



HAL
open science

Algèbres de Jordan et théorie des invariants

Bruno Blind

► **To cite this version:**

| Bruno Blind. Algèbres de Jordan et théorie des invariants. 2009. hal-00399539v1

HAL Id: hal-00399539

<https://hal.science/hal-00399539v1>

Preprint submitted on 29 Jun 2009 (v1), last revised 10 Mar 2011 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Algèbres de Jordan et théorie des invariants.

Bruno Blind*

*J'avancerai, je chercherai,
jusqu'à la fin*

*je perdrai courage, je
reprendrai de plus loin, je reconnaitrai
la maison.*

C. Esteban, La mort à distance.

Abstract: Let V be a simple complex euclidean Jordan algebra of rank three, and denote by G the subgroup of $GL(V)$ fixing the determinant of V . For p not greater than three, we give a unified description of the invariant algebras $\mathbb{C}[pV]^G$.

Résumé: Soit G le sous-groupe de $GL(V)$ laissant invariant le polynôme déterminant de l'algèbre de Jordan complexe V , simple, euclidienne et de rang trois. dans ce travail nous décrivons d'une manière unifiée, pour p inférieur ou égal à trois, l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[pV]^G$.

Classification AMS: 13A50; 15A72; 17C99

Mots clefs: Théorie classique des invariants, Algèbre de Jordan.

*Institut Elie Cartan, Nancy-Université, CNRS, INRIA, Boulevard des Aiguillettes, B.P. 239, F- 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France; blind@iecn.u-nancy.fr

1. Introduction.

Si la description de l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[pV]^G$ (où V est une représentation de dimension finie d'un groupe algébrique G) est bien connue pour un certain nombre de groupes linéaires classiques (SL_n, SO_n, \dots), les résultats sont plus rares dans le cas des représentations de dimension minimale des groupes exceptionnels (voir cependant [Sch.1], [Pop.1] et sa bibliographie ainsi que les travaux de A.V. Iltyakov cités dans notre bibliographie).

L'on se propose dans ce travail de donner une description unifiée des générateurs de $\mathbb{C}[pV]^G$ ($p \leq 3$), dans le cas où V est une algèbre de Jordan sur \mathbb{C} simple et euclidienne de rang trois et G le sous-groupe de $GL(V)$ laissant invariant le déterminant \det de l'algèbre V , situation qui comporte en particulier le cas du groupe exceptionnel $G = E_6$ agissant sur l'algèbre d'Albert.

Après des préliminaires consacrés aux algèbres de Jordan, nous donnons aux paragraphes 3 et 4 des générateurs des algèbres $\mathbb{C}[2V]^G$ et $\mathbb{C}[3V]^G$ en utilisant essentiellement une méthode géométrique initiée par T. Vust [Vus.]. L'algèbre des invariants $\mathbb{C}[pV]^G$ est, pour $p = 2$ une algèbre de polynômes à quatre indéterminées; pour $p = 3$ et sauf dans le cas $V = \text{Sym}(3, \mathbb{C})$, c'est une algèbre de polynômes à onze indéterminées. Ces résultats ne sont pas nouveaux et se trouvent dans la littérature consacrée au sujet (voir [Gor.], [Cia.] et les tables de [Sch.2] et de [Shm.]), mais nous pensons que notre description unifiée présente un certain intérêt.

Dans le cas de l'algèbre de Jordan $V = \text{Mat}(3, \mathbb{C})$, le groupe G n'est pas connexe; nous donnons, au paragraphe 5, une famille génératrice de $\mathbb{C}[3V]^{G_0}$ ainsi que sa série de Poincaré.

Nous terminons, au paragraphe 6, par quelques remarques concernant les algèbres $\mathbb{C}[pV]^G$ pour p supérieur à trois..

En appendice, nous avons rappelé quelques faits concernant la classification des quatre algèbres de Jordan complexes, simples, euclidiennes et de rang trois.

A certains endroits de ce travail, nous faisons usage du logiciel LIE développé par Marc A.A. van Leeuwen, Arjeh M. Cohen et Bert Lisser, nous le désignerons simplement par LIE dans la suite.

Je remercie F. Chargois et O. Hijazi pour leurs critiques et encouragements.

2. Préliminaires sur les algèbres de Jordan.

Nous renvoyons à [Bra.-Koe.], [Fa.-Ko.] et [Spr.] pour les définitions et les principaux faits concernant les algèbres de Jordan.

Soit V une des quatre algèbres de Jordan sur \mathbb{C} , simples, euclidiennes et de rang 3: nous donnons dans l'appendice une description unifiée de ces quatre algèbres V_0, V_1, V_2, V_3 comme l'espace $\mathfrak{H}_3(\mathbb{F}_{\mathbb{C}})$ des matrices $(3, 3)$ hermitiennes à coefficients dans $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$ (avec $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$) que l'on munit de la multiplication de Jordan $x \bullet y = 1/2(xy + yx)$, d'élément unité $e = \text{Id}_3$. La forme bilinéaire définie par $\langle x, y \rangle = \text{tr } x \bullet y$ est non dégénérée et associative:

$$\langle x \bullet z, y \rangle = \langle x, y \bullet z \rangle .$$

Nous noterons souvent le complexe $\langle x, x \rangle$ par $\|x\|$.

On note par \det le déterminant de V , c'est un polynôme irréductible et homogène de degré 3, sa polarisation nous donne une forme trilinéaire f sur V telle que $f(x, x, x) = 6 \det x$. On désigne par G le sous-groupe de $\text{GL}(V)$ laissant invariant le déterminant; c'est un sous-groupe du groupe de structure de V (voir [Spr.], Proposition 12.3, page 123) qui contient le groupe K des automorphismes de l'algèbre V .

Un élément x de V est inversible si $\det x \neq 0$, et dans ce cas l'inverse x^{-1} s'écrit sous la forme

$$x^{-1} = \frac{n(x)}{\det(x)}$$

où n est une application quadratique de V dans V . Cette application est G -équivariante:

$$n(g.x) = (g^{-1})'n(x)$$

où g' désigne l'adjoint de g par rapport à la forme bilinéaire \langle, \rangle (voir [Far.-Kor.] page 148). Par ailleurs, si nous désignons par \times l'application bilinéaire symétrique associée à l'application quadratique n : $x \times y = n(x+y) - n(x) - n(y)$, nous avons la relation (voir [Spr.], chapitre 4, formule (5), page 56):

$$f(x, y, z) = \langle x \times y, z \rangle .$$

L'opération naturelle du groupe G sur V donne lieu à une action de G sur l'algèbre $\mathbb{C}[pV]$ des polynômes sur $pV = V \oplus \dots \oplus V$, et l'objectif de ce travail est de déterminer, dans le cas $p \leq 3$, l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[pV]^G$. On sait (comme cela résulte de la décomposition de $\mathbb{C}[V]$ en G -modules irréductibles, voir [Far.-Kor.]) que $\mathbb{C}[V]^G = \mathbb{C}[\det x]$, l'algèbre à une indéterminée engendrée par le polynôme $\det x$, et à partir de la forme trilinéaire f et de l'application \times , nous pouvons facilement construire des invariants du groupe G : par exemple

le polynôme $f(n(x), n(y), n(z))$ ainsi que tous ses polarisés sont des invariants. Ces invariants ont également été considérés par A.V. Iltyakov dans [Ilt.1].

Fixons un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux $\{e_1, e_2, e_3\}$ de V , on a la décomposition de Peirce associée:

$$V = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus V_{12} \oplus V_{13} \oplus V_{23}$$

si nous écrivons la décomposition d'un élément x de V sous la forme:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_{12} + x_{13} + x_{23}$$

nous obtenons facilement les formules suivantes, utiles pour la suite:

$$n(x)_1 = x_2x_3 - \frac{1}{2}\|x_{23}\|, \quad n(x)_2 = x_1x_3 - \frac{1}{2}\|x_{13}\|, \quad n(x)_3 = x_1x_2 - \frac{1}{2}\|x_{12}\|$$

et

$$\det x = x_1x_2x_3 - \frac{1}{2}(x_1\|x_{23}\| + x_2\|x_{13}\| + x_3\|x_{12}\|) + 2 \langle x_{12}x_{13}, x_{23} \rangle$$

si nous écrivons l'élément x de $V = \mathfrak{H}_3(\mathbb{F}_{\mathbb{C}})$ sous la forme matricielle:

$$x = \begin{pmatrix} a & \bar{p} & \bar{q} \\ p & b & r \\ q & \bar{r} & c \end{pmatrix}$$

(où p, q, r , sont dans $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$) cette formule devient:

$$\det x = abc - (a r \bar{r} + b q \bar{q} + c p \bar{p}) + 2\text{Re}((p\bar{q})\bar{r})$$

(où $\text{Re } u = 1/2(u + \bar{u})$ pour un élément u de $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$). Dans une telle écriture matricielle, on notera souvent les éléments x_{12} , x_{13} et x_{23} par $(p)_{12}$, $(q)_{13}$ et $(r)_{23}$.

