



**HAL**  
open science

# Utilisation des schémas numériques amortissants en dynamique rapide

Laurent Mahéo, Gérard Rio, Vincent Grolleau

► **To cite this version:**

Laurent Mahéo, Gérard Rio, Vincent Grolleau. Utilisation des schémas numériques amortissants en dynamique rapide. 17e Congrès Français de Mécanique, Sep 2005, Troyes, France. hal-00402048

**HAL Id: hal-00402048**

**<https://hal.science/hal-00402048>**

Submitted on 25 Sep 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Utilisation des schémas numériques amortissants en dynamique rapide

Laurent Mahéo <sup>a</sup>, Gérard Rio <sup>b</sup> & Vincent Grolleau <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Centre de Recherche des Ecoles de Coëtquidan - Laboratoire de Mécanique et Matériaux  
56381 Guer cedex

<sup>b</sup> Université de Bretagne Sud - Laboratoire de Génie Mécanique et Matériaux  
Rue de Saint Maudé - 56321 Lorient cedex  
gerard.rio@univ-ubs.fr

## Résumé :

*Dans le cadre de la dynamique rapide, par rapport à la réponse théorique d'un système continu en temps et en espace, les discrétisations spatiale et temporelle utilisées en éléments finis, conduisent à l'apparition de hautes fréquences additionnelles dites "numériques" ou "parasites". Plusieurs méthodes classiques sont actuellement disponibles pour filtrer ces fréquences numériques, cependant le sujet n'est pas clos. Dans ce travail, nous nous intéressons plus particulièrement à l'algorithme d'avancement temporel explicite proposé récemment par Tchamwa-Wielgosz. L'objectif de ce travail est principalement d'étudier l'algorithme par rapport à la méthode du bulk-viscosity. Nous nous intéressons ainsi aux évolutions des équilibres énergétiques, du déphasage et de l'amortissement des hautes fréquences.*

## Abstract :

*Finite element methods have been widely used to obtain numerical solutions from structural dynamic problems. Numerous efforts during the past ten years have focused on developing single step explicit time integration algorithms for structural dynamics that include controllable numerical dissipation in the high frequency domain. The role of this dissipation is to damp spurious oscillations that occur due to the spatial discretisation and the loading conditions. Among these algorithms, we focus on the least known of them, the Tchamwa-Wielgosz algorithm. Results obtained with the Chung-Lee scheme are also presented. These schemes are compared with the classical bulk-viscosity method in the case of elastic behavior. This study focus on the energy balance, the phase shift and the damping efficiency of the three algorithms.*

## Mots-clefs :

**schéma numérique amortissant ; dynamique rapide ; bulk-viscosity**

## 1 Introduction

Nous nous plaçons dans le cadre de la simulation numérique par éléments finis d'une pièce sollicitée mécaniquement en dynamique rapide. Par rapport à la réponse théorique d'un système continu en temps et en espace, les discrétisations spatiale et temporelle utilisées dans le modèle numérique, conduisent à l'apparition de hautes fréquences additionnelles dite "numériques" ou "parasites". Plusieurs méthodes classiques sont actuellement disponibles pour filtrer ces fréquences numériques, cependant le sujet n'est pas clos, en particulier car il n'existe pas à notre connaissance de méthode permettant de cibler parfaitement les fréquences numériques parasites sans modifier la réponse du système continu. Ainsi de nouvelles méthodes sont périodiquement présentées.

Au travers des nombreux travaux effectués sur le sujet, il est possible de distinguer deux grandes classes d'investigation : soit un comportement visqueux plus ou moins physique est

introduit, l'intervention d'une viscosité sphérique (*bulk-viscosity*) en est un exemple classique [1], soit les équations d'équilibre dynamique global sont modifiées, voir par exemple les travaux de Hulbert et Chung [2].

Dans ce travail, nous nous intéressons plus particulièrement à l'algorithme d'avancement temporel explicite proposé récemment par Tchamwa-Wielgosz (éq. (1)), qui appartient à la seconde classe. Une précédente investigation [3], a montré l'intérêt du modèle comparativement à certains algorithmes de la même classe. L'objectif de ce travail est principalement d'étudier l'algorithme par rapport à la méthode du *bulk viscosity*.

