



**HAL**  
open science

# Réduction de modèle en Interaction Fluide Structure via la décomposition orthogonale aux valeurs propres

Aziz Hamdouni, Francisco Chinesta, Erwan Liberge

## ► To cite this version:

Aziz Hamdouni, Francisco Chinesta, Erwan Liberge. Réduction de modèle en Interaction Fluide Structure via la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Mhamed Souli; Jean-François Sigrist. Interaction Fluide Structure: Modélisation et simulation numérique, Hermès-Lavoisier, pp.209-287, 2009, Traité MIM - Mécanique et ingénierie des matériaux. hal-00403645

**HAL Id: hal-00403645**

**<https://hal.science/hal-00403645>**

Submitted on 9 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Réduction de modèle en interaction fluide structure via la décomposition orthogonale aux valeurs propres

Aziz HAMDOUNI, Francisco CHINESTA et Erwan LIBERGE

## 4.1. Introduction

L'intérêt pour la réduction de modèles s'est accru ces dernières années dans différentes disciplines. Ceci est dû essentiellement au fait que ces modèles sont plus simples à utiliser pour des études paramétriques ou le contrôle actif, voir pour le calcul en temps réel. Dans ce chapitre nous nous intéressons à la réduction de modèles en interaction fluide-structure. Par ce vocable, on entend la procédure qui consiste à remplacer le modèle continue initial par un système d'équations différentielles ordinaires ou par un système d'équations linéaires ou non linéaires à très peu d'inconnues. Ce nombre d'inconnues devra être très faible devant le nombre d'inconnues du système d'équations obtenu par une discrétisation classique (éléments finis, différences finies, volumes finies, méthodes spectrale, ...). La condition étant que ce système réduit conserve approximativement des informations jugées importantes dans le modèle continue à une précision fixée. Typiquement, une information fondamentale que l'on souhaite conserver est l'énergie de la solution du problème continue. Formellement, si la solution du problème continue est un élément d'un espace vectoriel normé  $V$ , que la discrétisation de ce problème se fait via un espace vectoriel de dimension finie noté  $V_n$  de dimension  $n$ . La réduction du modèle consiste à projeter le problème continue ou le problème discret sur un espace vectoriel  $V_N$  de dimension  $N \ll n$  avec  $\|J(N) - J(n)\| \leq \varepsilon$ , où  $J$  est la grandeur que l'on souhaite conserver et  $\varepsilon$  est la

précision souhaitée.

Dans cette classe de méthodes de réduction de modèles, une technique s'est plus particulièrement popularisée ces dernières années, ceci est dû aux succès qu'elle a rencontré dans la modélisation de la turbulence, il s'agit de la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Elle est utilisée dans des domaines aussi divers que l'analyse de données, l'aéroacoustique, le traitement d'image, la chimie, la mécanique des fluides et plus récemment en mécanique des structures. Son usage dans le domaine de l'interaction fluide structure est en cours de développement. Très peu de travaux existent dans ce domaine. C'est pour cela que nous avons choisi de consacrer ce chapitre à la décomposition orthogonale aux valeurs propres afin de la diffuser dans la communauté de l'interaction fluide-structure et montrer ses potentialités dans ce domaine. Dans la suite nous traiterons plus particulièrement de cette approche. Nous commencerons par donner une présentation générale de la technique de décomposition orthogonale aux valeurs propres. Nous présenterons d'abord les fondements mathématiques de l'approche. Nous donnerons ensuite la formulation discrète de la POD, en particulier on introduira l'approche de réduction dite a priori qui consiste à déterminer la base POD d'une manière itérative. Quelques exemples de mise en oeuvre de l'approche seront présentés à la fois pour des configurations simples et pédagogique et pour des configurations d'écoulements complexes. Enfin, nous présenterons une formulation permettant d'adapter la base POD pour les problèmes d'interaction fluide-structure. En effet, l'extension de cette technique pour ces problèmes n'est pas immédiate : la base POD est déterminée dans un domaine spatial donné or en interaction fluide-structure, les domaines définissant le fluide et la structures sont mobile. Aussi, il est nécessaire d'associer la base POD à un domaine "virtuel" fixe qu'il s'agit de déterminer. Une fois ce problème résolu, il faudra résoudre la difficulté liée à l'obtention d'un modèle réduit global pour le système couplé. Ce qui représente une grande difficulté, étant donné que les équations du fluide sont écrites en variables euleriennes et celles du solide en variables lagrangiennes. Une formulation de type ALE gardera la difficulté intacte. Nous montrerons dans cette dernière partie, qu'une formulation de type domaine fictif permet de lever cette difficulté quand le solide est rigide.

## 4.2. Présentation générale de la POD

### 4.2.1. Introduction

La POD fut introduite en mécanique des fluides par Lumley en 1967 [?] dans le but d'identifier les structures cohérentes d'un écoulement turbulent. La POD y est appliquée par la méthode que l'on appellera classique qui consiste à rechercher les vecteurs propres d'un opérateur de corrélation spatial du champ de vitesse. Cependant il faut attendre une approche de la POD par la méthode Snapshot [?] (cf section 4.2.4)

permettant de diminuer la taille du problème à résoudre pour que la POD commence à se développer en mécanique des fluides. Depuis les années 90, la POD a connu un grand nombre d'applications en mécanique des fluides sur des problèmes divers. On se contentera d'en mentionner juste quelques unes ici, pour une bibliographie plus complète on peut se référer à Berkooz et al. [?], Couplet [?], Holmes et al. [?], Solari et al. [?] ou encore Allery [?], Allery et al. [?, ?].

Aubry et al. [?] appliquèrent en premier un modèle réduit POD pour l'étude de la couche limite turbulente. Ensuite, différentes configurations ont été étudiées, par exemple l'étude du développement de la couche limite turbulente le long d'une plaque plane ([?], [?]), écoulement en canal [?], [?], ou encore cavité entraînée [?]. La méthode a connu aussi un développement très important en aérodynamique pour l'étude des ondes de chocs [?], [?]. On peut citer pour exemple de l'efficacité de la POD les articles de Allery et al. [?, ?] qui l'appliquent à l'étude de l'effet Coanda [?] et pour construire un système dynamique d'ordre bas modélisant la dispersion de particules dans une cavité ventilée [?]. Dans ces deux cas très peu de modes sont nécessaires, puisque dans le cas de l'étude de l'effet Coanda, 6 modes POD suffisent pour capturer complètement la structure de l'écoulement et construire un système dynamique d'ordre bas qui reproduit bien le champ de vitesse. De même dans le second article où seulement 4 modes sont utilisés.

#### 4.2.2. Formulation de la POD continue

Nous allons formuler ici la construction de la base POD dans le cadre des fonctions réelles déterministes. Même si historiquement la méthode a été développée pour des processus aléatoires. L'extension au cas des fonctions aléatoires à valeurs complexes est aisée.

On considère un domaine spatial  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , de dimension  $d = 1, 2$  ou  $3$ ,  $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  un repère orthonormé direct lié à  $\Omega$ , un intervalle de temps  $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}$ , une variable d'espace  $x \in \Omega$ , et une variable temporelle  $t \in \mathbf{T}$ . Soit  $v \in L^2(\mathbf{T}; \mathcal{V})$ , un champ de vitesse de l'écoulement  $v(t) \in \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}$  étant un espace de Hilbert. Cherchons alors  $\Phi \in \mathcal{V}$  qui approxime  $v$  au mieux en moyenne. Cela revient à maximiser la moyenne des projections de  $v(t)$  sur  $\Phi \in \mathcal{V}$ . Ainsi le problème se formule de la manière suivante :  
Trouver  $\Phi \in \mathcal{V}^*$  tel que :

$$\frac{\langle (v(t), \Phi)^2 \rangle}{(\Phi, \Phi)} = \max_{\phi \in \mathcal{V}^*} \frac{\langle (v(t), \phi)^2 \rangle}{(\phi, \phi)} \quad (4.1)$$

Où  $\mathcal{V}^* = \mathcal{V} \setminus \{0\}$ ,  $(\bullet, \bullet)$  désigne le produit scalaire de  $\mathcal{V}$  et  $\langle \bullet \rangle$  un opérateur de moyenne temporelle.

En notant

$$J(\phi, v) = \langle (v(t), \phi)^2 \rangle \quad (4.2)$$

le problème peut aussi s'écrire

$$\Phi = \underset{\phi \in \mathcal{V}^*}{\operatorname{argmax}} J(\phi, v) \quad \text{sous la contrainte } \|\phi\|^2 = 1 \quad (4.3)$$

où  $\|\phi\| = 1$  est la norme de  $\phi$  dans  $\mathcal{V}$  définie par  $\|\phi\|^2 = (\phi, \phi)$ .

Alors en effectuant un calcul de variation sous la contrainte  $\|\Phi\|^2 = 1$ , on obtient :  
 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  (multiplicateur de Lagrange) tel que :

$$\langle (v(t), \Phi) (v(t), \delta\Phi) \rangle - \lambda (\Phi, \delta\Phi) = 0 \quad \forall \delta\Phi \in \mathcal{V} \quad (4.4)$$

Ce qui donne après manipulations :

$$\langle (v(t), \Phi) v(t) \rangle = \lambda \Phi \quad (4.5)$$

Ainsi  $\Phi$  est solution du problème aux valeurs propres :

$$\mathcal{R}\Phi = \lambda\Phi \quad \text{dans } \mathcal{V} \quad (4.6)$$

Où  $\mathcal{R}$  est l'opérateur linéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V} \\ \Phi &\longmapsto \mathcal{R}\Phi = \langle (v(t), \Phi) v(t) \rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

### Propriétés de $\mathcal{R}$

•  $\mathcal{R}$  est autoadjoint, défini non négatif. En effet par un calcul immédiat on montre que :  $\forall \varphi$  et  $\psi$  deux éléments de  $\mathcal{V}$  on a :

$$(\mathcal{R}\varphi, \psi) = (\mathcal{R}\psi, \varphi)$$

et

$$(\mathcal{R}\varphi, \varphi) = \langle (v(t), \varphi)^2 \rangle \geq 0$$

• Les valeurs propres de  $\mathcal{R}$  sont des réels positifs et si  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres différentes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  alors :

$$(\Phi_1, \Phi_2) = 0$$

C'est une conséquence immédiate de la première propriété.

**Exemple** : Si  $\mathcal{V} = \mathbf{L}^2(\Omega)$  alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\Phi(x) &= \frac{1}{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} \left\{ \left[ \int_{\Omega} v(y, t) \Phi(y) dy \right] v(x, t) \right\} dt \\
&= \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} v(x, t) v(y, t) dt \right\} \Phi(y) dy \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{R}(x, y) \Phi(y) dy
\end{aligned}$$

où  $\mathbf{R}(x, y) = \frac{1}{\mathbf{T}} \int_{\mathbf{T}} v(x, t) v(y, t) dt$  est l'opérateur de corrélation spatiale.

Si  $\mathbf{R} \in \mathbf{L}^2(\Omega \times \Omega)$  alors

$\mathcal{R}$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt<sup>1</sup>, en particulier  $\mathcal{R}$  est compact<sup>2</sup>

• Les théories spectrales permettent d'assurer l'existence d'une suite de valeurs propres positives, décroissante qui converge vers 0.

$$\lambda_n \in \mathbb{R}^+ \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \longrightarrow 0$$

et une suite de vecteurs propres associés,  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  orthogonale, formant une base hilbertienne de  $\mathbf{L}^2$ .

On peut alors écrire

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \Phi_k(x) \quad \text{au sens de } \mathbf{L}^2$$

où  $a_k(t) = (v(\bullet, t), \Phi_k)$  est appelé coefficient temporel.

---

1. Un opérateur  $T$  de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{V}$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt  $\|T\|_2 = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \|T\varphi_n\|_{\mathcal{V}}^2 \right)^{1/2} < +\infty$

Pour  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne orthonormée de  $\mathcal{V}$ . La définition ci-dessus est indépendante de la base  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2. Un opérateur  $T$  est compact s'il transforme chaque partie bornée de  $\mathcal{V}$  en une partie relativement compacte de  $\mathcal{V}$  ( i.e dont l'adhérence est compacte). En particulier, on montre que les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont compacts. On sait alors que les opérateurs compacts ont un spectre discret.

- L'extension à un champ de vecteur est immédiate. Dans ce cas les vecteurs propres sont aussi des champs de vecteurs et on peut montrer que si  $v$  est un champ tel que  $\text{div } v = 0$  alors

$$\text{div} \Phi_n = 0 \quad (4.8)$$

De même la base POD respecte les conditions aux limites homogènes.

- L'erreur induite par la base tronquée à  $N$  modes correspond à la somme des valeurs propres des modes négligés :

$$\langle \|v(t) - \sum_{k=1}^N a_k(t) \Phi_k\|^2 \rangle = \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k \quad (4.9)$$

- Chaque valeur propre  $\lambda_i$  représente la part d'énergie capturée par chaque mode  $\Phi_i$ . Ce qui veut dire que si on tronque la base à  $N$  modes la décomposition

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(x) \quad (4.10)$$

est optimale au sens énergétique. On ne peut pas obtenir une décomposition sur  $N$  modes qui contienne plus d'énergie que la décomposition (4.10).

- En pratique, quelques dizaines de modes suffisent pour capturer la quasitotalité de l'énergie.

La formulation continue permet d'introduire les théorèmes et principales propriétés de la POD. En pratique on utilise sa formulation discrète (qui est équivalente) que l'on introduit dans la section suivante.

### 4.2.3. Formulation de la POD discrète

On suppose connue l'évolution d'un champ  $v(x, t)$ . En pratique, ce champ est défini sur les noeuds  $x_i$  d'un maillage du domaine spatiale pour différents instants  $t^m = m\Delta t$ . On note  $n$  le nombre de noeuds du maillage, et  $M$  le nombre de clichés de l'écoulement ( $i \in [1, \dots, n]$  et  $m \in [0, \dots, M]$ ) et on introduit la notation suivante :  $v(x_i, t^m) = v^m(\mathbf{x}_i) \equiv v_i^m(t^m)$ .  $\mathbf{v}^m$  désigne le vecteur contenant le nombre de degrés de liberté au temps  $t^m$ . L'objectif de la décomposition orthogonal aux valeurs propres est d'obtenir les structures  $\Phi(x)$  les plus typiques ou les plus caractéristiques parmi ces  $v^m(x)$ . La maximisation de :

$$\alpha = \frac{\sum_{m=1}^{m=M} \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \Phi(x_i) v^m(x_i) \right]^2}{\sum_{i=1}^{i=n} (\Phi(x_i))^2} \quad (4.11)$$

est équivalente au problème suivant :

$$\sum_{m=1}^{m=M} \left[ \left( \sum_{i=1}^{i=n} \tilde{\Phi}(x_i) v^m(x_i) \right) \left( \sum_{j=1}^{j=n} \Phi(x_j) v^m(x_j) \right) \right] = \alpha \sum_{i=1}^{i=n} \tilde{\Phi}(x_i) \Phi(x_i); \quad \forall \tilde{\Phi} \quad (4.12)$$

Ce qui peut être écrit sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{ \sum_{j=1}^{j=n} \left[ \sum_{m=1}^{m=M} v^m(x_i) v^m(x_j) \Phi(x_j) \right] \tilde{\Phi}(x_i) \right\} = \alpha \sum_{i=1}^{i=n} \tilde{\Phi}(x_i) \Phi(x_i); \quad \forall \tilde{\Phi} \quad (4.13)$$

$\Phi$  étant le vecteur dont la  $i^{\text{ième}}$  composante est définie par  $\Phi(x_i)$ . L'équation (4.13) se ramène alors au problème aux valeurs propres (4.14), dont les vecteurs propres relatifs aux plus grandes valeurs propres définissent les structures caractéristiques de  $v^m(x)$ ,

$$\tilde{\Phi}^T \mathbf{c} \Phi = \alpha \tilde{\Phi}^T \Phi; \quad \forall \tilde{\Phi} \Rightarrow \mathbf{c} \Phi = \alpha \Phi \quad (4.14)$$

Où la matrice de corrélation  $c$  en deux points

$$c_{ij} = \sum_{m=1}^{m=M} v^m(x_i) v^m(x_j) \Leftrightarrow \mathbf{c} = \sum_{m=1}^{m=M} \mathbf{v}^m \cdot (\mathbf{v}^m)^T \quad (4.15)$$

est symétrique et définie non négative. Si on définit la matrice  $\mathbf{Q}$  contenant les grandeurs discrètes du champ :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & \cdots & v_1^P \\ v_2^1 & v_2^2 & \cdots & v_2^P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_N^1 & v_N^2 & \cdots & v_N^P \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

on vérifie que la matrice  $\mathbf{c}$  définie par l'équation (4.14) s'écrit :

$$\mathbf{c} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (4.17)$$

#### 4.2.4. La snapshot POD

Dans le cas de problèmes de grandes dimensions, la recherche des vecteurs propres de l'opérateur  $R$  peut s'avérer coûteuse. En effet, on peut avoir à résoudre un problème de dimension  $4n_{x_1} n_{x_2}$  en 2D ou  $9n_{x_1} n_{x_2} n_{x_3}$  en 3D où  $n_{x_1}$ ,  $n_{x_2}$ ,  $n_{x_3}$  représentent le nombre de noeuds du maillage selon les axes  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  et  $\mathbf{x}_3$ . La puissance d'un simple ordinateur peut vite être dépassée. Une technique alternative visant à réduire la taille du problème aux valeurs propres consiste à appliquer la snapshot POD introduite par Sirovitch [?]. Cette technique est basée sur la recherche des modes les plus significatifs



de la POD, mais ces modes sont recherchés comme une combinaison linéaire des  $M$  clichés qui ont été utilisée précédemment.

La méthode consiste à considérer que si avec  $M$  clichés de l'écoulement,  $M \ll nn_c$ , où  $n$  représente le nombre de noeuds et  $n_c$  le nombre de composantes, l'écoulement est correctement représenté, alors on cherche à résoudre non plus un problème de dimension  $nn_c \times nn_c$  mais un problème de dimension  $M \times M$ .

Le principe est de chercher non plus directement la base composée des  $(\Phi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n_R$ , mais de rechercher en premier lieu les coefficient  $A_k^i$  <sup>3</sup>  $k = 1, \dots, M$  tels que :

$$\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^M A_k^i v(x, t_i) \quad (4.18)$$

En introduisant la décomposition (4.18) dans (4.6) on montre que l'on se ramène alors au problème suivant :

$$\sum_{i=1}^M \frac{1}{M} (v(t_i), v(t_j)) A_k^j = \lambda_k A_k^i \text{ pour } i = 1 \dots M \quad (4.19)$$

Où  $\lambda_k$  est la valeur propre associée au mode POD  $\Phi_k$ .

Ce problème est alors de dimension nettement inférieure au problème 4.6. Ensuite la base POD est obtenue en calculant (4.18). Il n'y a pas vraiment de règle sur le nombre de snapshots et l'espacement nécessaire entre chaque snapshot.

Le choix d'utiliser la méthode des snapshots ou la méthode que l'on qualifera de classique dépend du type de données à traiter. Dans le cas de données expérimentales type PIV la méthode classique est utilisée (pour exemple [?, ?, ?, ?]). Par contre dans le cas de simulations numériques où le maillage spatial est important et la taille de l'échantillon temporelle limitée, la méthode des snapshots est préconisée.

Dans ce qui a été présenté ici on a considéré des processus aléatoire. Si le processus est stationnaire et ergodique <sup>4</sup>, alors la présentation précédente de la POD reste valable. Par contre, si le processus est instationnaire <sup>5</sup>, l'approche par Snapshot qui utilise l'hypothèse d'ergodicité n'est plus valable. Aussi, Aubry et al. [?] ont proposé la décomposition Bi-orthogonale (BOD).

---

3.  $A_k = (A_k^1 \dots A_k^M) \in \mathbb{R}^M$

4. Où l'on peut confondre sa moyenne temporelle et sa moyenne statistique

5. Sa moyenne statistique dépend du temps

#### 4.2.5. Ecriture d'un modèle réduit ( a posteriori)

La construction d'un modèle réduit consiste à résoudre en premier lieu le problème aux valeurs propres défini par l'équation (4.14). On sélectionne ensuite les  $N$  vecteurs propres  $\Phi_k$ ,  $k \in [1, \dots, N]$  associés aux plus grandes valeurs propres, tel que le rapport entre la plus grande valeur propre et la dernière retenue soit suffisamment grand ( $10^8$  dans notre cas). En pratique  $N$  est très petit par rapport à  $n$ . L'objectif est ensuite d'approximer la solution  $v^m(x)$  en utilisant ces  $N$  vecteurs propres  $\Phi_k$ ,  $k \in [1, \dots, N]$ . On définit dans ce but la matrice  $\mathbf{B} = [\Phi_1 \cdots \Phi_n]$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{x}_1) & \Phi_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & \Phi_n(\mathbf{x}_1) \\ \Phi_1(\mathbf{x}_2) & \Phi_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & \Phi_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(\mathbf{x}_N) & \Phi_2(\mathbf{x}_N) & \cdots & \Phi_n(\mathbf{x}_N) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

On considère maintenant les équations du système linéaire résultant de la discrétisation semi-implicite de l'équation différentielle partielle parabolique du problème :

$$\mathbf{G}^m \mathbf{v}^{m+1} = \mathbf{H}^m \quad (4.21)$$

En exprimant

$$\mathbf{v}^{m+1} = \sum_{i=1}^{i=n} \Phi_i \zeta_i^{m+1} = \mathbf{B} \zeta^{m+1} \quad (4.22)$$

l'équation (4.21) se réécrit

$$\mathbf{G}^m \mathbf{v}^{m+1} = \mathbf{H}^m \Rightarrow \mathbf{G}^m \mathbf{B} \zeta^{m+1} = \mathbf{H}^m \quad (4.23)$$

et en multipliant les termes par  $\mathbf{B}^T$  on obtient

$$\mathbf{B}^T \mathbf{G}^m \mathbf{B} \zeta^{m+1} = \mathbf{B}^T \mathbf{H}^m \quad (4.24)$$

Où  $\mathbf{B}^T \mathbf{G}^m \mathbf{B}$  est de taille  $N \times N$  au lieu de  $n \times n$ . Quand  $N \ll n$ , comme c'est le cas pour de nombreux modèles physiques, la résolution de l'équation (4.24) est préférée à cause de sa taille réduite.

**Remarque 4.2.1** L'équation (4.24) peut aussi être déduite en introduisant l'approximation (4.22) dans la formulation variationnelle de Galerkin relative à l'équation aux dérivées partielles. Si les fonctions tests dans la formulation variationnelle de l'équation partielle parabolique sont approximées par la forme (4.22), alors l'équation (4.24) se trouve facilement. Cela fait l'objet de la section suivante.

#### 4.2.6. Systèmes dynamiques pour l'équation de Navier-Stokes obtenus à partir de la formulation continue

La POD permet d'obtenir une base qui est optimale au sens de l'énergie, c'est à dire que les premiers vecteurs contiennent l'essentiel de l'énergie (au sens statistique) du champ étudié. On peut espérer qu'une projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur les  $N$  premiers modes énergétiques permette d'obtenir un système dynamique d'ordre bas reproduisant correctement le phénomène étudié. La base étant spatiale et donc fixe dans le temps, le résultat de la projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes donne un système d'équation ordinaire en temps beaucoup plus rapide à résoudre.

##### 4.2.6.1. Système dynamique basé sur le champ de vitesse instantané

On considère le champ de vitesse fluide  $v$  projeté sur la base POD tronquée à  $N$  modes :

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \Phi_k(x) \quad (4.25)$$

Pour la suite de cette section, on prendra la même notation pour  $v$  et  $v_N$ . On rappelle les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible sous leur forme adimensionnelle :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta v \end{aligned} \quad (4.26)$$

Où  $Re$  représente le nombre adimensionnel de Reynolds, dont on rappelle ici l'expression :

$$Re = \frac{\rho V_0 L}{\mu} \quad (4.27)$$

$\rho$  étant la densité volumique du fluide,  $\mu$  sa viscosité dynamique,  $V_0$  une vitesse caractéristique de l'écoulement et  $L$  une longueur caractéristique.

Pour un écoulement incompressible, la base POD obtenue est à divergence nulle. Par conséquent on n'a pas à tenir compte de l'équation d'incompressibilité.

On considère la formulation faible de l'équation (4.26) sur la base POD :

Trouver  $v \in \tilde{\mathcal{V}}$  tel que  $\nabla \cdot v = 0$   
 $\forall \Phi_i, i = 1, \dots, N, \nabla \cdot \Phi = 0$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \Phi_i dx + \int_{\Omega} (v \cdot \nabla v) \cdot \Phi_i dx = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \Phi_i dx + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta v \cdot \Phi_i dx \quad (4.28)$$

En tenant compte de la décomposition (4.25) de  $v$  sur la base tronquée à  $N$  modes, et de l'orthogonalité des modes POD, on obtient le système suivant :

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_k a_l C_{kli} + \sum_{k=1}^N a_k B_{ki} + D_i \quad \text{avec } i = 1 \dots N \quad (4.29)$$

où

$$C_{kli} = -(\Phi_k \cdot \nabla \Phi_l, \Phi_i) = - \int_{\Omega} (\Phi_k \cdot \nabla \Phi_l) \cdot \Phi_i dx \quad (4.30)$$

$$B_{ki} = \frac{1}{R_e} (\Delta \Phi_k, \Phi_i) = \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \Delta \Phi_k \cdot \Phi_i dx \quad (4.31)$$

$$D_i = - \int_{\partial\Omega} p \Phi_i \cdot \mathbf{n} dx \quad (4.32)$$

$$(4.33)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure au domaine fluide sur la frontière  $\partial\Omega$ .

Pour résoudre ce système il suffit de calculer au préalable les coefficients  $C_{kli}$ ,  $B_{ki}$  et  $D_i$ . La base POD étant obtenue pour la vitesse, il reste un terme problématique à calculer  $D_i$  qui sera vu plus loin.

#### 4.2.6.2. Système dynamique basé sur le champ de vitesse fluctuant

Comme en pratique la première fonction POD capture l'essentiel du signal, il est courant de décomposer le champ de vitesse en une partie stationnaire et une partie fluctuante. La POD est ensuite appliquée sur le champ fluctuant et le système dynamique est construit pour celui-ci :

$$v = \langle v \rangle + v' \quad p = \langle p \rangle + p' \quad (4.34)$$

Avec  $\langle \bullet \rangle$  qui représente l'opérateur de moyenne temporelle explicité précédemment. Pour plus de commodité pour l'écriture des équations on remplacera dans la suite  $\langle \bullet \rangle$  par  $\bar{\bullet}$ .

Cette équation est introduite dans l'équation (4.26), auquel on soustrait sa moyenne. On obtient alors l'équation de Navier-Stokes aux grandeurs fluctuantes :

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v' \cdot \nabla v' + \bar{v} \cdot \nabla v' + v' \cdot \nabla \bar{v} - \overline{v' \cdot \nabla v'} = -\nabla p' + \frac{1}{R_e} \Delta v' \quad (4.35)$$

En procédant de la même façon que pour le champ instantané, on décompose  $v'$  sur la base POD  $\Phi'$  tronquée à  $N$  modes

$$v'(x, t) = \sum_{k=1}^N a'_k(t) \Phi'_k(x) \quad (4.36)$$

on obtient le système dynamique pour le champ fluctuant :

$$\frac{da'_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \left( a'_k a'_l - \overline{a'_k a'_l} \right) C_{kli} + \sum_{k=1}^N a'_k B_{ki} + D_i \quad (4.37)$$

où

$$\begin{aligned} C_{kli} &= - \int_{\Omega} (\Phi'_k \cdot \nabla \Phi'_l) \cdot \Phi'_i dx \\ B_{ki} &= \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta \Phi'_k \cdot \Phi'_i dx - \int_{\Omega} (\nabla \bar{v} \cdot \Phi'_k) \cdot \Phi'_i dx - \int_{\Omega} (\nabla \Phi'_k \cdot \bar{v}) \cdot \Phi'_i dx \\ D_i &= - \int_{\partial\Omega} p' \Phi'_i \cdot \mathbf{n} dx \end{aligned} \quad (4.38)$$

Il existe plusieurs façon de calculer le terme  $\overline{a'_k a'_l}$ . La première méthode [?] consiste à estimer ce terme pendant le calcul sur les pas de temps précédents. La seconde méthode est de considérer que ce terme est constant par rapport au temps et de poser l'égalité suivante :

$$\overline{a'_k a'_l} = \lambda_k \delta_{kl} \quad (4.39)$$

Une troisième possibilité est évoquée par Allery [?], qui en introduisant directement (4.34) dans (4.26), obtient le système dynamique suivant :

$$\frac{da'_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a'_k a'_l C_{kli} + \sum_{k=1}^N a'_k B_{ki} + D_i + H_i \quad (4.40)$$

où

$$\begin{aligned} C_{kli} &= - \int_{\Omega} (\Phi'_k \cdot \nabla \Phi'_l) \cdot \Phi'_i dx \\ B_{ki} &= \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta \Phi'_k \cdot \Phi'_i dx - \int_{\Omega} (\nabla \bar{v} \cdot \Phi'_k) \cdot \Phi'_i dx - \int_{\Omega} (\nabla \Phi'_k \cdot \bar{v}) \cdot \Phi'_i dx \\ D_i &= - \int_{\partial\Omega} p' \Phi'_i \cdot \mathbf{n} dx \\ H_i &= - \int_{\Omega} \left( \nabla \bar{p} - \frac{1}{Re} \Delta \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) \cdot \Phi'_i dx \end{aligned} \quad (4.41)$$

### 4.2.6.3. Traitement du terme de pression

Les systèmes dynamiques réduits obtenus jusqu'à présent font apparaître un terme de pression que l'on ne peut pas projeter sur les modes POD. Pour des écoulements où les conditions aux limites sont homogènes, les modes POD s'annulant là où le champ de vitesse est nul, les coefficients  $D_n$  ne seront pas pris en compte. Dans les autres cas, il convient soit de le modéliser [?], soit d'essayer de le faire disparaître. Rempfer [?] propose soit d'utiliser une équation de poisson pour relier la pression à la vitesse ou d'appliquer la POD à l'équation de Navier-Stokes en vorticité afin d'éliminer la pression. Allery [?] propose quant à lui d'utiliser une formulation en contrainte. C'est cette dernière formulation que nous allons développer ci-dessous.

La méthode consiste à transformer les conditions aux limites en vitesse en conditions aux limites en contrainte de type  $\sigma \cdot \mathbf{n} = F$ . La frontière du domaine fluide  $\Gamma_f$  est décomposée en une sous-frontière où la vitesse est nulle  $\Gamma_v$  et une sous-frontière  $\Gamma_\sigma$  sur laquelle une condition aux limites en contrainte est imposée.

$$\Gamma_f = \Gamma_v \cup \Gamma_\sigma \quad (4.42)$$

En considérant alors  $v^{cl}$  la vitesse sur  $\Gamma_\sigma$  et  $v|_{\Gamma_\sigma}$  la valeur de la vitesse calculée sur cette même frontière on introduit la relation suivante :

$$\sigma \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_\sigma} = F = G (v|_{\Gamma_\sigma} - v^{cl}) \quad (4.43)$$

où  $G$  est une constante. On a donc

$$v|_{\Gamma_\sigma} - v^{cl} = \frac{F}{G} \quad (4.44)$$

$v|_{\Gamma_\sigma}$  tend vers  $v^{cl}$  quand  $G$  est relativement grand par rapport à  $\|F\|$ . Il s'agit donc d'une technique de pénalisation de la condition aux limites de Dirichlet. Cette technique a été introduite par Batoz [?] en éléments finis.