Définissons le groupe M , comme le sous-groupe de K fixant les éléments du système d'idempotents $\{e_1, e_2, e_3\}$. Nous aurons besoin dans la suite de la propriété suivante de transitivité du groupe M (nous ne sommes pas parvenus à trouver une référence pour ce résultat, que nous pensons connu):

Proposition 2.1. *Soient (x_{12}, x_{13}, x_{23}) et $(x'_{12}, x'_{13}, x'_{23})$ deux éléments de $V_{12} \times V_{13} \times V_{23}$ satisfaisant les conditions:*

$$\begin{cases} \|x_{ij}\| & = & \|x'_{ij}\| & \neq 0 \\ \langle x_{12} \bullet x_{13}, x_{23} \rangle & = & \langle x'_{12} \bullet x'_{13}, x'_{23} \rangle & \end{cases}$$

alors il existe un élément de M transformant x_{ij} en x'_{ij} .

L'idée générale est la suivante: par l'action de M nous pouvons nous ramener au cas où les deux triplets sont de la forme: $((a)_{12}, (q)_{13}, (b)_{23})$ et $((a)_{12}, (q')_{13}, (b)_{23})$ (avec a et b deux complexes non nuls); nous devons alors trouver un élément de M laissant fixe $(a)_{12}$ et $(b)_{23}$ et transformant $(q)_{13}$ en $(q')_{13}$. La relation

$$\langle (a)_{12} \bullet (q)_{13}, (b)_{23} \rangle = \langle (a)_{12} \bullet (q')_{13}, (b)_{23} \rangle$$

donne alors: $\operatorname{Re} q = \operatorname{Re} q'$. Maintenant, dans les quatre cas, on vérifie que le sous-groupe d'isotropie de (a, b) dans M agit transitivement sur la sphère de $\operatorname{Im}(\mathbb{F}_{\mathbb{C}}) = \{x \in \mathbb{F}_{\mathbb{C}}, \operatorname{Re} x = 0\}$.

Nous laissons le détail des cas $V = V_0$ et $V = V_1$ en exercice (noter que pour le cas $V = V_1$, le groupe M_o ne possède pas cette propriété de transitivité), et nous nous concentrons sur les deux autres cas.

Si $V = V_2 = \mathfrak{H}_3(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})$, le groupe M est formé des matrices diagonales

$$m_{\lambda, \mu, \nu} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

(où les trois quaternions complexes sont de norme 1: $\lambda \bar{\lambda} = \mu \bar{\mu} = \nu \bar{\nu} = 1$, voir l'appendice) agissant par:

$$m_{\lambda, \mu, \nu} x = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix}.$$

Posons alors $x_{12} = (p)_{12}, x_{13} = (q)_{13}, x_{23} = (r)_{23}$; l'action d'un élément $m_{\lambda, \mu, \nu}$ sur les x_{ij} nous donne:

$$m_{\lambda, \mu, \nu} x_{12} = (\mu p \bar{\lambda})_{12}, \quad m_{\lambda, \mu, \nu} x_{13} = (\nu q \bar{\lambda})_{13}, \quad m_{\lambda, \mu, \nu} x_{23} = (\mu r \bar{\nu})_{23}.$$

en prenant $\mu = 1, \lambda = \frac{p}{a}$ et $\nu = \frac{r}{b}$ avec a et b deux complexes tels que $a^2 = p\bar{p}$ et $b^2 = r\bar{r}$, nous pouvons nous ramener au cas où les deux triplets sont de la forme $((a)_{12}, (q)_{13}, (b)_{23})$ et $((a)_{12}, (q')_{13}, (b)_{23})$ avec $\operatorname{Re} q = \operatorname{Re} q'$. Un élément de M laissant fixe $(a)_{12}$ et $(b)_{23}$ est de la forme $m_{\lambda, \lambda, \lambda}$; finalement, nous cherchons un quaternion complexe, λ , de norme un et tel que

$$\lambda(\operatorname{Im} q)\bar{\lambda} = \operatorname{Im} q'$$

(où $\operatorname{Im} u = 1/2(u - \bar{u})$ pour un élément u de $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$). Sachant que $q\bar{q} = q'\bar{q}' \neq 0$, la transitivité du groupe $\operatorname{SO}(3, \mathbb{C})$ sur la sphère unité de \mathbb{C}^3 nous permet de conclure.

Regardons pour finir le cas $V = V_3 = \mathfrak{H}_3(\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$; comme rappelé dans l'appendice, M est alors le groupe $\text{Spin}(8, \mathbb{C})$: un élément g de ce groupe agit par:

$$g \cdot \begin{pmatrix} a & \bar{p} & \bar{q} \\ p & b & r \\ q & \bar{r} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \overline{\rho_+(g)(p)} & \overline{\chi(g)(q)} \\ \rho_+(g)(p) & b & \rho_-(g)(r) \\ \chi(g)(q) & \overline{\rho_-(g)(r)} & c \end{pmatrix}$$

où ρ_+, ρ_- sont les représentations semi-spinorielles et χ la représentation vectorielle de $\text{Spin}(8, \mathbb{C})$. On se ramène à nouveau au cas où les deux triplets sont de la forme $((a)_{12}, (q)_{13}, (b)_{23})$ et $((a)_{12}, (q')_{13}, (b)_{23})$ (avec a et b deux complexes non nuls), ce fait nous est garanti ici par les propriétés de l'action de $\rho_+ \oplus \rho_-$ sur $\mathbb{C}^8 \oplus \mathbb{C}^8$ (c'est-à-dire l'analogie complexe de l'assertion (a) du théorème 14.69 de [Har.], analogue qui se démontre de manière similaire au cas réel). On a toujours: $\text{Re } q = \text{Re } q'$, et le sous groupe d'isotropie de $((a)_{12}, (b)_{23})$ dans $\text{Spin}(8, \mathbb{C})$ s'identifie au groupe complexe G_2 agissant sur $(q)_{13}$ par l'action standard de ce groupe sur $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$; la transitivité de G_2 sur la sphère unité de $\text{Im}(\mathbb{O}_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}^7$ (voir par exemple [Ada.]) achève alors la démonstration.

Remarque 2.2. On peut noter que l'application trilinéaire:

$$V_{12} \times V_{13} \times V_{23} \mapsto \mathbb{C}$$

$$(x_{12}, x_{13}, x_{23}) \mapsto \langle x_{12} \bullet x_{13}, x_{23} \rangle$$

définit une trialité au sens d'Adams (cf [Ada.] et [Bae.]); le groupe M s'identifie alors au groupe des automorphismes de la trialité.

3. L'algèbre $\mathbb{C}[2V]^G$.

Nous déterminons dans ce paragraphe l'algèbre $\mathbb{C}[2V]^G$; pour le cas de l'algèbre des invariants de deux formes quadratiques ternaires (cas $V = V_0$), ce résultat remonte à P. Gordan ([Gor.]); les cas $V = V_2$ et $V = V_3$ se trouvent dans les tables de [Sch.2] (voir aussi [Sch.3]). La démonstration que nous donnons est une illustration de la méthode géométrique de T. Vust ([Vus.]), elle se généralise aux algèbres de Jordan sur \mathbb{C} simples et de rang quelconque.

