HAL
open science

# Espaces de représentations complètement réductibles

Anne Parreau

## To cite this version:

Anne Parreau. Espaces de représentations complètement réductibles. Journal of the London Mathematical Society, 2011, 83, pp 545-562. hal-00396963v2

**HAL Id: hal-00396963**

**https://hal.science/hal-00396963v2**

Submitted on 10 Jun 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ESPACES DE REPRÉSENTATIONS COMPLÈTEMENT RÉDUCTIBLES

ANNE PARREAU

Abstract. We study some geometric properties of actions on nonpositively curved spaces related to complete reducibility and semisimplicity, focusing on representations of a finitely generated group $\Gamma$ in the group $G$ of rational points of a reductive group over a local field, acting on the associated space (symmetric space or affine building). We prove that the space of completely reducible classes is the maximal Hausdorff quotient space for the conjugacy action of $G$ on $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$.

## Introduction

Soit $\Gamma$ un groupe infini, engendré par une partie finie $S$. Soit $X$ un espace métrique CAT(0) propre, muni d'une action par isométries, propre et cocompacte, d'un groupe localement compact $G$. Nous nous intéressons ici aux propriétés topologiques de l'action par conjugaison (au but) de $G$ sur l'espace $\mathrm{R} = \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ des représentations de $\Gamma$ dans $G$, en lien avec les propriétés géométriques des représentations $\rho$ de R en tant qu'actions de $\Gamma$ sur $X$. Notons que R s'identifie naturellement à un fermé de l'espace $G^S$ des $S$-uplets de $G$ muni de l'action de $G$ par conjugaison simultanée, via l'application $\rho \mapsto (\rho(s))_{s\in S}$.

L'espace topologique quotient $\mathrm{R}/_G$ est en général loin d'être séparé, ne serait-ce que parce que certaines classes ne sont pas fermées dans R, comme par exemple, lorsque $G$ est le groupe linéaire sur un corps local $\mathbb{K}$, celle d'une matrice triangulaire supérieure non diagonale (qui adhère à sa partie diagonale). On peut même avoir que toutes les classes de conjugaison soient fermées sans pour autant que le quotient soit séparé, comme par exemple dans le cas où ($\Gamma = \mathbb{Z}$ et) $X$ est le plan euclidien et $G = \mathrm{Isom}\,(X)$ (en effet une suite de rotations d'angles tendant vers zéro adhère modulo conjugaison à toutes les translations).

Le cas qui nous intéresse au premier chef est celui où $G = \mathbf{G}(\mathbb{K})$, avec $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur un corps local $\mathbb{K}$, agissant sur $X$ son espace associé (espace symétrique dans le cas archimédien, ou immeuble de Bruhat-Tits dans le cas non archimédien).

Dans ce cadre algébrique, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la théorie des actions des groupes algébriques réductifs réels permet de construire un bon quotient $\mathrm{R}//G$ à partir des orbites fermées ([Luna], [RiSl]). Richardson a démontré que dans ce cas les orbites fermées sont celles des représentations *semisimples* ([Ric]). La notion de représentation semisimple peut se caractériser géométriquement par la notion suivante introduite par J. P. Serre ([Serre]), qui a un sens pour une action $\rho$ sur un espace métrique CAT(0) quelconque : $\rho$ est *complètement réductible* (cr) si, lorsque $\rho$ fixe un point $\alpha$ dans le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de $X$, alors il existe un point $\beta$ dans $\partial_\infty X$, opposé (i.e. joint par une géodésique dans $X$) à $\alpha$ , également fixé par $\rho$.

Dans cet article, dans un premier temps nous étudions diverses propriétés géométriques des actions sur un espace métrique CAT(0) reliées à la complète réductibilité.

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 22E46 ; 53C35, 20E42, 51F99, 20E45, 14L30 .

*Key words and phrases.* nonpositive curvature, symmetric spaces, affine buildings, reductive groups over local fields, complete reducibility, moduli spaces.