On formule les systèmes dynamiques en gardant au second membre  $\nabla \cdot \sigma$  et on remplace  $\sigma \cdot \mathbf{n}$  dans l'intégrale  $\int_{\Gamma_f} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \Phi dx$  par  $G (v|_{\Gamma_\sigma} - v^{cl})$

Ce qui donne pour le système dynamique sur le champ de vitesse instantané :

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_k a_l C_{kli} + \sum_{k=1}^N a_k (B_{ki} + E_{ki}) + D_i \quad \text{avec } i = 1 \dots N \quad (4.45)$$

où

$$\begin{aligned}
C_{kli} &= -(\Phi_k \cdot \nabla \Phi_l, \Phi_i) \\
B_{ki} &= -\frac{1}{Re} (\mathbf{Tr}(\mathbf{D}(\Phi_k)), \nabla \Phi_i) \\
D_i &= -G \int_{\Gamma_\sigma} v^{cl} \Phi_i \cdot \mathbf{n} dx \\
E_{ki} &= G \int_{\Gamma_\sigma} \Phi_k \cdot \Phi_i dx
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Pour le champ de vitesse fuctuant :

$$\frac{da'_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a'_k a'_l C_{kli} + \sum_{k=1}^N a'_k (B_{ki} + E_{ki}) + D_i + K_i \tag{4.47}$$

où

$$\begin{aligned}
C_{kli} &= -(\Phi'_k \cdot \nabla \Phi'_l, \Phi'_i) \\
B_{ki} &= -\frac{1}{Re} (\mathbf{Tr}(\mathbf{D}(\Phi'_k)), \nabla \Phi'_i) - (\bar{v} \cdot \nabla \Phi'_k + \Phi'_k \cdot \nabla \bar{v}, \Phi'_i) \\
D_i &= -\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \mathbf{Tr}(\mathbf{D}(\bar{v}) \cdot \nabla \Phi'_i) dx - (\bar{v} \cdot \nabla \bar{v}, \Phi'_i) \\
E_{ki} &= G \int_{\Gamma_\sigma} \Phi'_k \cdot \Phi'_i \\
K_i &= G \int_{\Gamma_\sigma} (\bar{v} - v^{cl}) \Phi'_i dx
\end{aligned} \tag{4.48}$$

#### 4.2.6.4. Stabilisation correction du système dynamique

On a jusqu'à présent construit des systèmes dynamiques d'ordre bas en conservant les  $N$  premiers modes POD correspondant aux  $N$  premières valeurs propres dominantes. En faisant cela on conserve donc les modes ayant la plus forte contribution en énergie cinétique, négligeant alors ceux représentant les plus petites échelles, responsables de la dissipation énergétique. La conséquence de ce choix pouvant mener à l'instabilité du système réduit, on cherche à modéliser les transferts d'énergies négligés des grandes échelles vers les petites échelles.

L'hypothèse la plus utilisée est de considérer que l'influence des petites échelles peut-être modélisée par une viscosité tourbillonnaire que l'on peut rajouter. Cette méthode introduite par Rempfer consiste à multiplier la viscosité  $\nu$  intervenant dans le système dynamique par un facteur constant et identique pour chaque mode  $1 + \nu_{ad}$ . Il constate que la viscosité adimensionnelle est pratiquement nulle pour le premier mode, approximativement égale à 1 pour le quarantième et est quasiment une fonction

linéaire du numéro de mode. Ce modèle linéaire est repris par Cazemier [?], sous la forme suivante :

$$\nu_{ad} = ic \quad (4.49)$$

Où  $i$  est le numéro du mode et  $c$  une constante. La constante est déterminée après plusieurs essais, celle donnant le meilleur résultat est gardée. Cordier [?] utilise quant à lui une viscosité supplémentaire qu'il ajuste. Si la viscosité adimensionnelle est faible, le système risque de diverger, l'inverse aura pour conséquence de trop dissiper le système et donc de converger vers 0.

Une deuxième méthode consiste à introduire un coefficient d'amortissement linéaire par l'intermédiaire de considération énergétique. Le lecteur pourra se référer à Cazemier et al. [?] qui appliquent cette méthode à la cavité entraînée pour de plus amples informations.

Iollo et al. [?] discutent du choix de la norme employer dans la définition de la POD. Ils proposent de redéfinir cette norme, afin que les petites échelles, négligées par la troncature de la base POD aux grandes échelles, soient représentées. Ils choisissent alors une norme dans un espace de Sobolev  $\mathbf{H}^1$  :

$$\text{Soit } u, v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (u, v) = \int_{\Omega} uv dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (4.50)$$

Où  $\varepsilon$  est choisi en fonction de la configuration étudiée. Par exemple, suivant des considérations dimensionnelles, le choix d'un  $\varepsilon$  proportionnel à  $\frac{\tau}{Re}$ , avec  $\tau$  l'échelle de temps caractéristique des équations adimensionnalisées, est approprié.

Ensuite, le système d'équations décrivant le problème est projeté sur cette base réduite en utilisant le produit scalaire de  $\mathbf{H}^1$ .

Iollo et al. [?] testent cette méthode sur un écoulement autour d'un cylindre carré pour des nombres de Reynolds de 4200 et 22000. Pour le premier test, l'utilisation de la norme  $\mathbf{L}^2$  ou de la norme  $\mathbf{H}^1$  donne des résultats équivalents pour la reconstruction du coefficient de traînée. Par contre, pour un Reynolds de 22000, la norme  $\mathbf{H}^1$  utilisée avec un  $\varepsilon = 10$ , donne des résultats légèrement meilleurs. Cependant la méthode utilisée pour stabiliser le système dynamique en norme  $\mathbf{L}^2$  n'est pas décrite. Il semble que plus le nombre de Reynolds augmente, plus le choix de la norme  $\mathbf{H}^1$  semble judicieux, à condition d'avoir un bon coefficient de stabilisation  $\varepsilon$ .

Couplet et al. [?] modifient le système dynamique par un problème de minimisation d'une fonctionnelle et obtiennent un système dynamique corrigé de manière à trouver les coefficients temporels  $a_n$  adéquats.

**Remarque 4.2.2** Dans l'analyse précédente, la base réduite a été calculée à partir des résultats du calcul de l'évolution d'un champ inconnu. Il a donc fallu résoudre



au préalable un problème discret. On peut alors se demander l'intérêt d'une telle approche. On peut en citer deux principaux. Le premier consiste à résoudre le modèle non-réduit sur un petit intervalle de temps à partir duquel on construit donc le modèle réduit. Celui-ci est ensuite utilisé pour construire une solution sur un temps plus long, ce qui permet des économies de temps de calcul. Le second consiste à résoudre le modèle non réduit sur un intervalle de temps, sur lequel on définit une base réduite que l'on utilise ensuite pour des problèmes similaires au modèle complet, mais qui comportent des variations comme par exemple pour les paramètres matériaux ou les conditions aux limites. Des exemples récents concernant de telles approches peuvent être trouvés dans [?], [?], [?], [?], [?] [?],[?], [?].

### 4.3. Quelques exemples

#### 4.3.1. Illustration de l'approche directe

On considère dans cette section l'exemple 1D de l'équation de diffusion d'un champ scalaire  $v$  (on omet les unités, celles-ci étant exprimées dans le système métrique).

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4.51)$$

Avec un coefficient de diffusion constant  $\lambda = 0.01$ ,  $t \in ]0, 30]$  et  $x \in ]0, 1[$ . La condition initiale est  $v(x, t = 0) = 1$  et les conditions aux limites sont données par  $\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x=0,t)} = q(t)$  et  $\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x=1,t)} = 0$ . Les simulations qui suivent ont été effectuées avec différentes valeurs de  $q(t)$ .

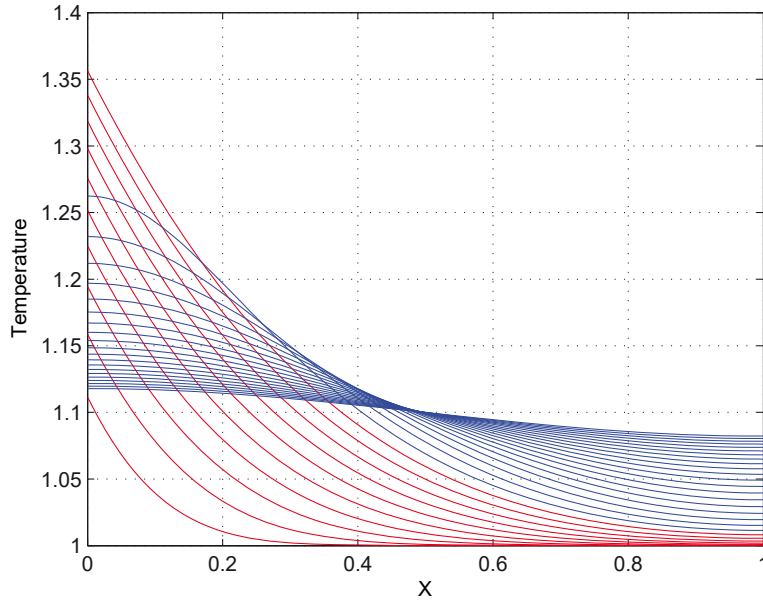
L'équation (4.51) est discrétisée en utilisant la méthode des éléments finis implicite sur un maillage constitué de  $n = 100$  noeuds, où une approximation linéaire est définie sur chacun des  $n_e = 99$  éléments. Le pas de temps a été pris égal à  $\Delta t = 0.1$  et le système discret résultant est écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{K} \mathbf{v}^p = \mathbf{M} \mathbf{v}^{p-1} + \mathbf{q}^p \quad (4.52)$$

Où le vecteur  $\mathbf{q}^p$  représente le flux sur le bord à chaque pas de temps  $p$  ( $t_p = p \times \Delta t$ ).

Nous avons d'abord considéré la solution du modèle décrit précédemment pour l'expression suivante du terme source

$$q(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 10 \\ 0 & t > 10 \end{cases} \quad (4.53)$$



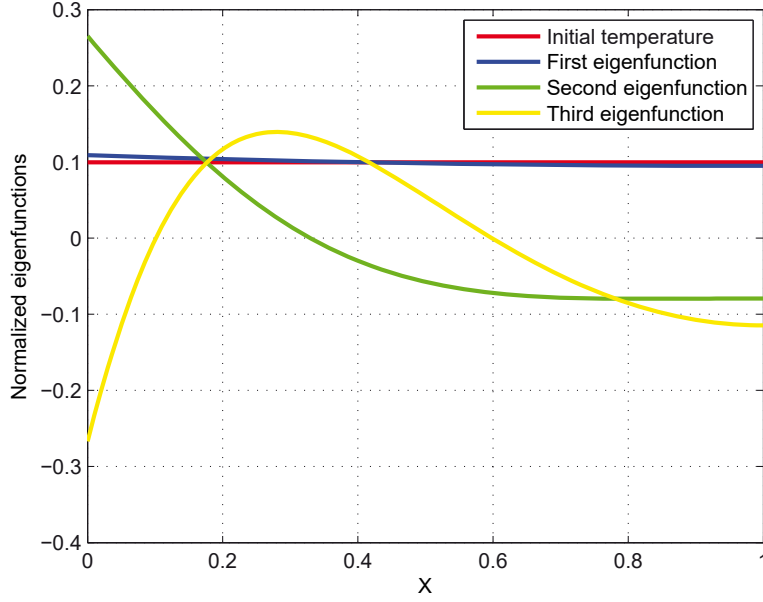
**Figure 4.1.** Profiles de  $v$ , solution de l'équation (4.51).

On présente dans la figure 4.1 la solution numérique pour  $v$  aux temps  $t_n = n$ ,  $n = 1, \dots, 30$ . L'évolution de  $v$  sur les 10 premières secondes est représentée en rouge. Sur l'intervalle de temps suivant on a supprimé les sources extérieures et  $v$  évolue par un mécanisme de conduction des zones où il est le plus élevé vers les zones où sa valeur est la plus basse (classiquement si on prend pour  $v$  la température, on a une conduction de la température des zones les plus chaudes vers les plus froides). Les courbes correspondantes sont représentées en bleu.

A partir de 30 clichés de  $v$  on peut définir les matrices  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{c}$ , et donc le problème aux valeurs propres (4.14) dont on extrait les vecteurs propres les plus significatifs. Les valeurs propres correspondantes sont  $\alpha_1 = 1790$ ,  $\alpha_2 = 1.1$ ,  $\alpha_3 = 0.1$  et  $\alpha_j < \alpha_1 \times 10^{-8}$ ,  $4 \leq j \leq 100$ . Ce résultat signifie que la solution complète peut être représentée comme une combinaison linéaire des 3 vecteurs propres associés à ces 3 valeurs propres. Afin d'imposer plus facilement la condition initiale, il est parfois préférable d'ajouter à ces vecteurs propres la condition initiale (même si la base réduite résultante n'est alors plus orthogonale). Les vecteurs de la base réduite sont représentés dans la figure 4.2. La base réduite est constituée des 3 modes POD les plus significatifs et de la condition initiale. Cette base est normalisée, c'est à dire que l'on a  $\frac{\Phi_j}{\|\Phi_j\|}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) et  $\frac{\mathbf{v}^0}{\|\mathbf{v}^0\|}$ . La matrice  $\mathbf{B}$  est alors construite :

$$\mathbf{B} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{T}^0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ \hline \|\mathbf{T}^0\| & \|\Phi_1\| & \|\Phi_2\| & \|\Phi_3\| \end{array} \right] \quad (4.54)$$

et on définit le modèle réduit de l'équation (4.52) :



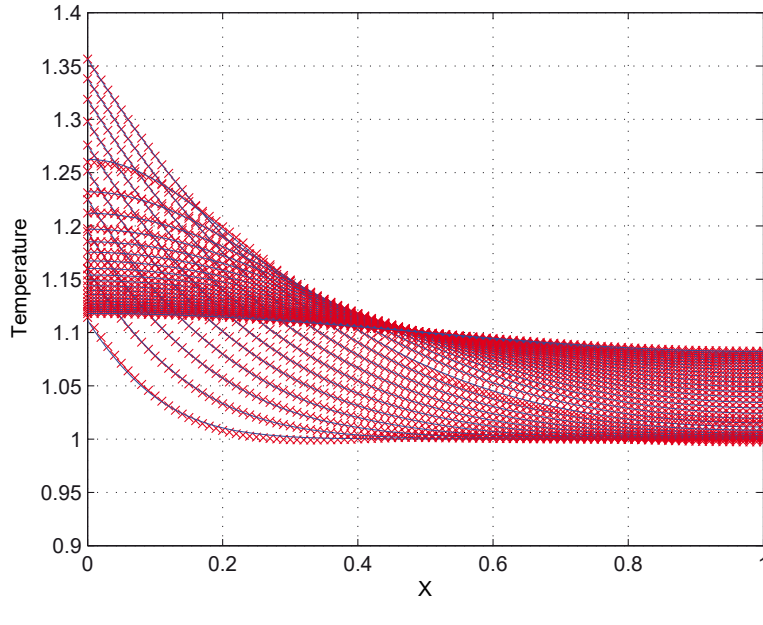
**Figure 4.2.** Vecteurs constituant la base réduite

$$\mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \zeta^p = \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} \zeta^{p-1} + \mathbf{B}^T \mathbf{q}^p \quad (4.55)$$

à 4 degrés de libertés. Ainsi dans le cas de modèles non linéaires et d'une discrétisation implicite, le calcul ne nécessite que l'inversion d'une matrice de taille 4 à chaque pas de temps.

Si on suppose que la condition initiale a été placée dans la première colonne de  $\mathbf{B}$  (comme indiqué dans l'équation (4.54)), alors la condition initiale dans la base réduite s'écrit :  $(\zeta^0)^T = (1, 0, 0, 0)$ . Ensuite, à partir de cette condition, l'équation (4.55) peut être appliquée pour calculer l'évolution de  $v$  sur l'intervalle de temps complet. De toute évidence, la solution globale peut être obtenue à partir de la solution réduite par la relation de changement de base :  $\mathbf{T}^p = \mathbf{B} \zeta^p$ ,  $\forall p$ . On compare dans la figure 4.3 différents profils de vitesses obtenus en utilisant le modèle global (Eq. (4.52)), et qui étaient représentés figure 4.1, et ceux obtenus par le modèle réduit (Eq.(4.55)), représenté par le symbole étoile. On remarque une très bonne concordance entre les deux solutions. Cette précision n'est pas surprenante, puisque comme indiqué précédemment, les 4 vecteurs de la base réduite sont ceux associés aux plus grandes valeurs propres et par conséquent représente une base optimale de réduction.

Pour conclure sur l'applicabilité de la base réduite pour le calcul de modèles différents de celui ayant permis de la construire, on considère un problème de convection défini dans le même domaine, avec la même condition initiale, mais dont le terme source diffère légèrement :



PSfrag replacements  
 $v$

**Figure 4.3.** Solution obtenue par le modèle complet (ligne continue) et celle obtenue par le modèle réduit (étoiles).

$$q(t) = \begin{cases} \frac{t}{20} & t \leq 20 \\ \frac{t-30}{5} & t > 20 \end{cases} \quad (4.56)$$

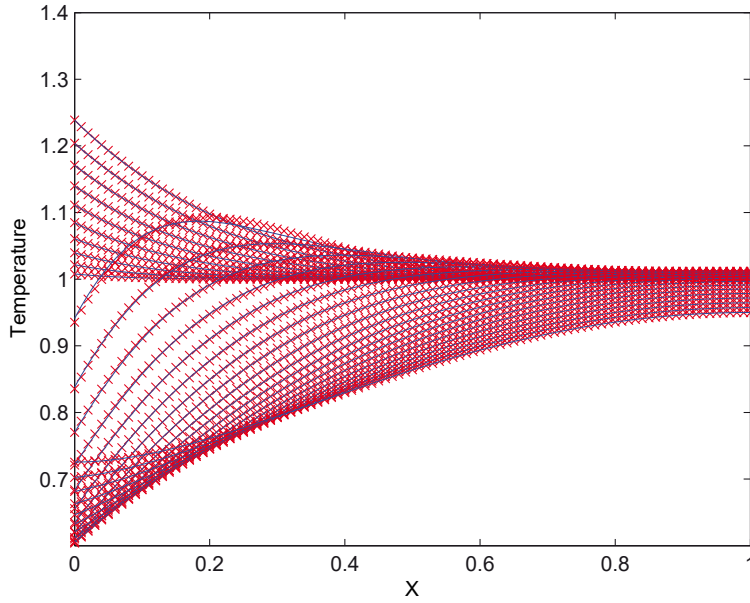
On compare dans la figure 4.4 la solution de référence (en ligne continue), calculée par l'équation (4.52), et celle obtenue par le modèle réduit (4.55) (représentée par des étoiles), la base réduite étant constituée des 4 fonctions représentées figure 4.2, et celles associées au modèle correspondant à la condition de bord donné par l'équation (4.53). On remarque une très bonne précision des résultats, ce qui n'était pas forcément attendu, puisqu'il n'y a pas de compatibilité évidente entre les solutions associées aux sources (4.53) et (4.56), et donc que l'on n'attendait pas que la base extraite des solutions de l'équation (4.53) soit capable de décrire la solution associée au terme source (4.56).

### 4.3.2. Illustration de l'approche continue

#### 4.3.2.1. Test sur une configuration monodimensionnelle

##### 4.3.2.1.1. Présentation du problème

La POD est d'abord testée sur un cas simple monodimensionnel. On considère un champ de vitesse  $v(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $x \in \Omega = ]0, 1[$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , la viscosité cinématique  $\nu = 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$



PSfrag replacements

$v$

**Figure 4.4.** Solution obtenue par le modèle complet (ligne continue) et celle obtenue par le modèle réduit (étoiles), le terme source étant donné par l'équation (4.56).

Le mouvement du fluide est décrit par l'équation de Burgers monodimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \Omega \\ v(0, t) = 0 \\ v(1, t) = 0 \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad (4.57)$$

Où à l'instant initial  $v(x, 0) = v_0(x) = \sin(\pi x)$ .

Cette équation a été introduite par J. M. Burgers dans le but de modéliser la turbulence unidimensionnelle [?]. C'est un exemple simple d'équation non-linéaire et très intéressant donc pour effectuer un test. Une solution analytique pour ce genre de condition initiale et conditions aux limites est donnée par :

$$v(x, t) = 2\pi\nu \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 \nu t} n \sin(n\pi x)}{b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 \nu t} \cos(n\pi x)} \quad (4.58)$$

où  $b_0$  et  $b_n$  sont les coefficients de Fourier définis par :

$$\begin{aligned} b_0 &= \int_0^1 e^{-(2\pi\nu)^{-1}[1-\cos(\pi x)]} dx \\ b_n &= 2 \int_0^1 e^{-(2\pi\nu)^{-1}[1-\cos(\pi x)]} \cos(n\pi x) dx \end{aligned} \quad (4.59)$$

La POD est effectuée sur une solution de l'équation (4.57) résolue en différences finies par un schéma de Crank Nicholson sur un intervalle de temps de 1 seconde avec un pas de temps  $\Delta t = 0.002$  s.

On retrouve les résultats attendus, c'est à dire une forte décroissance des valeurs propres (tableau 4.1), seulement 3 étant suffisantes pour obtenir plus de 99,999% de l'énergie cinétique totale. La figure (4.5) présente les 4 premiers modes POD. Le

i	$\lambda_i$	% d'énergie
$\lambda_1$	20.15	99.315
$\lambda_2$	0.13	99.995
$\lambda_3$	$8.38 \cdot 10^{-4}$	99.999

**Tableau 4.1.** Contribution des premières valeurs propres

premiers capture l'essentiel de la physique du phénomène étudié, et représente "énergétiquement" parlant 99,99% de l'écoulement.

La reconstruction du champ de vitesse à chaque snapshot sur la base POD tronquée à  $N$  modes

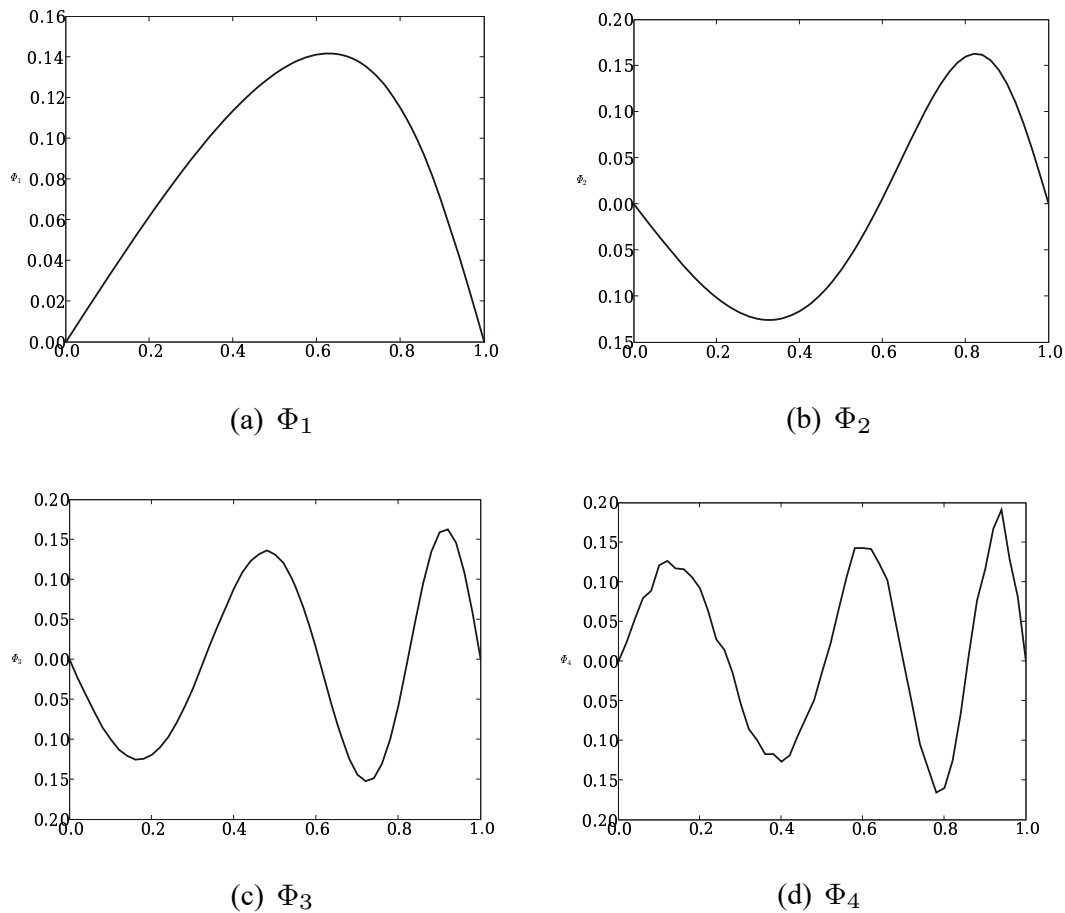
$$v_N(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \Phi_n(x) \quad (4.60)$$

est évaluée par le calcul du résidu en norme  $\mathbf{L}^2$  :

$$Res(N) = \frac{\|v - v_N\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}}{\|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}} \quad (4.61)$$

où pour chaque cliché les coefficients temporels sont calculés par projection de la vitesse sur la base POD.

$$\forall n \in 1, \dots, N \quad a_n = (v, \Phi_n) \quad (4.62)$$



**Figure 4.5.** *Les 4 premiers modes POD*

On remarque alors que l'utilisation d'un seul mode donne une erreur de 20% et que l'on descend à une erreur inférieure à 1% avec 3 modes (tableau 4.2). Si on décompose la vitesse en terme de champ moyen et champ fluctuant, le champ moyen représente environ 60% de l'écoulement. Les fluctuations sont trop importantes pour étudier le champ de vitesse sous cet aspect. On restreint donc l'étude au champ de vitesse instantané.

$i$	% d'erreur de reconstruction
1	19.69
2	1.89
3	0.25

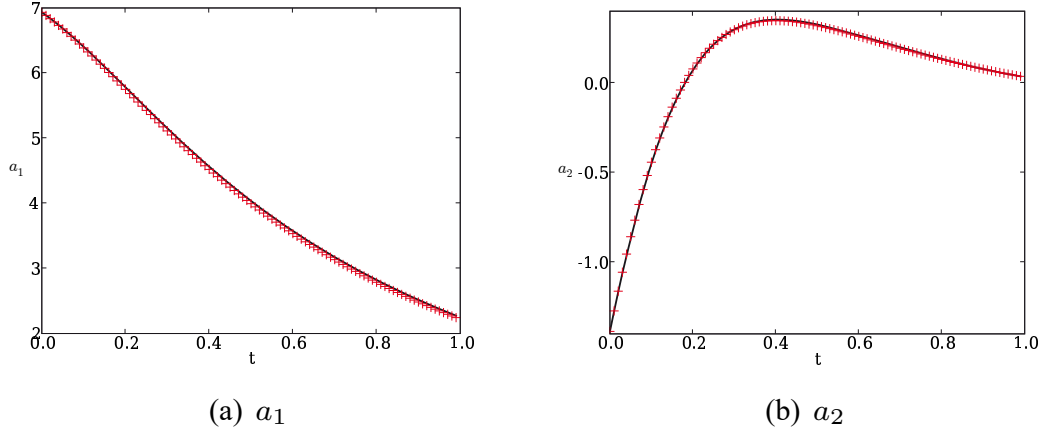
**Tableau 4.2.** *Erreur de reconstruction en fonction du nombre de modes utilisés*

#### 4.3.2.1.2. Système dynamique réduit

Le système dynamique sur le champ de vitesse instantané (4.29) vue dans la section 4.2.6.1 est construit avec 6 modes. Les résultats obtenus sont très satisfaisants,

puisque l'on reconstruit la solution à 3 modes avec un résidu inférieur à 1% en norme  $\mathbf{L}^2$ .

Qualitativement on remarque que les coefficients temporels dominants (le premier et le deuxième) obtenus par le système dynamique réduit sont les mêmes que ceux obtenus par la POD directe (figure (4.6)).



**Figure 4.6.** Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 3 modes

Cela se traduit par un très faible écart entre la solution reconstruite et la solution numérique qui a servie à la snapshot (figure (4.7)).

#### 4.3.2.2. *Écoulement autour d'un cylindre*

On considère un écoulement à Reynolds 200 dans canal autour d'un cylindre. Le profil de vitesse à l'entrée du canal  $\Gamma_1$  est parabolique de vitesse maximum  $V_0 = 2.10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$  et est imposé nul sur les parois  $\Gamma_p$ . Le fluide a une masse volumique égale à  $\rho = 1.10^{-3} \text{ kg.m}^{-3}$  et une viscosité dynamique  $\mu = 1.10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}$ .

Les équations de Navier-Stokes adimensionnelles sont résolues par la méthode des éléments finis avec le logiciel Castem sur un interval de temps  $\mathbf{T} = [0, 11.88]$  avec un pas de temps de  $\Delta t = 0.04$ . On effectue 99 snapshots espacées chacune de  $3\Delta t$ .