Théorème 3.1. *L'algèbre $\mathbb{C}[2V]^G$ est une algèbre de polynômes engendrée par les quatres polynômes:*

$$f(x, x, x), \quad f(y, y, y), \quad f(x, x, y), \quad f(y, y, x).$$

L'idée de la démonstration remonte à T. Vust (cf [Vus.]). On identifie $2V$ à $\text{Hom}(\mathbb{C}^2, V)$: l'élément (x, y) de $2V$ est vu comme l'application linéaire: $(a, b) \mapsto ax + by$, et on considère l'application χ de $2V$ dans l'espace $\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2)$ des polynômes homogènes de degré 3 sur \mathbb{C}^2 qui au couple (x, y) associe le polynôme à deux variables a et b suivant:

$$(a, b) \mapsto \det(ax + by) = a^3 \det x + b^3 \det y + \frac{a^2 b}{2} f(x, x, y) + \frac{ab^2}{2} f(y, y, x).$$

Comme le morphisme algébrique χ est G -invariant, il se factorise suivant le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & 2V & \\ \pi \swarrow & & \searrow \chi \\ 2V//G & \dashrightarrow \Psi & \text{Sym}^3(\mathbb{C}^2) \end{array}$$

où l'espace $2V//G$ est la variété algébrique affine irréductible associée à l'algèbre (intégrale, de type fini) $\mathbb{C}[2V]^G$ et l'application $\pi : 2V \rightarrow 2V//G$ est le morphisme canonique.

On va montrer que Ψ est surjective et birationnelle; il en résultera (voir par exemple [Bri.], lemme 1 page 132) que c'est un isomorphisme algébrique puisque $\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2)$ est une variété normale, et le théorème 3.1 s'en suivra.

Montrons que χ , et par conséquent Ψ , est surjective. On sait qu'un élément P (non nul) de $\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2)$, peut s'écrire sous la forme:

$$P(a, b) = \lambda b^{3-N} \prod_{i=1}^N (a - \alpha_i b)$$

où λ est un scalaire non nul, et avec $0 \leq N \leq 3$ (un produit vide étant égal à 1). En posant alors $x = \sum_1^N e_i$ (on prend $x = 0$ si $N = 0$) et $y = -\sum_1^N \alpha_i e_i + e_{N+1} \cdots + e_3$, il vient

$$\chi(x, y) = \frac{1}{\lambda} P$$

et comme l'image de χ est \mathbb{C}^* invariant nous obtenons la surjectivité annoncée.

Le morphisme algébrique Ψ étant surjectif, il est dominant; pour montrer qu'il est birationnel il nous suffit (voir par exemple [Vin.], lemme 1 page 252) d'exhiber un sous-ensemble \mathcal{V} dense de $\text{Sym}^3(\mathbb{C}^2)$ tel que pour tout v de \mathcal{V} la fibre $\Psi^{-1}(v)$ soit réduite à un point. Posons $\mathcal{V} = \chi(\mathcal{U})$, \mathcal{U} étant le sous-ensemble dense de $2V$ constitué des couples (x, y) où x est inversible et y possède trois valeurs propres distinctes. Soit (x_0, y_0) un élément de \mathcal{U} , on va montrer que si $(x, y) \in 2V$ est tel que

$$(*) \quad \chi(x_0, y_0) = \chi(x, y)$$

alors (x, y) et (x_0, y_0) sont dans la même G -orbite, ce qui entrainera bien que la fibre $\Psi^{-1}(\chi(x_0, y_0))$ est réduite à $\pi(x_0, y_0)$. Tout d'abord, on peut supposer que $\det x_0 = 1$ sans restreindre la généralité du problème; en se déplaçant dans la G -orbite de (x_0, y_0) on peut ensuite supposer que $x_0 = e$ (voir [Far.-Kor.], proposition VIII.3.5, page 153). La relation (*) entraîne que $\det x = 1$, on peut donc encore, en se déplaçant cette fois ci dans la G -orbite de (x, y) (et quitte à changer de notation) remplacer (x, y) par (e, y) ; la relation (*) nous donne en particulier pour tout complexe a :

$$\det (ae + y_0) = \det (ae + y)$$

et ceci implique que y possède les mêmes valeurs propres distinctes $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ que y_0 . On sait alors (voir [Far.-Kor.], proposition VIII.3.2, page 151) que les éléments y_0 et y peuvent s'écrire sous la forme:

$$y_0 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3, \quad y = \lambda_1 c'_1 + \lambda_2 c'_2 + \lambda_3 c'_3$$

où (c_1, c_2, c_3) et (c'_1, c'_2, c'_3) sont deux repères de Jordan de V , mais l'on sait (voir [Far.-Kor.], théorème IV.2.5, page 71) que le groupe $\text{Aut}(V)$ des automorphismes de V opère transitivement sur les repères de Jordan. Il résulte de tout ceci que (x, y) et (x_0, y_0) sont bien dans la même G -orbite et ceci achève la démonstration du théorème.

Remarques 3.2.

1. Dans le cas de $V = V_1$, on peut noter que les propriétés de transitivité des groupes G et $\text{Aut}(V)$ utilisées dans la démonstration sont déjà vérifiées par leur composante neutre et par conséquent $\mathbb{C}[2V_1]^{G_0} = \mathbb{C}[2V_1]^G$. Nous verrons par la suite que ce résultat ne se généralise pas pour $\mathbb{C}[3V_1]^{G_0}$.

2. Notons également que pour le cas $V = V_0$, ce résultat nous permet de trouver la dimension de Krull $d(p)$ de $\mathbb{C}[pV_0]^G$ pour $p \geq 2$; en effet comme $d(2) = 4$, il résulte de la formule: $d(2) = \dim 2V - \max \dim(G.v)$ que la dimension maximale d'une G -orbite $G.v$ dans $2V$ est 8, ce qui est la dimension du groupe G dans le cas $V = V_0$, et par conséquent $d(p) = 6p - 8$.

4. Le cas $p = 3$.

Le but de ce paragraphe est de montrer, en utilisant la méthode géométrique de T. Vust, que les onze polynômes

$$\begin{aligned} & f(x, x, x), \quad f(y, y, y), \quad f(z, z, z), \\ & f(x, x, y), \quad f(x, x, z), \quad f(y, y, x), \quad f(y, y, z), \quad f(z, z, x), \quad f(z, z, y), \\ & f(x, y, z), \quad f(x \times x, y \times y, z \times z). \end{aligned}$$

engendrent l'algèbre $\mathbb{C}[3V]^G$; nous noterons désormais ces polynômes f_1, f_2, \dots, f_{11} . On commence par considérer l'analogie du diagramme du paragraphe 2:

$$\begin{array}{ccc} & 3V & \\ \pi \swarrow & & \searrow \chi \\ 3V//G & \dashrightarrow \Psi & \text{Sym}^3(\mathbb{C}^3) \end{array}$$

nous obtenons:

Proposition 4.1. *Les dix polynômes f_1, f_2, \dots, f_{10} sont algébriquement indépendants.*

On montre que Ψ est surjective, en prouvant que χ l'est. Pour ce faire, on remarque que $\text{Im} \chi = \text{Im} \Psi$ est invariante sous l'action naturelle du groupe $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ sur l'espace $\text{Sym}^3(\mathbb{C}^3)$, et donc est une réunion d'orbites de ce groupe; on sait (voir par exemple [Kra.], chapitre 1, paragraphe 7) que les $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ orbites dans $\text{Sym}^3(\mathbb{C}^3)$ sont les orbites de:

$$\begin{aligned} & a^3, \quad a^2b, \quad ab(a+b), \quad abc, \quad (a^2 - bc)b, \quad a(a^2 - bc) \\ & b^2c - a^3, \quad b^2c - a^3 - a^2c, \quad a^3 + b^3 + c^3 + \lambda abc \end{aligned}$$

où λ est un complexe quelconque. Dans le cas $V = V_0 = \text{Sym}(3, \mathbb{C})$, il n'est pas difficile de vérifier que ces représentants appartiennent à $\text{Im}\chi$; le résultat pour les autres cas en découle, au vu des inclusions $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3$.

