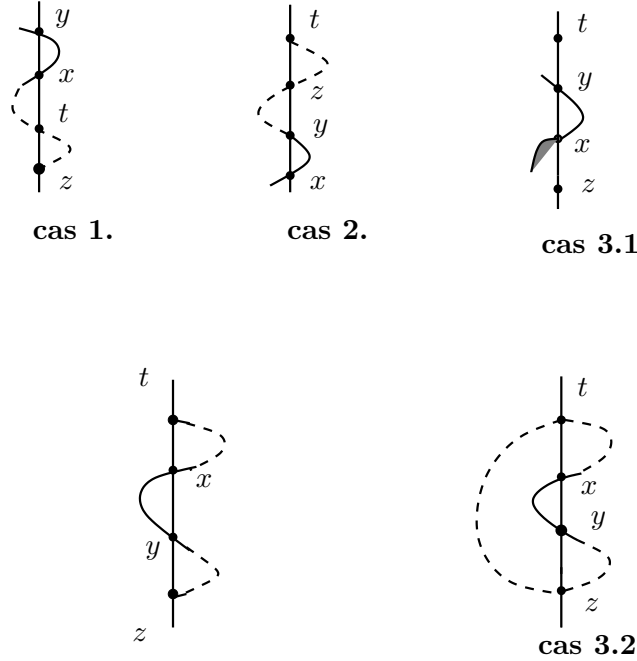


FIG. 8 –

Lemme 16 Soit x, y, z et t quatre points d'intersection dans $\beta_i \cap h'_\sigma(\alpha_j)$ telle que $\mathcal{M}(z, t) = \phi$ dans le complexe \mathcal{C} . S'il existe un bigone élémentaire de x vers y dans \mathcal{C}' , alors

$$\mathcal{M}(z, y) = \phi \text{ ou } \mathcal{M}(x, t) = \phi$$

dans le complexe \mathcal{C}' .

Preuve. Supposons que $Im(z) < Im(t)$, le cas contraire se démontre de la même méthode. Il y a plusieurs cas illustré par la figure 8.

Cas 1. Si $Im(z) < Im(t) < Im(x), Im(y)$. Supposons qu'il existe un bigone de x vers t . Il résulte du (lemme 9, (1)) que

$$Im(t) < Im(x) < Im(y).$$

Par ailleurs, s'il existe un bigone de z vers y , alors la courbe α_{zy} passe par le point x . Donc $z \in \beta_{xy}$ i.e $Im(x) < Im(z) < Im(y)$, encore d'après le lemme 9. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse. D'où $\mathcal{M}(z, y) = \phi$ ou $\mathcal{M}(x, t) = \phi$.

Cas 2. Si $Im(x), Im(y) < Im(z) < Im(t)$. Supposons qu'il existe un bigone de z vers y . Alors $Im(x) < Im(y) < Im(z)$. S'il existe un bigone de x vers t , alors la courbe α_{xt} doit passer par le point y . En se servant du lemme 9, nous obtenons $t \in \beta_{xy}$ ce qui est impossible. D'où $\mathcal{M}(z, y) = \phi$ ou $\mathcal{M}(x, t) = \phi$.

Cas 3. Si $Im(z) < Im(x), Im(y) < Im(t)$.

Si α_{xy} n'est pas un sous arc de la courbe qui lie les points z et t le long de $h_\sigma(\alpha_j)$. Alors

1. Si $Im(z) < Im(x) < Im(y) < Im(t)$. Supposons qu'il existe un bigone de x vers t , alors l'arc α_{xt} ne passe pas par le point y (voir la figure 8, cas 3.1), car sinon, d'après le lemme 9, nous aurons $t \in \beta_{xy}$ ce qui n'est pas vrai. Puisque $y \notin \alpha_{xt}$, alors d'après la remarque 4, nous obtiendrons $Im(t) < Im(x)$. C'est absurde par hypothèse.
2. Si $Im(z) < Im(y) < Im(x) < Im(t)$. Supposons qu'il existe un bigone de x vers t , alors l'arc α_{xt} ne passe pas par le point y (sinon $t \in \beta_{xy}$). S'il existe un bigone de z vers y , le seul cas possible est illustré par la figure 8 (cas 3.2). Donc l'arc qui lie les points z et t le long de $h_\sigma(\alpha_j)$ union $\alpha_{xy} \cup \alpha_{xt} \cup \alpha_{zy}$ sera une courbe fermée, ce qui est absurde.

