Méthodes asymptotiques pour le calcul de champs

Clair Poignard, Patrick Dular, Laurent Krähenbühl, Laurent Nicolas, Michelle Schatzman

▶ **To cite this version:**

Clair Poignard, Patrick Dular, Laurent Krähenbühl, Laurent Nicolas, Michelle Schatzman. Méthodes asymptotiques pour le calcul de champs. Numélec 2006, Nov 2006, Lille, France. pcn-104. hal-00398408

HAL Id: hal-00398408
https://hal.science/hal-00398408

Submitted on 1 Sep 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

METHODES ASYMPTOTIQUES POUR LE CALCUL DE CHAMPS

C. Poignard[12], P. Dular[3], L. Krähenbühl[2], L. Nicolas[2], M. Schatzman[1].

[1]Institut Camille Jordan, ICJ, Université de Lyon 1, 69622 Villeurbanne Cedex, France
e-mail : poignard@math.univ-lyon1.fr
[2]Centre de Génie Electrique de LYon, CEGELY, Ecole Centrale de Lyon, 69134 Ecully Cedex, France
[3]Université de LièGe, ULG, 4000 Liège, Belgique

Résumé : Nous présentons une méthode asymptotique mathématiquement justifiée permettant le calcul du champ électrique dans un milieu avec fine membrane. Cette méthode nous évite de mailler la membrane. Le champ dans le milieu interne est connu avec une erreur déterminée a priori en fonction des paramètres du problème. Dans la membrane, nous avons une expression explicite du champ avec une erreur connue elle aussi.

Mots clés : méthodes asymptotiques, conditions aux limites

1. Introduction

L'objet de ce papier est de présenter une méthode asymptotique rigoureuse pour le calcul de champs (électrique ou magnétique) dans des milieux à couches minces. La motivation de ce travail vient de problèmes rencontrés lors du calcul du champ électrique dans une cellule biologique (voir [2]), cependant nos résultats sont applicables à n'importe quel milieu hétérogène avec fine membrane. Le principe générique des asymptotiques dans les milieux à couches minces est de remplacer la fine couche soit par une condition aux limites, soit par une condition de transmission. Notre approche permet de construire une solution approchée du problème initial sans maillage de la fine membrane tout en donnant une estimation a priori de l'erreur commise.

2. Heuristiques du développement asymptotique

Dans cette section, nous présentons, sur un exemple simple, le principe du développement asymptotique. Considérons un domaine Ω (cf Fig. 1) composé d'un milieu intérieur $\mathcal{O}_c$ de paramètre électromagnétique z_c entouré d'une fine membrane $\mathcal{O}_h$ de paramètre z_m. Nous supposons la membrane d'épaisseur constante, cependant des résultats théoriques ont été obtenus dans le cas d'une épaisseur variable. Nous notons z la fonction égale à z_c dans $\mathcal{O}_c$ et à z_m dans $\mathcal{O}_m$. Nous supposons que z_m est constant. Soit ϕ une fonction assez régulière définie sur le bord $\partial\Omega$ de Ω qui sert de condition de Neumann. Nous considérons le problème suivant, appelé formulation diélectrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(z \operatorname{grad} V) = 0, \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial V}{\partial n} = \phi. \end{array} \right. \tag{1}$$

La formulation diélectrique est utilisée pour calculer le champ E à basse fréquence: la partie rotationnelle de E est négligée et on suppose $E = -\operatorname{grad}(V)$ où V vérifie $\operatorname{div}(\tilde{\varepsilon} \operatorname{grad} V)$=0. Comme nous voulons travailler avec des quantités sans dimension et un domaine Ω de taille 1

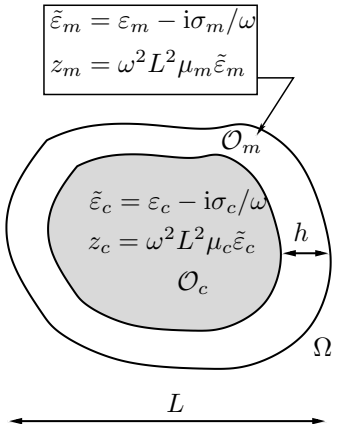

Figure 1 : Cellule bidimensionnelle. μ, ε et σ sont les perméabilité, permittivité et conductivité du milieu, ω est la pulsation et L la longueur de la cellule. L'introduction de z permet de travailler avec des quantités adimensionnées (cf [2]) et Ω est alors de taille 1.