Les études de stabilité et de consistance du schéma de Tchamwa-Wielgosz (noté Tchamwa par la suite) sont détaillées dans [3] et [4]. En particulier, la condition de consistance conduit à l'utilisation d'un seul paramètre, appelé  $\phi$ , pour contrôler l'atténuation du schéma d'avancement temporel numérique (éq(1)).

$$\begin{aligned} M\ddot{q}_{n+1} &= F_{ext(n+1)} - F_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + h\ddot{q}_n \\ q_{n+1} &= q_n + h\dot{q}_n + \phi h^2\ddot{q}_n \end{aligned} \quad (1)$$

Le paramètre  $\phi$  possède une grande plage d'ajustement ( $[1, \infty]$ ). Les valeurs usuelles sont choisies entre 1.00 et 1.03, cette dernière valeur correspondant comme nous le verrons à une atténuation similaire à celle obtenue en 1D avec les paramètres traditionnels du *bulk-viscosity*. Le *bulk-viscosity* [5][6] a été initialement utilisé pour s'affranchir du problème des discontinuités dans les équations de chocs hydrodynamiques.  $q_{bulk}$  (éq. (2)) contribue alors à la partie sphérique du tenseur des contraintes (voir par exemple [1]).

$$\begin{aligned} q_{bulk} &= \rho l (C_0 l D_{kk}^2 - C_1 a D_{kk}) & \text{if } D_{kk} < 0 \\ q_{bulk} &= 0 & \text{if } D_{kk} \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

avec  $\rho$  la densité,  $a$  la vitesse de propagation,  $l$  la longueur caractéristique d'un élément,  $C_0$  and  $C_1$  les paramètres du *bulk-viscosity*,  $D$  le tenseur taux de déformation.

Nous étudierons également le schéma de Chung-Lee [7] qui présente également un comportement particulièrement intéressant. Les paramètres classiques retenus pour le *bulk-viscosity* sont :  $C_0 = 1.5$  et  $C_1 = 0.06$ . Nous retiendrons le paramètre d'ajustement optimal :  $\beta = 1.037$  pour le modèle de Chung-Lee.

Dans ce travail, nous répertorions trois phénomènes entraînant l'apparition de ces hautes fréquences : les conditions de chargement et les discrétisations temporelle et spatiale. Pour comparer la simulation à une solution exacte d'un problème continu, notre investigation est restreinte à des problèmes à une dimension. Les calculs sont effectués sur le logiciel *HEREZH* développé par G. Rio [8].

## 2 Simulations

Considérons une barre élastique de longueur  $L = 200 \text{ mm}$ , encadrée à une extrémité et soumise à un chargement de type force axiale sur une courte période à l'autre extrémité. La barre est discrétisée avec 100 éléments linéaires et ses caractéristiques sont les suivantes :  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 8.10^{-9} \text{ ton.mm}^{-3}$ ,  $S = 4 \text{ mm}^2$ . Le pas de temps critique vaut  $\Delta t_c = 3.9036 \cdot 10^{-7} \text{ s}$  pour le schéma des Différences Finies Centrées (DFC). Le pas de temps utilisé pour les simulations est fixé à  $\Delta t = 3.5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ , ce qui correspond à  $0.9 \Delta t_c$ .

Dans un premier temps, nous présenterons les résultats obtenus pour un chargement de type créneau (référéncé *loading pulse* sur la FIG. 1) avec les différents schémas proposés, à

savoir le DFC, ce même schéma de DFC couplé avec du *bulk-viscosity*, le schéma de Tchamwa et celui de Chung-Lee. Ensuite, deux stratégies seront étudiées pour éliminer les oscillations numériques indésirables. Enfin, nous considérerons l'évolution de l'énergie cinétique.