Avec le soutien de l'ANR Repsurf : ANR-06-BLAN-0311.

Une action $\rho \in \mathrm{R}$ est dite *non-parabolique* si elle n'a pas de point fixe non trivial à l'infini de $X$. Nous montrons (en section 2) que, dans un cadre CAT(0) très général, l'action de $G/Z(G)$ sur le sous-espace des représentations $\mathrm{R}_{np}$ non-paraboliques est propre (où $Z(G)$ est le centre de $G$).

À une représentation $\rho$ nous associons une fonction convexe $d_\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, définie par $d_\rho(x) = \sqrt{\sum_{s\in S} d(x, \rho(s)x)^2}$. Nous démontrons (section 3, prop. 18) que, dans le cas des espaces symétriques, il y a équivalence entre les propriétés naturelles suivantes pour une représentation $\rho \in \mathrm{R}$.

(i) $\rho$ est complètement réductible.

(ii) $\rho$ est non-parabolique dans un sous-espace convexe fermé stable de $X$.

(iii) La fonction $d_\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ atteint sa borne inférieure.

La propriété (ii) a déjà été considérée (voir par exemple [Lab]), en lien avec des questions d'existence d'applications harmoniques. On peut aussi noter que la condition (iii) est équivalente à l'existence d'une application harmonique équivariante du graphe de Cayley de $\Gamma$ vers $X$.

L'implication (ii)$\Rightarrow$ (iii) est valable dans un espace CAT(0) propre quelconque $X$. L'implication (i)$\Rightarrow$ (ii) est valable plus généralement pour $G$ réductif sur un corps local agissant $X$ son espace symétrique ou immeuble associé mais dans le cas non archimédien on n'a plus (ii)$\Rightarrow$(i) (donc plus (iii)$\Rightarrow$(i)) (voir 3.1.5).

Dans un second temps, dans le cas algébrique général ($G$ groupe réductif sur un corps local $\mathbb{K}$ quelconque), nous donnons (section 4) une démonstration du résultat suivant.

**Théorème.** (1) *Toute orbite de $G$ dans* R *contient dans son adhérence une unique orbite complètement réductible.*

(2) *L'espace topologique quotient $\mathcal{X}_{cr} = \mathrm{R}_{cr}/G$ de l'espace $\mathrm{R}_{cr}$ des représentations cr est le plus gros quotient séparé de* R *sous $G$.*

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ce résultat découle de [Luna], [Ric], et [RiSl]. Pour $\mathbb{K}$ de caractéristique 0, on peut déduire les résultats ci-dessus de [Bre], en utilisant que les orbites complètement réductibles sont les orbites fermées (ce qui découle de [Ric] et [Bre]).

La démonstration que nous donnons ici est nouvelle, indépendante et plus directe. Elle traite de manière unifiée tous les corps locaux sans distinction de caractéristique, dont le cas nouveau de la caractéristique non nulle. Les méthodes utilisées proviennent uniquement de la géométrie en courbure négative ou nulle et des propriétés de base des groupes algébriques réductifs sur les corps locaux.

On utilise ce résultat dans [Par3], où l'on construit une compactification naturelle de $\mathcal{X}_{cr}$.

**Remerciements.** Je remercie Frédéric Paulin pour son soutien et ses commentaires, ainsi que Michel Brion et Philippe Eyssidieux pour des discussions instructives sur la théorie géométrique des invariants et sur l'application moment.

## 1. Notations et rappels

Dans tout cet article, on se fixe un groupe $\Gamma$ infini, de type fini, discret, une partie génératrice finie $S$ de $\Gamma$, et $G$ un groupe topologique métrisable, localement compact, dénombrable à l'infini (union dénombrable de compacts), donc à base dénombrable (d'ouverts). Pour $g, h \in G$ on note $i_g(h) = ghg^{-1}$ la conjugaison par $g$. On note $Z(G)$ le centre de $G$. On rappelle qu'une action continue de $G$ sur un espace topologique $E$ localement compact est *propre* si l'application $G \times E \longrightarrow E \times E$, $(g, x) \mapsto (x, gx)$ est propre, ou, de manière équivalente, si pour tous compacts $K, L$ de $E$, l'ensemble $\{g \in G,\ gK \cap L \neq \emptyset\}$ est compact.