Par exemple pour le représentant $a^3 + b^3 + c^3 + \lambda abc$, on considère le triplet $(e, e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3, z)$ de $3V$ avec $\zeta^3 = 1$, et on cherche à trouver z tel que

$$\chi(e, e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3, z) = \det(ae + b(e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3) + cz) = a^3 + b^3 + c^3 + \lambda abc.$$

On a:

$$\begin{aligned} & \det(ae + b(e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3) + cz) = \\ & a^3 + b^3 + c^3 \det z + ca^2 \text{tr} z + cb^2 \text{tr}((e_1 + \zeta e_2 + \zeta e_3)z) + ac^2 \text{tr} \text{n}(z) + \\ & bc^2 \text{tr}(\text{n}(z)(e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3)) + abc \text{tr}((e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3) \times z). \end{aligned}$$

Posons $z = \begin{pmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{pmatrix}$; les conditions $\text{tr} z = \text{tr}((e_1 + \zeta e_2 + \zeta e_3)z) = 0$ et $\text{tr}((e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3) \times z) = \lambda$ forment un système de Cramer en les inconnues a, b, c , et donnent:

$$a = -\frac{\lambda}{3}, b = -\frac{\lambda}{3}\zeta^2, c = -\frac{\lambda}{3}\zeta.$$

Les équations $\text{tr} \text{n}(z) = \text{tr}(\text{n}(z)(e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3)) = 0$ et $\det z = 1$ elles, sont équivalentes à:

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= 0 \\ \zeta^2 p^2 + \zeta q^2 + r^2 &= 0 \\ \det z &= 1 \end{aligned}$$

ou encore:

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= 0 \\ \zeta^2 p^2 + \zeta q^2 + r^2 &= 0 \\ \frac{\lambda}{3}(\zeta p^2 + \zeta^2 q^2 + r^2) + 2pqr &= 1 + \frac{\lambda^3}{27} \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que ce système a toujours des solutions: les deux premières équations permettent par exemple d'exprimer p^2 et q^2 en fonction de r^2 :

$$p^2 = \zeta^2 r^2, \quad q^2 = \zeta r^2.$$

la dernière condition devenant une équation du troisième degré en l'inconnue r^2 :

$$\lambda r^2 \pm 2r^3 = 1 + \frac{\lambda^3}{3^3}$$

qui a toujours des solutions.

Considérons maintenant l'algèbre $\mathbb{C}[3V_0]^G$: les résultats de Ciamberlini (cf [Cia.]) sur les invariants de trois formes quadratiques ternaires (voir aussi [Shm.], table 3) entraînent qu'elle est engendrée par ses éléments de degré 3 et 6. Par LIE, les éléments homogènes de degré 3 de $\mathbb{C}[3V_0]^G$ forment un sous-espace vectoriel de dimension dix, par conséquent ce sous-espace est engendré par les polynômes f_1, \dots, f_{10} . De même, et toujours par LIE, les éléments homogènes de degré 6 forment un sous-espace vectoriel de dimension $56 = 55 + 1$; il en résulte que l'algèbre $\mathbb{C}[3V_0]^G$ est engendrée par $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_{10}]$ et un élément de degré 6; or on voit que le polynôme f_{11} n'appartient pas à $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_{10}]$: dans le cas contraire, en utilisant l'invariance de f_{11} par permutation sur x, y, z , on aurait une relation du type:

$$f_{11} = A(f_4f_9 + f_5f_7 + f_6f_8) + Bf_{10}^2$$

prenons cette relation pour $x = e_1$ et $y = e_2$, il vient $n(x) = n(y) = 0$ et donc $Bf(e_1, e_2, z) = 0$ pour tous les z , d'où $B = 0$, et par conséquent:

$$f_{11} = A(f_4f_9 + f_5f_7 + f_6f_8).$$

On prend à nouveau $x = e_1$, et on obtient pour tous les y et z :

$$Af(y, y, e_1)f(e_1, z, z) = 0$$

d'où $A = 0$ ce qui est absurde, puisque l'invariant f_{11} n'est pas identiquement nul. Nous avons donc:

Proposition 4.2. *Dans le cas $V = V_0$, l'algèbre $\mathbb{C}[3V_0]^G$ est engendrée par les onze polynômes f_1, f_2, \dots, f_{11} .*

Remarque 4.3. On sait (voir [Shm.]) que l'algèbre $\mathbb{C}[3V_0]^G$ est d'intersection complète; d'autre part, dans [Bli.] nous donnons la série de Poincaré de cette algèbre.

Remarque 4.4. Il est classique de voir $3V_0$ comme le $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C}) \times G$ module $(\mathbb{C}^3)^* \otimes V_0$ il en résulte une action de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}[3V_0]^G$ qui conserve le degré; LIE nous donne la décomposition du sous-espace des éléments homogènes de degré 6: on constate la présence (avec multiplicité un) du $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ module $\mathrm{Sym}^2(\wedge^3(\mathbb{C}^3))$; il n'est alors pas difficile de vérifier que le polynôme:

$$\tilde{f}_{11} = f_{11} - \frac{2}{3}(f_4f_9 + f_5f_7 + f_6f_8) + \frac{2}{3}f_{10}^2$$

est un élément non nul de ce module. Le polynôme f_{11} est donc un invariant relatif de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$. Bien entendu cet élément, considéré dans $\mathbb{C}[3V_i]$, $0 < i \leq 3$ conserve cette propriété d'invariance.

Les résultats précédents nous conduisent à considérer, pour les autres V_i , le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} & 3V & \\ \pi \swarrow & & \searrow \tilde{\chi} \\ 3V//G & \overset{\Psi}{\dashrightarrow} & \mathrm{Sym}^3(\mathbb{C}^3) \oplus \mathrm{Sym}^2(\wedge^3(\mathbb{C}^3)) \end{array}$$

où l'application $\tilde{\chi}$ est donnée par:

$$\tilde{\chi} = (\chi, \tilde{f}_{11}).$$

Théorème 4.5. *Dans les cas $V = V_1, V_2$ et V_3 , les onze polynomes f_1, \dots, f_{11} sont algébriquement indépendants et ils engendrent l'algèbre $\mathbb{C}[3V]^G$.*

On commence par montrer que l'image du morphisme Ψ contient l'ouvert formé de la réunion des $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ orbites des éléments de la forme $(a^3 + b^3 + c^3 + \lambda abc, \mu)$, ce qui impliquera en particulier que Ψ est dominant. Par la $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ équivariance de $\tilde{\chi}$, il nous suffit de prouver que les éléments de la forme $(a^3 + b^3 + c^3 + \lambda abc, \mu)$ appartiennent à l'image de Ψ , et pour ce faire, on peut se placer dans le cas où $V = V_1 = \mathrm{Mat}(3, \mathbb{C})$ (puisque $V_1 \subset V_2 \subset V_3$). On cherche, comme dans la démonstration de la proposition 4.1, un triplet $(e, e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3, z)$ (avec $\zeta^3 = 1$) tel que

$$\chi(e, e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3, z) = a^3 + b^3 + c^3 + \lambda abc$$

avec la condition supplémentaire: $\tilde{f}_{11}(e, e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3, z) = \mu$. En posant $z = (z_{ij})$, on trouve à nouveau: $z_{11} = -\frac{\lambda}{3}, z_{22} = -\frac{\lambda}{3}\zeta^2, z_{33} = -\frac{\lambda}{3}\zeta$. Les conditions:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} \, n(z) &= \mathrm{tr}(n(z)(e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3)) = 0 \\ \tilde{f}_{11}(e, e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3, z) &= \mu \end{aligned}$$

sont équivalentes à un système de Cramer en les variables $(z \times z)_{11}, (z \times z)_{22}$ et $(z \times z)_{33}$:

$$\begin{aligned} (z \times z)_{11} + (z \times z)_{22} + (z \times z)_{33} &= 0 \\ (z \times z)_{11} + \zeta(z \times z)_{22} + \zeta^2(z \times z)_{33} &= 0 \\ (z \times z)_{11} + \zeta^2(z \times z)_{22} + \zeta(z \times z)_{33} &= \left(\frac{2\lambda^2}{3} - \mu\right)\frac{1}{4} \end{aligned}$$

en utilisant les relations:

$$(z \times z)_{11} = 2(z_{22}z_{33} - z_{23}z_{32}), (z \times z)_{22} = 2(z_{11}z_{33} - z_{13}z_{31}), (z \times z)_{33} = 2(z_{22}z_{11} - z_{21}z_{12})$$

nous obtenons un système de Cramer en les variables $z_{21}z_{12}, z_{13}z_{31}, z_{23}z_{32}$ qui donne:

$$z_{12}z_{21} = \zeta^2 \frac{\mu}{8}, z_{13}z_{31} = \zeta \frac{\mu}{8}, z_{23}z_{32} = \frac{\mu}{8}$$

Compte tenu de ces valeurs, l'équation $\det z = 1$ devient:

$$z_{12}z_{23}z_{31} + z_{21}z_{13}z_{32} = 1 + \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda\mu}{8}$$

mais:

$$(z_{21}z_{13}z_{32})(z_{12}z_{23}z_{31}) = \left(\frac{\mu}{8}\right)^3$$

par conséquent $z_{12}z_{23}z_{31}$ vérifie une équation du second degré; de tout ceci résulte l'existence de z tel que $\tilde{\chi}(e, e_1 + \zeta e_2 + \zeta^2 e_3, z) = (a^3 + b^3 + c^3 + \lambda abc, \mu)$.