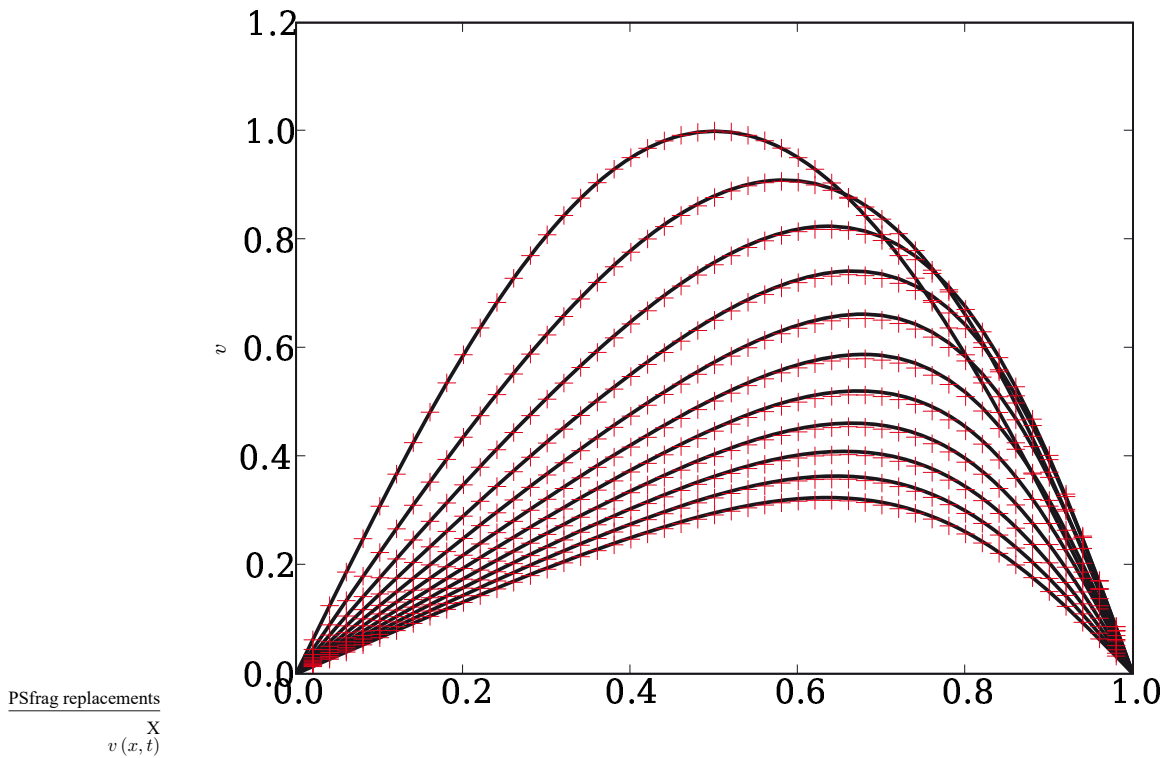
Pour ce nombre de Reynolds, l'apparition d'un phénomène de détachement périodique de vortex va se produire. La fréquence de détachement  $f$  est liée au nombre adimensionnel de Strouhal :

$$S_t = f \frac{L}{V_0} \quad (4.63)$$

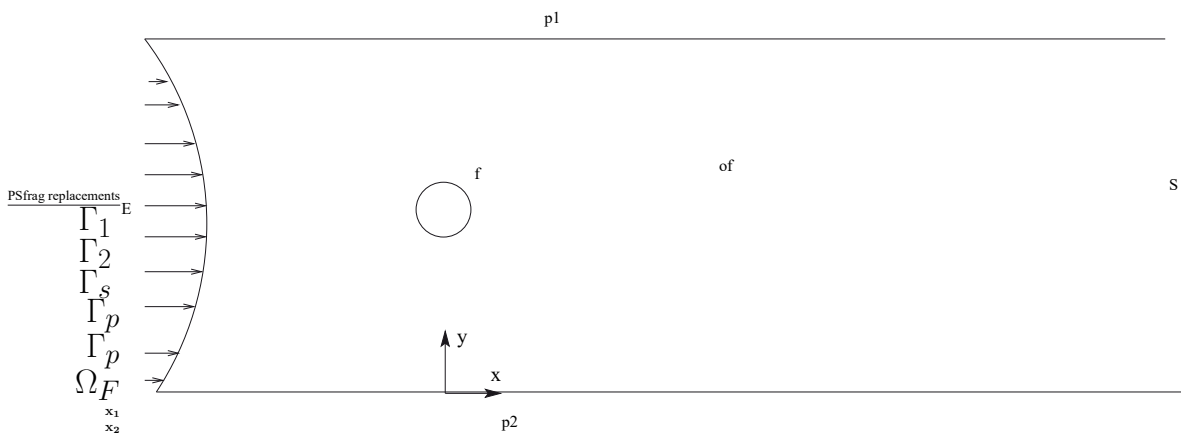
Où  $L$  est le diamètre du cylindre.

Pour un nombre de Reynolds inférieur à  $10^5$  le Strouhal reste globalement constant et égal à  $S_t = 0.20$ , donc une fréquence de détachement valant ici  $f = 4.10^{-5} \text{ Hz}$ .





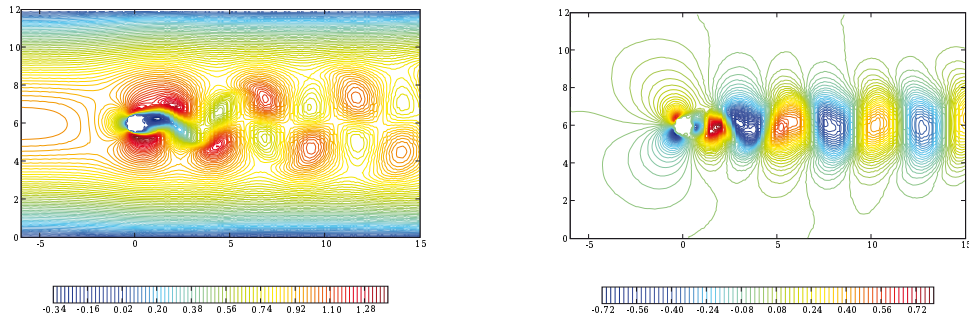
**Figure 4.7.** Comparaison du champ de vitesse reconstruit à différents instants  $t$  obtenus par : — Solution numérique initiale et + le système dynamique réduit à 3 modes



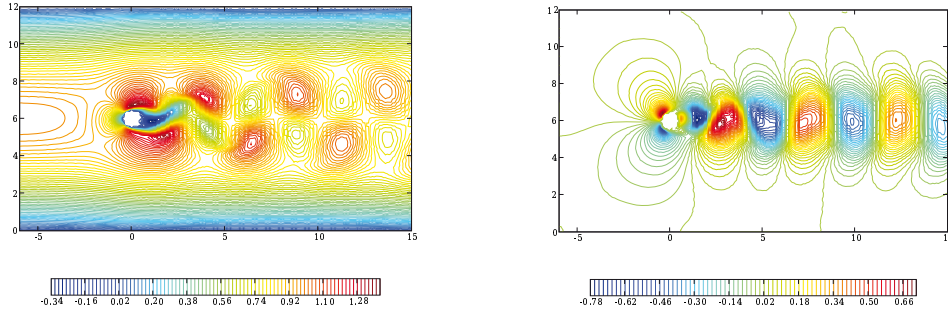
**Figure 4.8.** description du domaine d'étude

#### 4.3.2.2.1. Analyse POD sur le champ de vitesse instantané

On effectue un premier test de la base POD sur le champ instantané. Comme pour le cas monodimensionnel présenté précédemment, peu de modes suffisent pour capturer la quasi totalité de l'énergie cinétique (tableau 4.3).



(a) première composante  $t = 0.0$  secondes (b) deuxième composante  $t = 0.0$  secondes



(c) première composante  $t = 2.4$  secondes (d) deuxième composante  $t = 2.4$  secondes

**Figure 4.9.** Clichés des premières et deuxièmes composantes de la vitesse

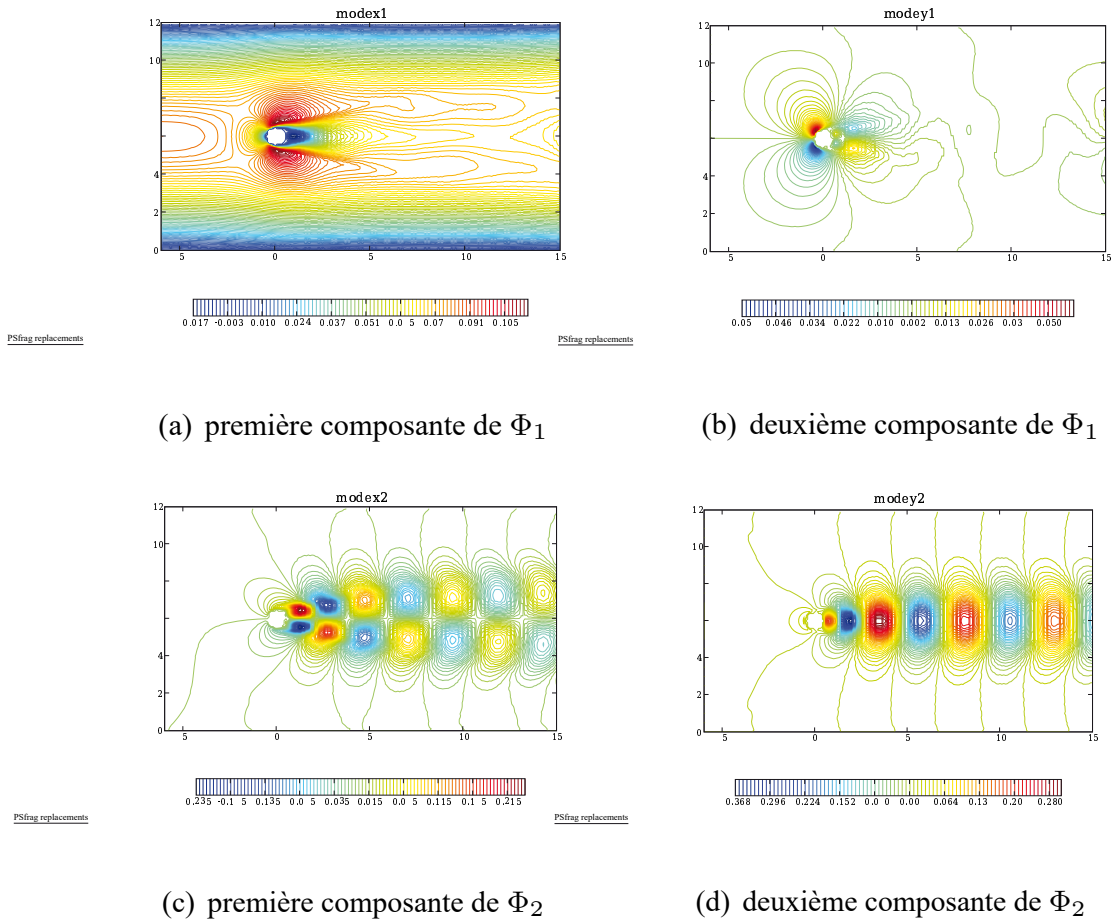
$i$	$\lambda_i$	% d'énergie	$i$	$\lambda_i$	% d'énergie
$\lambda_1$	132.11	96.314	$\lambda_4$	$4.72 \cdot 10^{-2}$	99.93
$\lambda_2$	2.53	98.163	$\lambda_5$	$4.61 \cdot 10^{-2}$	99.963
$\lambda_3$	2.37	99.89	$\lambda_6$	$2.38 \cdot 10^{-2}$	99.981

**Tableau 4.3.** Contribution des premières valeurs propres

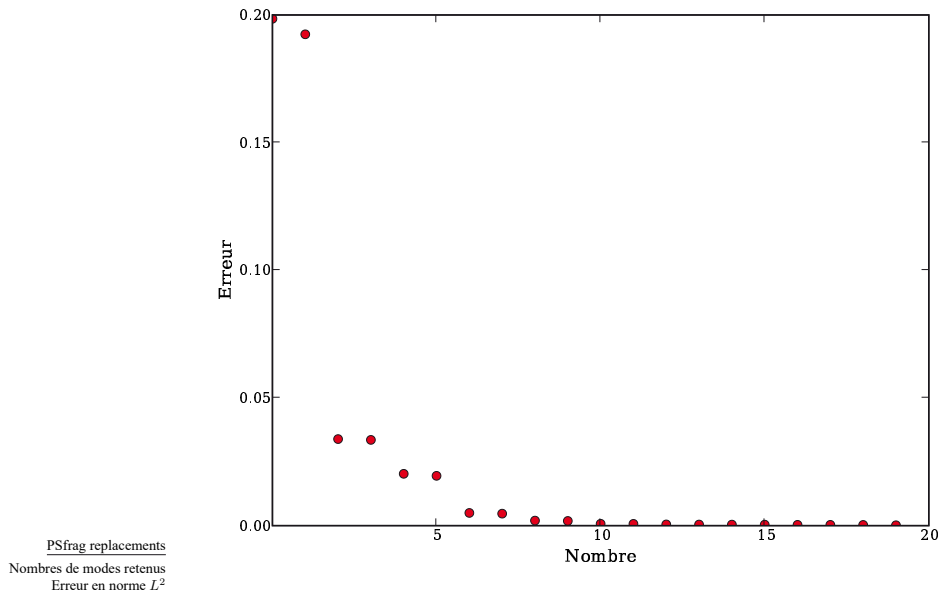
On présente, figure (4.10) les isovaleurs des deux premiers modes POD. Ces modes sont ceux qui apportent la plus forte contribution en énergie cinétique, le premier mode s'apparentant à l'écoulement moyen. On retrouve sur l'entrée  $\Gamma_1$  le profil parabolique de vitesse. Les modes suivants contiennent les fluctuations du fluide autour de cet écoulement moyen. Ce phénomène est visible sur le deuxième mode, où on retrouve des détachements tourbillonnaires dans le sillage du cylindre.

L'erreur de reconstruction est évaluée en norme  $L^2$  de la même manière que pour l'équation de Burgers (4.61). On constate, figure (4.11), que 7 modes suffisent à reconstruire la solution avec une erreur en norme  $L^2$  inférieure à 1%.

Le système dynamique est construit suivant la section (4.2.6.3) avec 7 modes. Un premier calcul sans stabilisation donne de gros écarts dès le deuxième mode. Afin de



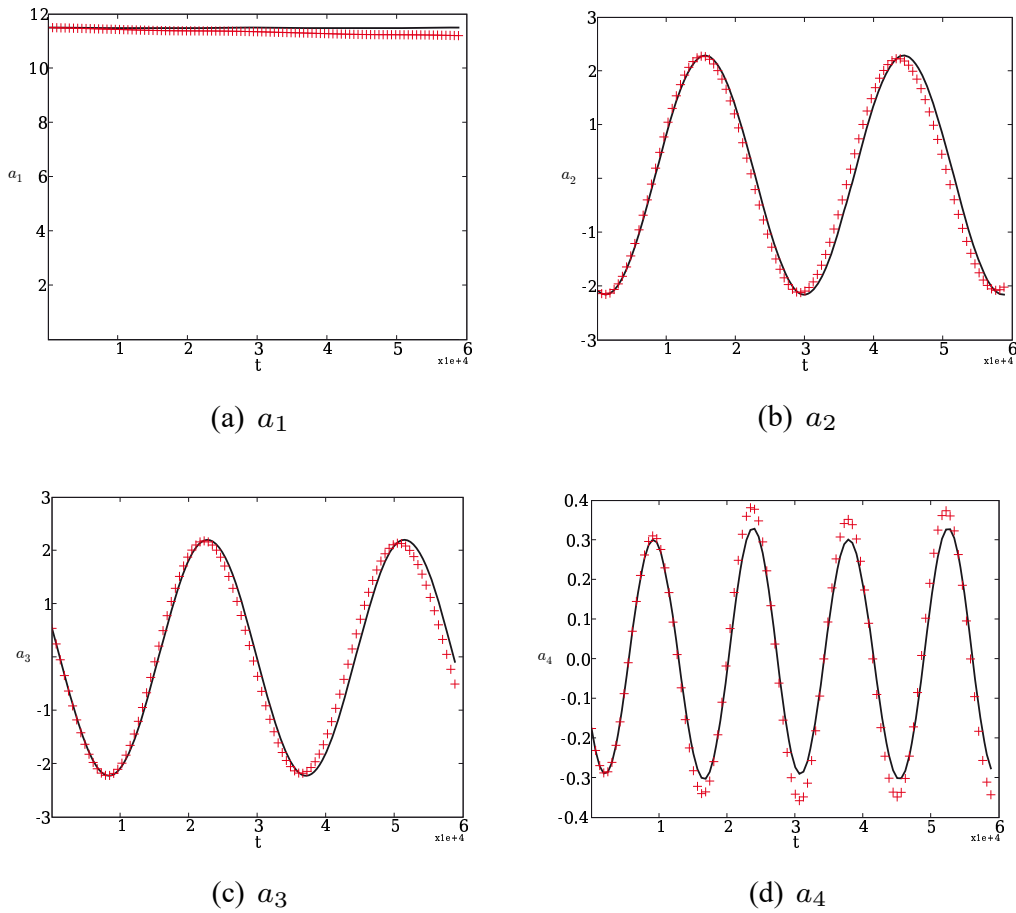
**Figure 4.10.** isovaleurs des deux premiers modes POD



**Figure 4.11.** Residu en norme  $L^2$  en fonction du nombre de modes

corriger cette erreur, on utilise la méthode de stabilisation développée par Rempfer (

cf. section 4.2.6.4). Les résultats présentés ici ( figure (4.12)) ont été obtenus avec une constante  $\nu$  pour la viscosité additionnelle de 0.0005.



**Figure 4.12.** Les 2 premiers coefficients temporels obtenus — par la POD directe + le système dynamique réduit à 7 modes

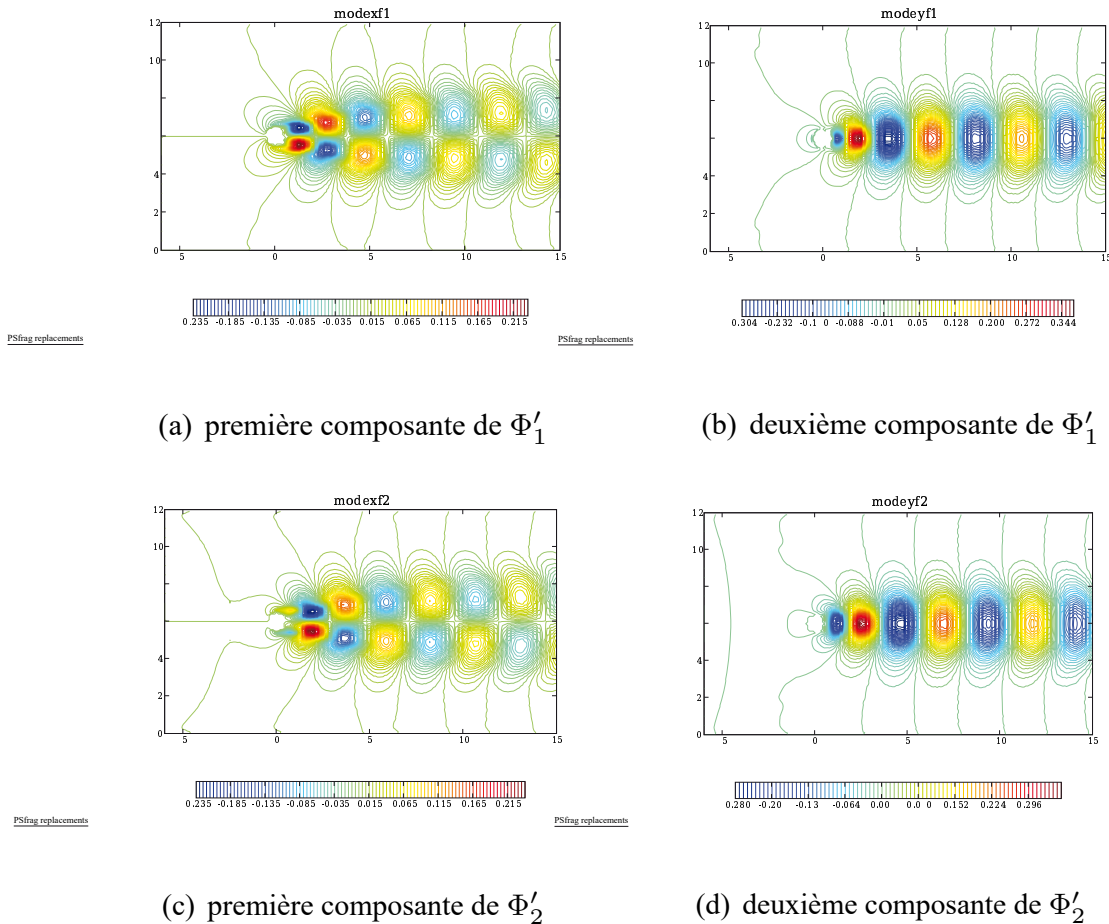
On obtient une erreur d'environ 3% sur le premier coefficient temporel, et une erreur beaucoup, plus faible sur les suivants.

Nous n'avons pas cherché à améliorer plus les résultats obtenus, le but ici étant juste de présenter quelques résultats pouvant être obtenus par la POD en mécanique des fluides.

#### 4.3.2.2.2. Analyse POD sur le champ de vitesse fluctuant

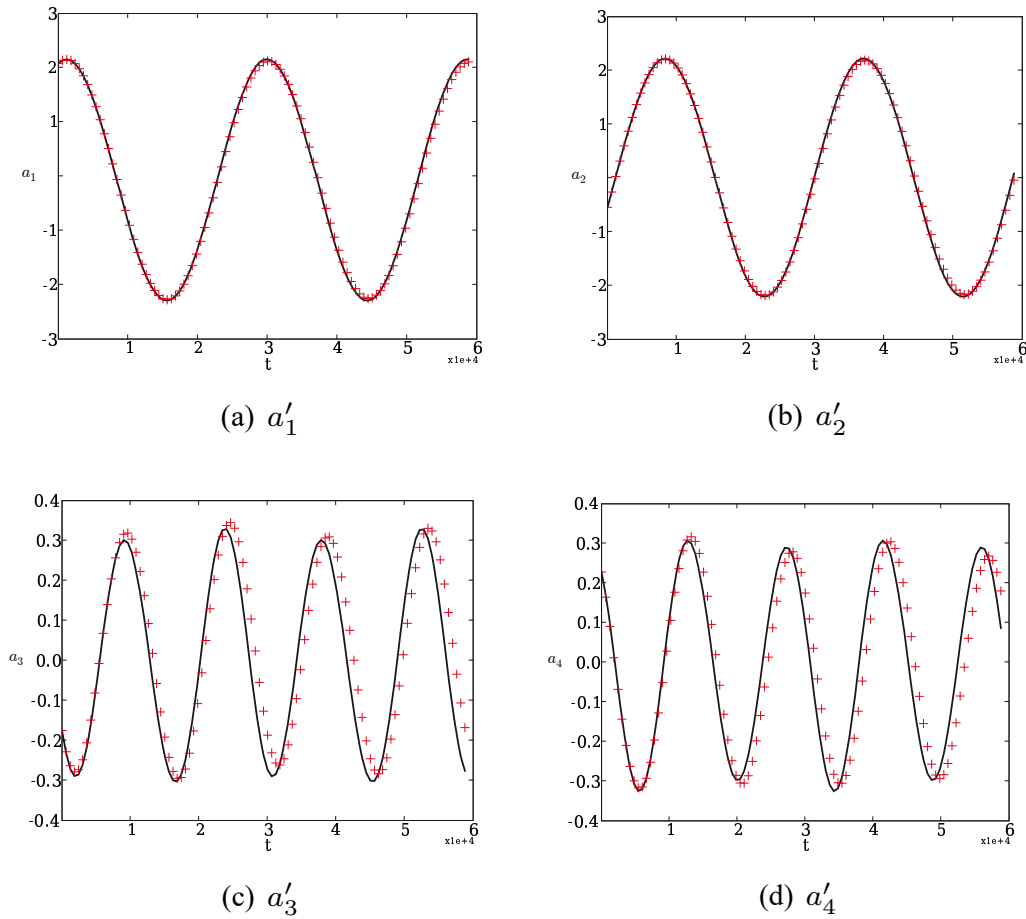
On effectue ensuite la POD sur le champ de vitesse fluctuant comme cela est couramment utilisé en turbulence.

On présente les isovaleurs des 2 premiers modes POD obtenus sur le champ de vitesse fluctuant sur la figure (4.10). On observe que le premier mode POD obtenu pour le champ fluctuant est similaire au deuxième obtenu pour le champ instantané.



**Figure 4.13.** isovaleurs des deux premiers modes POD obtenus sur le champ fluctuant

On retrouve ainsi le résultat bien connu pour la POD, c'est à dire qu'il y a un décalage de 1 entre les coefficients obtenus sur le champ instantané et le champ fluctuant ( $a_n(t) = a'_{n-1}(t)$   $n = 2, \dots, N$ ), de même pour les modes POD. Ce décalage permet d'assimiler le premier mode POD obtenu sur le champ de vitesse instantané au champ moyen. Même si le premier coefficient temporel présenté figure (4.12(a)) n'est pas exactement constant, la différence d'ordre de grandeur entre celui-ci et les suivants permet de faire cette approximation. Pour un écoulement plus complexe, cette approximation ne sera bien sûr plus valable.



**Figure 4.14.** Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 7 modes

Le système dynamique est alors construit suivant la section (4.2.6.3) avec 6 modes. La même méthode de résolution que pour le système dynamique sur le champ fluctuant est utilisé. Les résultats présentés figure (4.14) ont été obtenus avec une viscosité adimensionnelle égale à  $\nu_{\text{ad}} = 0.0005i$ <sup>6</sup>. On observe alors de bien meilleurs résultats que précédemment. Le premier mode POD sur le champ de vitesse instantané étant alors assimilé à la moyenne, l'erreur qu'on avait disparaît.

### 4.3.3. Conclusion

Ces résultats nous permettent d'illustrer le potentiel de la réduction de modèle par POD. Il reste cependant deux questions : (i) Comment quantifier la qualité de la réduction de modèle sans avoir à calculer une solution globale ? ; et (ii) dans le cas où l'on noterait un manque de précision, comment enrichir la base réduite dans le but d'augmenter la précision de la solution ? Ces deux questions sont l'objet de la section suivante.

<sup>6</sup>. i représentant le numéro du mode POD

## 4.4. Vers une stratégie adaptative : enrichissement de la base

### 4.4.1. A partir de la formulation discrète

Des simulations précises nécessitent une évaluation de l'erreur, de même que la possibilité d'adapter la base réduite en introduisant de nouvelles fonctions capable de décrire les caractéristiques de la solution. Ryckelynck propose dans [?] une procédure adaptative capable de construire ou enrichir la base réduite. Dans ce but, il suggère d'enrichir la base réduite en ajoutant des sous-espaces de Krylov, générés par le résidu. Malgré le fait que l'enrichissement tend à augmenter le nombre de fonctions de base, si cette méthode est combinée avec une décomposition POD, ce qui réduit considérablement le nombre de fonctions, la taille du problème est rapidement stabilisée. Cette méthode, qui a été utilisée avec succès dans [?] et [?] est résumé dans cette section

On suppose que la solution utilisant la base réduite  $\mathbf{B}$  est satisfaisante sur l'intervalle de temps  $]0, t_s]$ . La solution est ensuite évaluée sur l'intervalle de temps  $]t_s, t_{s+1}]$  en résolvant l'équation (4.24) avec la base réduite définie par la matrice  $\mathbf{B}$  :

$$\zeta^{m+1} = (\mathbf{B}^T \mathbf{G}^m \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{H}^m \quad (4.64)$$

Quand le temps  $t_{s+1}$  est atteint, on évalue la précision de la solution calculée avec la base réduite. Cette étape de contrôle est effectuée seulement à la fin de chaque intervalle de temps.

On suppose que  $t_{s+1} - t_s = P \times \Delta t$  et que le résidu au temps  $t_{s+1}$ ,  $\mathbf{R}^P$  peut être calculé par

$$\mathbf{R}^P = \mathbf{G}^{P-1} \mathbf{B} \zeta^P - \mathbf{H}^{P-1} \quad (4.65)$$

Si la norme du résidu est suffisamment petite  $\|\mathbf{R}^P\| < \epsilon \|\mathbf{B} \zeta^P\|$  ( $\epsilon$  étant un paramètre suffisamment petit), la solution calculée peut être considérée comme bonne, et l'intégration en temps continue sur l'intervalle de temps  $]t_{s+1}, t_{s+2}]$  en utilisant l'équation (4.64) et la même base réduite.

Dans le cas contraire, si  $\|\mathbf{R}^P\| \geq \epsilon \|\mathbf{B} \zeta^P\|$ , l'approximation doit être améliorée. Pour cela, on propose d'enrichir la base de projection en introduisant résidu calculé à l'instant  $t_{s+1}$  (ou un des sous-espaces de Krylov généré par le résidu, comme proposé dans [?]) :

$$\mathbf{B} \leftarrow [\mathbf{B} \ \mathbf{R}^P] \quad (4.66)$$

Ensuite, on calcule la solution sur l'intervalle  $]t_s, t_{s+1}]$  en utilisant l'équation (4.64) et la base réduite  $\mathbf{B}$  mise à jour par l'équation (4.66). Quand le critère de convergence est satisfait (c'est à dire  $\|\mathbf{R}^P\| < \epsilon \|\mathbf{B} \zeta^P\|$ ) on applique la POD sur la solution obtenue sur l'intervalle  $]0, t_{s+1}]$  afin de définir une base pouvant reconstruire toute l'histoire du champ de vitesse, ce qui est équivalent à une mise à jour de  $\mathbf{B}$  qui peut être considéré comme la base réduite optimale pour représenter  $v$  sur l'intervalle de temps  $]0, t_{s+1}]$ . On résout l'équation (4.64) avec la base mise à jour  $\mathbf{B}$  sur  $]t_{s+1}, t_{s+2}]$ , et le résidu est testé au temps  $t = t_{s+2}$ .

D'un point de vue pratique, si on a besoin d'enrichir la base à la fin de l'intervalle de temps précédent, à  $t = t_{s+1}$ , alors la longueur de l'intervalle de temps suivant est réduit tel que  $t_{s+2} - t_{s+1} = (t_{s+1} - t_s)/2$ , et si on n'a pas besoin d'enrichir, la longueur de l'intervalle est augmenter :  $t_{s+2} - t_{s+1} = 2(t_{s+1} - t_s)$  (cf [?] pour plus de détails sur l'adaptation de l'intervalle de temps).

La procédure d'enrichissement a tendance à augmenter la taille de la base réduite, mais la POD la réduit. La combinaison des deux procédures permet de stabiliser la taille du modèle comme il a déjà été noté dans nos travaux précédents [?].

#### 4.4.2. Illustration de la méthode d'enrichissement de la base

On considère dans cette section le domaine carré, défini à l'instant initial par  $\Omega_0 = \Omega(t = 0)$ ,  $\Omega_0 = [-L_0, L_0] \times [-H_0, H_0] = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ , qui évolue au cours du temps selon le champ de vitesse incompressible suivant :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}x \\ -\dot{\gamma}y \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

dont la longueur à l'instant  $t$  (respectivement la largeur) est  $2L_t = 2(L_0 e^{\dot{\gamma}t})$  (respectivement  $2H_t = 2(H_0 e^{-\dot{\gamma}t})$ ),  $\Omega_t = [-L_t, L_t] \times [-H_t, H_t]$ . Ainsi on a  $|\Omega_t| = |\Omega_0|$ .

On considère problème d'advection-diffusion non-linéaire coulé défini dans ce domaine :

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T - \beta \gamma(T)C \\ \frac{dC}{dt} = D \Delta C - \gamma(T)C \end{cases} \quad (4.68)$$

Une analyse poussée de ce problème a été effectué dans [?].