On note $\mathrm{R}(\Gamma, G)$ ou R l'espace $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ des représentations $\rho$ de $\Gamma$ dans $G$, muni de la topologie de la convergence simple. On s'intéresse à l'action de $G$ par conjugaison (au but) sur R (notée $g \cdot \rho = i_g \circ \rho$). On note $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ ou $\mathcal{X}$ l'espace topologique quotient. L'espace R s'identifie à un fermé de $G^S$, par l'application $\rho \mapsto (\rho(s))_{s \in S}$, qui est un homéomorphisme $G$-équivariant sur son image. En particulier, R est métrisable, à base dénombrable, localement compact, dénombrable à l'infini, car $G$ l'est. Si $A$ est une partie $G$-stable de R, l'ensemble quotient $A/G$ sera muni de la topologie quotient, dont on rappelle qu'elle coïncide avec la topologie induite par l'inclusion dans $\mathcal{X} = \mathrm{R}/G$ [Bou3, Ch. III, § 2, prop. 10].

1.1. **Espaces métriques** CAT(0)**.** Dans tout cet article, l'espace $X$ est un espace métrique CAT(0) (on renvoie par exemple à [BrHa] pour la définition et les propriétés de ces espaces) propre (c'est-à-dire dont les boules fermées sont compactes ; en particulier $X$ est complet et localement compact), muni d'une action de $G$ par isométries, continue et propre. Une action de $\Gamma$ sur $X$ désigne dorénavant une action par isométries dans $G$, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{R} = \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$. On rappelle que la propriété fondamentale des espaces métriques CAT(0) est que la distance $d$ est convexe (en restriction aux géodésiques).

1.1.1. *Bord à l'infini, sous-groupes paraboliques, faisceaux.* On note $\partial_\infty X$ le bord à l'infini de $X$, dont on rappelle qu'il est formé des classes de rayons géodésiques asymptotes (i.e. à distance bornée). Le stabilisateur dans $G$ d'un point $\alpha$ de $\partial_\infty X$ sera noté $P_\alpha$ et appelé sous-groupe *parabolique* de $G$. Deux points $\alpha$ et $\beta$ de $\partial_\infty X$ sont dits *opposés* s'il existe une géodésique dans $X$ les joignant. On note $G_{\alpha\beta} = P_\alpha \cap P_\beta$ le sous-groupe des éléments fixant simultanément $\alpha$ et $\beta$, et $X_{\alpha\beta}$ la réunion des géodésiques de $\beta$ à $\alpha$, qui est un sous-espace convexe fermé de $X$ (qu'on appelera *faisceau*). On notera $\mathrm{Fix}_\infty(\rho)$ l'ensemble des points fixes d'une action $\rho \in \mathrm{R}$ dans le bord à l'infini de $X$.

1.1.2. *Facteur translaté.* Sauf indication contraire, le produit $X = X_1 \times X_2$ de deux espaces métriques $X_1$ et $X_2$ sera toujours muni de la distance produit $d_X = \sqrt{d_{X_1}^2 + d_{X_2}^2}$. On dira que $X_1$ est un facteur de $X$ si $X$ est isométrique à un produit $X_1 \times X_2$. Le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de $X$ est alors le joint sphérique [BrHa, 5.13] de $\partial_\infty X_1$ et de $\partial_\infty X_2$ (pour la distance de Tits). Le *facteur translaté (maximal)* du $G$-espace $X$ est le facteur (dans une décomposition en produit préservée par $G$) euclidien maximal $X_0$ sur lequel le groupe $G$ agit par translations. On note alors $X = X_0 \times X'$. On a que $G$ (donc toute action) fixe point par point le bord $\partial_\infty X_0$ du facteur translaté, et préserve $\partial_\infty X'$.