Montrons maintenant que le morphisme Ψ est birationnel: soit \mathcal{U} le sous ensemble dense de $3V$ constitué par les triplets (x, y, z) avec x inversible, y possédant trois valeurs propres distinctes et, si $z = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 + z_{12} + z_{13} + z_{23}$ est l'écriture de z dans la décomposition de Peirce de V , avec $\|z_{ij}\| \neq 0$; on va montrer que pour tout v dans $\tilde{\chi}(\mathcal{U})$, la fibre $\Psi^{-1}(v)$ est réduite à un point. Soient donc deux triplets (x, y, z) et (x', y', z') de \mathcal{U} avec:

$$\tilde{\chi}(x, y, z) = \tilde{\chi}(x', y', z')$$

on voit facilement que cette relation est équivalente aux deux équations: $\det(ax + by + cz) = \det(ax' + by' + cz')$ et $f_{11}(x, y, z) = f_{11}(x', y', z')$. En se déplaçant (comme dans la démonstration du théorème 3.1) dans l'orbite de (x, y, z) et de (x', y', z') , on peut supposer que $x = x' = e$ et $y = y' = \sum y_i e_i$ (où les 3 valeurs y_i sont distinctes). Si nous explicitons alors les deux équations en posant $z = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 + z_{12} + z_{13} + z_{23}$ et $z' = z'_1 e_1 + z'_2 e_2 + z'_3 e_3 + z'_{12} + z'_{13} + z'_{23}$, nous sommes conduits à examiner des systèmes déjà rencontrés plus haut: l'identité $\det(ae + b \sum y_i e_i + cz) = \det(ae + b \sum y_i e_i + cz')$ nous donne, en identifiant les coefficients de $a^2 c$, abc et $b^2 c$, le système de Cramer en les inconnues $z'_i - z_i$:

$$\begin{cases} (z'_1 - z_1) + (z'_2 - z_2) + (z'_3 - z_3) = 0 \\ (y_2 + y_3)(z'_1 - z_1) + (y_1 + y_3)(z'_2 - z_2) + (y_1 + y_2)(z'_3 - z_3) = 0 \\ y_2 y_3 (z'_1 - z_1) + y_1 y_3 (z'_2 - z_2) + y_1 y_2 (z'_3 - z_3) = 0 \end{cases}$$

l'on obtient:

$$z_i = z'_i.$$

De même, en identifiant les coefficients de ac^2 , bc^2 , et en utilisant $\text{tr}(\mathfrak{n}(y) \times \mathfrak{n}(z)) = \text{tr}(\mathfrak{n}(y) \times \mathfrak{n}(z'))$ (qui est l'égalité $f_{11}(e, \sum y_i e_i, z) = f_{11}(e, \sum y_i e_i, z')$), on trouve un système de Cramer en les inconnues $\mathfrak{n}(z')_i - \mathfrak{n}(z)_i$ qui nous donne:

$$(\mathfrak{n}(z))_i = \mathfrak{n}(z')_i$$

et donc $\|z_{ij}\|^2 = \|z'_{ij}\|^2$. Il vient alors, en mettant ces résultats dans l'égalité: $\det z' = \det z$:

$$\langle z_{13} \bullet z_{23}, z_{12} \rangle = \langle z'_{13} \bullet z'_{23}, z'_{12} \rangle .$$

Il ne nous reste plus qu'à appliquer la proposition 2.1 pour voir qu'il existe un élément du groupe M qui transforme z en z' ; les deux triplets (x, y, z) et (x', y', z') sont donc dans la même G -orbite et par conséquent, le morphisme Ψ est bien birationnel.

Il suffit, pour terminer la démonstration du théorème, de montrer que $\text{Im}\Psi$ rencontre toute hypersurface de l'espace $\text{Sym}^3(\mathbb{C}^3) \oplus \mathbb{C}$ (voir le lemme 1 page 132 de [Bri.]). Soit donc une hypersurface de $\text{Sym}^3(\mathbb{C}^3) \oplus \mathbb{C}$ d'équation $H = 0$; on peut supposer que H contient effectivement la coordonnée de la composante \mathbb{C} , car sinon le résultat est acquis par la démonstration de la proposition 3.1; considérons alors le coefficient de H de plus haut degré en cette coordonnée: c'est un polynôme sur $\text{Sym}^3(\mathbb{C}^3)$ qui n'est pas identiquement nul sur l'ouvert formé par la réunion des $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ -orbites d'un $a^3 + b^3 + c^3 + \lambda abc$, et par conséquent il existe bien un élément de $\text{Im}\Psi$ dans l'hypersurface considérée.

Remarque 4.6. La démonstration du théorème 3.3 fait intervenir une propriété de transitivité du groupe M qui, dans le cas $V = V_1$, n'est pas vérifiée par sa composante neutre. Nous déterminerons, au prochain paragraphe, l'algèbre $\mathbb{C}[3V_1]^{G_\circ}$.

Remarque 4.7. Notons également, pour terminer ce paragraphe, que dans le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} & nV & \\ \pi \swarrow & & \searrow \chi \\ nV//G & \overset{\Psi}{\dashrightarrow} & \overline{\chi(nV)} \subset \text{Sym}^3(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

(où $n = \dim V$, $\chi(x_1, \dots, x_n)$ désigne le polynôme $\det \sum a_i x_i$ et $\overline{\chi(nV)}$ l'adhérence de Zariski de l'image de χ dans $\text{Sym}^3(\mathbb{C}^n)$), il est facile de constater que

l'application Ψ est birationnelle. En d'autres termes, l'inclusion d'anneau:

$$\mathbb{C}[f(x_i, x_j, x_k) / 1 \leq i, j, k \leq n] \rightarrow \mathbb{C}[nV]^G$$

induit un isomorphisme sur les corps des fractions.

5. L'algèbre $\mathbb{C}[3V_1]^{G_o}$.

Dans tout ce paragraphe, V désignera l'algèbre de Jordan $\text{Mat}(3, \mathbb{C})$; rappelons que dans ce cas, le groupe G est engendré par sa composante neutre G_o et la transposition $X \rightarrow {}^tX$; la composante G_o est le groupe des transformations linéaires: $(g_1, g_2).X = g_1 X g_2^{-1}$ où g_1 et g_2 sont dans $\text{SL}(3, \mathbb{C})$. Considérons l'élément P de $\mathbb{C}[3V]$ suivant:

$$P(x, y, z) = \text{tr}(\mathfrak{n}(x)z \mathfrak{n}(y)x \mathfrak{n}(z)y).$$

Proposition 5.1. *Le polynôme P est G_o -invariant mais pas G -invariant.*

En effet, la propriété de G_o d'invariance résulte facilement des formules du type: $\mathfrak{n}((g_1, g_2)x) = g_2 \mathfrak{n}(x) g_1^{-1}$. D'autre part, on constate que: $\mathfrak{n}({}^t x) = {}^t \mathfrak{n}(x)$, on en tire:

$$P({}^t x, {}^t y, {}^t z) = \text{tr}({}^t \mathfrak{n}(x) {}^t z {}^t \mathfrak{n}(y) {}^t x {}^t \mathfrak{n}(z) {}^t y) = \text{tr}({}^t (y \mathfrak{n}(z)x \mathfrak{n}(y)z \mathfrak{n}(x)) =$$

$$\text{tr}(y \mathfrak{n}(z)x \mathfrak{n}(y)z \mathfrak{n}(x)) = \text{tr}(\mathfrak{n}(z)x \mathfrak{n}(y)z \mathfrak{n}(x)y) = P(z, y, x).$$

On va montrer que $P(x, y, z) \neq P(z, y, x)$; pour ce faire, on prend $x = e$, $y = a_1 e_1 + a_2 e_2$ avec $a_1 \neq a_2$ et $a_1 a_2 \neq 0$, et on pose $z = (z_{ij})$ et $\mathfrak{n}(z) = (Z)_{ij}$. On trouve d'une part: $P(e, a_1 e_1 + a_2 e_2, z) = a_1 a_2 (a_1 z_{13} Z_{31} + a_2 z_{23} Z_{32})$ et d'autre part: $P(z, a_1 e_1 + a_2 e_2, e) = a_1 a_2 (a_1 Z_{13} z_{31} + a_2 Z_{23} z_{32})$, comme:

$$Z_{31} = z_{21} z_{32} - z_{22} z_{31}, \quad Z_{13} = z_{12} z_{23} - z_{22} z_{13}$$

$$Z_{32} = z_{12} z_{31} - z_{11} z_{32}, \quad Z_{23} = z_{21} z_{13} - z_{11} z_{23}$$

il vient finalement:

$$P(e, a_1 e_1 + a_2 e_2, z) - P(z, a_1 e_1 + a_2 e_2, e) = a_1 a_2 (a_1 - a_2) (z_{13} z_{32} z_{21} - z_{31} z_{12} z_{23})$$

ce qui est une expression non identiquement nulle.