**Remarque 4.4.1** *Ce problème peut être vu comme la modélisation du transfert de chaleur en présence d'une réaction exothermique dont la cinétique dépend elle même de la concentration et de la température d'une manière non-linéaire.*



$N$	$t_{max}$	$L = 0$	$T_0$	$\Delta t$	$\dot{\gamma}$	$\lambda$	$\beta$	$D$	$\gamma$	$C_0$
$101 \times 10$	5	$\pi$	2	0.1	0.1	0.5	1	1	0	2

**Tableau 4.4.** Exemple de choix de paramètres pour la simulation numérique

Le problème (4.68) est ensuite discrétisé en utilisant une méthode d'opérateur fractionné combiné avec discrétisation éléments finis Galerkin implicite du problème de diffusion dans la géométrie mise à jour. L'équation (4.68) peut alors être résolue en deux étapes :

– Dans une étape d'advection pure, la position des noeuds  $x_i$  est mise à jour suivant la vitesse nodale, sans changer les valeurs aux noeuds :

$$\begin{cases} x_i^{m+1} = x_i^m + v_i^m \Delta t \\ T_i^{m+\frac{1}{2}}(x_i^{m+1}) = T_i^m(x_i^m) \\ C_i^{m+\frac{1}{2}}(x_i^{m+1}) = C_i^m(x_i^m) \end{cases} \quad (4.69)$$

– Dans une étape de diffusion, on résoud par un schéma implicite le problème de diffusion dans le domaine juste mis à jour :

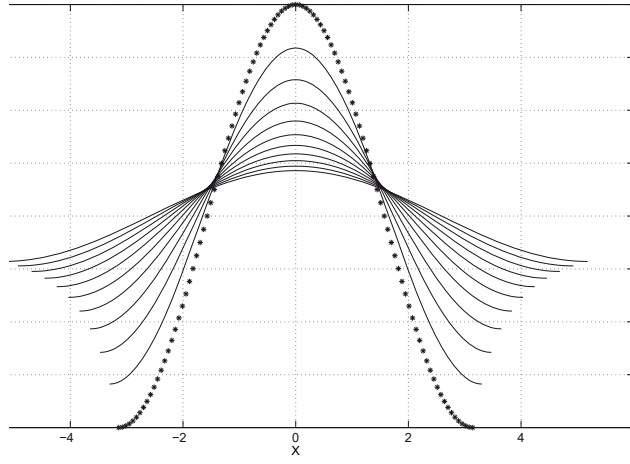
$$\begin{aligned} (\mathbf{T}^{*T} \quad \mathbf{C}^{*T}) \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{m+1} \\ \mathbf{C}^{m+1} \end{pmatrix} &= (\mathbf{T}^{*T} \quad \mathbf{C}^{*T}) \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{m+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{C}^{m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} - \\ -\Delta t (\mathbf{T}^{*T} \quad \mathbf{C}^{*T}) \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D\mathbf{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{m+1} \\ \mathbf{C}^{m+1} \end{pmatrix} &- \Delta t (\mathbf{T}^{*T} \quad \mathbf{C}^{*T}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \beta \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{m+1} \\ \mathbf{C}^{m+1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.70)$$

où la forme particulière de la matrice  $\mathbf{G}$  dépend de la linéarisation du terme non linéaire  $\gamma(T)$ .

On limite dans la suite notre analyse au problème découplé, quand dans l'équation (4.70) on suppose que  $\gamma(T) = 0$  ( pour une étude plus approfondie du problème non linéaire couplé, le lecteur pourra se référer à [?]). On considère l'évolution du champ de température dans  $\Omega_t$  quand il n'y a pas de flux de chaleur sur les bords du domaine  $\partial\Omega_t$ , c'est à dire  $\nabla T \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_t} = 0$  (où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure sur la frontière du domaine), et pour une température initiale sur  $\Omega_0$  définit comme suit :

$$T(x, y, t = 0) = T_0(1 + \cos(x)) \quad (4.71)$$

La résolution numérique est effectuée avec le choix de paramètres regroupés dans le tableau 4.4.2.



**Figure 4.15.** *Distribution de température initiale (étoiles) et profils de température (selon l'axe  $x$ ) aux temps  $5\Delta t$ ,  $10\Delta t$ , ...,  $50\Delta t$ .*

**Remarque 4.4.2** *Le nombre de noeuds dans la direction  $y$  n'est pas pertinent, puisque le transfert de chaleur correspondant au champ de température initiale est unidirectionnel (4.71). Ce choix facilite la validation du modèle aussi bien que la représentation de la solution*

Le profile de température tout les cinq pas de temps est représenté figure 4.15. On remarque que la diffusion introduit un effet de lissage en même temps que le domaine s'agrandit selon la direction  $x$ . On a vérifié que pour des temps très faibles la température est uniforme, et qu'elle atteint la valeur moyenne de la température initiale donné par l'équation (4.71), c'est à dire  $T(x, y, t \rightarrow \infty) \approx T_0$ . On prouve ainsi que le schéma de discrétisation est conservatif. On note également que sur les bords du domaine, la pente de la température est nulle, ce qui correspond à la condition aux limite prescrite.

Si on note par  $\mathbf{T}^{5\Delta t}, \dots, \mathbf{T}^{50\Delta t}$  les vecteurs contenant la température sur les noeuds aux instants  $t = 5\Delta t, \dots, t = 50\Delta t$ , on définit la matrice  $\mathbf{Q}$  :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} T_1^{5\Delta t} & T_1^{10\Delta t} & \dots & T_1^{50\Delta t} \\ T_2^{5\Delta t} & T_2^{10\Delta t} & \dots & T_2^{50\Delta t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_N^{5\Delta t} & T_N^{10\Delta t} & \dots & T_N^{50\Delta t} \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

Il est important de noter que ces vecteurs sont associés à des distributions de noeuds différentes. On résoud pour la suite, le problème aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T)\Phi = \alpha\Phi \quad (4.73)$$

qui contient  $n$  valeurs propres, chacune étant associée à un vecteur propre. Comme on l'a décrit précédemment, on sélectionne seulement les vecteurs propres dont la valeur propre appartient à l'intervalle défini par la plus grande valeur propre et  $10^{-8}$  fois cette valeur, i.e.  $\{\Phi_1, \dots, \Phi_N\}$  tel que  $\alpha_k \in [10^{-8}\alpha_1, \alpha_1], \forall k \in [1, \dots, N]$ ,  $\alpha_1$  étant la plus grande valeur propre. Pour le problème présenté précédemment, seul deux valeurs propres sont contenues dans cet interval, par conséquent la solution peut être représentée sur l'intervalle de temps simulé comme une combinaison linéaire de ces deux vecteurs propres que l'on note  $\Phi_1$  and  $\Phi_2$ . Nous insistons sur le fait que ces deux modes POD sont associés à des noeuds et non à une distribution nodale particulière. En outre, pour représenter les conditions initiales, on propose de rajouter aux deux modes POD un vecteur représentant cette condition initiale que l'on note  $\Phi_0 \equiv \mathbf{T}^0$ . Ainsi, la base réduite, constituée de trois vecteurs  $\{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2\}$  n'est pas orthogonale. Ces trois vecteurs normalisés sont représenté dans la figure 4.16 sur le domaine final. On va montrer dans la suite que cette base réduite permet de représenter de manière précise l'évolution de la température. Pour cela on écrit la projection de la température sur cette base :

$$\mathbf{T} = \sum_{i=0}^2 \Phi_i \zeta_i(t) = \mathbf{B} \boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \phi_0(\mathbf{x}_1) & \phi_1(\mathbf{x}_1) & \phi_2(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_0(\mathbf{x}_N) & \phi_1(\mathbf{x}_N) & \phi_2(\mathbf{x}_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

On introduit ensuite cette relation dans l'équation (4.70), afin de construire un modèle réduit pour la température :

$$\mathbf{T}^{*T} [\mathbf{M} + \lambda \Delta t \mathbf{K}] \mathbf{T}^{m+1} = \mathbf{T}^{*T} \mathbf{M} \mathbf{T}^m \Rightarrow \boldsymbol{\zeta}^{*T} \mathbf{B}^T [\mathbf{M} + \lambda \Delta t \mathbf{K}] \mathbf{B} \boldsymbol{\zeta}^{m+1} = \boldsymbol{\zeta}^{*T} \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} \boldsymbol{\zeta}^m \quad (4.75)$$

La solution réduite  $\boldsymbol{\zeta}^{m+1}$  étant calculée ensuite à partir de l'équation suivante :

$$\boldsymbol{\zeta}^{m+1} = [\mathbf{B}^T [\mathbf{M} + \lambda \Delta t \mathbf{K}] \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} \boldsymbol{\zeta}^m \quad (4.76)$$

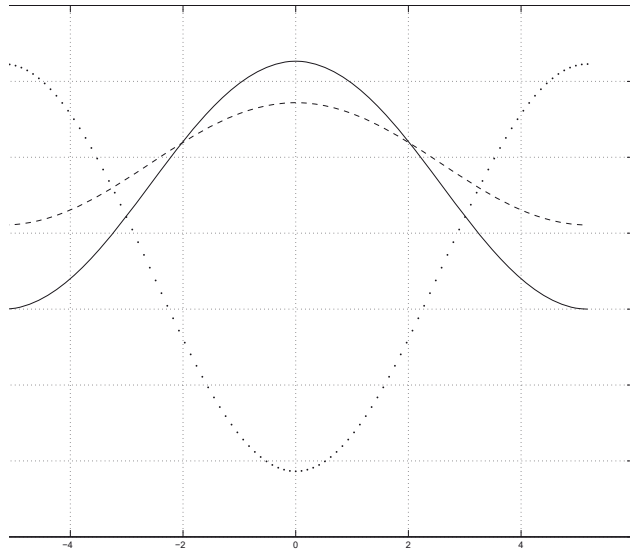
Où la condition initiale est exprimée dans la base réduite par :

$$(\boldsymbol{\zeta}^0)^T = (1 \quad 0 \quad 0) \quad (4.77)$$

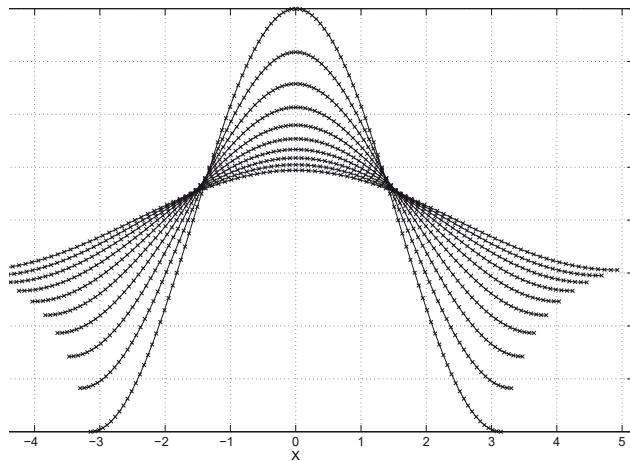
Les résultats obtenus par le modèle éléments finis et par le modèle réduit sont comparés sur la figure 4.17. L'évolution de la solution est remarquablement bien décrite malgré le faible nombre de vecteurs constituant la base réduite.

On recherche ensuite une solution en utilisant une procédure adaptative, évitant ainsi tout calcul préalable de la solution. Pour cela, on commence par construire une base réduite constituée d'un seul vecteur correspondant à la condition initiale :

$$\mathbf{T} = \Phi_0(\mathbf{x}) \zeta(t) = \begin{pmatrix} \phi_0(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \phi_0(\mathbf{x}_N) \end{pmatrix} \zeta(t) = \mathbf{B}^{(0)} \zeta(t) \quad (4.78)$$

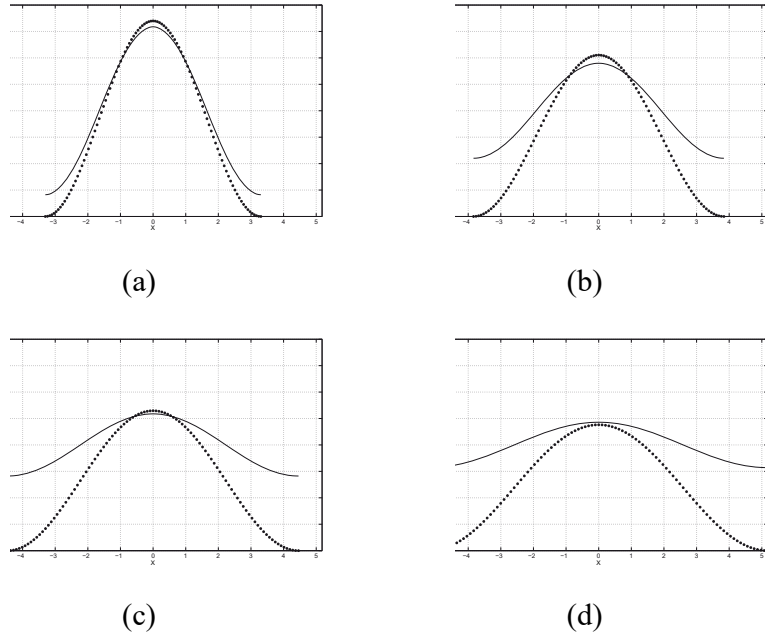


**Figure 4.16.** *Base réduite normalisée : La ligne continue représente la condition initiale, les deux autres, les deux modes POD*



**Figure 4.17.** *Solution obtenue par le modèle réduit à différents instants  $-5\Delta t, 10\Delta t, \dots, 50\Delta t$ — calculé par la base réduite (+) et solution de référence calculée en utilisant une approximation sur l'ensemble complet des noeuds.*

On introduit l'expression de la base réduite  $\mathbf{B}^{(0)}$  donnée par l'équation (4.78) dans l'équation gouvernant l'évolution de la solution réduite (équation (4.76)), et en considérant que la vérification de la condition initiale implique que  $\zeta(t = 0) = 1$ , on calcule son évolution  $\zeta(t)$ , donc l'évolution de la température  $T : \mathbf{T}(t) = \mathbf{B}^{(0)}\zeta(t)$ . On compare sur la figure 4.18 la solution calculée de cette façon (symbole étoile) et la solution de référence (aussi représentée dans figure 4.15) en ligne continue.



**Figure 4.18.** *Solution obtenue par le modèle réduit en utilisant un seul vecteur dans la base (le vecteur correspondant à la condition initiale) (étoile) et solution de référence (courbe continue), aux temps  $5\Delta t$ ,  $20\Delta t$ ,  $35\Delta t$ ,  $50\Delta t$  (coin supérieur gauche, supérieur droit, inférieur gauche et inférieur droit respectivement)..*

Ensuite, à partir de la solution obtenue par le modèle réduit au temps  $50\Delta t$  (courbe constitué de symboles étoiles sur la figure 4.18(d)), que l'on note  $\mathbf{T}^{(0)}(t = 50\Delta t)$ , on calcule le résidu pour enrichir la base en utilisant les sous-espaces de Krylov. Le résidu est calculé directement par l'équation (4.70)

$$\mathbf{R} = [\mathbf{M} + \lambda\Delta t\mathbf{K}]\mathbf{T}^{(0)}(t = 50\Delta t) - \mathbf{M} \mathbf{T}^{(0)}(t = 49\Delta t) \quad (4.79)$$

ce qui permet de calculer les sous-espace succesifs de Krylov. Si on définit la matrice  $\mathbf{H}$  par :

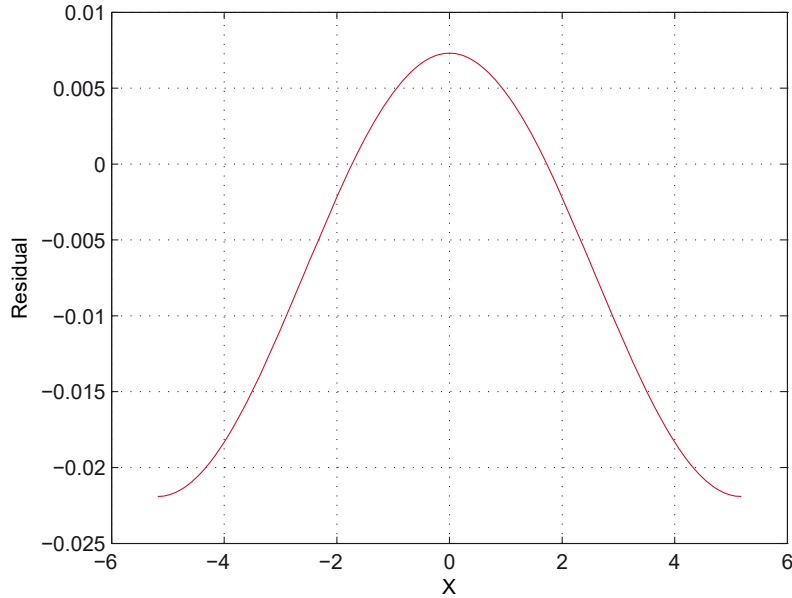
$$\mathbf{H} = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{M} + \lambda\Delta t\mathbf{K}] \quad (4.80)$$

alors, les différents sous-espaces de Krylov peuvent s'écrire :

$$\mathbf{K}\mathbf{r}_k = \mathbf{H}^k \mathbf{R}, \quad \forall k \geq 0 \quad (4.81)$$

Le résidu de notre problème (celui-ci définit le premier sous-espace de Krylov) est illustré figure 4.19 ( dans les faits, les sous-espaces succesifs de Krylov sont très proches du premier). Même si le résidu est représenté sur la configuration finale on suppose qu'il est associé aux noeuds, et qu'il est par conséquent bien défini à chaque instant (c'est à dire dans tout les domaines).

Comme la norme du résidu est plus grande que  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 10^{-6}$ ), on doit recalculer la solution en enrichissant la base. Pour cela on considère l'approximation de la base



**Figure 4.19.** Résidu sur le dernier pas de temps pour la base réduite  $\mathbf{A}^{(0)}$ .

réduite  $\mathbf{B}^{(1)}$ , qui est obtenue en ajoutant le résidu juste calculé à  $\mathbf{B}^{(0)}$ . On a alors cette nouvelle approximation :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \phi_0(\mathbf{x}_1) & R(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \vdots \\ \phi_0(\mathbf{x}_N) & R(\mathbf{x}_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{(1)} \boldsymbol{\zeta}(t) \quad (4.82)$$

que l'on introduit comme précédemment dans l'équation (4.76). On recalcule ensuite la solution sur  $[0, t_{max} = 50\Delta t]$  (avec  $\boldsymbol{\zeta}^T(t = 0) = (1 \ 0)$ ), et le nouveau résidu sur le dernier pas de temps par l'équation (4.79) en substituant à  $\mathbf{T}^{(0)}(t = 50\Delta t)$  la nouvelle solution  $\mathbf{T}^{(1)}(t = 50\Delta t)$ . Dans notre cas, la solution obtenue est très proche de celle présentée dans la figure 4.17, et la norme du nouveau résidu est  $\|R\| = 10^{-10}$ , ce qui nous permet de dire que avec seulement deux vecteurs la solution peut être représentée avec une très grande précision. En outre on a montré que la technique d'enrichissement basée sur les sous-espaces de Krylov, originalement proposée dans les travaux de Ryckelynck, est capable d'adapter la base réduite en peu d'itérations.

#### 4.5. Application de la POD en Interaction Fluide Structure

L'objectif de la suite de ce chapitre est d'appliquer la technique de réduction de modèle par la POD à des problèmes d'interaction fluide structure. La POD n'est pas une méthode inconnue dans ce domaine, bien que les travaux la concernant soient beaucoup moins nombreux qu'en mécanique des fluides. Il peut cependant paraître paradoxale de vouloir utiliser une base spatiale pour des domaines mobiles. On propose pour remédier à ce paradoxe une formulation applicable à des solides rigides immergés dans un écoulement.

#### 4.5.1. *Etat de l'art de l'utilisation de la POD en interaction fluide structure*

Comme on l'a évoqué précédemment, la POD a été beaucoup moins appliquée dans le domaine de l'interaction fluide structure qu'en mécanique des fluides. La suite de cette section présente quelques travaux traitant de la POD dans ce domaine

Sarkar et Paidoussis [?] ont utilisé la POD sur l'équation de mouvement d'un tube convoyant un fluide. Dans le cas présenté, le mouvement du tube ne modifiait pas l'écoulement, et les modes POD servaient de base de réduction pour les déplacements du solide. L'utilisation de la POD dans ce contexte là ne répond pas à la problématique d'une interaction forte entre l'écoulement et le mouvement de la structure, l'écoulement du fluide étant supposé constant.

Anttonen [?] a testé la capacité des modes POD à reconstruire un champ capturé sur un maillage mobile. Dans cet article [?], il utilise une approche de la POD différente de celle présentée, puisqu'il considère le produit scalaire discret dans  $L^2$ . En considérant que les noeuds du maillage gardent la même numérotation il recherche les vecteurs propres de la matrice :

$$V^T V \quad (4.83)$$

$V$  étant une matrice de taille  $n \times M^7$  dont chaque colonne est constituée d'une snapshot du champ de vitesse exprimé sur les  $n$  noeuds du maillage. C'est l'équivalent de la recherche des vecteurs propres par la méthode snapshot, avec un produit scalaire discret. Il effectue un premier test pour une fonction de courant autour d'un cylindre en translation. Ce cas montre alors que le fait de ne pas tenir compte de la déformation du maillage donne une mauvaise reconstruction.

Un deuxième test est effectué pour un écoulement dérivant d'une fonction potentielle sur une paroi oscillante. Les bases POD pour trois amplitudes différentes, et dix fréquences d'oscillations, calculées à partir de 20 snapshots, sont testées pour la réduction de l'équation. Les résultats obtenus donnent une bonne reconstruction du coefficient de force normal pour des oscillations et des fréquences faibles, la précision se détériorant avec l'augmentation de ceux-ci. Concluant que les modes sont mal localisés, puisqu'il n'y a pas d'information sur le maillage dans les modes obtenus, il propose de mélanger les bases POD obtenus pour différents maillage (MultiPOD) (Anttonen [?], Anttonen et al. [?]). En effet, comme une ligne de la matrice snapshot  $V$  est constituée de la valeur de la fonction dont on recherche la base POD, sur le même noeud à différents instant, si le maillage est mobile, le noeud n'est pas localisé aux même endroit. On a donc une perte d'information sur la disposition des noeuds sur lesquels sont exprimés les vecteurs POD. Anttonen propose de rechercher une base POD sur le maillage, c'est à dire d'effectuer des snapshots de la déformation du maillage par rapport à une configuration de référence. Il obtient ainsi un maillage

---

7.  $M$  désigne le nombre de snapshots

exprimé sur une base POD de la même manière que pour le champ de vitesse. Ce maillage est utilisé pour ensuite représenter la solution. La précision apportée par cette méthode est meilleure que précédemment. Cependant on n’a pas d’équation permettant de calculer les déformations de ce maillage. Il faut donc considérer la POD sur le maillage mobile comme un outil de compression de données. De plus, les cas testés ici concernent des écoulements dont le champ de vitesse dérive d’un potentiel, que l’on peut représenter par une équation linéaire.

Utturkar et al. [?] étudient également les modes POD pour des écoulements dans des domaines où les frontières sont mobiles : cavitation, écoulement à changement de phase et interaction entre un fluide et une membrane d’épaisseur nulle. Dans ce dernier cas ils proposent d’appliquer la POD sur un maillage mobile en interpolant chaque snapshot obtenu sur un maillage mobile vers un maillage de référence fixe. Nous verrons cela plus en détail dans la section 4.5.2.

Le dernier exemple que l’on citera ici est le travail de Lieu et Fahrat [?] qui ont étudié un modèle réduit pour écoulement autour d’un F-16. La snapshot est effectuée pour une solution des équations linéarisées de l’aéroélasticité à différentes fréquences. Ils ont introduit la notion des angles entre deux sous-espaces engendrés par deux bases POD obtenues pour deux nombres de Mach différents. Si on considère deux sous-espaces  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  engendrés chacun par une base de dimension  $r$ ,  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , on note  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  l’angle de sous-espace telle que le  $i^{\text{ième}}$  vecteur de la base de  $\mathcal{M}_1$  soit un vecteur de base de  $\mathcal{M}_2$ . Ainsi, considérant deux bases POD obtenus pour deux nombres de Mach  $M_1$  et  $M_2$ , en interpolant les angles de sous-espaces, la base POD pour un nombre de Mach  $M_1 < M < M_2$  peut être construite. La méthode est testée pour des nombres de Mach compris entre 0.6 et 0.8 avec de bons résultats. Cependant, d’après les auteurs eux-mêmes, les résultats ne sont valables que pour de faibles variations des nombres de Mach. La méthode suppose que entre deux sous-espaces, la “rotation” soit linéaire.

#### **4.5.2. Application de la réduction de modèle à l’interaction fluide structure**

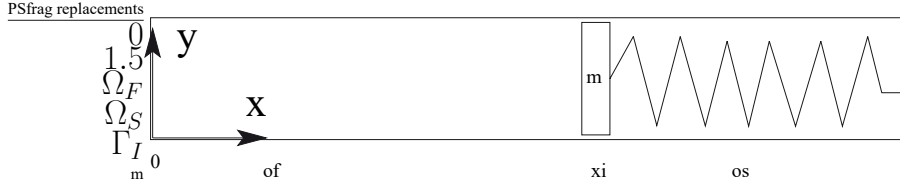
Un des points critique de l’application de la décomposition orthogonale aux valeurs propres dans le cas où le domaine est mobile est comme l’a évoqué Anttonen [?, ?] le caractère mobile du maillage sur lequel on effectue les snapshots. Dans le cas où l’on cherche juste à diminuer le stockage des données, à condition de connaître les maillages, et que pour chaque snapshot la numérotation des noeuds n’a pas changé, cela ne posera pas de problème. On sera plutôt dans un registre de compression de données et on déterminera les axes principaux des données du champ de vitesse étudié. Dans le contexte de recherche d’une base réduite sur laquelle on projette le système couplé, l’application aux domaines mobiles n’est pas évidente.



#### 4.5.2.1. Illustration de la problématique

On commence cette section par un exemple de la mise en pratique des travaux de Antonen [?],[?]

On prend le cas de l'équation de Burgers utilisée section 4.3.2.1 couplée avec un ressort.



**Figure 4.20.** Description du domaine d'étude

On considère un champ de vitesse  $v(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega_f)$ ,  $x \in \Omega_f(t) = [0, \Gamma_I(t)]$ ,  $t \in [0, 1]$ , la viscosité cinématique  $\nu = 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . On note  $\Gamma_I$  la paroi mobile.

Le mouvement du fluide est décrit par l'équation de Burgers monodimensionnelle dans sa formulation ALE :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v - w) \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \Omega_F(t) \\ v(0, t) = 0 \\ v(\Gamma_I, t) = v|_{\Gamma_I} \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{sur } \Omega_F(0) \end{cases} \quad (4.84)$$

$v_0(x) = \sin(\pi x)$  est la solution à l'instant initiale et  $w$  est la vitesse du maillage.

La paroi  $\Gamma_i(t)$  bouge selon l'équation de masse ressort suivante :

$$m\ddot{\Gamma}_i + K(\Gamma_i - \Gamma_i(0)) + b\dot{\Gamma}_i = F_F \quad (4.85)$$

Où  $\Gamma_i(0)$  est la longueur à vide du ressort,  $b$  l'amortissement,  $K$  la raideur du ressort,  $m$  la masse et  $F_F$  les efforts fluides. On choisit  $x_0 = 0.95 \text{ m}$ ,  $b = 0.10 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $K = 39.5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $m = 0.5 \text{ kg}$ . Le système est résolu par un algorithme de Newton-Raphson.

L'ensemble des clichés constitue une matrice  $[V]$  de taille  $n \times M$  où  $n$  représente le nombre de noeuds discrétisant le domaine fluide et  $M$  le nombre de clichés. En utilisant le produit scalaire de  $\mathbb{R}^n$  les modes POD sont solutions du problème aux valeurs propres suivant :

$$[V][V]^T[\Phi] = [\Lambda][\Phi] \quad (4.86)$$

Avec  $[\Phi]$  une matrice constituée des modes POD et  $[\Lambda]$  la matrice diagonale composée des valeurs propres. On appelle  $[\tilde{\Phi}]$  la matrice de taille  $n \times N$  constituée de  $N$  vecteurs propres correspondant aux  $N$  premières valeurs propres dominantes.

A l'instant  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  on note  $v_i$  les vecteurs représentant le champ de vitesse sur l'espace discret, et  $v_i^N$  le champ de vitesse sur la base POD tronquée à  $N$  modes :

$$v_i^N = [\tilde{\Phi}] A_i \quad (4.87)$$

$A_i$  étant un vecteur de dimension  $N$  telle que

$$A_i = [\tilde{\Phi}]^T V_i \quad (4.88)$$

Comme pour le cas traité dans la section 4.3.2.1 on observe que peu de modes suffisent pour capturer la quasi totalité de l'énergie (tableau 4.5.2.1). Il en faut cependant 5 ici pour obtenir 99.999% de l'énergie alors que 3 suffisaient précédemment.

mode $i$	$\lambda_i$	% d'énergie
1	118.793	98.035
2	0.271	99.454
3	$9.99 \cdot 10^{-2}$	99.975
4	$4.349 \cdot 10^{-3}$	99.998
5	$3.287 \cdot 10^{-4}$	99.999

**Tableau 4.5.** Contribution en énergie cinétique des 5 premiers modes POD

Les modes POD obtenus sont aussi différents. On les représente figure (4.21) sur les noeuds discrétisant le domaine. On observe que les premiers vecteurs POD sont semblables et que les suivant sont totalement différents.