Par exemple, si $\alpha$ et $\beta$ sont deux points opposés de $\partial_\infty X$, l'action de $G_{\alpha\beta}$ sur $X_{\alpha\beta}$ possède un facteur translaté non trivial naturel. Un autre exemple d'action possédant un facteur translaté non trivial est fourni par l'action du groupe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur son espace symétrique associé $X = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ (le facteur translaté maximal est ici la droite correspondant aux orbites du centre $Z(G) = \mathbb{R}^*\mathrm{Id}$).

1.2. **Pour les groupes réductifs sur les corps locaux.** À partir de la section 3.2, on se placera dans le cadre plus restreint des groupes $G$ réductifs sur les corps locaux, agissant sur $X$ leur espace symétrique ou immeuble affine associé, c'est-à-dire dans le cadre suivant.

1.2.1. *Le corps local* $\mathbb{K}$. Voir par exemple [Mar, 0.31], [Bou1]. Soit $\mathbb{K}$ un corps local, c'est-à-dire un corps (commutatif) localement compact non discret. On rappelle qu'un tel corps peut être muni d'une valeur absolue $|\cdot|$, essentiellement unique, et que, si $\mathbb{K}$ est archimédien, on a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et sinon (cas non-archimédien) $|\cdot|$ est ultramétrique (et la valuation $\omega = -\log|\cdot|$ associée est discrète), $\mathbb{K}$ est

totalement discontinu, et $\mathbb{K}$ est ou bien (en caractéristique nulle) une extension finie du corps des nombres $p$-adiques $\mathbb{Q}_p$, où $p$ est un nombre premier quelconque, ou bien (en caractéristique positive $p$) le corps $\mathbb{F}_q((T))$ des séries formelles de Laurent à coefficients dans un corps fini $\mathbb{F}_q$.

1.2.2. *Le groupe $G$ et l'espace métrique* CAT(0) *associé $X$.* On considère un groupe algébrique linéaire $\mathbf{G}$ connexe, réductif, défini sur $\mathbb{K}$ (par exemple $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$). Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on suppose que $G$ est un sous-groupe fermé de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ contenant sa composante neutre $\mathbf{G}(\mathbb{R})^0$. Si $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$, on suppose que $G = \mathbf{G}(\mathbb{K})$. On renvoie à [Borel2] pour la définition et un résumé des propriétés des groupes algébriques réductifs sur un corps quelconque.

Le groupe $G$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{K}$. C'est un groupe topologique métrisable, localement compact, dénombrable à l'infini.

Dans le cas où le corps $\mathbb{K}$ est archimédien, on note $X$ l'espace symétrique riemannien sans facteur compact associé à $G$. On renvoie à [Hel] et à [Ebe] pour les propriétés utilisés ci-dessous des groupes de Lie réels réductifs et de leurs espaces symétriques associés ([Borel1, 24.6] permet de se ramener au cas des groupes $G$ connexes). Rappelons que $X = G/K$, où $K$ est un sous-groupe compact maximal de $G$, et que cette variété est munie de la métrique riemannienne induite par une métrique sur $G$ invariante à gauche par $G$ et à droite par $K$.

Dans le cas non archimédien, on note $X$ l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{K}$ [Tits, Sec. 2], qui est un immeuble affine localement compact. Pour la définition et les propriétés des immeubles affines (aussi appelés euclidiens), d'un point de vue métrique, on renvoie par exemple à [Par2], où on pourra aussi trouver une construction simple de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_n$, ou à [Rou] (voir aussi [Bro, Chap VI et Chap. V, Sec. 8]). Pour l'immeuble de Bruhat-Tits associé à un groupe réductif $\mathbf{G}$ plus général et pour ses propriétés utilisées et non démontrées ci-dessous, on renvoie pour une bonne introduction à [Rou], et à [Tits], et pour référence complète à [BrTi].