Théorème 5.2. *Nous avons:*

$$\mathbb{C}[3V]^{G_o} = \mathbb{C}[3V]^G[P].$$

Les éléments de $\mathbb{C}[3V]^G$ sont ceux de $\mathbb{C}[3V]^{G_o}$ qui sont invariant par la transposition $(x, y, z) \mapsto ({}^t x, {}^t y, {}^t z)$:

$$\mathbb{C}[3V]^G = (\mathbb{C}[3V]^{G_o})^{G/G_o}.$$

Comme G/G_o est fini, l'application inclusion:

$$\mathbb{C}[3V]^G \mapsto \mathbb{C}[3V]^{G_o}$$

fait de $\mathbb{C}[3V]^{G_o}$ un $\mathbb{C}[3V]^G$ -module de type fini (cf [Kra.] page 111), en particulier, les polynômes f_1, f_2, \dots, f_{11} forment un système de paramètres homogènes de l'algèbre $\mathbb{C}[3V]^{G_o}$ et la série de Poincaré de cette algèbre s'écrit donc (il est facile de constater que le degré d'un invariant est un multiple de trois):

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^l a_{3i} t^{3i}}{(1-t^3)^{10}(1-t^6)}.$$

Maintenant, on observe que $\dim 3V = 36 - 3l$ d'après un résultat de F. Knop (voir [Kno.], on peut aussi consulter [Pop.2]): nous devons vérifier la condition suivante:

$$\text{codim}\{v \in 3V / \dim G_v > 0\} \geq 2$$

où G_v est le sous-groupe d'isotropie de v . Pour un triplet $v = (x, y, z)$ générique (c'est-à-dire en dehors d'une sous-variété de codimension au moins égal à deux), nous pouvons supposer que l'un des trois éléments, mettons x , soit inversible, et que l'un des deux autres éléments, mettons y , ait trois valeurs propres distincts; sous l'action du groupe G , on peut ramener x à λe et sous l'action de K_o (qui laisse fixe e), on peut ramener y à un élément de la forme $\sum \lambda_i e_i$ (où les trois coefficients λ_i sont distincts). Finalement, regardons le sous-groupe d'isotropie de $v = (e, \sum \lambda_i e_i, z)$: un élément g de G qui laisse fixe e et $\sum \lambda_i e_i$ est nécessairement dans le groupe M ; la condition $g.z = z$ montre alors que génériquement (c'est-à-dire z en dehors d'un sous-espace de codimension au moins égal à deux), G_v est fini.

Nous avons donc $3l = 9$; enfin, les anneaux $A(p)$ étant de Gorenstein (cf [Pro.], page 562) nous avons $a_0 = a_9 = 1$ et $a_{9-3i} = a_{3i}$; finalement:

$$P(t) = \frac{1 + a_3 t^3 + a_3 t^6 + t^9}{(1-t^3)^{10}(1-t^6)}.$$

Il nous suffit alors de calculer, par utilisation du logiciel LIE, la dimension de l'espace $\mathbb{C}[3V]_3^{G_0}$ des éléments homogènes de degré 3 de $\mathbb{C}[3V]^{G_0}$ pour déterminer le coefficient a_3 ; on trouve:

$$P(t) = \frac{1 + t^9}{(1 - t^3)^{10}(1 - t^6)}.$$

Il existe donc un polynôme h homogène de degré 9 de $\mathbb{C}[3V]^{G_0}$ tel que $\mathbb{C}[3V]_9^{G_0} = \mathbb{C}[3V]_9^G \oplus \mathbb{C}h$ et

$$\mathbb{C}[3V]^{G_0} = \mathbb{C}[3V]^G + \mathbb{C}[3V]^G h$$

le théorème en résulte facilement.

6. Quelques remarques sur les algèbres $\mathbb{C}[pV]^G$ pour $p > 3$.

On sait (voir [Pro.], théorème 1 de la page 386) que les éléments de $\mathbb{C}[pV]^G$ sont obtenus, pour $p \geq \dim V$, par polarisation de ceux de $\mathbb{C}[(\dim V)V]^G$; sauf pour le cas $V = V_0$, nous ne connaissons pas de famille génératrice de cette algèbre. Considérons le cas $V = V_0$: la détermination des invariants (et plus générale-

ment des covariants) de plusieurs formes quadratiques ternaires sous l'action du groupe $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ est un problème qui a été abondamment étudié par la théorie classique des invariants; dans ce cas, comme le groupe G est inclus dans $\mathrm{SL}(V)$, le déterminant $\mathrm{Det}(x_1, x_2, \dots, x_6)$ est un invariant et on sait (voir [Pro.], théorème 2 de la page 386) que l'algèbre des invariants de $\mathbb{C}[pV]$ est engendrée par les polarisés des invariants de 5 copies de V et par les déterminants de 6 copies de V . La détermination d'une famille génératrice de $\mathbb{C}[5V]^G$ a été achevée en 1948 par J.A Todd (précisant un travail effectué en 1910 par H.W. Turnbull [Tur]): cet auteur donne dans [Tod.1] et [Tod.2] une telle famille sous forme symbolique. Dans [Bli.], nous sommes parvenus à expliciter ces éléments à partir de la forme trilinéaire f et de l'application \times , plus précisément, on vérifie, en comparant avec la famille de J.A.Todd, que l'algèbre $\mathbb{C}[5V]^G$ est engendrée par les polynômes $f(x_i, x_j, x_k)$, $f(x_i \times x_j, x_k \times x_l, x_m \times x_n)$ et $f((x_i \times x_j) \times (x_k \times x_l), (x_m \times x_n) \times (x_o \times x_p), x_q)$. En résumé, dans le cas $V = V_0$, l'algèbre $\mathbb{C}[pV]^G$ est engendrée par les invariants de la forme $f(u, v, w)$ où u, v, w sont des monômes (convenables) en x_1, x_2, \dots, x_p construits avec l'opération \times , et par le déterminant $\mathrm{Det}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_6})$

Nous allons voir que la situation est plus complexe pour les trois autres $V_i, i > 0$. Considérons d'abord l'algèbre $\mathbb{C}[pV]^K$: elle contient la sous-algèbre $\mathrm{Tr}(pV)$ engendrée par les éléments de la forme $\mathrm{tr} u$, où u est un monôme de

Jordan en x_1, \dots, x_p ; d'autre part, en utilisant le logiciel LIE (ou en s'armant de patience), on peut constater qu'il existent, pour certaines valeurs de p , des éléments multilinéaires p -alternés dans $\mathbb{C}[pV]^K$: dans les cas V_1 et V_2 , par exemple, il y a un invariant multilinéaire 5-alterné (unique à un scalaire près), et dans le cas V_3 il existe une forme multilinéaire 9-alternée K -invariante. De tels polynômes ne peuvent être dans la sous-algèbre $\text{Tr}(5V)$ (ou dans $\text{Tr}(9V)$): en effet, les éléments de $\text{Tr}(pV)$ sont de la forme:

$$P = \sum \text{tr } u_1 \text{ tr } u_2 \cdots \text{tr } u_r$$

où u_1, \dots, u_r sont des monômes de Jordan et avec $1 \leq r \leq p$; une telle expression ne peut-être p -alternée, car en leur appliquant des opérateurs "somme alternée":

$$\mathcal{A}_i : f(x_1, \dots, x_i) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_i} \epsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)})$$

on détruit des termes dans la somme, par exemple si un terme $\text{tr } u_1 \text{ tr } u_2 \cdots \text{tr } u_r$ contient $\text{tr } [x_1 \bullet (x_2 \bullet x_3)]$, il sera détruit par un opérateur \mathcal{A}_2 portant sur les variables x_2 et x_3 , puisque \bullet est commutatif.