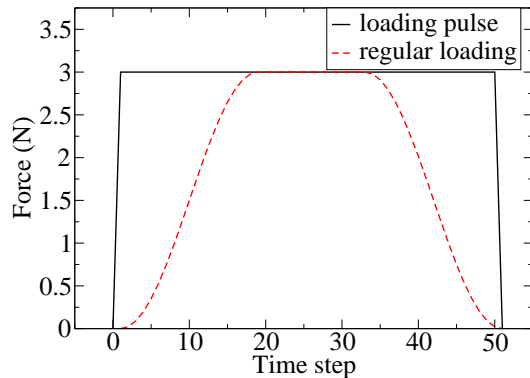


FIG. 1 – Chargements étudiés

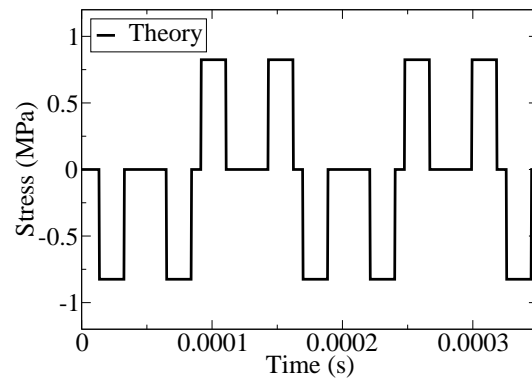


FIG. 2 – Réponse théorique du système continu

## 2.1 Chargement de type créneau

On applique un chargement de type créneau de force d'une durée de  $51\Delta t$  à l'extrémité libre de la barre (élément 1) et on observe l'évolution de la contrainte en fonction du temps pour l'élément 34 (dont le point d'intégration est situé à 67 mm de l'extrémité libre de la barre). La durée du chargement étant suffisamment courte, la réponse théorique du système continu à une telle sollicitation est une suite périodique de mêmes crêteaux (FIG. 2) de période correspondant au parcours de  $4L$  (soit 2 aller-retours A/R) par l'onde engendrée.

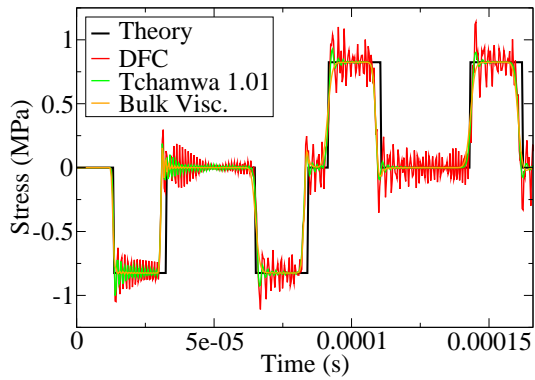
Avec le schéma de DFC, l'évolution de la contrainte pour ce 34<sup>ème</sup> élément apparaît fortement perturbée par des oscillations parasites, comme le montre la FIG. 3(a,b).

La FIG. 3(c,d), montre qu'après 2 A/R, pour les différents schémas étudiés (excepté le schéma DFC), les oscillations parasites ont été filtrées. Mais après 275 A/R (FIG. 4), on peut observer une érosion progressive du signal qui tend à devenir sinusoïdal, atténué et très éloigné du signal théorique. Cette atténuation est due à l'application constante de l'algorithme d'amortissement. Deux stratégies sont alors envisagées pour tenter d'obtenir un signal à la fois filtré et peu atténué en évitant d'appliquer l'amortissement tout au long du calcul.

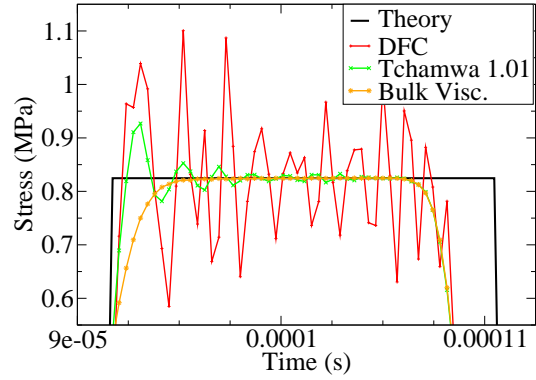
## 2.2 Première stratégie : amortissement ciblé

Pour éviter l'atténuation de l'ensemble du signal, une première solution consiste à utiliser une stratégie en deux phases. Durant la première phase du calcul, jusqu'à un temps  $t_1$  arbitraire, on applique un amortissement ciblé en utilisant respectivement le schéma de Tchamwa avec  $\phi = 1.03$  et le *bulk-viscosity* associé au schéma des DFC, ce qui va avoir pour effet d'amortir les oscillations parasites. Puis, durant une seconde phase, l'amortissement est supprimé grâce à l'utilisation respectivement du schéma de Tchamwa avec  $\phi = 1.00$  et du schéma des DFC sans *bulk-viscosity*.