Si α_{xy} est inclus dans la courbe qui joint les deux points z et t le long de $h_\sigma(\alpha_j)$. Notons par u_0 le bigone de x vers y . Supposons qu'il existe un bigone u_1 de z vers y et un bigone u_2 de x vers t . Dans ce cas nous aurons $Im(y) < Im(x)$, voir la figure 8. Prenant R un petit rectangle dans D_n qui contient le bigone u_0 dans son intérieur. Posons

$$u'_1 = u_1(\{z \in \mathbb{D} : Im(z) < (1 - \epsilon) i\}) \quad (15)$$

$$u'_2 = u_2(\{z \in \mathbb{D} : Im(z) > (-1 + \epsilon) i\}) \quad (16)$$

Où ϵ est un nombre réel positif. Nous pouvons faire une isotopie des courbes β_i et $h'_\sigma(\alpha_j)$ à l'intérieur du rectangle R qui fait disparaître le bigone u_0 et nous obtenons la situation illustrée par la figure 9.

Donc nous obtenons un bigone u de z vers t dans le complexe \mathcal{C} , ce

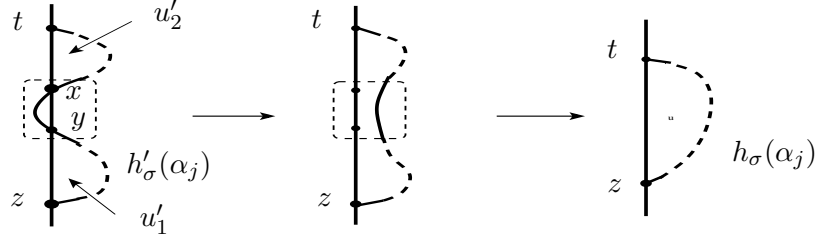


FIG. 9 –

qui est contradictoire avec l'hypothèse. □

Lemme 17 Soit $z, t \in \beta_i \cap h_\sigma(\alpha_j)$ et u un bigone de z vers t dans le complexe \mathcal{C} . Si u est disparu après une isotopie qui fait apparaître un bigone élémentaire d'un point x vers un point y , alors

$$\varepsilon(u) = -\varepsilon(u_0) \cdot \varepsilon(u_1) \cdot \varepsilon(u_2).$$

Où $u_0 \in \mathcal{M}(x, y)$, $u_1 \in \mathcal{M}(z, y)$ et $u_2 \in \mathcal{M}(x, t)$ dans le complexe \mathcal{C}' .

Preuve. Supposons que u a disparu après une isotopie qui fait apparaître

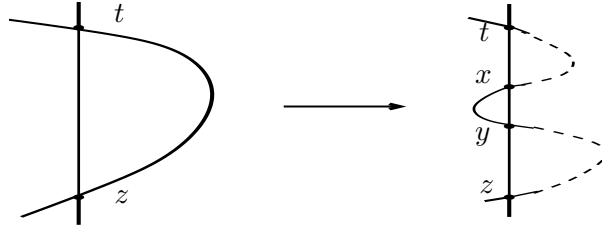


FIG. 10 –

un bigone élémentaire u_0 d'un point x vers un point y . Donc il existe un bigone u_1 de z vers y et u_2 de x vers t (voir la figure 10). Nous aurons directement

$$\varepsilon(u) = -\varepsilon(u_0) \cdot \varepsilon(u_1) \cdot \varepsilon(u_2).$$

□

Lemme 18 Soit h_σ, h'_σ deux difféomorphismes isotopes, et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ les complexes de chaînes associée à h_σ et h'_σ respectivement. Si on passe de h_σ à h'_σ par une isotopie qui ne fait apparaître qu'un bigone élémentaire, alors \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont homotopiquement équivalents.

Preuve. Considérons le complexe de chaînes \mathcal{C} associe à h_σ

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{(\partial)} [C^l] \xrightarrow{(\partial)} [C^{l+1}] \xrightarrow{(\partial)} [C^{l+2}] \dots \quad (17)$$

Posons

$$E = C^{l-1} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}.e_i,$$

$$A = C^l = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}.a_i,$$

$$B = C^{l+1} = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}.b_i, \text{ et } F = C^{l+2} = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}.f_i.$$

Le complexe de chaînes \mathcal{C}' associe à h'_σ est de la forme

$$\dots [C^{l-1}] \xrightarrow{\begin{pmatrix} \kappa \\ \zeta \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ C^l \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \varphi & \delta \\ \lambda & \xi \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} y \\ C^{l+1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \theta & \nu \end{pmatrix}} [C^{l+2}] \dots \quad (18)$$

où les lettres grecques sont des matrices d'homomorphismes de \mathbb{Z} -modules définis comme suit

* $\varphi : \mathbb{Z}.x \rightarrow \mathbb{Z}.y$ définie par $\varphi(x) = \varepsilon(u)y = \pm y$ où $u \in \mathcal{M}(x, y)$.