Les espaces symétriques et les immeubles euclidiens ont de nombreuses propriétés en commun. Dans ce qui suit on a choisi de traiter autant que possible les deux cas simultanément (les quelques références données ponctuellement concernent le cas non archimédien, moins connu). Le vocabulaire et les notations sont choisis par analogie avec le cas archimédien (cas des espaces symétriques), et peut donc différer de ce qu'on trouve usuellement dans la littérature sur les immeubles.

Dans tous les cas, donc, $X$ est un espace métrique CAT(0) propre, et $G$ agit continûment, proprement (pas nécessairement fidèlement), isométriquement, cocompactement sur $X$. Les hypothèses de la section 1.1 précédente sont donc satisfaites (et on en reprendra les notations).

Notons que, dans le cas où $\mathbf{G}$ n'est pas semisimple (par exemple pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$), l'espace $X$ possède ici un facteur euclidien translaté par $G$ non trivial $X_0$, correspondant au centre de $\mathbf{G}$.

1.2.3. *Tore $A$ et plat standard $\mathbb{A}$.* Un *plat* d'un espace métrique CAT(0) désigne un sous-espace convexe fermé de $X$, isométrique à un espace euclidien $\mathbb{R}^m$. Les plats maximaux (i.e. de dimension maximale) d'un immeuble affine sont ses appartements.

On fixe une fois pour toute un plat maximal $\mathbb{A}$ de $X$. Il lui correspond un tore déployé sur $\mathbb{K}$ maximal $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}$, de telle manière que le tore $A = \mathbf{A}(\mathbb{K}) \cap G$ de $G$ stabilise le plat $\mathbb{A}$, et agit dessus par translations (cocompactement). Par exemple, dans le cas où $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, on prend le plat $\mathbb{A}$ associé au tore $\mathbf{A} = \mathrm{Diag}$ des matrices diagonales.

On choisit un point $x_0$ de $\mathbb{A}$ (dans le cas non archimédien, un point spécial). On identifiera $\mathbb{A}$ et son espace vectoriel sous-jacent en prenant $x_0$ comme origine. On notera $\nu : A \longrightarrow \mathbb{A}$ le morphisme qui à $a$ associe le vecteur de la translation correspondante. On peut relier relier ce vecteur de translation aux caractères sur le tore $A$, de la manière suivante. On note $X^*(\mathbf{A}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{A}, \mathrm{GL}_1)$ le groupe des caractères du tore $\mathbf{A}$. On rappelle (cf [Tits, 0.2]) que tout caractère $\chi \in X^*(\mathbf{A})$ induit une forme linéaire sur $\mathbb{A}$, qu'on notera également $\chi$, telle que $\chi(\nu(a)) = \log|\chi(a)|$ pour tout $a$ de $A$. Par exemple, pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, si pour $i = 1, \ldots, n$ on note $\varepsilon_i : \mathbf{A} \mapsto \mathrm{GL}_1$ le caractère $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_i$, on peut identifier $\mathbb{A}$ à $\mathbb{R}^n$ (euclidien) de telle sorte que les $\varepsilon_i$, vus comme formes linéaires sur $\mathbb{A}$, soient les coordonnées canoniques. L'action de $a = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) \in A$ sur $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$ est alors la translation de vecteur $\nu(a) = (\log|a_i|)_{1 \leq i \leq n}$.

1.2.4. *Racines et chambre de Weyl.* Soit $\Phi \subset X^*(\mathbf{A}) \subset \mathbb{A}^*$ le système de racines de $\mathbf{G}$ relatives au tore $\mathbf{A}$ [Borel2, 6.3]. Les *murs* de $\mathbb{A}$ sont les noyaux des racines $\varphi$ de $\Phi$. Le *groupe de Weyl* $W$ est le groupe (fini) d'isométries de $\mathbb{A}$ engendré par les réflexions par rapport aux murs. Il fixe point par point l'intersection $\mathbb{A}_0$ des murs de $\mathbb{A}$ (qui est le facteur euclidien $G$-translaté maximal $X_0$ de $X$). On choisit une *chambre de Weyl* $\mathfrak{C}$ de $\mathbb{A}$ (dite *standard*) (i.e. une composante connexe du complémentaire de la réunion des murs) et on note $\Phi^+$ l'ensemble des racines *positives* (i.e. positives sur $\mathfrak{C}$) et $\Lambda$ l'ensemble de racines *simples* (i.e. les racines positives qui ne se décompose pas en somme non triviale de racines positives) correspondants.