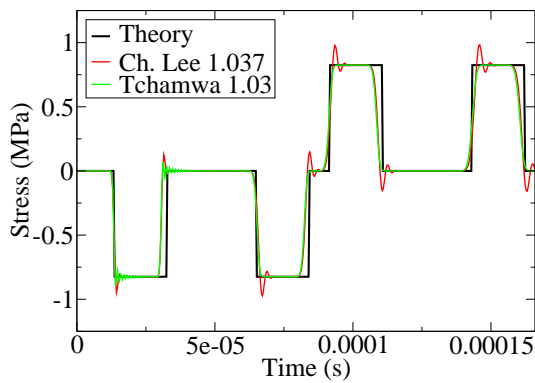
On observe sur la FIG. 5 que cette méthode n'est pas concluante et que les oscillations ré-apparaissent progressivement durant la seconde phase du calcul. Ceci montre que même si l'onde est filtrée de ses oscillations parasites à un instant  $t_1$ , la propagation ultérieure conduit inmanquablement à l'apparition de nouvelles oscillations numériques parasites. On observe les



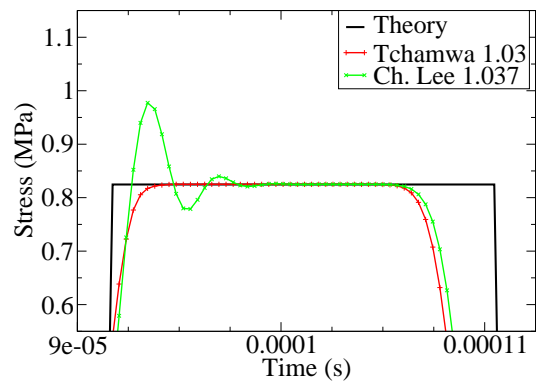
(a) Schémas : DFC, Tchamwa 1.01, bulk-viscosity



(b) Zoom de 3(a)



(c) Schémas : Tchamwa 1.03, Chung-Lee



(d) Zoom de 3(c)

FIG. 3 – Evolution de la contrainte - chargement créneau - premiers A/R (avec zoom)

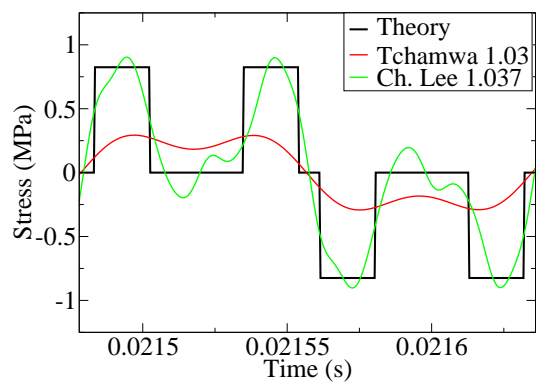
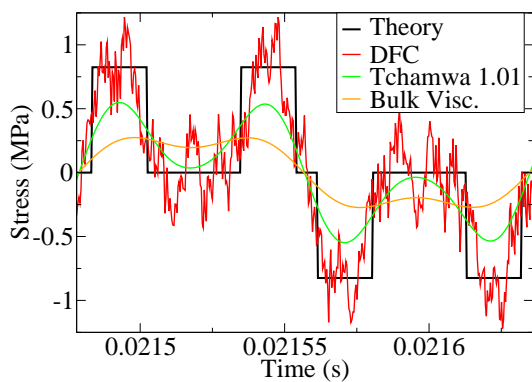


FIG. 4 – Evolution de la contrainte - chargement créneau - après 275 A/R

mêmes phénomènes aussi bien en utilisant le schéma de Tchamwa qu'en appliquant le *bulk-viscosity*. Il est donc nécessaire de maintenir systématiquement un amortissement minimal tout au long de la simulation.