#### 4.5.2.1.1. Modèle réduit

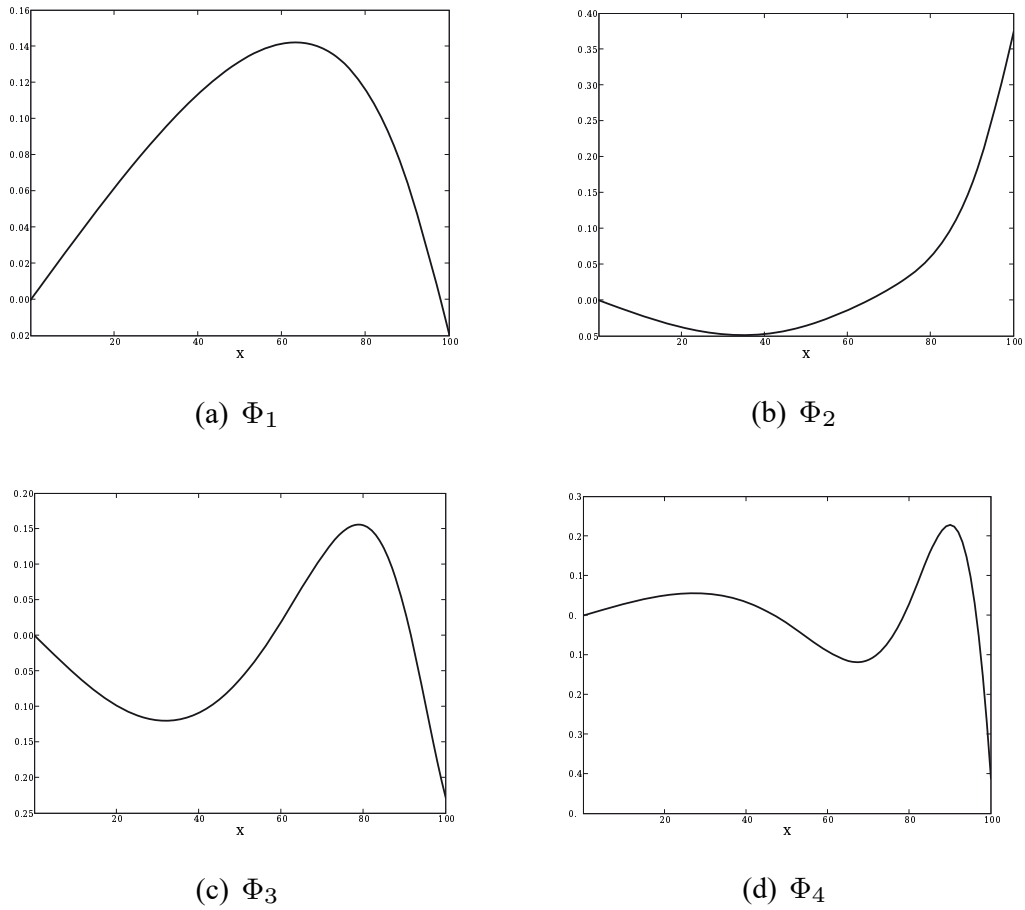
Considérons la formulation différence finie du problème :

$$\begin{cases} \dot{v}_t + [B(v_t, w_t)] v_t - [C] v_t = 0 \\ m\ddot{\Gamma}_i + K(\Gamma_i - \Gamma_i(0)) + b\dot{\Gamma}_i = F_F \\ v_t[n] = \dot{x} \end{cases} \quad (4.89)$$

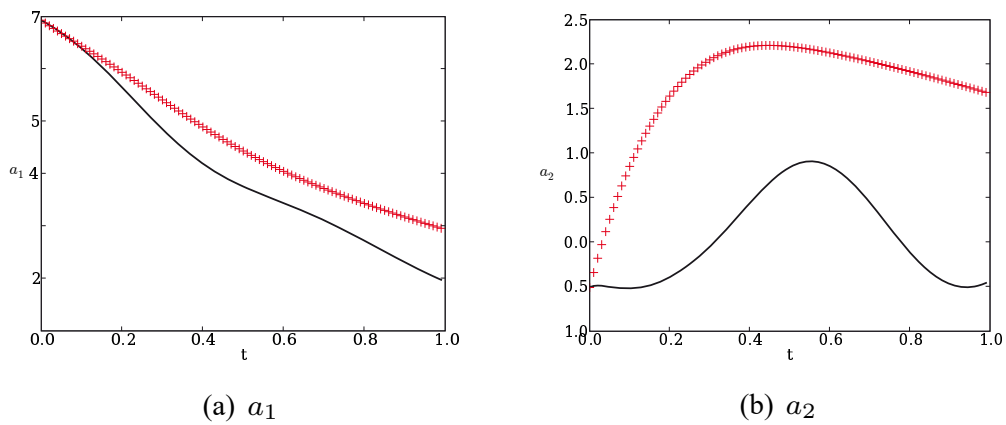
L'équation (4.89) est la formulation ALE de l'équation de Burgers, avec  $w_t$  représentant la vitesse du maillage à l'instant  $t$ . En tenant compte de la décomposition de la vitesse sur la base POD tronquée à  $N$  modes et en projetant (4.89) sur le sous-espace engendré par ces  $N$  vecteurs on obtient :

$$[\tilde{\Phi}]^T [\tilde{\Phi}] \dot{A}_t + [\tilde{\Phi}]^T [B(v_t, w_t)] [\tilde{\Phi}] A_t - [\tilde{\Phi}]^T [C] [\tilde{\Phi}] A_t = 0 \quad (4.90)$$

Dans le cas présent la remaillage ne coûtant pratiquement rien, on calcule le déplacement du maillage à chaque instant  $t$ .

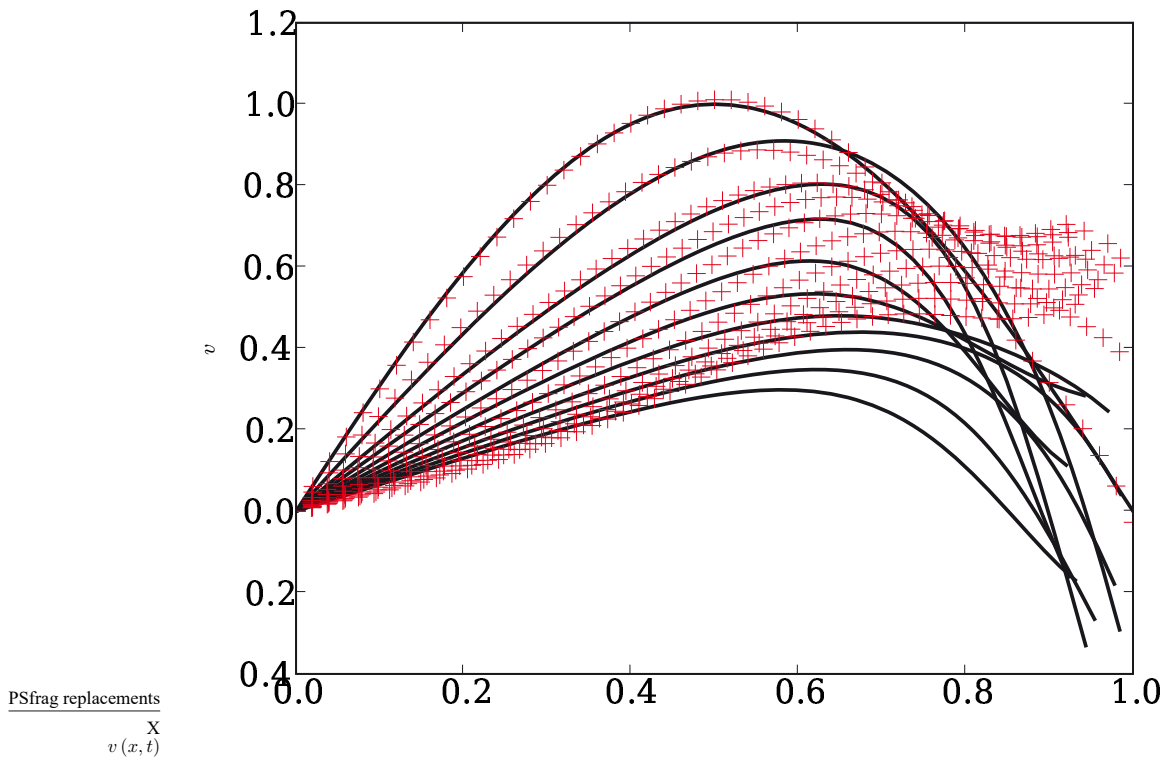


**Figure 4.21.** *Les 4 premiers modes POD*



**Figure 4.22.** *Les 2 premiers coefficients temporels obtenus — par la POD directe + le système dynamique réduit à 3 modes*

Le système dynamique ainsi construit donne de mauvais résultats. On observe figure (4.22) des coefficients temporels totalement différents. La visualisation de la solution reconstruite est quand à elle désastreuse (figure (4.23)). La vitesse du fluide n'est pas reconstruite auprès de l'interface mobile.



**Figure 4.23.** Comparaison du champ de vitesse reconstruit à différents instant  $t$  obtenus par : — Solution numérique initiale et + le système dynamique réduit à 5 modes

Il existe plusieurs explications quand à la mauvaise qualité des résultats. En premier lieu, en choisissant un domaine mobile on ne connaît pas le domaine de définition des modes POD puisque ceux ci sont exprimés sur les noeuds sans aucune information sur leur emplacement. On a choisit ici de calculer les dérivées spatiales au début du système dynamique et non à chaque itération de celui-ci. C'est une autre source d'erreur, mais il semble difficilement envisageable de calculer les gradients des fonctions caractéristiques à chaque itération pour des problèmes bidimensionnels ou tridimensionnels. Cela serait trop coûteux et donc ne serait pas intéressant pour l'application de la POD.

#### 4.5.2.2. Solution proposée

A ces résultats numériques, on peut rajouter une remarque sur la signification de la POD effectuée dans ces conditions. Que signifie alors l'opérateur (4.6) défini dans la section 4.2 ? On va créer des corrélations entre des points qui ne sont pas dans le même domaine. De même pour le calcul de la matrice snapshot, l'exemple est plus flagrant. On rappelle que la méthode des snapshots revient à résoudre le problème aux

valeurs propres :

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M C(t_i, t_k) A_k = \lambda A_i \quad (4.91)$$

Où  $M$  désigne le nombre de clichés et

$$C(t_i, t_k) = (v(t_i), v(t_k)) = \int_{\Omega} v(x, t_i) \cdot v(x, t_k) dx \quad (4.92)$$

Si on considère  $\Omega(t) = \Omega_f(t)$  comme étant le domaine fluide à l'instant  $t$ , l'expression (4.92) n'a aucun sens si les domaines fluide sont différents aux instants  $t_i$  et  $t_k$ . Une des solutions est donc comme le propose Utturkar et al. [?] d'utiliser un domaine fixe de référence  $\Omega$  auquel on associe un maillage fixe tel que :

$$\forall t \in [0, T] \quad \Omega_f(t) \subset \Omega \quad (4.93)$$

Où dans le cas plus précis de l'interaction fluide structure :

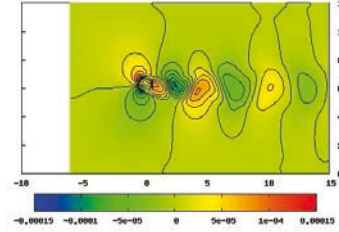
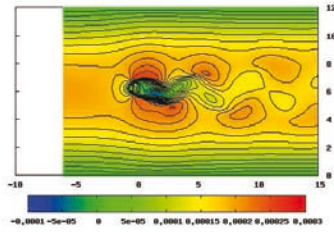
$$\forall t \in [0, T] \quad \overline{\Omega}_f(t) \cup \overline{\Omega}_s(t) = \overline{\Omega} \quad \text{et} \quad \Omega_f(t) \cap \Omega_s(t) = \emptyset \quad (4.94)$$

A chaque snapshot le champ de vitesse est interpolé des maillages mobiles vers le maillage du domaine de référence. Ainsi, on obtient un champ de vitesse globale sur le maillage fixe sur lequel on peut effectuer la décomposition orthogonale aux valeurs propres. L'introduction des fonctions caractéristiques permet de suivre les domaines. Dans la suite on ne s'est pas focalisé sur le procédé d'interpolation à utiliser, ni à minimiser le temps de calcul que cette étape peut représenter. Le but de ici étant le test et l'utilisation d'une base POD pour les problèmes d'interaction fluide structure. On s'est contenté d'utiliser une méthode de Shépard aussi appelée méthode d'interpolation inversement proportionnelle à la distance. Pour chaque noeud du maillage de référence noté  $X_i$  on recherche à chaque snapshot  $t$  les  $K$  noeuds les plus proches du maillage mobile  $X_k^t$   $k = 1, \dots, K$ . Si on considère une fonction  $\phi(x, t)$  obtenue sur le maillage mobile, en chaque noeud du maillage de référence, à chaque clichés, sa valeur est calculée par :

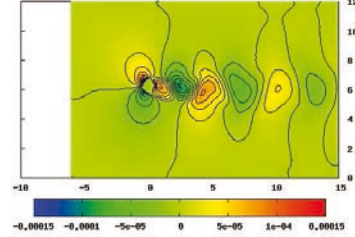
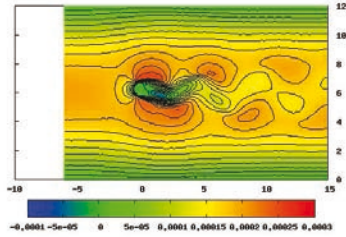
$$\phi(X_i, t) = \frac{\sum_{k=1}^K \frac{\phi(X_k^t, t)}{r_k}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{r_k}} \quad (4.95)$$

Où  $r_k$  est la distance entre le noeud  $X_k^t$  et le noeud  $X_i$ .

On notera que la méthode d'interpolation utilisée est linéaire, mais celle-ci n'intervenant pas sur le calcul initial de la solution, mais servant juste pour le stockage des clichés on ne propage pas l'erreur d'interpolation. La visualisation des isolignes



(a) isolignes de la première composante de la vitesse sur maillage mobile (b) isolignes de la deuxième composante de la vitesse sur maillage mobile



(c) isolignes de la première composante de la vitesse sur le maillage de référence (d) isolignes de la deuxième composante de la vitesse sur le maillage de référence

**Figure 4.24.** Visualisation des isolignes du champ de vitesse sur le maillage mobile et le même champ de vitesse interpolé sur le maillage de référence

semble conforter cette idée (figure 4.24) que l'erreur d'interpolation peut être considérée comme négligeable.

Pour l'interpolation de la vitesse, sur le domaine solide la vitesse en chaque noeud est déterminée en fonction de la vitesse du centre de gravité et du vecteur rotation du solide.

Cette méthode nous permet d'obtenir un champ de vitesse globale sur tout le domaine  $\Omega$  tel que

$$\forall x \in \Omega, \forall t \in \mathbf{T} \quad v(x, t) = v_f(x, t) \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) + v_s(x, t) (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t)) \quad (4.96)$$

Où la fonction caractéristique du fluide  $\mathbb{I}_{\Omega_f}$  à la même définition que l'équation (4.99).

La recherche des modes POD est alors effectuée pour ce champ de vitesse.

### 4.5.3. Construction d'un système dynamique d'ordre bas par la POD

Comme on l'a vu précédemment le choix d'utiliser la POD comme outil de réduction de modèle impose l'utilisation d'un maillage fixe. Nous allons nous limiter

dans la suite du travail aux problèmes d'interaction entre un fluide et un solide rigide. Par souci de garder une formulation qui respecte la physique on décide de formuler le problème suivant la formulation type domaine fictif.

#### 4.5.3.1. Méthode des domaines fictifs

La méthode des domaines fictifs a été introduite en mécanique des fluide par Glowinski et al. [?] et ensuite testée pour la simulation de particules rigides dans un fluide newtonien [?, ?] et pour un écoulement à faible vitesse autour d'une aile de NACA0012 [?]. La méthode des domaines fictifs consiste à étendre les équations du domaine fluide au domaine rigide en forçant la contrainte de rigidité sur ce domaine par un coefficient de pénalisation et un multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte dans la formulation variationnelle. On présente ici la formulation de Patankar et al. [?].

On considère un domaine spatiale  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , de dimension  $d = 1, 2$  or  $3$ , un intervalle de temps  $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}$ , une variable d'espace  $x \in \Omega$ , et une variable temporelle  $t \in \mathbf{T}$ .

Soit  $\Omega_f(t)$  (respectivement  $\Omega_s(t)$ ) le domaine fluide de densité  $\rho_f$  et de viscosité  $\mu_f$ . à l'instant  $t$  (respectivement solide),  $\Gamma_I(t)$  l'interface entre les domaines, tel que  $\Omega_f(t) \cap \Omega_s(t) = \emptyset$

$$\forall t \in \mathbf{T} \quad \Omega_f(t) \cup \Omega_s(t) = \Omega \quad (4.97)$$

Soit  $v \in \mathbf{H}(\Omega, \mathbf{T})$  le champ de vitesse défini pour tout le domaine,  $\mathbf{H}$  étant un espace de Hilbert. :

$$\forall x \in \Omega \quad v(x, t) = v_f(x, t) \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) + v_s(x, t) (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t)) \quad (4.98)$$

Où  $v_f$  représente le champ de vitesse sur le domaine fluide et  $v_s$  sur le domaine solide et  $\mathbb{I}_{\Omega_f}$  représent la fonction caractéristique du fluide définie comme suit

$$\mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_f(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.99)$$

On considère le domaine solide constitué d'un solide rigide de masse  $m$ , et de centre de gravité  $X_G$ . Le problème se formule :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \left( \frac{\partial v_f}{\partial t} + (v_f \cdot \nabla) v_f \right) = \nabla \cdot \sigma_f & \text{dans } \Omega_f(t) \\ \nabla \cdot v_f = 0 & \text{dans } \Omega_f(t) \\ m \frac{dV_G}{dt} = \mathcal{F} & \\ J \frac{d\omega}{dt} + J\omega \times \omega = \mathcal{T} & \\ v_s(x, t) = V_G(t) + \omega(t) \times (x - X_g) & \text{dans } \Omega_s(t) \end{array} \right. \quad (4.100)$$

$J$  étant la matrice d'inertie du solide,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{T}$  la force et le moment dû à l'action du fluide :

$$\mathcal{F} = \int_{\Gamma_I} \sigma_f \cdot \mathbf{n} dx \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \int_{\Gamma_I} (x - X_g) \times (\sigma_f \cdot \mathbf{n}) dx \quad (4.101)$$

La condition de solide rigide est modéliser par l'équation (4.100) suivante :

$$v_s(x, t) = V_G(t) + \omega(t) \times (x - X_g) \quad \forall x \in \Omega_s(t) \quad (4.102)$$

où  $V(t) = v_s(X_g, t)$  et  $\omega(t)$  est le vecteur instantané de rotation. On sait d'après le lemme du mouvement rigide que (4.102) est équivalent à

$$\mathbf{D}(v_s) = \frac{1}{2} (\nabla v_s + \nabla^T v_s) = 0 \quad \text{dans } \Omega_s(t) \quad (4.103)$$

La formulation variationnelle sur le domaine fluide s'écrit de manière classique

$\forall v_f^* \in \{v | v \in \mathbf{H}(\Omega_f), v = 0(t) \text{ sur } \partial\Omega_f \setminus \Gamma_I \text{ et } v = v_{\Gamma_I}(t) \text{ sur } \Gamma_I\}$

$$\rho_f \int_{\Omega_f} \frac{\partial v_f}{\partial t} \cdot v_f^* dx + \rho_f \int_{\Omega_f} (v_f \cdot \nabla) v_f \cdot v_f^* dx = \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \sigma_f) \cdot v_f^* dx \quad (4.104)$$

avec

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} (\nabla \cdot \sigma_f) \cdot v_f^* dx &= \int_{\Gamma_I} (p\mathbb{I}_d - 2\mu_f \mathbf{D}(v_f)) \mathbf{n} v_f^* dx - 2\mu_f \int_{\Omega_f} \mathbf{Tr}(\mathbf{D}(v_f) \mathbf{D}(v_f^*)) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_f} p \nabla \cdot v_f^* dx \end{aligned} \quad (4.105)$$

Avec  $\mathbf{n}$  la normale sortante du domaine solide.

Pour le solide, on considère l'équation d'équilibre locale :

$$\rho_s \frac{Dv_s}{Dt} = \nabla \cdot \sigma_s + f \quad (4.106)$$

Où  $f$  désigne les forces volumiques que l'on néglige pour la suite.

Sa formulation variationnelle s'écrit :

Soit  $v_s^*$  un champ virtuel

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \frac{Dv_s}{Dt} \cdot v_s^* dx = \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \sigma_s \cdot v_s^* dx \quad (4.107)$$

Si on choisit un champ virtuel vérifiant l'hypothèse de solide rigide, c'est à dire qu'il existe  $V^* \in \mathbb{R}^2$  et  $K^* \in \mathbb{R}^2$  telle que  $\forall x \in \Omega_s \quad v_s^*(x) = V^* + K^* \times (X_G - x)$ , la formulation (4.107) contient aussi le théorème des moments.

$$\int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \sigma_s) \cdot v_s^* dx = \int_{\Gamma_I} (\sigma_s \cdot \mathbf{n}) \cdot v_s^* dx - \int_{\Omega_s} \mathbf{Tr}(\sigma_s \mathbf{D}(v_s^*)) dx \quad (4.108)$$



En tenant compte que  $v_s^*$  est un champ virtuel rigidifiant, le premier terme du second membre de (4.108) se décompose selon  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{T}$  et que sur l'interface on  $\sigma_s \cdot \mathbf{n} = \sigma_f \cdot \mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_I} (\sigma_s \cdot \mathbf{n}) \cdot v_s^* dx &= \int_{\Gamma_I} (\sigma_s \cdot \mathbf{n}) \cdot V^* dx + \int_{\Gamma_I} (\sigma_s \cdot \mathbf{n}) \cdot K^* \times (X_G - x) dx \\ &= \mathcal{F} \cdot V^* + \mathcal{T} \cdot K^* \end{aligned} \quad (4.109)$$

Et le deuxième terme du second membre de (4.108) est nul car pour un solide rigide  $\mathbf{D}(v_s^*) = 0$ .

On a choisit que sur  $\Gamma_I$ ,  $v_f^* = v_s^*$ , on obtient la formulation variationnelle sur  $\Omega$   
 $\forall v^* \in \{v | v \in \mathbf{H}(\Omega), v = 0(t) \text{ sur } \partial\Omega_f \setminus \Gamma_I \text{ et } \mathbf{D}(v) = 0 \text{ dans } \Omega_s\}$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial v}{\partial t} \cdot v^* dx + \int_{\Omega} \rho (v \cdot \nabla) v \cdot v^* dx = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma) \cdot v^* dx \quad (4.110)$$

Où

$$\forall x \in \Omega \quad v(x, t) = v_f(x, t) \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) + v_s(x, t) (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t)) \quad (4.111)$$

$$\forall x \in \Omega \quad \rho(x, t) = \rho_f \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) + \rho_s (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t)) \quad (4.112)$$

et

$$\forall x \in \Omega \quad \sigma(x, t) = \sigma_f(x, t) \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) + \sigma_s(x, t) (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t)) \quad (4.113)$$

$\mathbb{I}_{\Omega_f}$  représente la fonction caractéristique du fluide définie comme suit

$$\mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_f(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.114)$$

Cette formulation est équivalente à considérer le domaine solide comme un fluide dont la formulation forte s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_s \left( \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) & = \nabla \cdot \sigma_s \quad \text{dans } \Omega_S(t) \\ \nabla \cdot v = 0 & \text{dans } \Omega_S(t) \\ \mathbf{D}(v) = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla^T v) = 0 & \text{dans } \Omega_S(t) \\ v = v_i & \text{sur } \partial\Omega_S(t) \\ \sigma_s \cdot \mathbf{n} = \sigma_f \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \partial\Omega_S(t) \\ v(x, t = 0) = V_0(x) & \text{dans } \Omega_S(t) \end{array} \right. \quad (4.115)$$

Où  $\rho_s$  correspond à la densité du domaine solide,  $\sigma_s$  correspondant au tenseur des contraintes du domaine tel que  $\mathbf{D}(v) = 0$ .

En pratique, dans la formulation variationnelle, on pénalise la contrainte de solide rigide par un coefficient  $\mu_s$ . L'étape suivante consiste à relaxer le comportement de solide rigide par un multiplicateur de Lagrange  $L$ .

On peut alors écrire le tenseur des contraintes dans le domaine rigide sous la forme :

$$\sigma_s = -p\mathbb{I}d + L + 2\mu_s\mathbf{D}(v) \quad (4.116)$$

L'équation (4.103) nous donne dans un cas 3D 6 variables scalaires pour  $L$ . En considérant les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{D}(v)) &= 0 & \text{dans } \Omega_S(t) \\ \mathbf{D}(v) \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{Sur } \partial\Omega_S(t) \end{aligned} \quad (4.117)$$

on réduit à 3 variables. Finalement  $L$  n'est pas vraiment le multiplicateur de Lagrange lui-même, mais il représente le champ de contrainte induit par la rigidité. Il peut être donc représenté par :

$$L = \mathbf{D}(\lambda) \quad (4.118)$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange à considérer, associé à la contrainte de rigidité. La formulation variationnelle s'écrit alors ainsi :

En considérant les espaces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{v_\Gamma} &= \{v | v \in \mathbf{H}(\Omega), v = v_\Gamma(t) \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_I\} \\ \mathbf{H}_0 &= \{v | v \in \mathbf{H}(\Omega), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_I\} \\ \mathbf{L}_0^2(\Omega) &= \left\{ q \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \int_\Omega q dx = 0 \right\} \end{aligned} \quad (4.119)$$

$\forall v^* \in \mathbf{H}_0, \varsigma \in \mathbf{H}(\Omega_s(t))$  et  $q \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  trouver  $v \in \mathbf{H}_{v_\Gamma}, p \in \mathbf{L}_0^2(\Omega), \lambda \in \mathbf{H}(\Omega_s(t))$  tel que :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) \cdot v^* dx - \int_\Omega p \nabla \cdot v^* dx + \int_\Omega q \nabla \cdot v dx + \int_\Omega 2\mu \mathbf{D}(v) : \mathbf{D}(v^*) dx \\ &+ \int_\Omega \rho g \cdot v^* dx + \int_{\Omega_s(t)} \mathbf{D}(\lambda) : \mathbf{D}(v^*) dx + \int_{\Omega_s(t)} \mathbf{D}(\lambda) : \mathbf{D}(v) dx = 0 \end{aligned} \quad (4.120)$$

Où

$$\mu = \mathbb{I}_{\Omega_F} \mu_f + (\mathbb{I} - \mathbb{I}_{\Omega_F}) \mu_s \quad (4.121)$$

La condition sur l'interface entre le fluide et le solide est ainsi incluse dans les système. Ainsi, il n'y a pas d'expression explicite de forces agissant sur l'interface, ni de la vitesse sur celle-ci. Cette méthode est entre autre appliquée par Laure et al. [?, ?] dans le cas de fluides chargés. Carlson et al. [?] prolonge la méthode décrite par Patankar et al. pour une forme quelconque de solide rigide, et pour une méthode résolution en différence finie et l'ajout de Level-set pour traiter les cas de surface libre. Yu [?] étend la formulation de Glowinski [?] obtenu pour des solides rigides au solides flexibles.

#### 4.5.3.1.1. Remarque

Une preuve de convergence de la méthode des domaines fictifs a été établie pour l'équation d'Helmholtz résolue dans un domaine arbitraire [?].

On veut établir un système dynamique POD pour des traiter des problèmes d'interaction entre un fluide et des structures rigides. On a vu dans la première partie de ce chapitre la signification des modes POD pour la mécanique des fluides. Pour le cas d'une structure rigide, il est légitime de se demander quel est le sens d'une décomposition orthogonale aux valeurs propres, et quel est l'incidence de l'utilisation d'un champ globale contenant le champ de vitesse du domaine fluide et du solide rigide. Entre autre, la base POD obtenu est elle sur le domaine  $\Omega_s$  une base pour un comportement rigide ?

On propose ici l'étude de quelques cas numériques appréhendant cette problématique. On considère un domaine fixe de dimension  $21\text{m} \times 12\text{m}$  disposant d'un maillage constitué de  $n_{x_1} \times n_{x_2} = 211 \times 121$  noeuds dans lequel le solide, un disque de rayon  $R = 0.5$  m bouge.

#### 4.5.3.2. Etude de la POD pour un solide rigide

Le premier cas étudié est celui d'un disque rigide cylindrique en translation uniforme. Le champ de vitesse  $v$  du domaine solide  $\Omega_s$  est défini dans le domaine global  $\Omega$  par :

$$v(x, t) = \begin{cases} v_1 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) \\ v_2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) \end{cases} \quad (4.122)$$

Où  $\mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t)$  est la fonction caractéristique du domaine solide.

Rechercher une base POD de ce champ de vitesse à partir de  $M$  consiste à trouver les vecteurs  $\Phi$  solution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \int_{\Omega} v(y, t) \cdot \Phi(y) dy v(x, t) = \lambda \Phi(x) \quad (4.123)$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (v_1^2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) \alpha_1^k + v_1 v_2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) \alpha_2^k) = \lambda \Phi_1(x) \\ \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (v_1 v_2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) \alpha_1^k + v_2^2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) \alpha_2^k) = \lambda \Phi_2(x) \end{cases} \quad (4.124)$$

$$\text{avec } \alpha_1^k = \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s}(y, t_k) \Phi_1(y) dy \quad \alpha_2^k = \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s}(y, t_k) \Phi_2(y) dy$$

On peut considérer aussi sa formulation par la méthode des snapshots, qui consiste les vecteurs POD  $\Phi$ , mais les coefficients  $A^k$  tels que :

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^M A^k v(x, t_k) \quad (4.125)$$

Les  $A^k$  formant un vecteur propres du problème suivant :

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (v(\bullet, t_i), v(\bullet, t_k)) A^k = \lambda A^i \quad (4.126)$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v(x, t_i) v(x, t_k) dx &= \int_{\Omega} v_1^2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_i) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) + v_y^2 \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_i) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) dx \\ &= (v_1^2 + v_y^2) \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_i) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) dx \end{aligned} \quad (4.127)$$

La recherche des coefficients  $A$  revient donc à rechercher  $A = (A^1, \dots, A^M)$  tel que

Pour  $i = 1, \dots, M$

$$\frac{v_1^2 + v_y^2}{M} \sum_{k=1}^M C(t_i, t_k) A^k = \lambda A^i$$

$C$  étant une matrice diagonale supérieure ou inférieure selon le sens de la translation composée de  $N$  diagonales telles que  $N < \frac{2R}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Delta t}$

#### 4.5.3.2.1. Premier cas : grand déplacement du solide

On considère un premier cas où les clichés sont pris de telle sorte qu'il n'y ait aucun chevauchement du domaine occupé à chaque snapshot. Pour cela on impose au solide une vitesse  $v_1 = \frac{2R}{\Delta t}$  et  $v_2 = 0$ , les clichés étant pris tout les  $\Delta t$ . Seul la diagonale de la matrice  $C$  aura des termes non nuls.

La base POD obtenue est alors de dimension  $M$  égale aux nombres de snapshots telle que

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t_k) \\ 0 \end{cases} \quad (4.128)$$

et les valeurs propres sont toutes égales et valent  $\lambda_k = \frac{v_x^2}{M} |\Omega_s| = \lambda$ .

Donc pour un corps rigide en déplacement, pour reconstruire fidèlement le champ de vitesse du solide il faut tout les modes POD. Ceci est paradoxale puisque si on considère un repère lié au solide, pour un solide rigide sa base est de dimension 2 en  $2D$  et 3 en  $3D$ . Cet exemple limite déjà l'étude à des solides oscillants autour d'une position.

#### 4.5.3.2.2. Disque en oscillation

Nous allons considérer ici deux cas. Dans le premier cas on considère un solide seul oscillant dans un milieu quelconque. Dans le deuxième cas le cylindre oscillera de la même façon, mais dans un milieu comportant une vitesse. Le but est sur cet exemple d'essayer d'évaluer si l'erreur que l'on fait en effectuant la POD sur le champ de vitesse global.