Par exemple, dans le cas où $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ (avec les choix ci-dessus), l'ensemble des racines est $\Phi = \{\varphi_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j,\ i \neq j\}$. On prend comme chambre de Weyl standard $\overline{\mathfrak{C}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq \cdots \geq x_n\}$. Alors l'ensemble des racines simples est $\Lambda = \{\varphi_{i,i+1},\ 1 \leq i < n-1\}$.

1.2.5. *Sous-tores $A_I$, plats $\mathbb{A}_I$ et facettes $\mathfrak{C}_I$ standards.* Les facettes de la chambre standard $\mathfrak{C}$ sont paramétrées par les parties $I$ de $\Lambda$, de la manière suivante. Pour une partie $I$ de $\Lambda$, on note $\mathbb{A}_I$ le sous-espace vectoriel $\cap_{\varphi \in I} \ker \varphi$ de $\mathbb{A}$ et $\mathfrak{C}_I$ la facette ouverte de $\mathfrak{C}$ associée (telle que $v \in \mathbb{A}$ est dans $\mathfrak{C}_I$ si et seulement si $\forall \varphi \in I,\ \varphi(v) = 0$ et $\forall \varphi \in \Lambda - I,\ \varphi(v) > 0$). On note $\mathbf{A}_I$ le sous-tore de $\mathbf{A}$ formé par la composante neutre de $\cap_{\varphi \in I} \ker \varphi$. Le groupe $A_I = \mathbf{A}_I(\mathbb{K}) \cap G$ agit sur le plat standard $\mathbb{A}$ par des translations de vecteurs formant un sous-groupe cocompact de $\mathbb{A}_I$ (cela découle par exemple de [Mar][2.4.2]). On notera $v = v^I + v_I$ la décomposition d'un vecteur $v$ de $\mathbb{A}$ suivant la somme directe orthogonale $\mathbb{A} = \mathbb{A}^I \oplus \mathbb{A}_I$.

1.2.6. *Suites $I$-fondamentales.* Une suite $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathfrak{C}}$ sera dite *$I$-fondamentale* si $v_i \in \mathfrak{C}_I$ pour tout $i$ et, pour toute racine $\varphi \notin I$, on a $\varphi(v_i) \to +\infty$ . Une suite $(a_i)_i$ dans $A$ est dite *$I$-fondamentale* si la suite des vecteurs de translation $v_i = \nu(a_i)$ des $a_i$ l'est (i.e. pour tout $\varphi \in I$, $|\varphi(a_i)| = 1$ et, pour tout $\varphi \notin I$, $|\varphi(a_i)| \geq 1$ pour tout $i$ et $|\varphi(a_i)| \to +\infty$).

1.2.7. *Immeuble sphérique et facettes à l'infini de $X$.* Le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de $X$ est une réalisation géométrique de l'immeuble sphérique combinatoire de Tits $\Delta$ de $\mathbf{G}$ (voir [Rou, 11.7], [Bro, VI, 9E], [Par2]). Les facettes $f$ de cet immeuble (qui sont les bords des facettes des chambres de Weyl de $X$) sont en bijection avec les $\mathbb{K}$-sous-groupes paraboliques $\mathbf{P}_f$ de $\mathbf{G}$, et on a $\mathrm{Stab}_G(f) = \mathbf{P}_f(\mathbb{K}) \cap G$ (noté $P_f$) [Serre, 3.1]. Le stabilisateur $P_\alpha$ dans $G$ d'un point $\alpha$ de $\partial_\infty X$ fixe point par point (l'adhérence de) la facette ouverte $f(\alpha)$ de cet immeuble contenant $\alpha$, en particulier $P_\alpha = P_{f(\alpha)}$. On appelera *régularité* de $\alpha$ la dimension de la facette $f(\alpha)$. On dit qu'une facette $f$ *domine* une facette $f'$ si l'adhérence de $f$ contient $f'$. L'*étoile* $\Delta_f$ (ou *link*, ou *immeuble résiduel*) de $f$, est la réunion des facettes dominant $f$. Deux points $\alpha$ et $\beta$ de $\partial_\infty X$ sont opposés (cf n° 1.1.1) si et seulement si les facettes