* $\xi = (\xi_{ij}), i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$ où $\xi_{ij} : \mathbb{Z}.a_j \rightarrow \mathbb{Z}.b_i$ définie par

$$\xi_{ij}(a_j) = \begin{cases} \varepsilon(u)b_i & \text{si } u \in \mathcal{M}(a_j, b_i), \\ 0 & \text{si } \mathcal{M}(a_j, b_i) = \phi. \end{cases}$$

* $\delta = (\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_n)$ où $\delta_j : \mathbb{Z}.a_j \rightarrow \mathbb{Z}.y$ définie par

$$\delta_j(a_j) = \begin{cases} \varepsilon(u)y & \text{si } u \in \mathcal{M}(a_j, y), \\ 0 & \text{si } \mathcal{M}(a_j, y) = \phi. \end{cases}$$

* $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ où $\lambda_i : \mathbb{Z}.x \rightarrow \mathbb{Z}.b_i$ définie par

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} \varepsilon(u)b_i & \text{si } u \in \mathcal{M}(x, b_i), \\ 0 & \text{si } \mathcal{M}(x, b_i) = \phi. \end{cases}$$

* $\kappa = (\kappa_1 \ \kappa_2 \ \dots \ \kappa_r)$ où $\kappa_i : \mathbb{Z}.e_i \rightarrow \mathbb{Z}.x$ définie par

$$\kappa_i(e_i) = \begin{cases} \varepsilon(u)x & \text{si } u \in \mathcal{M}(e_i, x), \\ 0 & \text{si } \mathcal{M}(e_i, x) = \phi. \end{cases}$$

* $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_s \end{pmatrix}$ où $\theta_i : \mathbb{Z}.y \rightarrow \mathbb{Z}.f_i$ définie par

$$\theta_i(y) = \begin{cases} \varepsilon(u)f_i & \text{si } u \in \mathcal{M}(y, f_i), \\ 0 & \text{si } \mathcal{M}(y, f_i) = \phi. \end{cases}$$

* $\zeta = \partial$ et $\nu = \partial$ définies dans le complexe \mathcal{C} .

Montrons que $\partial_{ij} = \xi_{ij} - \lambda_i \varphi^{-1} \delta_j : \mathbb{Z}.a_j \rightarrow \mathbb{Z}.b_i$ pour tout $i = \overline{1, m}$ et $j = \overline{1, n}$. Soit $a_j \in A, j \in \{1, \dots, n\}$ et $b_i \in B, i \in \{1, \dots, m\}$. il y a deux cas qui figure

1. S'il y a pas de bigone de a_j vers b_i dans le complexe \mathcal{C} et \mathcal{C}' . donc, d'après le lemme 16, nous avons $\delta_j(a_j) = 0$ ou $\lambda_i(x) = 0$. Donc $\lambda_i \varphi^{-1} \delta_j(a_j) = 0$. D'où

$$\partial_{ij}(a_j) = (\xi_{ij} - \lambda_i \varphi^{-1} \delta_j)(a_j) = 0.$$

2. il y a un bigone u de a_j vers b_i dans le complexe \mathcal{C} . Donc $\partial_{ij}(a_j) = \varepsilon(u)b_i$. Dans ce cas, si le bigone u a disparu lors du passage de h_σ à h'_σ par isotopie i.e $\xi_{ij}(a_j) = 0$. Alors la disparition de u fait apparaître un bigone u_1 de a_j vers y et un bigone u_2 de x vers b_i . Donc par définition nous aurons $\lambda_i \varphi^{-1} \delta_j(a_j) = \varepsilon(u_0).\varepsilon(u_1).\varepsilon(u_2).b_i$. D'après le lemme 17, nous aurons

$$(\xi_{ij} - \lambda_i \varphi^{-1} \delta_j)(a_j) = -\varepsilon(u_0).\varepsilon(u_1).\varepsilon(u_2).b_i = \varepsilon(u).b_i$$

D'où $\partial_{ij} = \xi_{ij} - \lambda_i \varphi^{-1} \delta_j$. Si le bigone u n'a pas disparu. Donc $\xi_{ij}(a_j) = \varepsilon(u)b_i$. D'après le lemme 15, si $\delta_j(a_j) \neq 0$ alors $\lambda_i(x) = 0$. Ceci implique que $\lambda_i \varphi^{-1} \delta_j(a_j) = 0$ et donc $\partial_{ij} = \xi_{ij} - \lambda_i \varphi^{-1} \delta_j$.