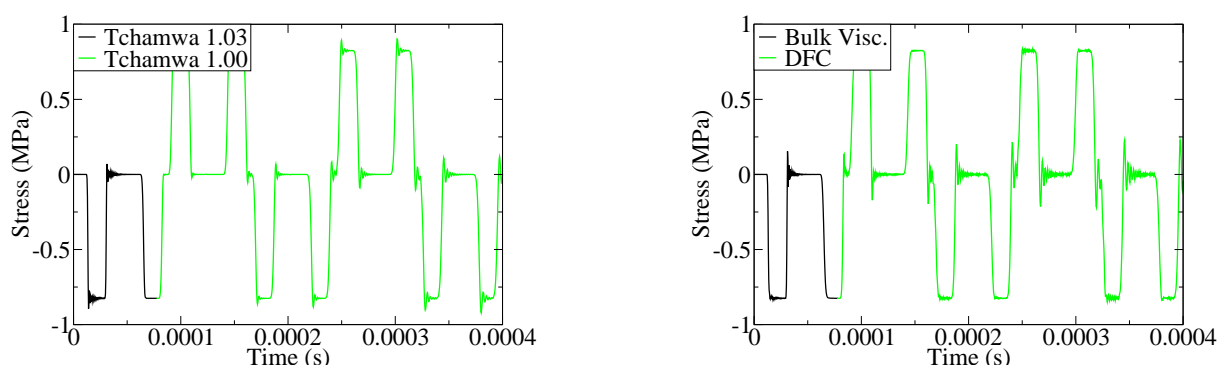


FIG. 5 – Evolution de la contrainte - chargement créneau - premiers A/R : filtrage, puis évolution sans amortissement - stratégie 2 phases

### 2.3 Seconde stratégie : chargement de type 1-cos

Cette seconde stratégie consiste à agir sur le chargement lui-même en diminuant les discontinuités en utilisant une forme de chargement de type  $A(1 - \cos \frac{\pi t}{T})/2$ , noté 1-cos par la suite (référéncé *regular loading* sur la FIG. 1). La FIG. 6 montre la réponse du système étudié dans le cas d'un chargement de ce type dont la durée du chargement reste égale à  $51 \Delta t$  mais les phases de charge et de décharge sont étalées sur 18 pas de temps, ce qui permet d'obtenir une évolution progressive du chargement.

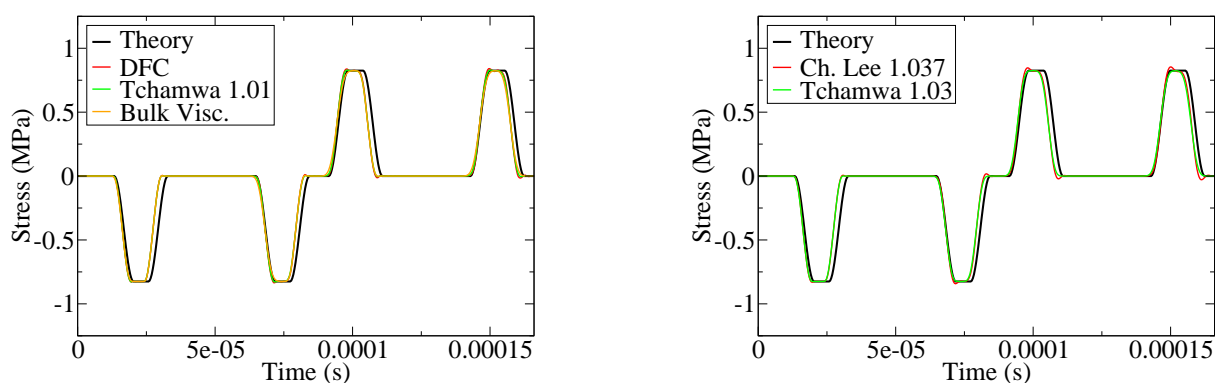


FIG. 6 – Evolution de la contrainte - chargement 1-cos - premiers A/R

Le signal obtenu pour le premier A/R ne fait pas apparaître d'oscillations parasites mais une irrégularité de contrainte apparaît au second A/R pour les schémas de Tchamwa ( $\phi = 1.01$ ), DFC et de Chung-Lee, irrégularité s'amplifiant tout au long du calcul.