Remarques 6.1. Ces arguments sont tirés de [Ilt.2] (ils ne se trouvent pas dans l'article [Ilt.3] publié sous le même titre). Signalons que dans [Ilt.2] l'auteur se place dans la situation $V = V_3$ et donne explicitement une forme multilinéaire 5-alternée sur V_3 , invariante sous K , malheureusement cet invariant est identiquement nul: pour $V = V_3$, il n'existe pas de forme multilinéaire 5-alternée non nulle et K -invariante (vérification par LIE). On peut néanmoins voir que la formule donnée dans [Ilt.1] définit bien une forme multilinéaire 5-alternée non nulle et K -invariante dans la situation $V = V_2$ et $V = V_1$. On peut également vérifier que la formule

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_5} \epsilon(\sigma) \text{tr } x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(5)}$$

donne, pour les cas $V = V_1, V_2$, la même (à un scalaire multiplicatif près) forme multilinéaire 5-alternée non nulle et K -invariante.

Maintenant, nous avons:

Proposition 6.2. *Soit $p > 1$ un entier, alors l'application:*

$$\mathbb{C}[pV]^G \longrightarrow \mathbb{C}[(p-1)V]^K$$

$$P(x_1, \dots, x_p) \mapsto P(e, x_2, \dots, x_p)$$

est surjective.

La démonstration utilise le:

Lemme 6.3. *L'application de G dans V donnée par: $g \mapsto g.e$ à pour image $G.e = \{x \in V / \det x = 1\}$.*

Notons X l'ensemble $\{x \in V / \det x = 1\}$, et soit x un élément de X . On sait (proposition VIII 3.5 de [Far.-Kor.]) que le groupe de structure de V opère d'une manière transitive sur l'ensemble des éléments inversibles de l'algèbre V , par conséquent il existe un élément g de ce groupe tel que

$$g.e = x.$$

Mais (voir [Spr.], proposition 1.5, page 11) $\det g.e = \alpha(g)\det e = \alpha(g)$, donc g est dans G ; ceci montre que G opère d'une manière transitive sur X , ce qui achève la démonstration.

Une conséquence de ce lemme est que l'application restriction:

$$\mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[G.e]$$

$$P \mapsto P|_{G.e}$$

est surjective, puisque $G.e$ est un ensemble Zariski fermé de V .

Montrons maintenant la proposition. D'après le principe du transfert (voir par exemple [Gro.]), l'application:

$$(\mathbb{C}[G/K] \otimes \mathbb{C}[(p-1)V])^G \longrightarrow \mathbb{C}[(p-1)V]^K$$

$$\sum f_i \otimes w_i \mapsto \sum f_i(\bar{e})w_i$$

est un isomorphisme d'algèbres. Mais d'autre part, par le lemme précédent on sait que:

$$\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}[(p-1)V] \longrightarrow \mathbb{C}[G/K] \otimes \mathbb{C}[(p-1)V]$$

$$P \otimes w \mapsto P|_{G.e} \otimes w$$

est surjectif; il en résulte classiquement (voir par exemple la démonstration du lemme 11.3 page 61 dans [Gro.]) que cette application donne lieu à une surjection:

$$(\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}[(p-1)V])^G \longrightarrow (\mathbb{C}[G/K] \otimes \mathbb{C}[(p-1)V])^G.$$

D'après cette proposition, si par exemple $V = V_1$ ou V_2 , il existe un élément P de $\mathbb{C}[6V]^G$, tel que $P(e, x_2, \dots, x_6)$ soit l'invariant multilinéaire 5-alterné trouvé par LIE et évoqué plus haut: comme l'opération \times s'exprime en fonction du produit de Jordan \bullet et que $P(e, x_2, \dots, x_6)$ n'appartient pas à $\text{Tr}(5V)$, le

polynôme P ne peut être combinaison linéaire d'invariants de la forme $f(u, v, w)$ où u, v, w sont des monômes construits avec \times .

Remarque 6.4 Nous voyons donc que la forme des éléments de l'algèbre $\mathbb{C}[pV]^G$ pour $V = V_i, i > 0$ est plus complexe que dans le cas $V = V_0$. Dans cette thématique, les résultats les plus prometteurs nous paraissent être ceux de A. Elduque et A.V. Iltyakov dans [Eld.-Ilt.] (et ceux de [Ilt.3] en ce qui concerne les algèbre $\mathbb{C}[pV]^K$). Par ailleurs, en suivant les arguments du paragraphe 4 de [Bli.], on peut obtenir les résultats suivants, qui précisent un peu ceux de [Eld.-Ilt.]: pour $i = 1, 2$, l'algèbre $\mathbb{C}[pV_i]^G$ est entière sur la sous-algèbre engendrée par les invariants $f(x_i, x_j, x_k)$ et $f(x_i \times x_j, x_k \times x_l, x_m \times x_n)$; pour le cas de l'algèbre exceptionnelle V_3 , il faut adjoindre à la sous-algèbre les éléments de la forme $f((x_i \times x_j) \times (x_k \times x_l), (x_m \times x_n) \times (x_o \times x_p), x_q)$, mais la démonstration de ces faits, sans être difficile, est longue et assez pénible, surtout pour le dernier cas.

Appendice.

On se propose ici de donner quelques précisions sur les quatres algèbres de Jordan sur \mathbb{C} , simples, euclidiennes et de rang 3: réalisations concrètes, groupes G, K et M . Nos références sont [Bra.-Koe.] et [Spr.] ainsi que [Ada.] et [Har.] pour le cas de l'algèbre exceptionnelle.

On note par \mathbb{O} l'algèbre des octaves de Cayley sur \mathbb{R} : $\mathbb{O} = \{\sum_{i=0}^{i=7} a_i f_i\}$ avec a_i dans \mathbb{R} , où f_0 est l'élément unité de l'algèbre (que l'on notera par 1), $f_i^2 = -1$ pour $i > 0$, $f_i f_j = -f_j f_i$ pour $i > 0, j > 0, i \neq j$, $f_3 = f_1 f_2, f_5 = f_1 f_4, f_6 = f_2 f_4$ et $f_7 = f_3 f_4$. On voit \mathbb{C} dans \mathbb{O} comme la sous-algèbre engendrée par les éléments 1, f_1 , et \mathbb{H} , l'algèbre des quaternions sur \mathbb{R} , comme la sous-algèbre engendrée par les éléments 1, f_1, f_2 :

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$$

\mathbb{F} désignera une de ces algèbres. L'involution de \mathbb{O} : $u = \sum_{i=0}^{i=7} a_i f_i \mapsto \bar{u} = a_0 - \sum_{i=1}^{i=7} a_i f_i$ induit les involutions habituelles sur les autres algèbres et ces involutions se prolongent par \mathbb{C} linéarité aux complexifiées $\mathbb{F}_{\mathbb{C}} = \mathbb{F} \otimes \mathbb{C}$. Finalement sur $\text{Mat}(3, \mathbb{F}_{\mathbb{C}})$, on a l'involution:

$$x = (x_{ij}) \mapsto {}^t \bar{x} = (\overline{x_{ji}}).$$

Les quatres algèbres de Jordan sur \mathbb{C} , simples, euclidiennes et de rang 3 sont alors les matrices carrées d'ordre 3, hermitiennes à coefficients dans $\mathbb{F}_{\mathbb{C}}$:

$$\mathfrak{H}_3(\mathbb{F}_{\mathbb{C}}) = \{x \in \text{Mat}(3, \mathbb{F}_{\mathbb{C}}) / {}^t \bar{x} = x\}$$

munies du produit de Jordan; on les désignera souvent par $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3$. Dans cette description, les trois matrices diagonales:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux, et si

$$x = \begin{pmatrix} a & \bar{p} & \bar{q} \\ p & b & r \\ q & \bar{r} & c \end{pmatrix}$$

est un élément de $\mathfrak{H}_3(\mathbb{F}_{\mathbb{C}})$, sa décomposition de Peirce associée s'écrit:

$$x = ae_1 + be_2 + ce_3 + \begin{pmatrix} 0 & \bar{p} & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{q} \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r \\ 0 & \bar{r} & 0 \end{pmatrix}.$$

Donnons maintenant les groupes G , K et M pour chacun des quatres cas.