(voir [2]), nous introduisons le paramètre z et alors V est solution de (1). Nous notons V^c et V^m les restrictions de V respectivement à $\mathcal{O}_c$ et $\mathcal{O}_m$. Comme z_m est constant dans la couche mince, il est clair que $\Delta V^m = 0$. L'idée est alors d'effectuer un changement de variables, de façon à faire apparaître explicitement le paramètre h dans l'expression du Laplacien : c'est le passage en coordonnées locales. Notons $(x, y) \in \mathcal{O}_m$ les coordonnées euclidiennes et $(\eta, \theta) \in [0,1] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ les coordonnées locales. La courbure du domaine Ω est notée κ. Notons v^m le potentiel V^m écrit dans les coordonnées locales, φ la donnée aux bords ϕ écrite dans les coordonnées locales (c'est-à-dire que φ dépend de la coordonnée tangentielle) et f représente la fonction φ écrite en coordonnées euclidiennes sur $\partial\mathcal{O}_c$. Pour $(\eta, \theta) \in [0,1] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, v^m vérifie :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h(1+h\eta\kappa)} \partial_\eta \left(\frac{1+h\eta\kappa}{h} \partial_\eta v^m \right) \\ &+ \frac{1}{1+h\eta\kappa} \partial_\theta \left(\frac{1}{1+h\eta\kappa} \partial_\theta v^m \right) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta} v^m|_{\eta=1} = h\varphi, \ \frac{\partial}{\partial\eta} v^m|_{\eta=0} = h \frac{\partial}{\partial n} V^c|_{\partial\mathcal{O}_c}. \tag{3}$$

L'idée du développement asymptotique est de supposer que :

$$v^m = v_0^m + h v_1^m + \cdots, \quad V^c = V_0^c + h V_1^c + \cdots .$$

Ensuite, il reste à injecter ce développement de v^m dans l'expression du Laplacien en coordonnées locales (2) et

d'identifier les termes en puissance de h. Le lecteur se référera à [3] pour une preuve rigoureuse des résultats suivants.

3. Résultats théoriques et numériques

Dans cette partie, nous donnons les résultats théoriques et numériques obtenus dans le cas de la formulation diélectrique.

3.1 Condition aux limites sur le bord du milieu intérieur

- Ordre 0.
  V_0^c est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{div}\,(z_c\,\text{grad}\,V_0^c) = 0, \ \text{ dans } \mathcal{O}_c, \\ \partial_n V_0^c = (z_m/z_c) f \ \text{ sur } \partial\mathcal{O}_c. \end{cases} \tag{4}$$

- Ordre 1.
  V_1^c est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{div}\,(z_c\,\text{grad}\,V_1^c) = 0, \ \text{ dans } \mathcal{O}_c, \\ \partial_n V_1^c = (z_m/z_c)\partial_t^2 V_0^c \ \text{ sur } \partial\mathcal{O}_c. \end{cases} \tag{5}$$

Notons $V_{app}^c = V_0^c + hV_1^c$. Nous avons :

$$\|V^c - V_{app}^c\|_{H^1(\mathcal{O}_c)} \leq Ch^2 \|\phi\|_{H^4(\partial\mathcal{O}_m)}. \tag{6}$$

Nous insistons sur le fait que la constante C dépend uniquement des paramètres géométriques et électromagnétiques des matériaux. Remarquons que l'inégalité (6) donne une estimation de l'erreur sur le potentiel V, mais aussi sur le champ qui en dérive.