Finalement, après 275 A/R (FIG. 7), la réponse obtenue est très dégradée pour les schémas DFC et de Chung-Lee et très amortie pour les schémas de Tchamwa et le *bulk-viscosity*. La réponse obtenue en utilisant le schéma DFC est énormément perturbée après 275 A/R ce qui nous montre que la modification du chargement n'est pas suffisante et qu'un amortissement est nécessaire durant le calcul.

### 2.4 Evolution de l'énergie cinétique

Quand on utilise des schémas numériques amortissants, il est primordial de s'intéresser à l'énergie cinétique totale du système (FIG. 8). Pour le chargement de type créneau, on observe

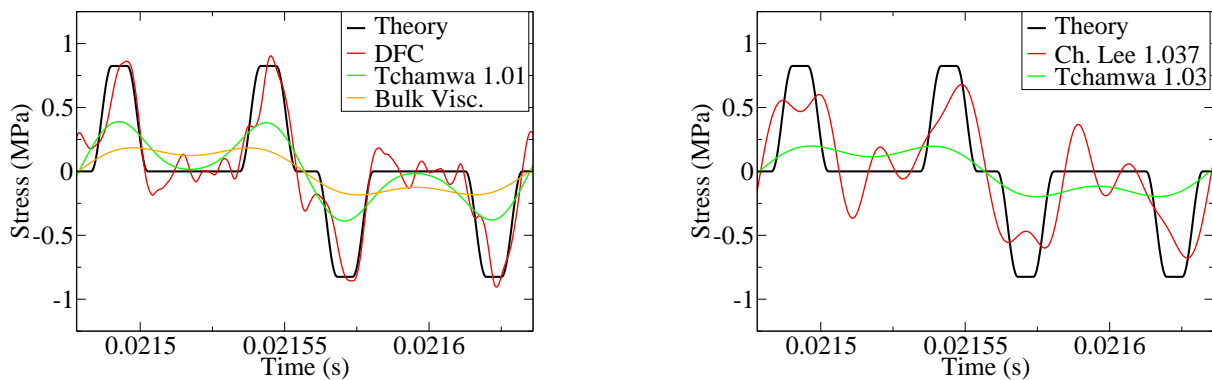


FIG. 7 – Evolution de la contrainte - chargement 1-cos - après 275 A/R

une baisse importante de cette énergie cinétique dans le cas des schémas amortissants utilisés. Puisque ces algorithmes sont souvent décrits comme agissant principalement sur les plus hautes fréquences du système [4], on aurait pu s'attendre à une stabilisation de l'énergie cinétique à une valeur asymptotique. Ceci n'est pas le cas et l'énergie cinétique décroît continûment. Ce résultat est en adéquation avec l'étude théorique des algorithmes [3].

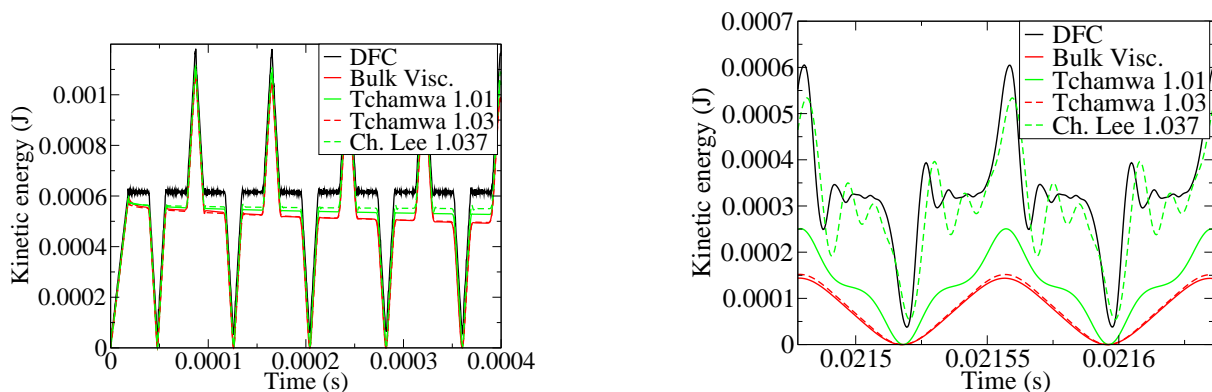


FIG. 8 – Evolution de l'énergie cinétique - chargement créneau - premiers et après 275 A/R