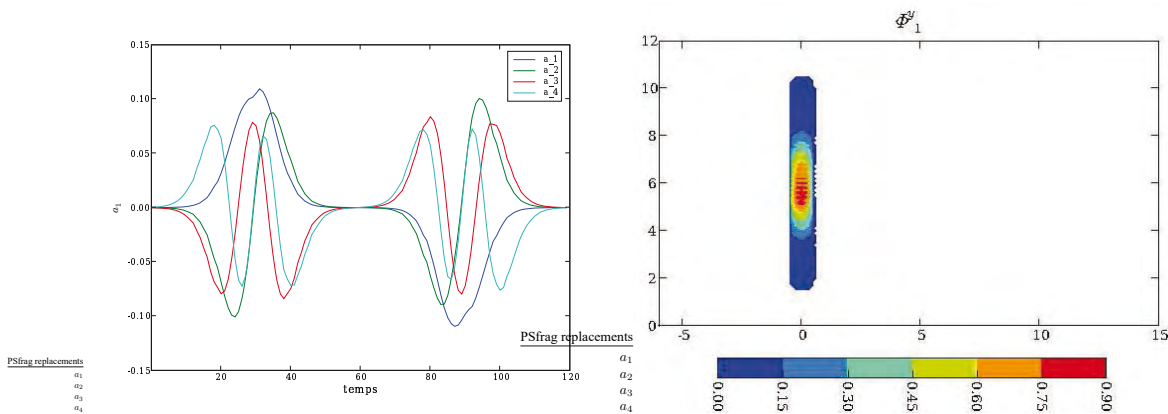
##### 1) Disque dans un fluide au repos

On impose au cylindre une vitesse de forme sinusoïdale dans le domaine solide de telle sorte que sur  $\Omega$  le champ de vitesse s'écrive sous cette forme :

$$v(x, t) = \begin{cases} 0.0 \\ \alpha \sin(\omega t) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) \end{cases} \quad (4.129)$$

Où on choisit arbitrairement  $\alpha = \frac{8\pi}{120}$  et  $\omega = \frac{2\pi}{120}$ .

La POD ne donne pas de modes dominants comme en mécanique des fluides. On obtient pas à proprement parlé de valeur propre dominante, mais des valeurs propres du même ordre de grandeur. On remarque figure (1) que les coefficients temporels ont globalement la même amplitude. Le premier mode POD est représenté figure (1).



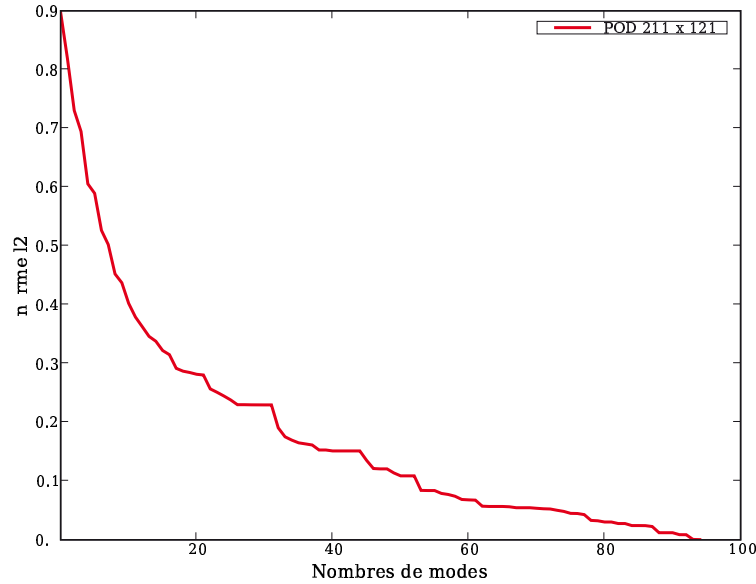
**Figure 4.25.** Coefficients  $a_i$  **Figure 4.26.** Deuxième composante du premier

Il correspond à une sommation de toutes les fonctions caractéristiques. Les autres modes correspondent à des sommations partielles. Il faut énormément de modes pour reconstruire la solution avec une erreur acceptable figure (4.27), au minimum 90.

Dans le cas d'oscillations plus faibles, il faudrait moins de modes. Cela nous contraint donc aux cas où l'on aura de faibles oscillations d'un solide autour de sa position d'équilibre.

##### 2) Disque en oscillation dans un écoulement sans interaction

On teste dans cet exemple la POD pour un champ de vitesse globale, où la vitesse dans le solide est faible par rapport à la vitesse dans le domaine l'entourant. Il n'y a



**Figure 4.27.** Erreur de reconstruction en norme  $L^2$  en fonction du nombre de modes retenus

pas d'interaction entre les domaine, le but étant juste d'avoir une idée qualitative de la POD. Le champ de vitesse sur  $\Omega$  est imposé comme suit :

$$v(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \alpha_1 \cos(\omega t) \sin(\beta_1 x_1) \sin(\beta_2 x_2) \mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) \\ \alpha_2 \cos(\omega t) \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) \end{cases} \quad (4.130)$$

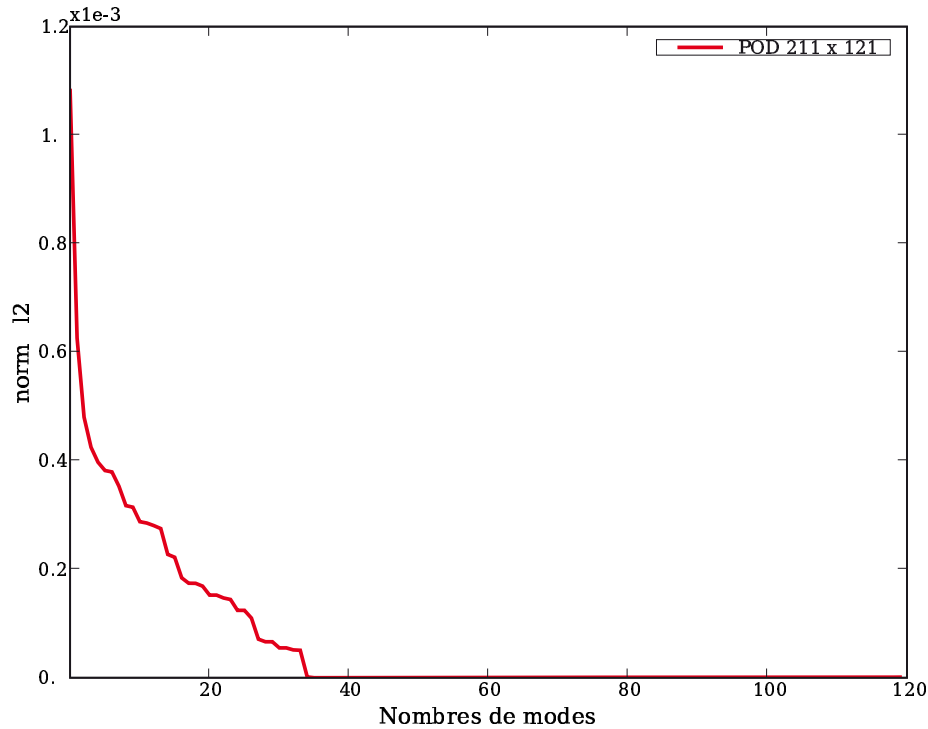
$$\alpha_1 = 100, \omega = 2 \cdot 10^{-4}, \beta_1 = \frac{2\pi}{L}, \beta_2 = \frac{2\pi}{L}, \alpha_2 = 1 \cdot 10^{-4}.$$

Le champ de vitesse dans le fluide est choisi de telle sorte qu'il soit dominant par rapport au domaine solide et on choisit pour le solide une amplitude d'oscillation plus faible que dans le cas précédent. On observe que dans ce cas là, on a une erreur de reconstruction du champ de vitesse globale en norme  $L^2$  très faible puisqu'elle est en  $10^{-3}$  (figure (4.28)).

Le premier mode capturant essentiellement les structure du fluide, alors que les seconds sont plutôt axés sur les zones d'oscillation de la structure rigide

On obtient une bonne reconstruction de la vitesse globale lorsque l'on évalue l'erreur en norme  $L^2$ . Si on zoom sur le domaine solide, cela devient plus compliqué. En pratique lorsque l'on évalue l'erreur de reconstruction sur le solide, on constate que même avec 50 modes on ne reconstruit pas entièrement la vitesse sur le domaine solide

Par contre la vitesse au centre de gravité est reconstruite dès le premier mode. Connaissant celle-ci il est aisé de reconstruire la vitesse dans tout le domaine solide, donc le manque de précision des modes POD pour la vitesse du corps rigide n'est pas un problème en soit puisque l'on peut le contourner.



**Figure 4.28.** Erreur de reconstruction en norme  $L^2$  en fonction du nombre de modes retenus

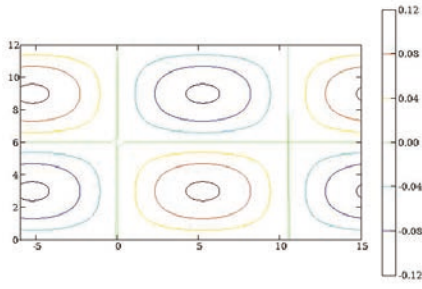
#### 4.5.3.2.3. Conclusion

Comme on l'a vu dans certains exemples numériques, la POD de même qu'elle n'est pas adaptée pour l'étude de fonctions caractéristiques, peut donner des résultats catastrophiques si l'on considère le solide rigide seul. Cependant dans le cas de faibles déplacements, l'approche peut encore être valable, de même si on considère un problème d'interaction fluide solide rigide avec de faibles déplacements de la structure. En effet, la quasi totalité de l'énergie cinétique est apportée par le fluide, les modes PODs contiendront donc principalement l'information sur celui-ci. On aura une détérioration de l'information sur le domaine solide, cependant dans le cas de faibles oscillations, c'est à dire que si moins 2 points maillage étant dans le domaine solide initiale restent au cours du temps dans le domaine solide, on pourra reconstruire avec peu de modes la vitesse en ces points, donc le solide rigide.

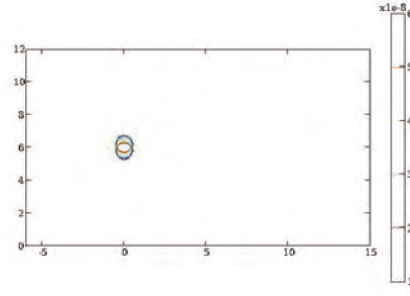
Dans la suite on considère que  $v^*$  est une fonction issue de la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Une des propriétés de cette fonction est que pour un champ de vitesse incompressible, cette fonction est à divergence nulle. Par conséquent le terme de pression n'est plus à prendre en compte dans (4.120).

#### 4.5.3.3. Système dynamique POD

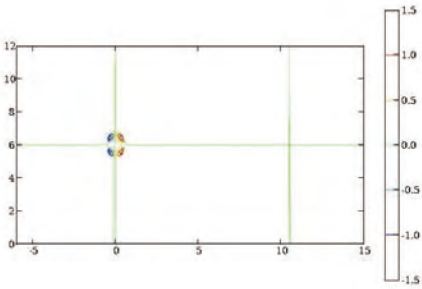
On cherche  $v$  à divergence nul tel que :



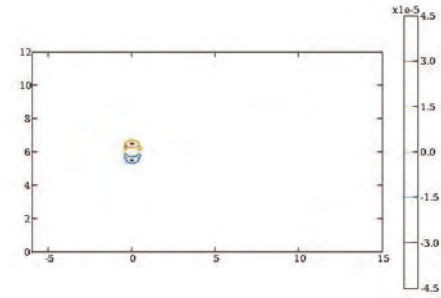
(a) première composante mode 1



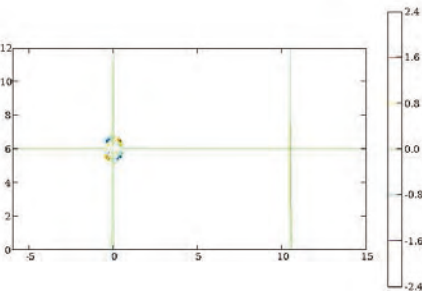
(b) Deuxième composante mode 1



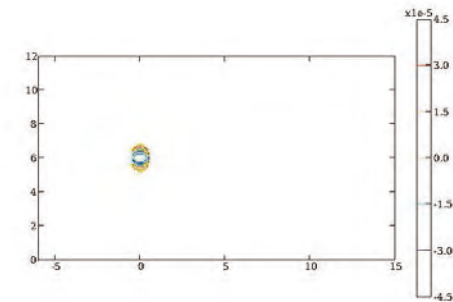
(c) première composante mode 2



(d) Deuxième composante mode 2



(e) première composante mode 3



(f) Deuxième composante mode 3

**Figure 4.29.** Isovaleurs des 3 premiers modes POD

quelque soit  $\Phi$  un mode POD à divergence nulle, on ait

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) \Phi dx + \int_{\Omega} 2\mu \text{tr}(\mathbf{D}(v) \mathbf{D}(\Phi)) dx + \int_{\Omega_s} \text{tr}(\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}(\Phi)) dx \\
 & - \int_{\Gamma_s} (\mathbf{D}(\lambda) \Phi) \mathbf{n} dx + \int_{\partial\Omega_f \setminus \Gamma_s} p \Phi \mathbf{n} dx + \int_{\partial\Omega_f \setminus \Gamma_s} 2\mu_f (\mathbf{D}(v) \Phi) \mathbf{n} dx = 0
 \end{aligned} \tag{4.131}$$



$\rho$  et  $\mu$  sont définis sur tout le domaine :

$$\rho = \mathbb{I}_{\Omega_f} \rho_f + (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}) \rho_s ; \mu = \mathbb{I}_{\Omega_f} \mu_f + (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}) \mu_s \quad (4.132)$$

On traite la pression par la méthode de pénalisation citée dans la section 4.2.6.3. En introduisant la décomposition de  $v$  sur la base POD tronquée à  $N$  modes. Les systèmes dynamiques sont obtenus de la même manière que dans la section 4.2. On présente ci-dessous leur formulation sur le champ de vitesse instantané et sur le champ de vitesse fluctuant.

#### 4.5.3.3.1. Formulation du système dynamique sur le champ de vitesse instantané

On garde la même formulation que dans la section 4.2, c'est à dire que  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  désigne un élément de la base POD.

$\forall t \in \mathbf{T}$  pour  $i = 1 \dots N$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^N \frac{da_k}{dt} A_{ki}^t + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_k(t) a_l(t) B_{kli}^t + 2 \sum_{k=1}^N a_k(t) C_{ki}^t + D_i^t + E_i^t = 0 \\ \mathbf{D}(v) = 0 \\ \frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_f}}{\partial t} + v \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_f} = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Omega_s(t) \quad (4.133)$$

Avec

$$\begin{aligned} A_{ki}^t &= \int_{\Omega} \rho(x, t) \Phi_k(x) \cdot \Phi_i(x) dx \\ B_{kli}^t &= \int_{\Omega} \rho(x, t) (\nabla \Phi_k \cdot \Phi_l) \cdot \Phi_i dx \\ C_{ki}^t &= \int_{\Omega} \mu(x, t) \mathbf{tr}(\mathbf{D}(\Phi_k) \cdot \mathbf{D}(\Phi_i)) dx - G \int_{\Gamma_e} \Phi_k \Phi_i dx \\ D_i^t &= \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_S}(x, t) f \cdot \Phi_i dx \\ E_i^t &= \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_S}(x, t) \mathbf{tr}(\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}(\Phi_i)) dx - \int_{\Gamma_s} (\mathbf{D}(\lambda) \Phi_i) \cdot \mathbf{n} dx + G \int_{\Gamma_e} v^{cl} \Phi_i dx \end{aligned} \quad (4.134)$$

#### 4.5.3.3.2. Formulation du système dynamique sur le champ de vitesse fluctuant

Comme dans la section 4.2.6.2, on décompose le champ de vitesse en une partie moyenne et une partie fluctuante.

$$v = \langle v \rangle + v' \quad p = \langle p \rangle + p' \quad (4.135)$$

Avec  $\langle \bullet \rangle$  qui représente l'opérateur de moyenne temporelle explicité précédemment. Pour plus de commodité pour l'écriture des équations on remplacera dans la suite  $\langle \bullet \rangle$  par  $\bar{\bullet}$ . Un vecteur de la base POD pour le champ fluctuant est noté  $\Phi'_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

$\forall t \in \mathbf{T}$  pour  $i = 1 \dots N$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \frac{da'_k}{dt} A'_{ki} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a'_k(t) a'_l(t) B'_{kli} + \sum_{k=1}^N a'_k(t) C'_{ki} + D'_i + E'_i = 0 \\ \mathbf{D}(v) = 0 \\ \frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_f}}{\partial t} + v \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_f} = 0 \end{cases} \text{ sur } \Omega_s(t) \quad (4.136)$$

Avec

$$\begin{aligned} A'_{ki} &= \int_{\Omega} \rho(x, t) \Phi'_k(x) \cdot \Phi'_i(x) dx \\ B'_{kli} &= \int_{\Omega} \rho(x, t) (\nabla \Phi'_k \cdot \Phi'_l) \cdot \Phi'_i dx \\ C'_{ki} &= \int_{\Omega} 2\mu(x, t) \mathbf{tr}(\mathbf{D}(\Phi'_k) \cdot \mathbf{D}(\Phi'_i)) dx + \int_{\Omega} \rho(\Phi'_k \cdot \nabla \bar{v} + \bar{v} \cdot \nabla \Phi'_k) \cdot \Phi'_i dx \\ &\quad - G \int_{\Gamma_e} \Phi_k \Phi_i dx \\ D'_i &= \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) f \cdot \Phi'_i dx - G \int_{\Gamma_e} (\bar{v} - v^{cl}) \Phi_i dx + \int_{\Omega} 2\mu(x, t) \mathbf{tr}(\mathbf{D}(\bar{v}) \cdot \mathbf{D}(\Phi'_i)) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho(x, t) (\nabla \bar{v} \cdot \bar{v}) \cdot \Phi'_i dx \\ E'_i &= \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_s}(x, t) \mathbf{tr}(\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}(\Phi'_i)) dx - \int_{\Gamma_s} (\mathbf{D}(\lambda) \Phi'_i) \cdot \mathbf{n} dx \end{aligned} \quad (4.137)$$

#### 4.5.3.4. Remarque sur les systèmes dynamiques

Il y a une différence notable par rapport aux systèmes dynamiques POD obtenus de manière classique pour un milieu homogène. Premièrement, on obtient des coefficients du système dynamique qui dépendent du temps par l'intermédiaire de la fonction caractéristique introduite dans la densité et la viscosité.

Deuxièmement on obtient un système plus complexe avec un coefficient  $A$  en plus dû à la variation de la densité dans  $\Omega$  et un terme supplémentaire contenant le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ . On a aussi une équation supplémentaire qui correspond à la contrainte de rigidité sur  $\Omega_s$ . Cette contrainte de rigidité correspondant à  $\mathbf{D}(v) = 0$  n'est pas exprimée sur la base POD tronquée à  $N$  modes.

En effet, le fait de tronquer la base POD, consiste à retenir les modes ayant la plus forte contribution énergétique dans le domaine total  $\Omega$ . Dans le cas d'un solide immergé dans un écoulement fluide, le fluide aura la plus forte contribution énergétique,

en tronquant la base POD on risque de se privé d'information sur le domaine solide. Dans le cas opposé d'un fluide intiallement au repos dont l'écoulement est crée par le mouvement d'un solide, on aura l'effet inverse, c'est à dire le champ de vitesse dominant étant dans le domaine solide, la base POD sera plus représentative de celui-ci. Ces exemples seront traités dans la suite.

Il reste la dernière équation qui sert à déterminer la position de l'interface au cours du temps. La fonction caractéristique pouvant être problématique à résoudre, il est plus judicieux de considérer la fonction Level-Set, celle-ci étant réductible par base POD ou encore dans le cas d'un solide rigide le déplacement lagrangien du domaine. Il suffit en effet dans ce cas là de connaître le déplacement de seulement 2 points du domaine rigide pour pouvoir réinitialiser les fonctions caractéristiques à chaque pas de temps.

#### 4.5.3.5. Résolution

Le système est résolu par une méthode de Newton couplé à un algorithme d'Uzawa

Au pas de temps  $t$  on connaît pour  $i = 1, \dots, N$ ,  $a_i(t)$  et les coefficients  $A^t, B^t, C^t, D^t$ . On considère  $a_i^0 = a_i(t)$ ,  $\lambda^0 = 0.0$ ,  $A_{in}^0 = A_{in}^t$ ,  $B_{ijn}^0 = B_{ijn}^t$ ,  $C_{in}^0 = C_{in}^t$ ,  $D_n^0 = D_n^t$  et  $E_n^0 = 0.0$ .

On calcule  $a^{k+1}$  solution du système suivant :

$$\sum_{i=1}^N \left( A_{in}^k + \sum_{j=1}^N a_j^k B_{ijn}^k + 2C_{in}^k \right) a_i^{k+1} = \sum_{i=1}^N a_i(t) A_{in}^t - E_n^k - D_n^k \quad (4.138)$$

On calcule ensuite la vitesse reconstruite

$$v^{k+1} = \sum_{i=1}^N a_i^{k+1} \Phi_i \quad (4.139)$$

ce qui permet d'estimer la nouvelle configuration du solide

$$X_g^{k+1} = X_g(t) + \Delta t (u_g^{k+1} + u_g(t)) \quad (4.140)$$

Et donc de réinitialiser les fonctions caractéristiques, et les coefficients  $A, B, C, D, E$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k - \mu u^{k+1} \quad (4.141)$$

La convergence est de la solution est ensuite évaluée

Si

$$\|v^{k+1} - v^k\| < \epsilon_1 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{D}(v^{k+1}) \mathbb{I}_{\Omega_s}\| < \epsilon_2 \quad (4.142)$$

on passe au pas de temps suivant

sinon on fait  $k = k + 1$

#### 4.5.4. Application

La méthode présentée a été testée sur le cas de l'équation de Burgers monodimensionnelle couplée avec un ressort afin d'établir une comparaison avec les résultats obtenus au début du chapitre. Ensuite différents cas bidimensionnels ont été traités. Le premier cas est une étude pour un écoulement faible engendré par le mouvement d'un solide. Ensuite, on passe à un cas où l'écoulement a une contribution plus importante, mais le mouvement du solide est imposé. Dans le dernier cas le solide est lâché dans l'écoulement.

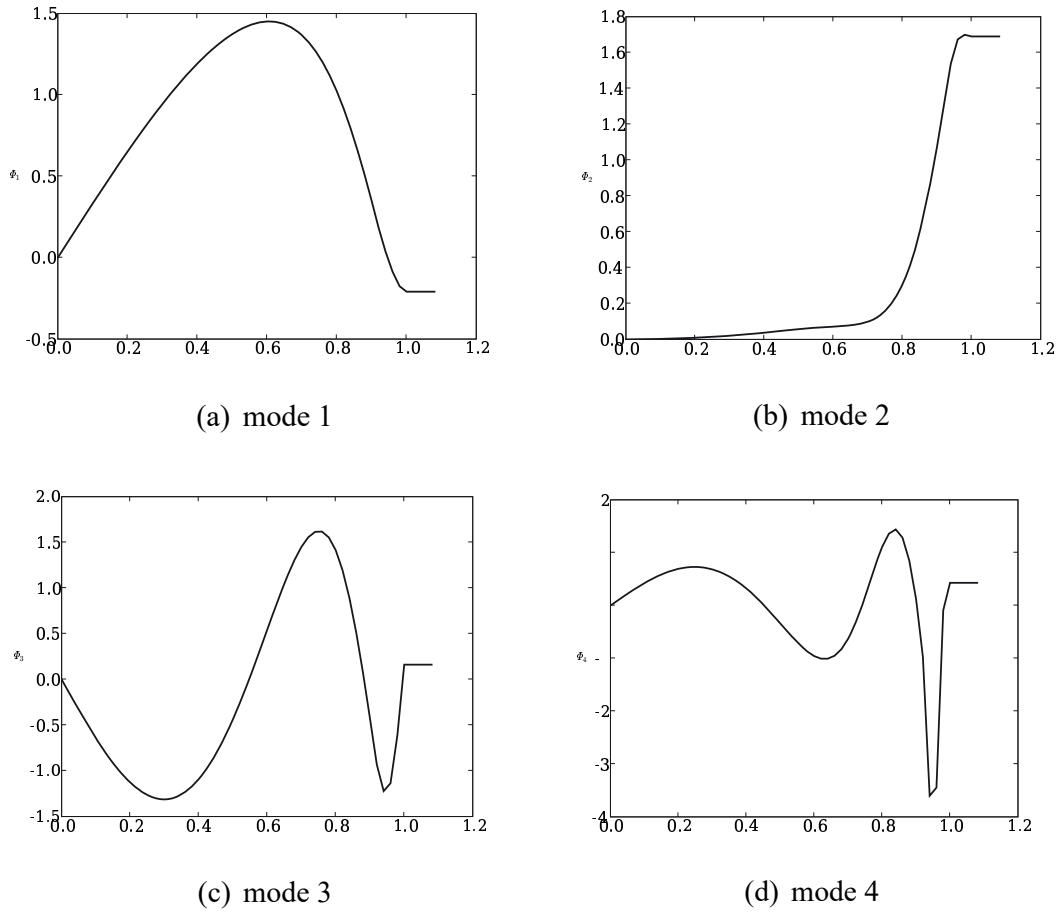
##### 4.5.4.1. Cas monodimensionnel

On reprend le cas étudié au début de ce chapitre, mais en utilisant cette fois la méthode proposée dans la section 4.5.2.2. On choisit sur le domaine solide une vitesse égale à la vitesse de déplacement de la paroi, et la vitesse sur les noeuds se trouvant dans le domaine fluide est interpolé à partir des résultats obtenus de la résolution du problème (4.84).

mode $i$	$\lambda_i$	% d'énergie	mode $i$	$\lambda_i$	% d'énergie
1	18.255	91.648	4	$6.079 \cdot 10^{-2}$	99.982
2	1.515	99.256	5	$2.347 \cdot 10^{-3}$	99.994
3	$8.393 \cdot 10^{-2}$	99.677	6	$7.804 \cdot 10^{-4}$	99.999

**Tableau 4.6.** Contribution en énergie cinétique des 6 premiers modes POD

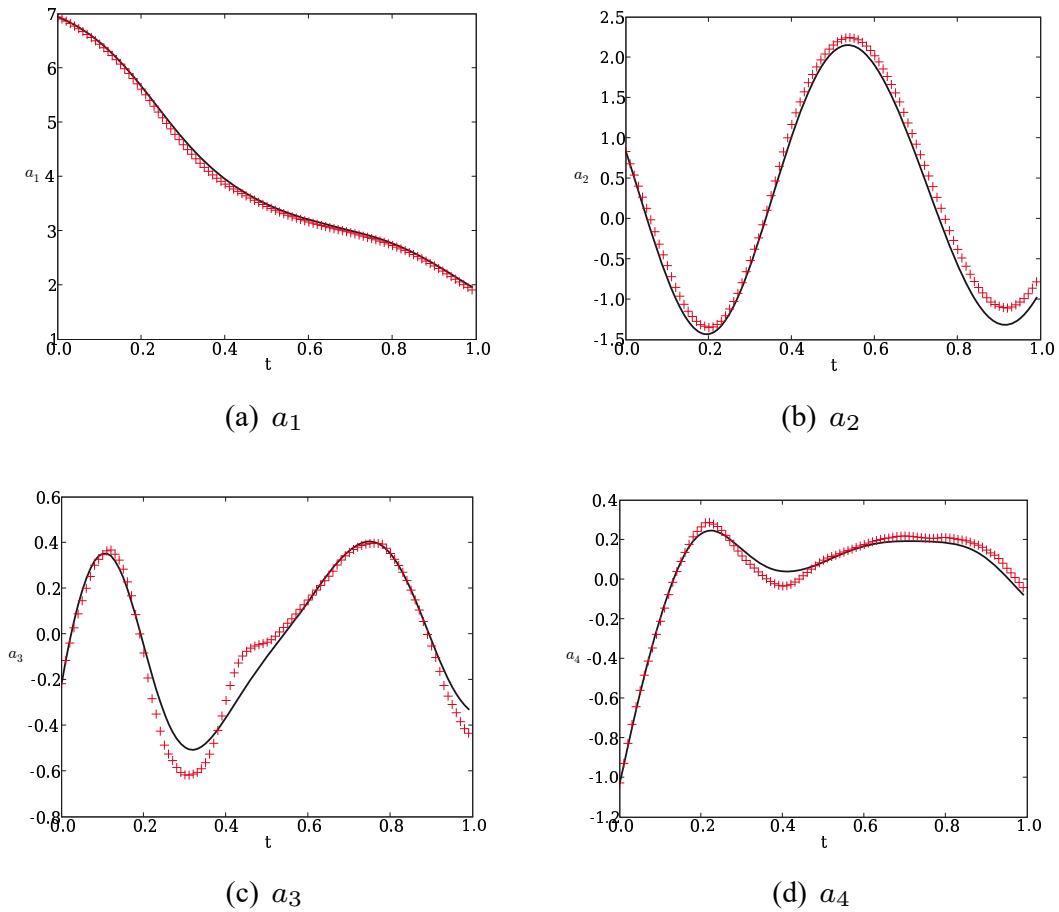
On observe dans le tableau 4.5.4.1 que l'énergie est distribuée différemment que dans le cas de l'étude effectué dans la section (4.3.2.1). Cela est dû au fait que le domaine fluide n'est pas fixe dans le temps. On remarque que les modes POD obtenus sont aussi différents. Bien que le premier ressemble beaucoup beaucoup, il semble que le deuxième mode dans le cas où le domaine fluide est fixe ce soit décalé d'un rang dans l'étude actuelle, un nouveau mode traduisant la mobilité de l'interface étant apparu. On observe sur le quatrième mode une forte oscillation sur la zone parcourue par l'interface. Ces oscillations s'amplifient pour les modes suivants.



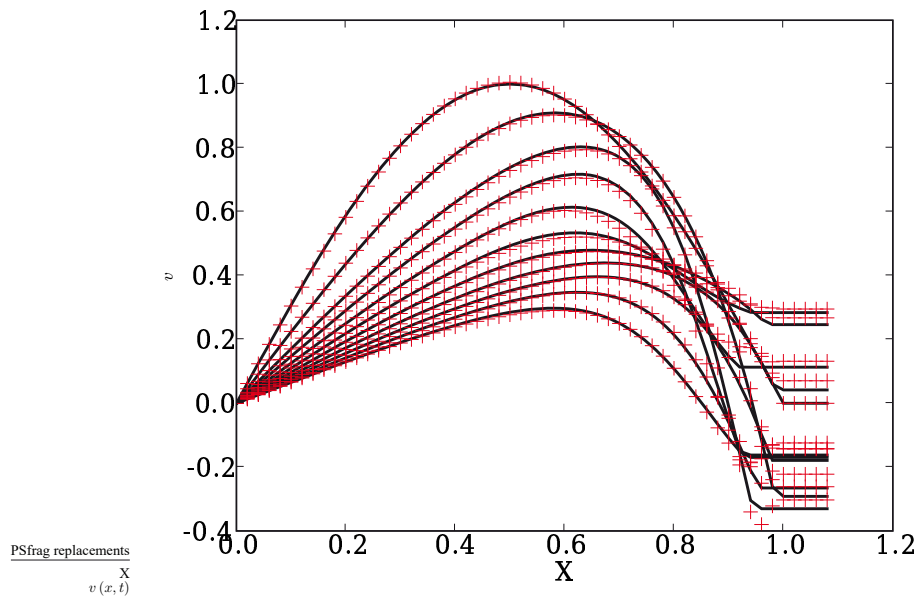
**Figure 4.30.** *Les 4 premiers modes PODs*

Le système dynamique exprimé section 4.5.3.3.1 est calculé en ne retenant que 5 modes dans la reconstruction du champ de vitesse. Les coefficients temporels obtenus par le système dynamique réduit sont comparés avec ceux obtenus par POD directe (figure (4.31)). On observe une reconstruction qui semble de moins bonne qualité que dans la section 4.3.2.1. Cela est dû en partie aux oscillations des modes sur la zone occupée par l'interface.