De plus, nous avons explicitement v_0^m et v_1^m dans la membrane en fonction des coordonnées locales :

$$v_0^m = V_0^c|_{\partial\mathcal{O}_c}, \quad v_1^m = \eta\varphi + V_1^c|_{\partial\mathcal{O}_c}.$$

L'erreur commise dans la membrane est du même ordre que celle commise dans le milieu intérieur.

3.2 Simulations numériques

Nous avons fait des simulations numériques avec le logiciel GetDP [1] sur une cellule allongée. En Fig. 2, nous présentons le champ statique d'une cellule avec membrane légèrement isolante. Les asymptotiques (4) et (5) nous permettent de connaître le champ dans le milieu intérieur sans avoir à tenir compte de la membrane, en résolvant deux problèmes successifs uniquement dans le matériau central.

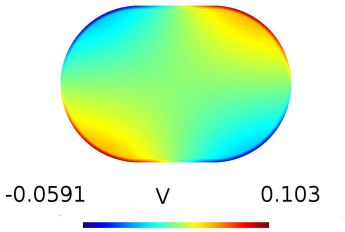

Figure 2 : Ligne d'isovaleurs de V dans une cellule allongée avec membrane isolante.

La Fig. 3 nous donne l'erreur commise en fonction de l'épaisseur h pour un milieu faiblement conducteur entouré d'une membrane plus conductrice. Par exemple, pour une

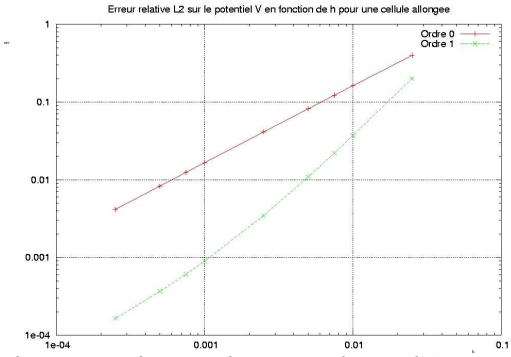

Figure 3 : Erreur sur le potentiel statique en fonction l'épaisseur. Résultats numériques obtenus sur la cellule de Fig. 2 par rapport à la solution avec maillage de la membrane.

épaisseur relative de 5.10^{-3}, l'erreur relative est de 10% à l'ordre 0 et de 1% à l'ordre 1.

4. Conclusion

Nous avons présenté dans un cas simple (la formulation diélectrique) comment construire une solution approchée du potentiel scalaire dans un milieu avec fine membrane sans mailler cette membrane, en résolvant successivement deux problèmes similaires avec condition aux limites particulière. Cette approche se généralise à l'équation scalaire de Helmholtz et nous espérons pourvoir l'appliquer à l'équation vectorielle des ondes. Dans le cas d'une cellule plongée dans un milieu ambiant, nous obtenons des conditions de transmissions particulières sur le bord du milieu intérieur. Nous insistons sur le fait que dans la couche mince, la solution approchée est connue explicitement en fonction des coordonnées locales.

De plus, nous montrerons dans le papier complet que nous pouvons itérer l'identification en puissance de h aussi loin que nécessaire : ceci nous permet de construire des solutions approchées en h^{n+1} en résolvant n problèmes similaires avec des conditions aux limites (ou des conditions de transmission) appropriées.

Bibliographie

[1] P. Dular, C. Geuzaine, F. Henrotte and W. Legros, "A general environment for the treatment of discrete problems and its application to the finite element method", IEEE T-MAG, vol. 34, $no.$ 5, pages 3395–3398, 1998.

[2] C. Poignard, M. Schatzman, L. Nicolas, L. Krähenbühl, F. Musy and R. Perrussel, "Asymptotic estimates of the electric field in a circular biological cell at low frequencies", The 15th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, Compumag'2005, Shenyang, China

[3] C. Poignard, "Rigorous Asymptotics For Steady State Voltage Potentials in a Bidimensional Highly Contrasted Medium", Submitted to M2AN, http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00083670.