Donc $\partial = \xi - \lambda \varphi^{-1} \delta$. D'après le lemme d'élimination gaussienne les deux complexes de chaînes (17) et (18) sont homotopiquement équivalent. \square

Preuve du théorème 11. . Soit h_σ et h'_σ deux difféomorphismes (représentent deux tresses géométriques) isotopes. Soit $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ les complexes de chaînes associée à h_σ et h'_σ respectivement. Nous passons de h_σ à h'_σ par une isotopie qui fait apparaître ou disparaître un nombre n de bigones élémentaires. Raisonnons par induction sur le nombre de bigones.

Si $n = 1$, alors d'après le lemme 18 les deux complexes \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont homotopiquement équivalent.

Si $n > 1$, nous réappliquons le lemme 18. Nous obtenons que \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont homotopiquement équivalent. Donc les groupes de cohomologie $HF^*(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ et $HF^*(\beta_i, h'_\sigma(\alpha_j))$ sont isomorphes. \square

5 Fidélité

Dans ce paragraphe, nous montrons que l'homologie construite à la section 3 détecte la tresse triviale. Nous fixons une collection de courbes $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ comme dans la figure 2.1.

Lemme 19 [KS02] Si h est un élément de $\text{Diff}^+(D, P_n)$ satisfait $h(\alpha_i) \simeq \alpha_i$ pour tout i , alors $h \simeq \text{id}$.

Une courbe c dans (D, P_n) est dite **admissible** [KS02] si elle est l'image de α_i par un élément h de $\text{Diff}^+(D, P_n)$ pour un certain $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

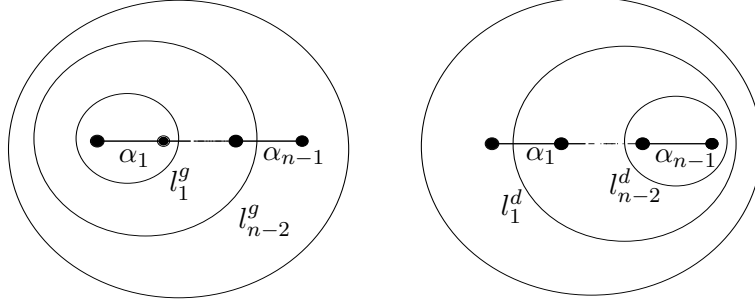


FIG. 11 –

Lemme 20 Soit c une courbe admissible dans (D, P_n) . Supposons qu'il existe $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $I(\alpha_i, c) = I(\alpha_i, \alpha_k)$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$. Alors on a

$$c \simeq \begin{cases} \alpha_1 \text{ ou } \tau_{d,1}^{\pm 1}(\alpha_1) & \text{si } k = 1, \\ \alpha_k \text{ ou } \tau_{d,k}^{\pm 1}(\alpha_k), \tau_{g,k}^{\pm 1}(\alpha_k), \tau_{d,k} \tau_{g,k}^{-1}(\alpha_k) \text{ ou } \tau_{d,k}^{-1} \tau_{g,k}(\alpha_k) & \text{si } 2 \leq k < n-2, \\ \alpha_{n-1} \text{ ou } \tau_{g,n-1}^{\pm 1}(\alpha_{n-1}) & \text{si } k = n-1. \end{cases}$$

Où $\tau_{d,1}, \dots, \tau_{d,n-2}$ sont les twists de Dehn positif le long des courbes fermées l_1^d, \dots, l_{n-2}^d et $\tau_{g,1}, \dots, \tau_{g,n-2}$ sont les twists le long des courbes l_1^g, \dots, l_{n-2}^g , voir la figure 11.

Preuve. De la même manière que le lemme 3.5 [KS02]. \square

Théorème 21 Soit σ une tresse dans B_n . Supposons que pour tout couple d'indice (i, j) , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un isomorphisme bigradué de $HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ vers $HF^{l,k}(\beta_i, \alpha_j)$. Alors σ est isotope à la tresse triviale.