- $V_0 = \text{Sym}(3, \mathbb{C})$ est l'espace des matrices symétriques sur \mathbb{C} d'ordre 3. Le déterminant est le déterminant usuel, G est le groupe des transformations linéaires de la forme $g.X = gX^t g$ avec g dans $\text{SL}(3, \mathbb{C})$, il s'identifie donc à (et le groupe K est alors $\text{SO}(3, \mathbb{C})$); M est le sous-groupe formé des matrices de la forme.

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon' & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon\epsilon' \end{pmatrix}$$

avec $\epsilon^2 = \epsilon'^2 = 1$.

- $V_1 = \text{Mat}(3, \mathbb{C})$ est l'espace des matrices complexes d'ordre 3. Ici encore le déterminant est le déterminant usuel. C'est le seul cas où les groupes G et K ne sont pas connexes: ils sont engendrés par leur composante neutre et l'élément:

$$X \rightarrow {}^t X.$$

La composante G_o est le groupe des transformations linéaires $(g_1, g_2).X = g_1 X g_2^{-1}$ avec g_1 et g_2 dans $\text{SL}(3, \mathbb{C})$, K_o étant alors la diagonale (g, g) , $g \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$. On trouve que M_o est le sous groupe de K_o des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda\mu} \end{pmatrix}$$

avec λ, μ deux complexes non nuls.

- $V_2 = \mathfrak{H}_3(\mathbb{H}_{\mathbb{C}})$. Le déterminant est le déterminant de Study (on renvoie à l'excellent article de synthèse [Asl.] et à sa bibliographie pour tout ce qui touche au déterminant de matrices quaternioniques); G peut être vu comme $\mathrm{SL}(3, \mathbb{H}_{\mathbb{C}})$ agissant par: $g.X = gX^t\bar{g}$, K comme $\{g \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{H}_{\mathbb{C}})/g^t\bar{g} = \mathrm{Id}_3\}$ et M comme le groupe des matrices diagonales:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

où λ, μ et ν sont des quaternions complexes de norme 1.

- Pour l'algèbre de Jordan exceptionnelle V_3 on sait (voir par exemple [Spr.]) que le groupe G (resp. le groupe K) est le groupe complexe simplement connexe E_6 (resp. le groupe F_4). On constate d'autre part (voir par exemple [Har.] ou [Ada.], ces auteurs traitent le cas de l'algèbre de Jordan exceptionnelle réelle $\mathfrak{H}_3(\mathbb{O})$, mais les résultats passent aisément au cas complexe) que M s'identifie au groupe $\mathrm{Spin}(8, \mathbb{C})$: si g est dans $\mathrm{Spin}(8, \mathbb{C})$, il définira un élément de M par la formule:

$$\begin{pmatrix} a & \bar{p} & \bar{q} \\ p & b & r \\ q & \bar{r} & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & \overline{\rho_+(g)(p)} & \overline{\chi(g)(q)} \\ \rho_+(g)(p) & b & \rho_-(g)(r) \\ \chi(g)(q) & \overline{\rho_-(g)(r)} & c \end{pmatrix}$$

(où ρ_+, ρ_- sont les représentations semi-spinorielles et χ la représentation vectorielle du groupe $\mathrm{Spin}(8, \mathbb{C})$), et réciproquement si m est dans M , il laisse stable les espaces V_{ij} de la décomposition de Peirce et par conséquent son action sur un élément x s'écrit:

$$m. \begin{pmatrix} a & \bar{p} & \bar{q} \\ p & b & r \\ q & \bar{r} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \overline{f_{12}(p)} & \overline{f_{13}(q)} \\ f_{12}(p)(p) & b & f_{23}(r) \\ f_{13}(q) & \overline{f_{23}(r)} & c \end{pmatrix}$$

en utilisant la trialité, il n'est pas difficile de voir que le triplet (f_{12}, f_{23}, f_{13}) est de la forme $(\rho_+(g), \rho_-(g), \chi(g))$ pour un g de $\mathrm{Spin}(8, \mathbb{C})$.

Bibliographie.

- [Ada.] J. F. Adams, *Lectures on exceptional Lie Groups*, The University of Chicago Press, 1996.
- [Asl.] H. Aslaksen, *Quaternionic Determinants*, The Mathe. Intel. 18 (1996) n3, 57-65.
- [Bae.] J. C. Baez, *The Octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 39 (2002) n2, 145-205.
- [Bli.] B. Blind, *La théorie des invariants des formes quadratiques ternaires revisitée*, ArXiv: math.RA/0805.4135.
- [Bra.-Koe.] H. Braun, M. Koecher, *Jordan-Algebren*, Springer Verlag, 1966.
- [Bri.] M. Brion, *Invariants et covariants des groupes réductifs*, in M. Brion, G.W. Schwarz, *Théorie des invariants et géométrie des variétés quotients*, Paris, Hermann, 2000.
- [Cia.] C. Ciamberlini, *Sul sistema di tre forme ternarie quadratiche*, Giornale di Battaglini 24 (1886) 141-157.
- [Eld.-Ilt.] A. Elduque, A.V. Iltyakov, *On Polynomial Invariants of Exceptional Simple Algebraic Groups*. Canad. J. Math. 51 (1999), 506-522.
- [Far.-Kor.] J. Faraut, A. Koranyi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford 1994.
- [Gor.] P. Gordan, *Über Büschel von Kegelschnitten*, Math. Ann 19 (1882) 529-552.
- [Gro.] F.D. Grosshans, *Algebraic Homogeneous Spaces and Invariant Theory*, Springer-Verlag LNM 1673, 1997.
- [Har.] F.R. Harvey, *Spinors and Calibrations*, Academic Press, 1990.
- [Ilt.1] A.V. Iltyakov *On rational Invariants of the Group E_6* , Proc. Ame. Math. Soc. 124 (1996) 3637-3640.
- [Ilt.2] A.V. Iltyakov, *Laplace Operator and Polynomial Invariants*. Research Report 97-23, Sydney.
- [Ilt.3] A.V. Iltyakov *Laplace Operator and Polynomial Invariants*. Journal of Algebra 207 (1998), 256-271.
- [Kno.] F. Knop, *Über die Glattheit von Quotientenabbildungen*, Manuscripta Math. 56 (1986) 419-427.
- [Kra.] H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Vieweg 1985.
- [Pop.1] V.L. Popov, *An Analogue of M. Artin's Conjecture on Invariants for Nonassociative Algebras*, Amer. Math. Soc. Transl. 169 (1995), 121-142.
- [Pop.2] V.L. Popov, *Groups, Generators, syzygies, and Orbits in Invariant Theory*, AMS Translations of Mathematical Monographs vol. 100, 1992.
- [Pro.] C. Procesi, *Lie Groups. An Approach through Invariants and Representations*, Springer-Verlag 2007.
- [Sch.1] G.W. Schwarz, *Invariant theory of G_2 and $Spin_7$* . Comment.Math. helvetici 63 (1988), 624-663.

- [Sch.2] G.W. Schwarz, *Representations of Simple Lie Groups with Regular Rings of Invariants*, *Inventiones mathematicae* 49 (1978) 167-191.
- [Sch.3] G.W. Schwarz, *When polarizations generate*, *Transform. Groups*, 12 (2007) n4 761-767.
- [Shm.] D.A. Shmel'kin, *On Representations of SL_n with Algebras of Invariants being Complete Intersections*, *Journal of Lie Theory*, 11 (2001) n1 207-229.
- [Spr.] T.A. Springer, *Jordan Algebras and Algebraic Groups*, Springer-Verlag, *Ergebn. der Math. und ihrer Grenz.*, vol 75, 1973.
- [Tod.1] J.A. Todd, *The complete irreducible system of four ternary quadratic*, *Proc. Lond. Math. Soc. (2)* 52 (1951) 271 - 294.
- [Tod.2] J.A. Todd, *Ternary quadratic types*, *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*, 241 (1948) 399 - 456.
- [Tur.] H.W. Turnbull, *Ternary quadratic types*, *Proc. London Math. Soc* 2 (1910) 81-121.
- [Vin.] E.B. Vinberg, *On Invariants of a set of matrices*, *Jour. of Lie Theory*, 6, (1996) 249-269.
- [Vus.] T. Vust, *Sur la théorie des invariants des groupes classiques*, *Ann. Inst. Fourier* 26 (1976) 1-31.