On peut également remarquer sur les figures précédentes que le comportement obtenu avec la *bulk-viscosity* ( $C_0 = 1.5$  et  $C_1 = 0.06$ ) est très similaire à celui obtenu avec le schéma de Tchamwa ( $\phi = 1.03$ ). Concernant le schéma de Chung-Lee, la perte d'énergie cinétique est la plus faible des schémas amortissants mais d'un autre côté, la réponse obtenue est très éloignée de la réponse théorique après 275 A/R.

Concernant le déphasage, on remarque qu'il est nul pour les différentes simulations.

La simulation de 275 A/R requiert plus de 50000 pas de temps et pour chacun des schémas, on a observé une dégradation importante de la réponse. Cette dégradation n'est pas seulement due à l'effet amortissant du schéma, puisqu'on le remarque également sur le schéma des DFC. Cependant, ce phénomène peut être interprété par une erreur systématique de l'algorithme d'intégration temporelle, atteignant ainsi les limites de ces schémas du premier ordre. Cette supposition reste maintenant à être confirmée en utilisant notamment une méthode d'ordre supérieur, le schéma de Runge-Kutta avec contrôle de l'erreur par exemple.

### 3 Conclusion

Les schémas de Tchamwa-Wielgosz et de Chung-Lee sont comparés au traditionnel *bulk-viscosity* dans le cas d'un comportement élastique. Cette étude nous a permis de montrer les comportements similaires du schéma de Tchamwa ( $\phi = 1.03$ ) et du *bulk-viscosity*. On montre également qu'en utilisant le schéma de Tchamwa ( $\forall \phi$ ), le déphasage est nul après 275 A/R dans une barre élastique de 200 mm de long.

Après avoir montré que l'application constante d'une filtration forte ( $\phi = 1.03$  pour l'algorithme de Tchamwa par exemple) conduit à une annulation de l'énergie cinétique du système, deux stratégies ont été décrites pour amortir les oscillations parasites du calcul. La première consiste à lisser le chargement et la deuxième à cibler l'amortissement de la réponse au début du calcul. Nous avons montré qu'aucune des deux méthodes n'est satisfaisante sur le long terme puisque les oscillations parasites apparaissent systématiquement.

En tirant partie du fait que le paramètre d'amortissement  $\phi$  de l'algorithme de Tchamwa n'est pas limité par les conditions de stabilité et de consistance, une troisième voie semble donc possible en utilisant un amortissement variable au cours du calcul : un amortissement important ( $\phi = 1.03$  par exemple) permettant d'amortir les oscillations dues aux conditions sévères de chargement (un créneau par exemple) suivi d'un amortissement faible ( $\phi = 1.005$  par exemple) permettant d'éviter toute apparition ultérieure des oscillations parasites.

### Références

- [1] Livermore Software Technology Corporation. Ls-dyna user's manual, v.950. 1999.
- [2] GM. Hulbert and J. Chung. Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 137 :175–188, 1996.
- [3] G. Rio, A. Soive, and V. Grolleau. Comparative study of numerical explicit time integration algorithms. *Adv. Engng Soft.*, 36(4) :252–265, 2005.
- [4] B. Tchamwa. *Contribution à l'étude des méthodes d'intégration directe explicites en dynamique non linéaire des structures*. PhD thesis, Ecoles Centrale de Nantes, France, 1997.
- [5] J. Von Neumann and R. D. Richtmeyer. A method for numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, 21 :232–237, 1950.
- [6] T. De Mulder. The role of bulk viscosity in stabilized finite element formulations for incompressible flow : a review. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng*, 163(1-4) :1–10, 1998.
- [7] J. Chung and JM. Lee. A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics. *Int. J. of Num. Meth. Engng*, 37 :3961–3976, 1994.
- [8] Université de Bretagne Sud. <http://web.univ-ubs.fr/lg2m>, 2005.