Preuve. Supposons que $HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)), HF^{l,k}(\beta_i, \alpha_j)$ sont isomorphes. Alors pour tout $i = 1, \dots, n-1$, $HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_i))$ est isomorphe au groupe abélien libre engendré par l'élément x_{ii} , où x_{ii} est le point d'intersection de β_i avec $\sigma\alpha_i$, et $HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ est isomorphe au groupe trivial si $i \neq j$. Alors

$$I(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (19)$$

Donc $\alpha_j, h_\sigma(\alpha_j)$ ont les mêmes extrémités pour tout $j = 1, \dots, n - 1$. Ceci implique que

$$I(\alpha_k, h_\sigma(\alpha_j)) = I(\alpha_k, \alpha_j), \text{ pour tout } k = 1, \dots, n - 1.$$

Appliquons le Lemme 20 pour $c = h_\sigma(\alpha_j)$, Nous aurons

$$h_\sigma(\alpha_j) \simeq \alpha_j \text{ ou } \tau_{d,j}^{\pm 1}(\alpha_j) \text{ ou } \tau_{g,j}^{\pm 1}(\alpha_j).$$

Puisque $I(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j)) = 0$ pour tout $i \neq j$, alors $h_\sigma(\alpha_j) \simeq \alpha_j, \forall j = 1, \dots, n - 1$. D'après le Lemme 19 on a $h_\sigma \simeq (\tau_0)^m$, où $m \in \mathbb{Z}$ et τ_0 est le twist de Dehn positif le long du bord ∂D_n . Comme l'isomorphisme entre les groupes d'homologie $HF^{l,k}(\beta_i, h_\sigma(\alpha_j))$ et $HF^{l,k}(\beta_i, \alpha_j)$ est bigradué pour tout $i, j = 1, \dots, n - 1$, alors $m = 0$. D'où σ est la tresse triviale. \square

Conclusion et perspective Dans le travail de M. Khovanov et P. Seidel [KS02] la représentation par foncteur contient la notion de multiplicativité qui n'apparaît pas dans ce travail et que nous espérons la comprendre. M. Abouzaid [Abo08] a donné une version complète de la catégorie de Fukaya des surfaces fermées. Pouvons nous adapter le travail de Abouzaid pour décrire la structure multiplicative dans ce cadre ?

Remerciements Ce travail a été réalisé lorsque j'ai visité le LMAM, Université de Bretagne Sud (France). Je tiens à remercier le professeur C. Blanchet pour leur soutien et tous les conseils qu'il m'a prodigués. Je tiens à remercier Bertrand Patereau-Mirand avec qui j'ai longuement discuté.

Références

- [Abo08] M. Abouzaid, *On the Fukaya categories of higher genus surfaces*, Advances in Math 217 (2008), 1192–1235.
- [BN07] D. Bar-Natan, *Fast Khovanov homology computations*, J. Knot Theory Ramifications, 16 (2007), N0 3, 243–255.
- [Big99] S. Bigelow, *The Burau representation is not faithful for $n = 5$* , Geom. Topol. 3 (1999) 397–404 .
- [Big01] S. Bigelow, *braid groups are linear*, J. Amer. Math. Sco. 14 No. 2,(2001), 471–486.
- [Bir74] J.S. Birman, *Braids, links, and mapping class groups*, Ann. Math. Stud. vol **82**, Princeton University Press, N.J, 1974.
- [Bur36] W. Burau, *Über zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen*, Abh. Math. Sem. Ham. II, (1936) pages 171–178.
- [Ep66] D. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115** (1966), 83–107.

- [GRS03] R. Gautschi, J.W. Robbin, D.A. Salamon, *Heegaard splittings and Morse-Smale flows*, Int. J. Math. Math. Sci. **56** (2003), 3539–3572.
- [FLP79] A. Fathi, F. Laudenbach, et V. Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, vol. 66–67, Soc. Math. France, 1979.
- [KT08] C. Kassel, V. Turaev, *Braid Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 247, Springer-verlag, (2008).
- [Kho00] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. **101**, (2000), no.3, 359–426.
- [KS02] M. Khovanov, et P. Seidel, *Quivers, Floer cohomology, and braid group actions*, J. Amer. Math. Soc., **15**, (2002), no.1, 203–271.
- [PR00] L. Paris, et D. Rolfsen, *Geometric subgroups of mapping class groups*, J. reine angew. Math. **521** (2000), 47–83.
- [Tur02] V. Turaev, *Faithful linear representations of the braid groups*, Séminaire Bourbaki, (1999–2000), Astérisque, Vol. **276**, Soc. Math. France, Paris (2002), 389–409.