On remarque cependant que l'erreur de reconstruction est très faible lorsque l'on superpose la solution qui a servie aux snapshots et la solution reconstruite par le système dynamique réduit. (figure (4.32))



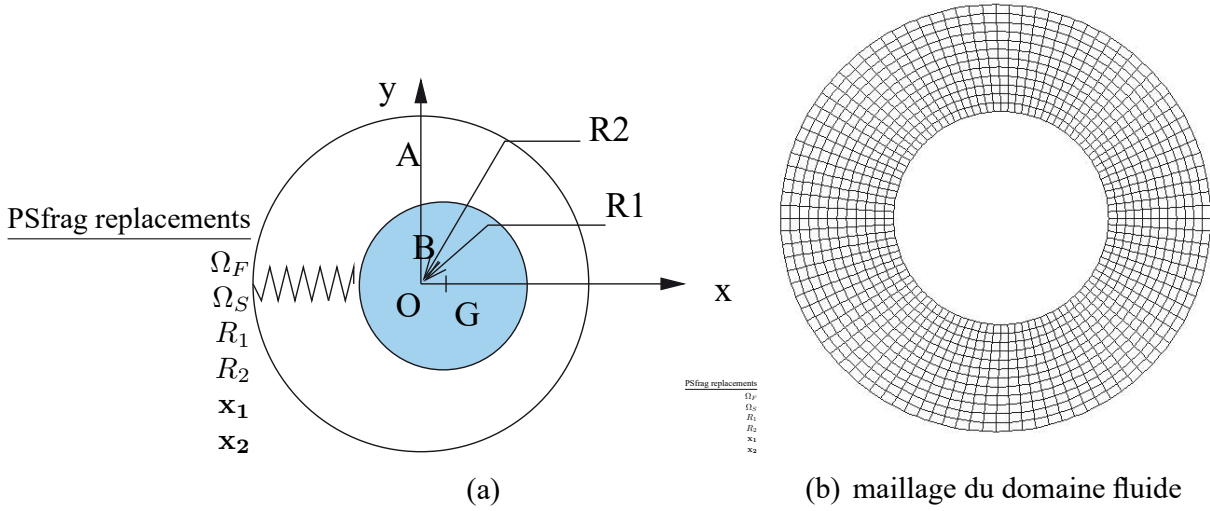
**Figure 4.31.** Les 2 premiers coefficients temporels obtenus — par la POD directe + le système dynamique réduit à 3 modes



**Figure 4.32.** Comparaison du champ de vitesse reconstitué à différents instant  $t$  obtenus par : — Solution numérique initiale et + le système dynamique réduit à 5 modes

Comparé aux résultats de la figure (4.23), la méthode que l'on propose donne des résultats de bien meilleures qualités.

#### 4.5.4.2. Cavité annulaire



**Figure 4.33.** Description du domaine d'étude

On étudie ici les oscillations d'un cylindre rigide de rayon  $R_1 = 0.1$  m dans un domaine fluide annulaire délimité par un cylindre concentrique de rayon  $R_2 = 0.2$  m. On suppose que le solide rigide a une masse  $m = 1$  kg et est relié au cylindre extérieur par un ressort de raideur  $k = 1 \cdot 10^{-4}$  N·m<sup>-1</sup>. Le domaine fluide est constitué d'un liquide de densité  $\rho_f = 1000$  kg·m<sup>-3</sup> et de viscosité  $\mu_f = 0.001$  kg/m·s.

Le cylindre est initialement écarté de sa position d'équilibre et relâché avec une vitesse initiale nulle. Sous l'effet du déplacement du solide, celui-ci va créer un écoulement dans le fluide. La viscosité va induire un amortissement de l'amplitude du mouvement du solide. Le déplacement pouvant être calculé de manière analytique, on aura ainsi un élément de validation. La solution analytique s'écrit,  $X_G(t)$  désignant la position du centre de gravité à l'instant  $t$  :

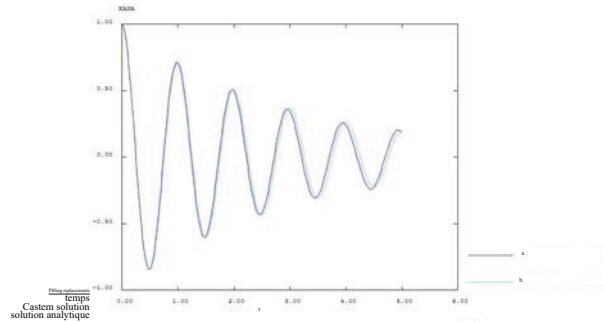
$$X_G(t) \cdot \mathbf{x}_1 = X_0 \cos(\omega(\xi)t) e^{(-\xi\omega t)} \cdot \mathbf{x}_1 \quad (4.143)$$

où  $X_0 = (5 \cdot 10^{-3}, 0.0)$  est la position du centre de gravité à l'instant initial,  $\omega = 0.01$  rad·s<sup>-1</sup> =  $20\pi$  rad·s<sup>-1</sup>,  $\omega(\xi) = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ , et  $\xi$  le degré d'amortissement. Celui-ci peut être calculé à partir du décrement logarithmique  $\delta$  de la courbe d'oscillation du centre de gravité du solide sur les premières périodes :

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (4.144)$$

où  $\delta = \ln \frac{x_G(t + T_a)}{x_G(t)} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}}$ ,  $T_a$  étant une pseudo-période d'oscillation.

La résolution numérique nécessaire à l’obtention des snapshots à été effectuée par le logiciel Castem en utilisant l’algorithme décrit par Benaouicha [?]. On retrouve une bonne concordance entre la solution analytique et la solution numérique du déplacement du centre de gravité (figure 4.34 )



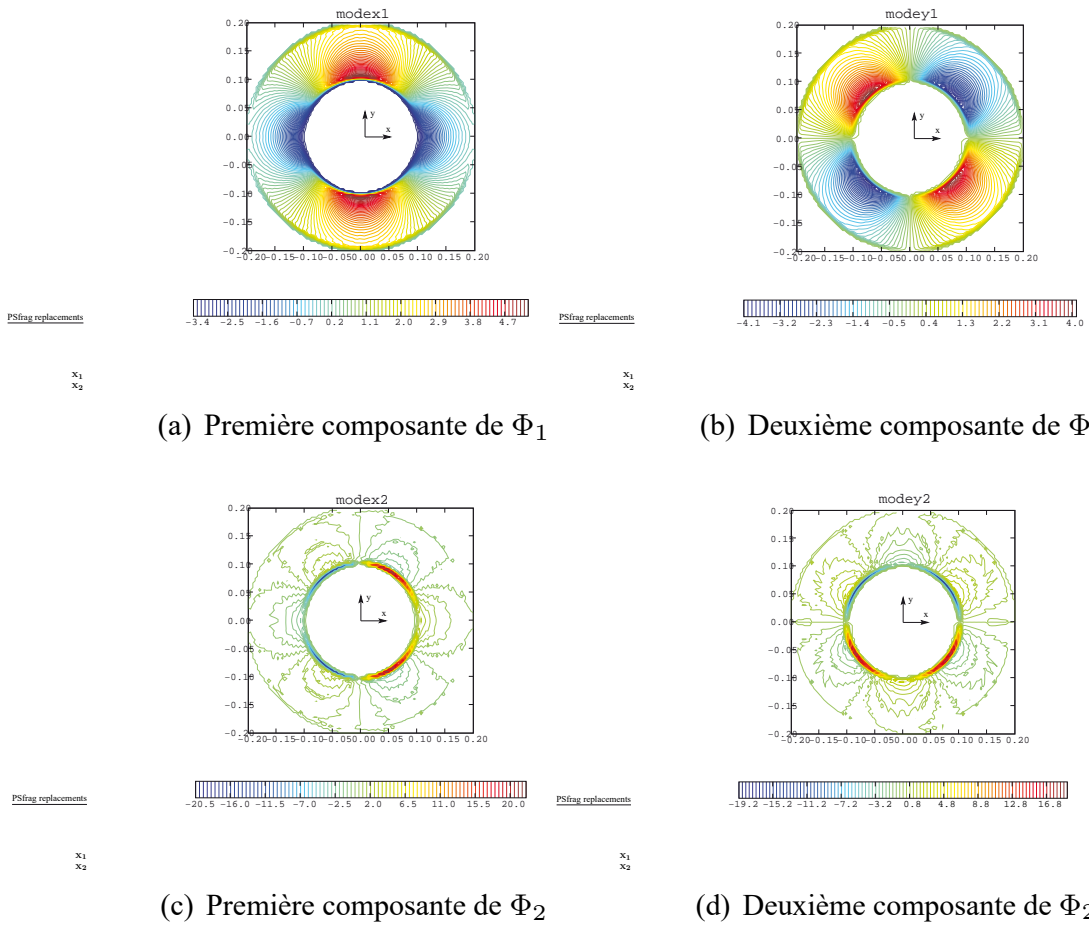
**Figure 4.34.** Déplacement du cylindre pendant 5 périodes d’oscillations

On choisit de prendre les snapshots sur une pseudo-période d’oscillation du cylindre, soit un intervalle de temps  $\mathbf{T} = [0, 6.28]$ . On prend 100 clichés espacés de  $\Delta t_s = 0.0628$  s. Le domaine de référence sur lequel les snapshots sont interpolés est discrétisé selon un pas spatial  $\Delta x_1 = 0.004$  m et  $\Delta x_2 = 0.004$  m.

La figure (4.35) représente les isovaleurs des composantes des deux premiers modes POD. On remarque que dans le cas étudié ici, l’écoulement est contrôlé par le mouvement du solide. C’est la raison pour laquelle très peu de modes POD suffisent. Le premier mode contribue à lui seul à 99.9% de l’énergie totale. La second représente des fluctuations au niveau de l’interface fluide solide.

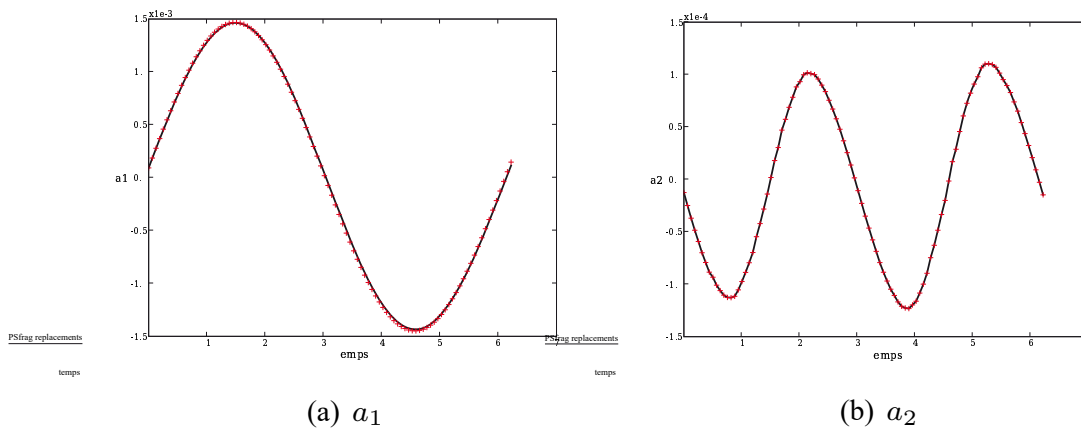
On se trouve dans la situation où même si le caractère dominant est celui du solide. Ayant de faibles oscillations du solide, le déplacement de celui-ci ne dépasse pas deux éléments du maillage fixe de référence. On reconstruit alors très bien le champ de vitesse avec seulement 2 modes POD.





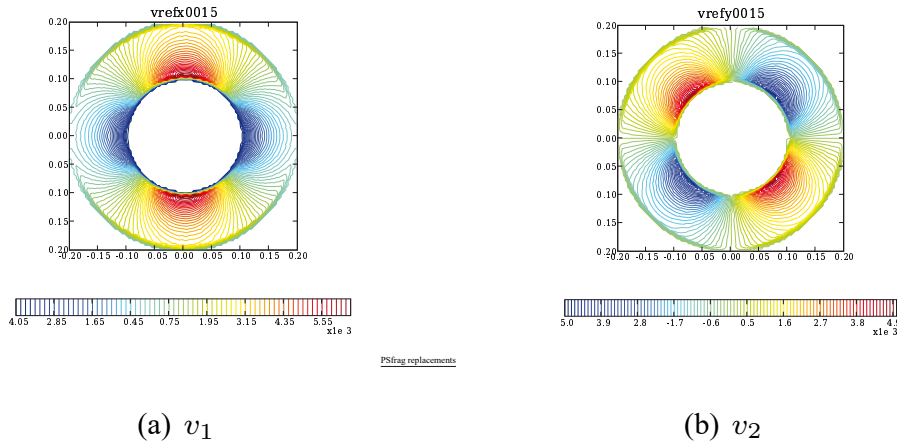
**Figure 4.35.** Isovaleurs des deux premières composantes des deux premiers modes POD

On obtient également des résultats correctes avec le système dynamique réduit utilisant seulement 2 modes POD. On observe figure (4.36) que le premier coefficient temporel est très bien reconstruit de même que le deuxième.

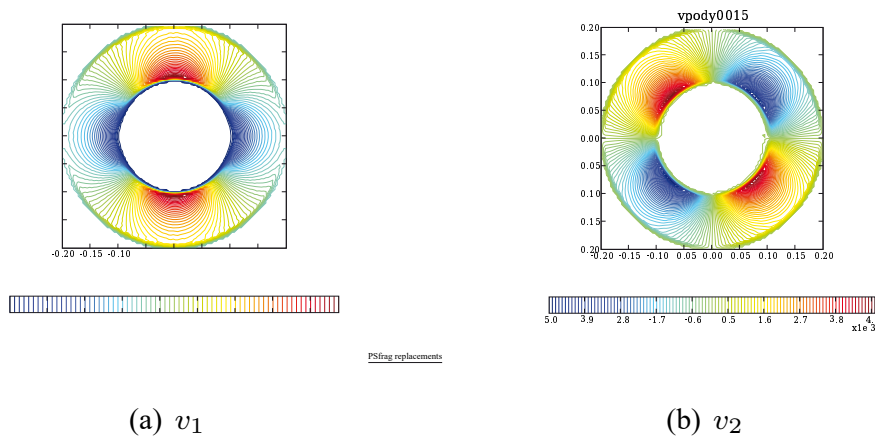


**Figure 4.36.** Comparaison des deux premiers coefficients temporels obtenus par – POD directe , + système dynamique réduit à 2 modes

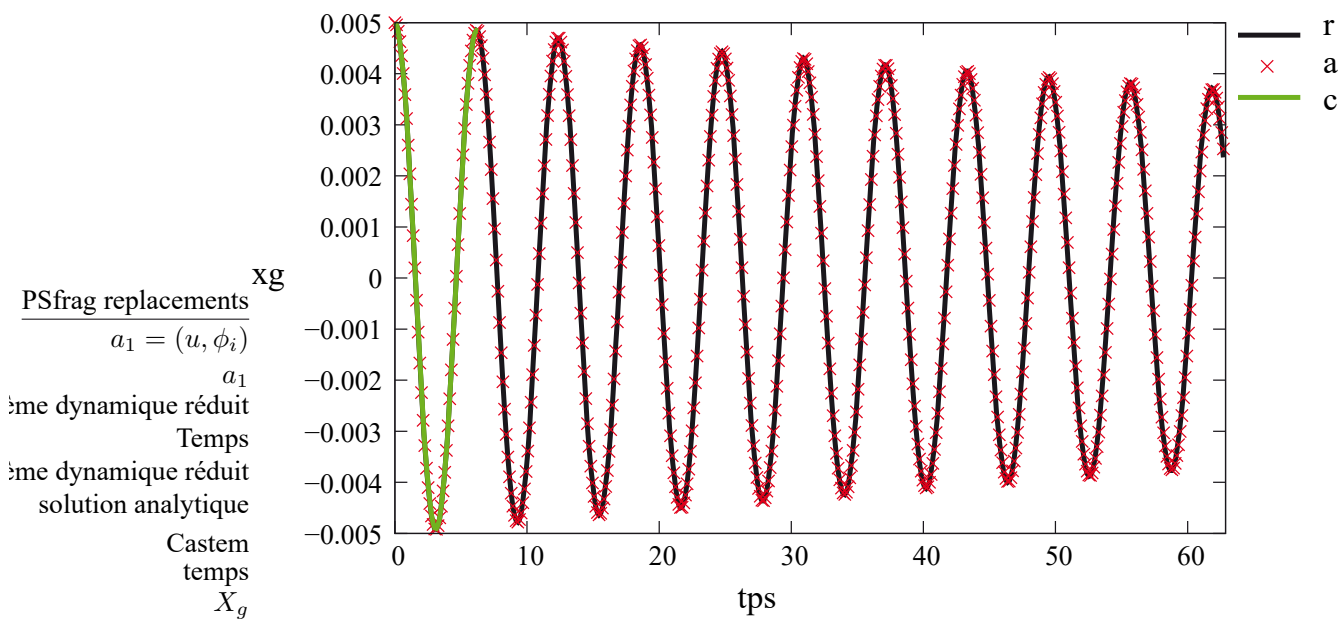
Rajouter d'autres modes dans la base augmente dans ce cas présent l'erreur. Le troisième coefficient temporel a un caractère très désordonné. Cependant, le premier mode est tellement dominant que la reconstruction avec 2 modes donne une erreur très faible lorsque l'on compare le champ de vitesse initial et celui reconstruit par le système dynamique réduit. Les figures 4.37 et 4.38 montrent les isovaleurs du champ du cliché du champ de vitesse et la solution du système dynamique pour un écart maximal entre les deux.



**Figure 4.37.** Isovaleurs de la première et deuxième composante du champ de vitesse pour la 15<sup>ème</sup> snapshot



**Figure 4.38.** Isovaleurs de la première et deuxième composante du champ de vitesse obtenu par le système dynamique réduit pour un temps correspondant à la 15<sup>ème</sup> snapshot

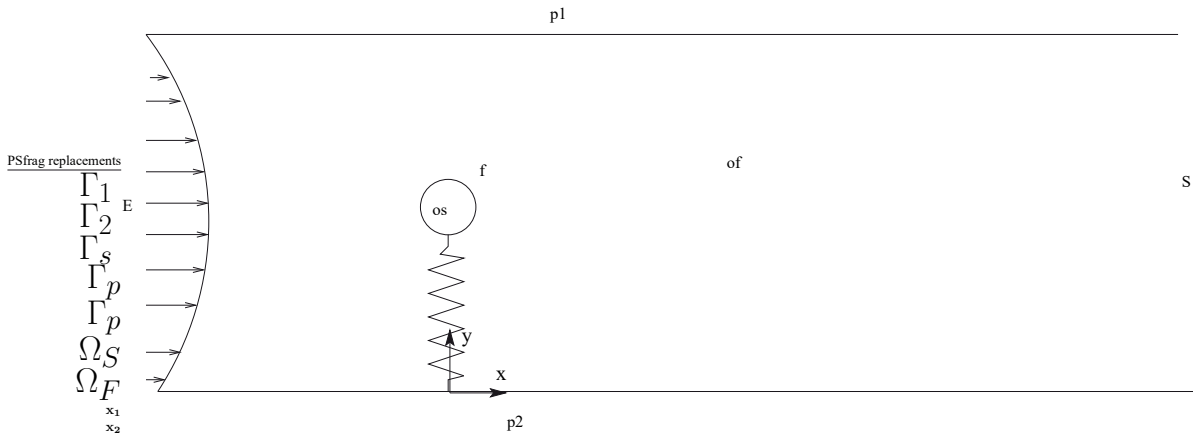


**Figure 4.39.** Comparaison du déplacement du solide

Le système dynamique a été testé sur un intervalle de temps supérieur à l'intervalle de temps pendant lequel on a pris les clichés de l'écoulement. On a comparé le déplacement obtenu par le système dynamique réduit et la solution analytique (figure (4.39)). On observe une très bonne prédiction de celui-ci sur l'intervalle de temps étudié, c'est à dire 10 fois l'intervalle de temps de la snapshot.

Dans le cas présent on n'applique pas la POD sur le champ fluctuant. Il ne serait pas judicieux ici de décomposer le champ de vitesse en une partie moyenne et une partie fluctuante. La moyenne temporelle du champ de vitesse sur le domaine solide est pratiquement nulle sur la période étudiée, donc on ne peut pas assimiler la moyenne temporelle au premier mode.

#### 4.5.4.3. Cylindre en oscillation forcée dans un canal



**Figure 4.40.** Description du domaine d'étude

##### 4.5.4.3.1. Présentation du problème

On étudie ici l'écoulement autour d'un cylindre en oscillation forcée. On se place dans les mêmes conditions d'écoulement que dans la section 4.3.2.2, c'est à dire à Reynolds 200 et des vitesses nulles sur les parois inférieures et supérieures du canal. On considère cette fois un cylindre de rayon  $R = 0.5$  m et de masse  $m = 1$  kg rattaché à la paroi inférieure par un ressort immergé dans l'écoulement. Les déplacements du cylindre sont imposés par l'équation :

$$Xg_2(t) = Xg_0 + A \sin(2\pi f_0 t) \quad (4.145)$$

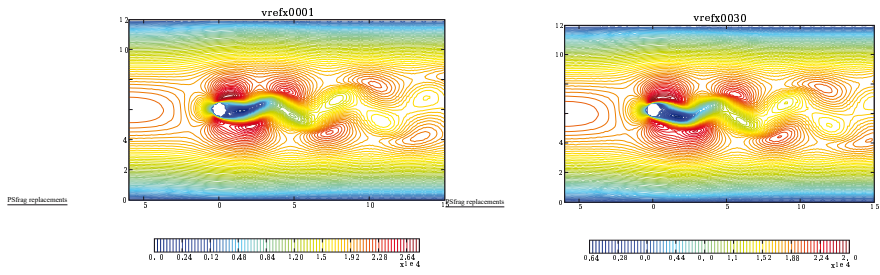
Où  $Xg_2(t)$  désigne la coordonnée selon l'axe  $x_2$  du centre de gravité  $Xg(t) = (Xg_1(t), Xg_2(t))$ ,  $A$  l'amplitude et  $f_0$  la fréquence d'oscillation.

On décide de faire osciller le cylindre à la même fréquence que la fréquence liée au Strouhal lorsque le cylindre est fixe, c'est à dire  $f_0 = 4.10^{-5} Hz$  et on prend  $A = 0.25$ . On observe alors un phénomène d'accrochage fréquentiel, c'est à dire que la fréquence liée au nombre de Strouhal et celle d'oscillation du cylindre sont identiques. Pour plus de renseignements sur ce phénomène le lecteur pourra se référer à [?] et [?].

Les clichés de l'écoulement sont effectués sur une solution obtenue à l'aide du logiciel Castem, sur une période d'oscillation du cylindre. On effectue 120 clichés de l'écoulement présentées figure (4.41).

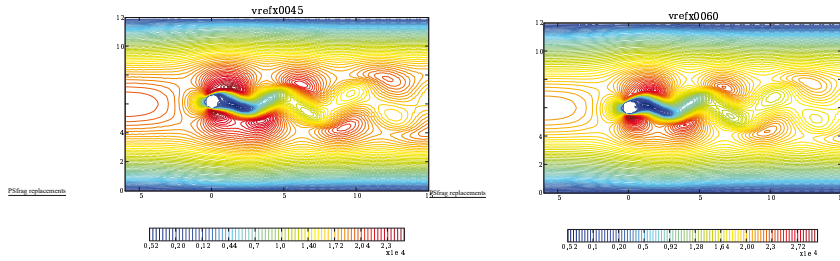
##### 4.5.4.3.2. Analyse POD

On effectue la POD sur un maillage du domaine de référence constitué de  $211 \times 121$  noeuds, soit  $\Delta x_1 = 0.1$  m et  $\Delta x_2 = 0.1$  m. On présente sur la figure (4.42) les 3



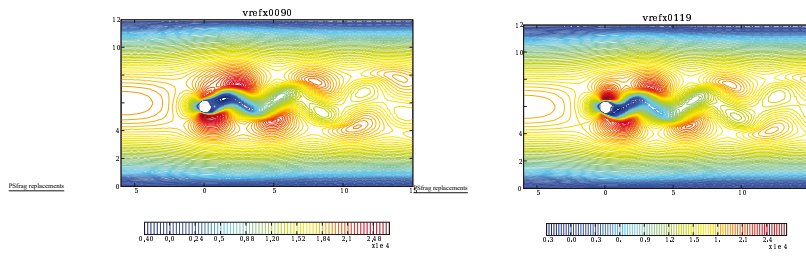
(a)  $v_1$  Snapshot 1

(b)  $v_1$  Snapshot 30



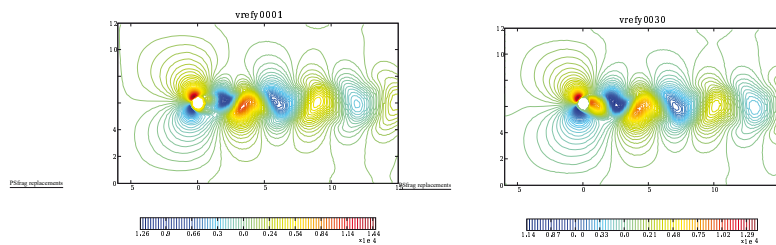
(c)  $v_1$  Snapshot 45

(d)  $v_1$  Snapshot 60



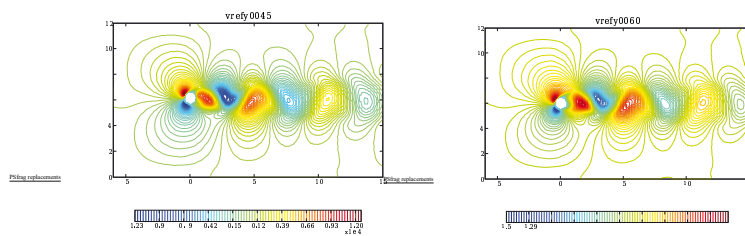
(e)  $v_1$  Snapshot 90

(f)  $v_1$  Snapshot 120



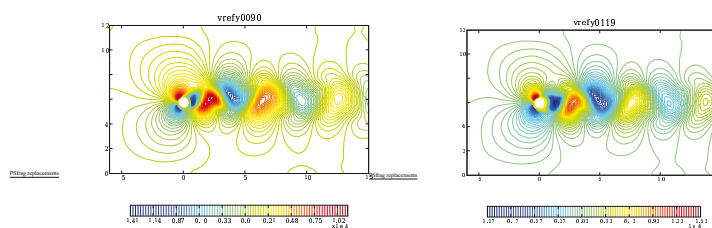
(g)  $v_2$  Snapshot 1

(h)  $v_2$  Snapshot 30



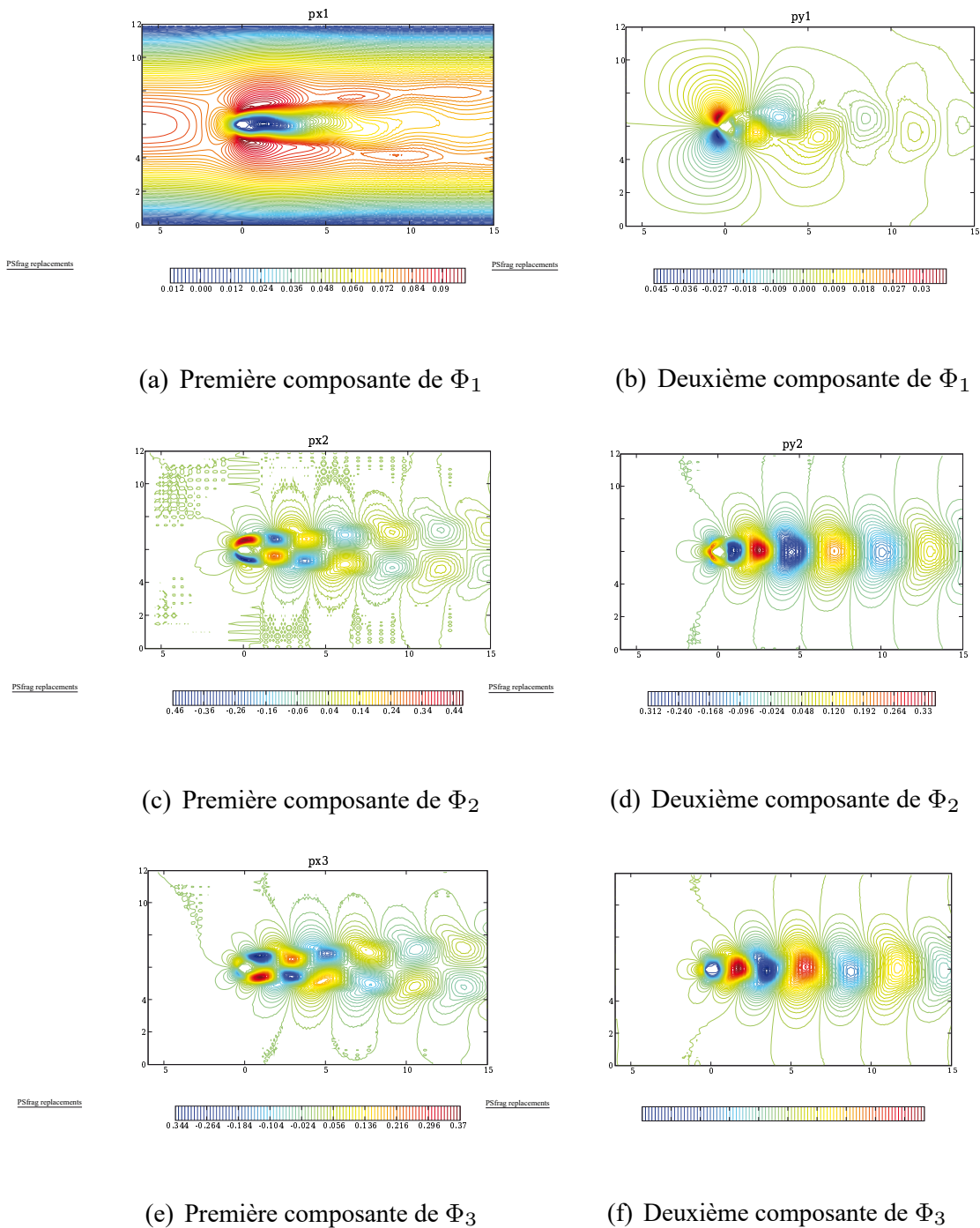
(i)  $v_2$  Snapshot 45

(j)  $v_2$  Snapshot 60



(k)  $v_2$  Snapshot 90

(l)  $v_2$  Snapshot 120



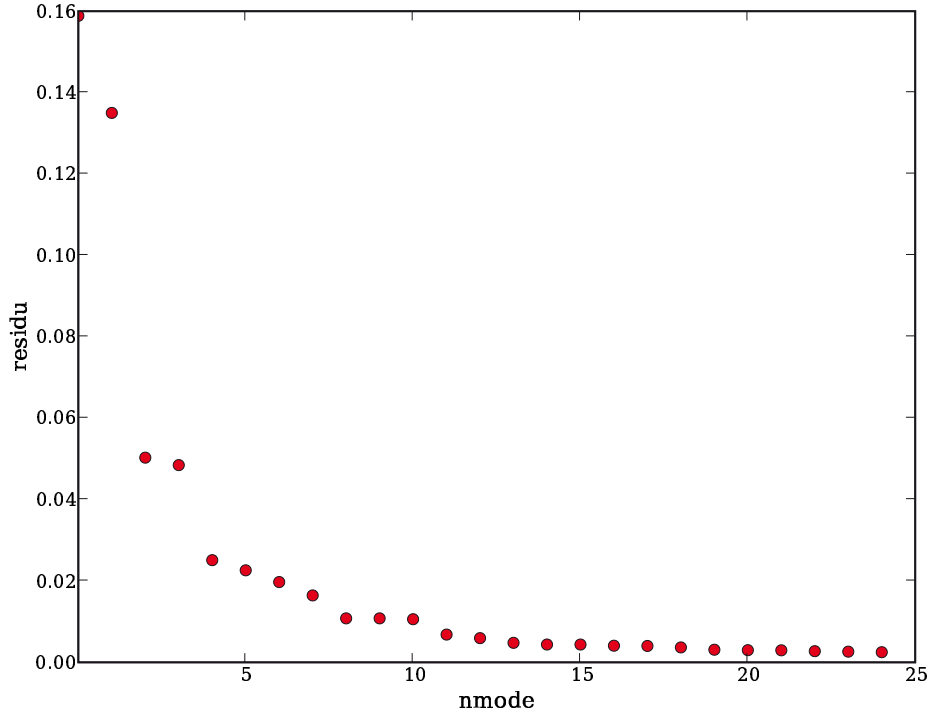
**Figure 4.42.** Isovaleurs des 3 premiers modes *POD*

premiers modes *POD*. Ils ressemblent à ceux obtenus pour le cylindre fixe (cf section 4.3.2.2) sauf dans la zone d'oscillation du cylindre. On remarque que le premier mode ressemble à une moyenne de l'écoulement et ne contient pas les fluctuations du fluide.

Du point de vue considérations énergétiques, avec 7 modes on obtient 99.99% de l'énergie cinétique totale, le premier contribuant à lui seul à 98.37% de l'énergie totale. La répartition énergétique est différente du cas du cylindre fixe, le premier mode

captant ici plus d'énergie. Cependant les études n'ont pas été réalisées avec le même nombre de snapshot et pas sur le même intervalle de temps.

Sur la figure (4.5.4.3.2) on remarque qu'avec 7 modes l'erreur de reconstruction en norme  $L^2$  sur les snapshots est inférieure à 2% et qu'il faut par contre 12 modes pour obtenir une précision inférieure à 1%. Les valeurs propres correspondants aux modes 8 à 12 ont une décroissance et concernent surtout les zones recouvertes par le cylindre pendant les snapshots.



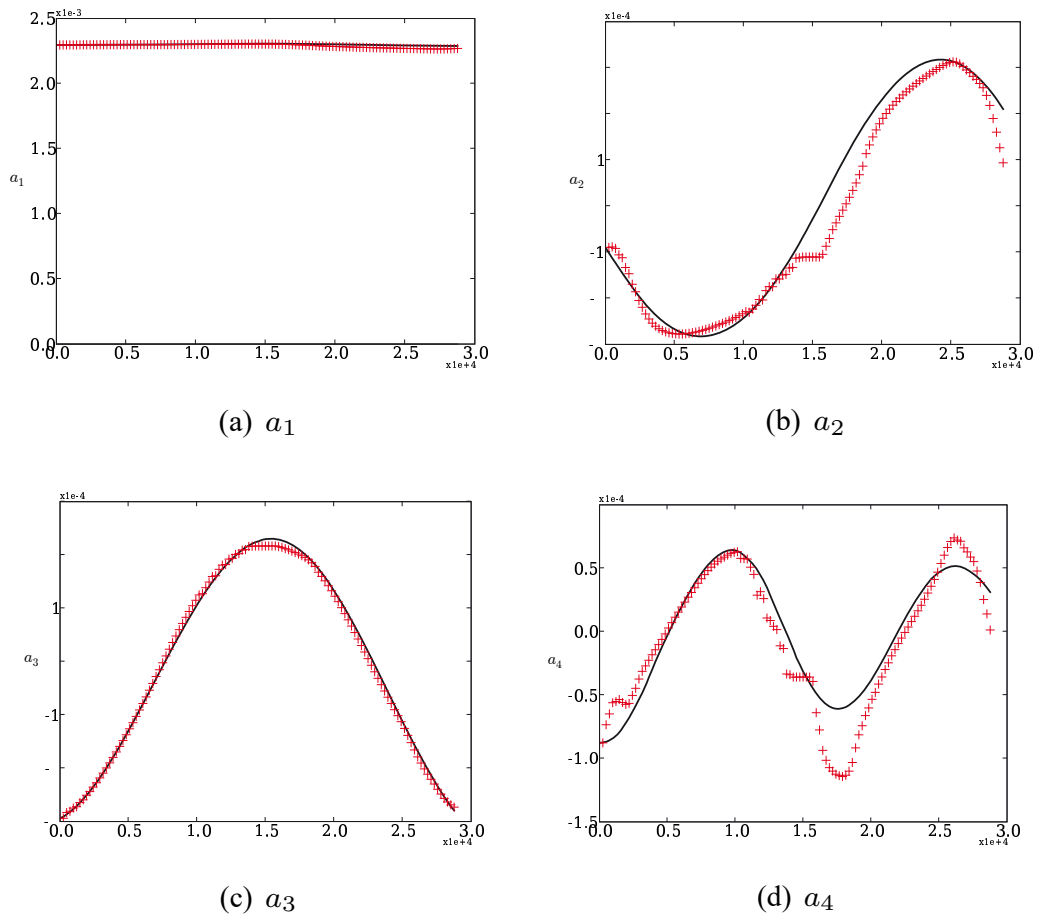
**Figure 4.43.** Erreur de reconstruction en norme  $L^2$

#### 4.5.4.3.3. Système dynamique réduit sur le champ instantané

On a construit le système dynamique pour le champ instantané avec 7 modes, les résultats obtenus pour les 4 premiers coefficients temporels sont présentés figure (4.44). Les résultats obtenus avec plus de modes ne sont pas meilleurs et ont tendance à détériorer la solution. Cela est dû au fait que ces modes là capturent des fluctuations près de l'interface, c'est à dire qu'ils possèdent de forte oscillation dans cette zone et sont sources d'instabilité.

Il y a une difficulté supplémentaire dans le cas de l'oscillation forcée. En effet l'oscillation forcée consiste physiquement à considérer une force qui annule les efforts du fluides sur le solide. L'expression de cette force n'est pas connue, la formulation utilisée les contenant implicitement. Comme le solide est en oscillation forcée, son mouvement est imposé. On va donc imposer une condition plus forte que celle de solide rigide dans le domaine  $\Omega_s$ . On va en effet considérer au lieu de  $\mathbf{D}(v) = 0$ ,





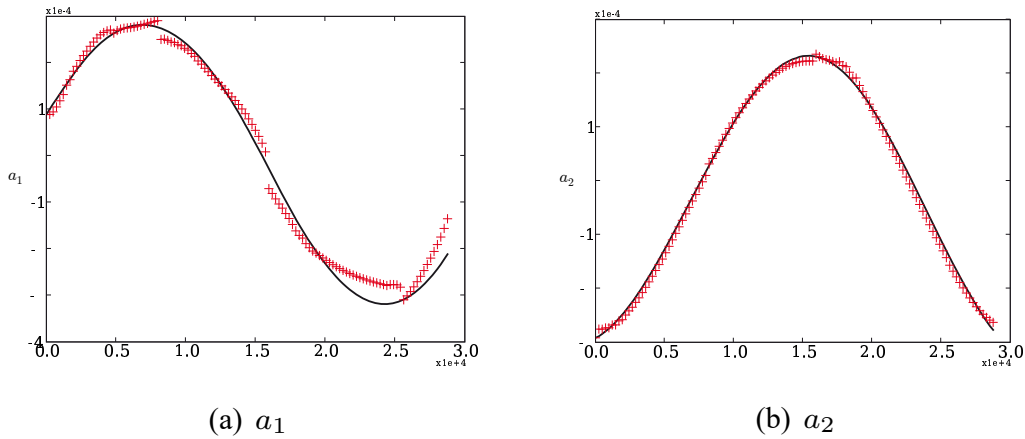
**Figure 4.44.** Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 7 modes

$v = v_g$ , c'est à dire la vitesse du centre de gravité du solide. La qualité des résultats va dépendre de l'erreur que l'on autorise sur cette vitesse tout en gardant une solution qualitativement proche de la solution réelle du champ de vitesse dans le domaine  $\Omega$ .

Dans le but d'obtenir de meilleurs résultats on a étudié le système dynamique sur le champ fluctuant.

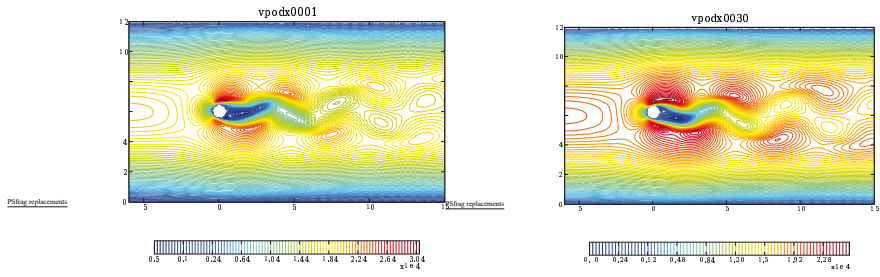
#### 4.5.4.3.4. Système dynamique réduit sur le champ fluctuant

Les résultats obtenus sur le champ fluctuant (figure (4.45)) permettent de reconstruire la solution qui a servie aux snapshots avec une erreur inférieure à 2% en norme  $L^2$ .



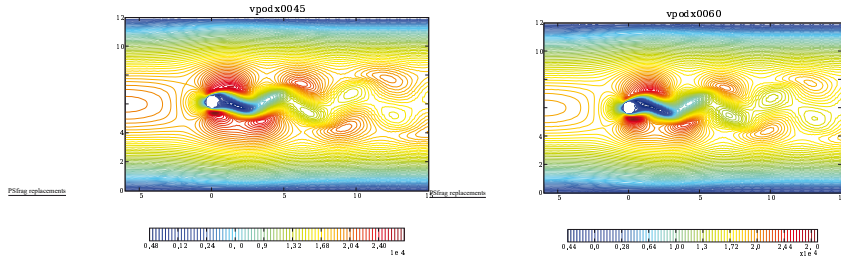
**Figure 4.45.** Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit à 6 modes

On présente sur la figure (4.46) le champ de vitesse reconstruit avec les coefficients temporels obtenus par le système dynamique réduit à 6 modes.



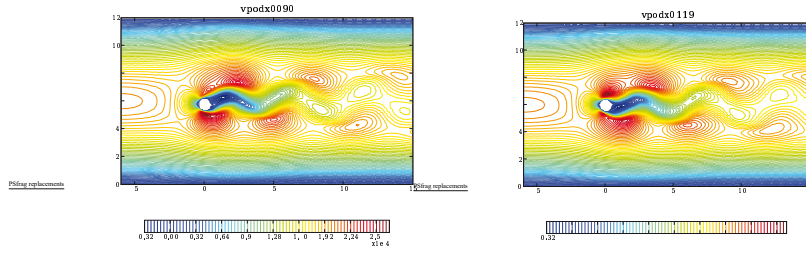
(a)  $v_1$  Snapshot 1

(b)  $v_1$  Snapshot 30



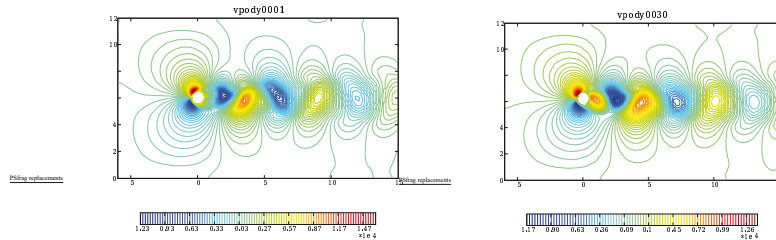
(c)  $v_1$  Snapshot 45

(d)  $v_1$  Snapshot 60



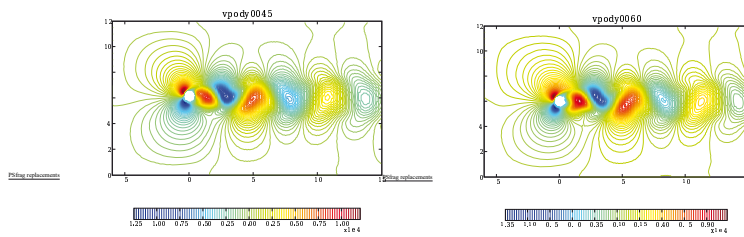
(e)  $v_1$  Snapshot 90

(f)  $v_1$  Snapshot 120



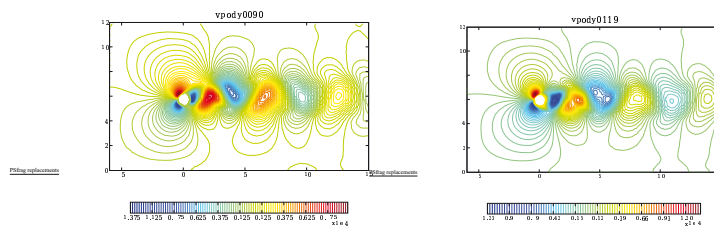
(g)  $v_2$  Snapshot 1

(h)  $v_2$  Snapshot 30



(i)  $v_2$  Snapshot 45

(j)  $v_2$  Snapshot 60

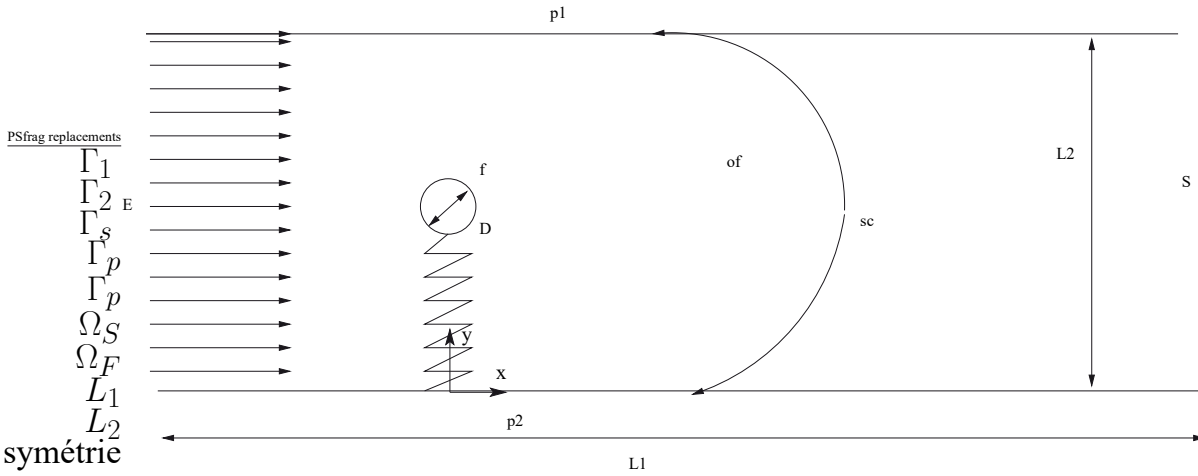


(k)  $v_2$  Snapshot 90

(l)  $v_2$  Snapshot 120

On observe que les isovalues du champ de vitesse sont les même que celles des figures (4.41). On arrive à reconstruire le même écoulement avec le même nombre de Strouhal avec seulement 6 modes pour le champ de vitesse fluctuant.

#### 4.5.4.4. *Cylindre en oscillation libre*

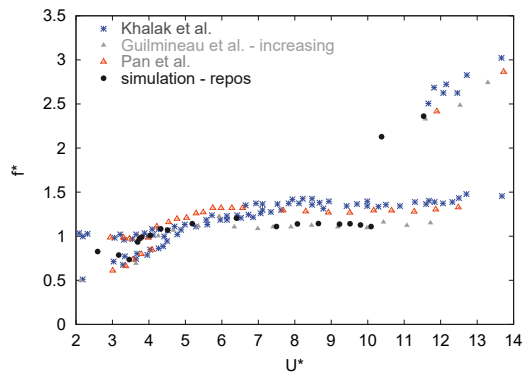


**Figure 4.47.** *description du domaine d'étude*

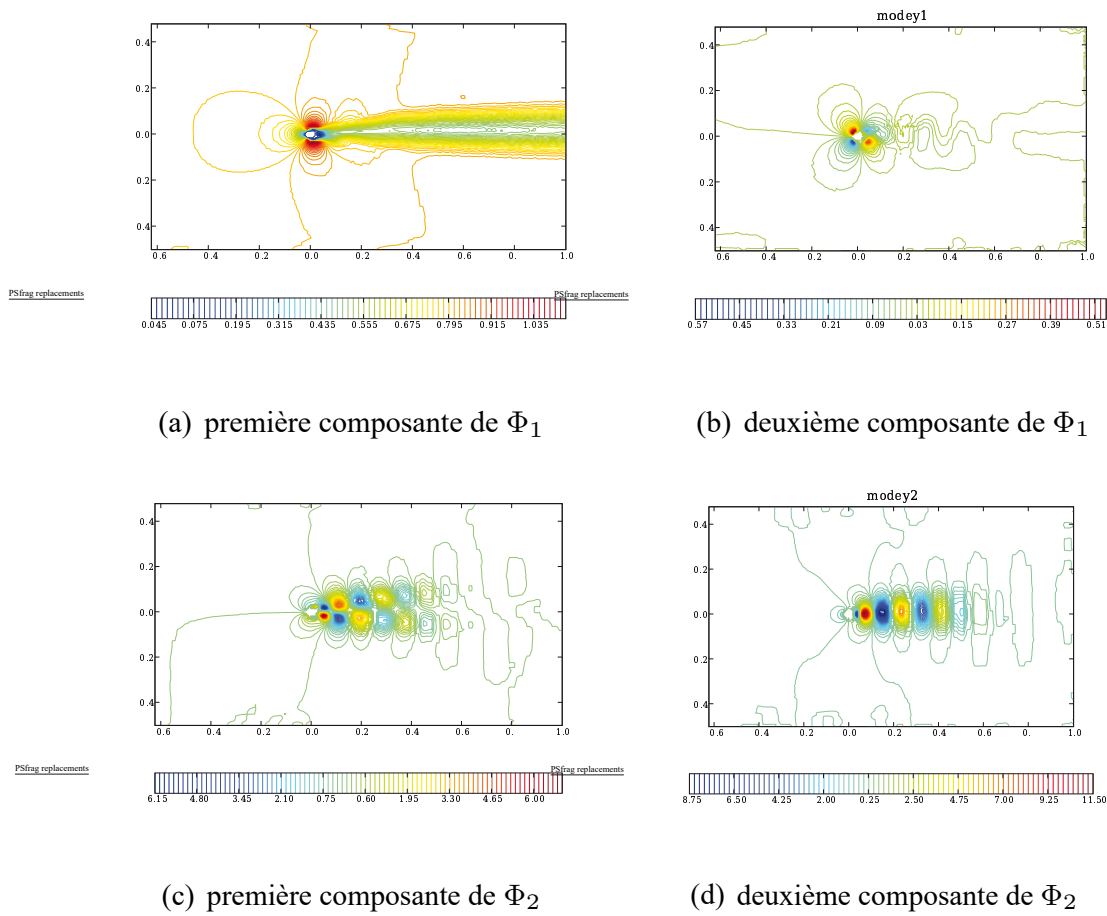
On présente dans cette section les résultats obtenus pour un cylindre en oscillation libre selon l'axe  $x_2$  dans un écoulement à Reynolds 1690. On a ici des conditions de symétrie sur les parois inférieures et supérieures du canal. On considère un cylindre de rayon  $R = 0.025$  m relié à un ressort de raideur  $k = 0.559935$  et d'amortissement  $2.7825 \cdot 10^{-3}$ . On considère que le cylindre vibre seulement selon une direction transversale à l'écoulement.

L'écoulement fluide est obtenu à l'aide de STARCD par un modèle de turbulence de type RANS instationnaire (modèle  $k - \epsilon$ ). L'équation de mouvement du cylindre est résolue par un sous programme intégré dans le code de calcul. Les clichés ont été pris sur un peu plus d'une période d'oscillation du cylindre, soit 150 snapshots sur un intervalle de temps de 1,5 secondes.

Ce travail a été effectué en collaboration avec C. Allery C. Beghein. Le but de cette étude était l'évaluation des possibilités offertes par le codes industriels STARCD pour prédire les vibrations d'une structure soumise à un écoulement axial avec détachement tourbillonnaire. Plusieurs simulations à différents nombres de Reynolds ont été effectuée et les résultats ont été comparés aux travaux expérimentaux de Khalack et Wiliamson [?] et aux travaux numériques de Guilmineau et Queutey [?] et Pan et al. [?].

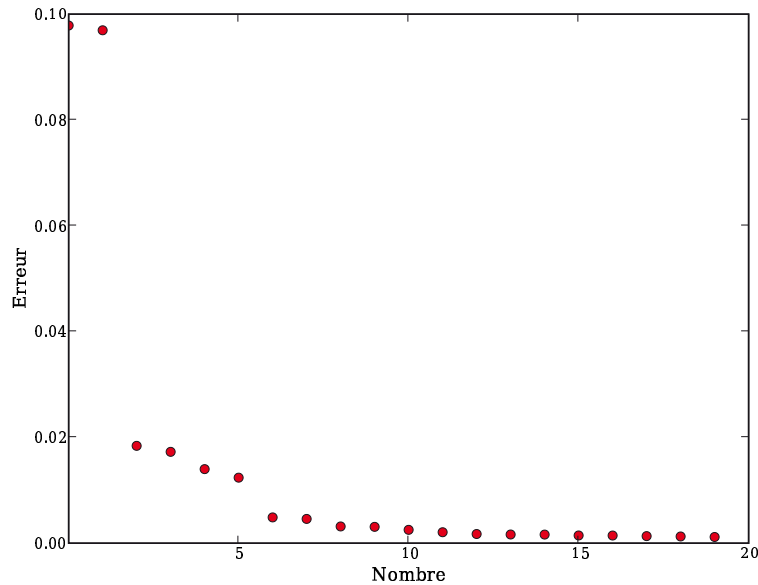


**Figure 4.48.** Comparaisons des fréquences d'oscillations obtenus par STARCD avec les résultats de la littérature



**Figure 4.49.** Isovaleurs des 2 premiers modes POD obtenus sur le champ instantané

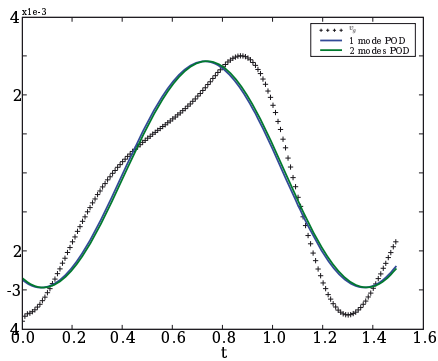
Pour les modes POD (figure 4.49), on retrouve les mêmes caractéristiques que précédemment, c'est à dire un premier mode dominant s'assimilant à l'écoulement moyen, et des seconds représentant les fluctuations du fluide. On observe que 3 modes suffisent à reproduire le champ instantané ( 2 pour le champ fluctuant) avec moins de 2% d'erreur en norme  $L^2$  (figure 4.50).



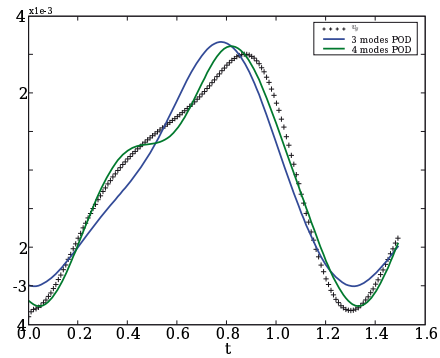
**Figure 4.50.** Résidu sur le champ instantané par reconstruction POD directe  
 $a_i = (v(t_i), \Phi_i)$

Dans le reste de l'étude on travaillera uniquement sur le champ fluctuant. On observe que bien que 2 modes suffisent pour avoir une erreur acceptable sur le champ de vitesse globale, il en faut au moins 6 si on veut reproduire la vitesse au centre de gravité de manière correcte (figure 4.51)

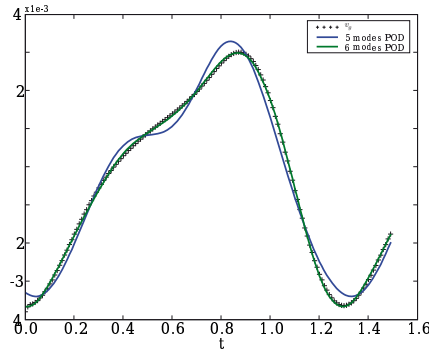
La vitesse moyenne dans le domaine fluide étant, en ordre de grandeur, 10 fois plus grande que la vitesse du domaine solide, les premiers modes POD capturent essentiellement le domaine fluide, là où l'énergie est la plus grande. Autant dans le cas du cylindre en oscillation libre dans une cavité annulaire (section 4.5.4.2), la vitesse du domaine solide était dominante, autant ici on se trouve dans le cas opposé. L'oscillation du solide a ici peu de conséquences sur l'écoulement du fluide, ce qui explique pourquoi 2 modes POD, dans le cas d'une décomposition du champ de vitesse en une partie moyenne et une partie fluctuante, suffisent. Néanmoins, l'intérêt de l'étude étant les oscillations du cylindre, on retient une base composée de 6 modes POD pour la construction du système dynamique POD.



(a) Avec 1 et 2 modes



(b) Avec 3 et 4 modes



(c) Avec 5 et 6 modes

**Figure 4.51.** Comparaison de la deuxième composante de la vitesse au centre de gravité + initiale, et reconstruite en fonction du nombre de modes POD retenus dans la base

#### 4.5.5. Système dynamique sur champ fluctuant

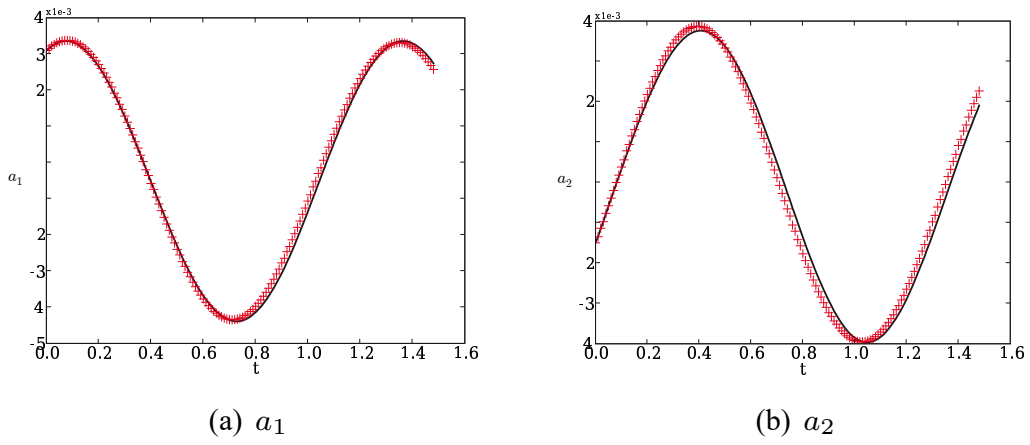
On présente uniquement les résultats obtenus sur le champ fluctuant, le premier mode POD obtenu étant comme pour l'exemple précédent assimilable à la moyenne.

On utilise 6 modes POD pour construire le système dynamique afin de pouvoir reconstruire le déplacement du cylindre. On observe sur la figure (4.52) un très bonne reconstruction des deux premiers coefficients temporels.

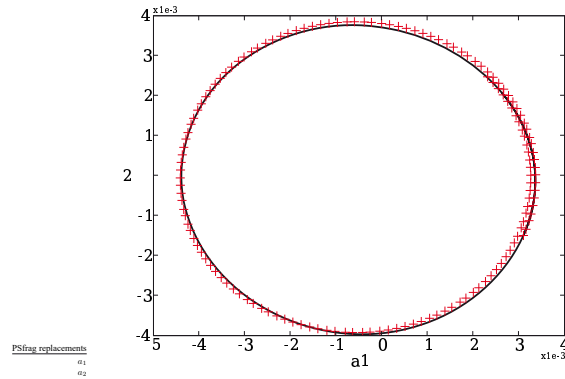
On trouve pour ces deux premiers coefficients temporels un cycle limite qui est également conservé par le système dynamique (figure (4.53)).

La conservation de ce cycle limite est encourageant dans le but d'une étude sur un intervalle de temps plus long que la période de snapshot. De plus le fait de rester proche du cercle limite nous garantit une certaine validité de la solution puisque cela signifie que l'on reconstruit correctement les structures les plus énergétiques de l'écoulement.

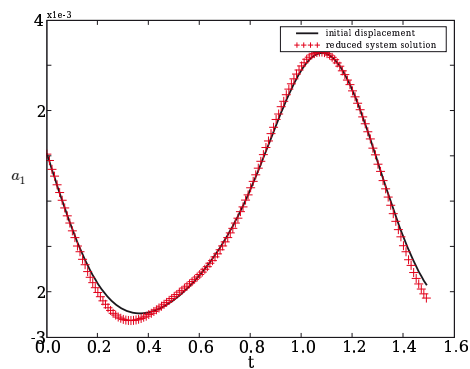
Le système dynamique permet de plus de reconstruire correctement le déplacement du cylindre. On retrouve figure(4.54) une estimation correcte de la position du cylindre.



**Figure 4.52.** Les 2 premiers coefficients temporels obtenus – par la POD directe + le système dynamique réduit sur le champ fluctuant à 6 modes



**Figure 4.53.** Cycle limite entre  $a_1$  et  $a_2$  : – solution initiale, + par système dynamique réduit à 6 modes



**Figure 4.54.** déplacement du solide : – solution initiale, + par système dynamique réduit à 6 modes