correspondantes de l'immeuble sphérique à l'infini sont opposées, si et seulement si les $\mathbb{K}$-sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ correspondants sont opposés, c'est-à-dire que leur intersection $\mathbf{G}_{\alpha\beta} = \mathbf{P}_\alpha \cap \mathbf{P}_\beta$ est un groupe réductif, qui est alors un sous-groupe de Levi de chacun d'eux [Serre, 3.1.5]. On a $G_{\alpha\beta} = \mathbf{G}_{\alpha\beta}(\mathbb{K}) \cap G$. Le groupe $P_\alpha$ agit transitivement sur l'ensemble des points opposés à $\alpha$.

1.2.8. *Projection sur un facteur de Levi et groupe $U_\alpha$.* On note $\mathbf{U}_\alpha$ le radical unipotent du $\mathbb{K}$-sous-groupe parabolique $\mathbf{P}_\alpha$, et $U_\alpha = \mathbf{U}_\alpha(\mathbb{K})$ qu'on appelera le radical unipotent de $P_\alpha$. Si $\beta \in \partial_\infty X$ est un point opposé à $\alpha$, on a une projection naturelle $p_{\alpha\beta}$ de $P_\alpha$ sur $G_{\alpha\beta}$. C'est un morphisme de noyau $U_\alpha$, égal à l'identité sur $G_{\alpha\beta}$, qui correspond la décomposition en produit semi-direct $P_\alpha = G_{\alpha\beta}U_\alpha$. Si $\beta'$ est un autre point opposé à $\alpha$ dans $\partial_\infty X$, alors il existe $g$ dans $P_\alpha$ (qu'on peut supposer dans $U_\alpha$) tel que $\beta' = g\beta$, et les projections associées sont alors conjuguées (on a $p_{\alpha\beta'} = i_g \circ p_{\alpha\beta}$).

1.2.9. *Sous-groupes paraboliques standards.* Soit $I \subset \Lambda$ un sous-ensemble de racines simples. On note $c_I$ ou $\partial_\infty \mathfrak{C}_I$ (resp. $c_I^-$) la facette (ouverte) à l'infini de $\mathfrak{C}_I$ (resp. de $-\mathfrak{C}_I$). On note $P_I^+$ ou $P_I$ le sous-groupe parabolique (*standard*) $P_{c_I}$, et $U_I^+$ ou $U_I$ son radical unipotent. De même, on note $P_I^- = P_{c_I^-}$ et $U_I^-$ son radical unipotent, et $G_I = P_I^+ \cap P_I^-$. Le tore $A_I$ est central dans $G_I$.

1.2.10. *Structure des faisceaux.* Si $\alpha$ et $\beta$ sont deux points opposés de $\partial_\infty X$, il existe $g \in G$ et un unique $I \subset \Lambda$ tel que $g\alpha \in c_I$ et $g\beta \in c_I^-$. Alors $gP_\alpha g^{-1} = P_I$ et $gP_\beta g^{-1} = P_I^-$ (et $gG_{\alpha\beta}g^{-1} = G_I$, etc.). On note $\mathbb{A}_{\alpha\beta} = g^{-1}\mathbb{A}_I$. On a alors une décomposition naturelle en produit $X_{\alpha\beta} = \mathbb{A}_{\alpha\beta} \times X^{\alpha\beta}$ (qui ne dépend pas du choix de $g$). Le groupe $G_{\alpha\beta}$ préserve cette décomposition et agit par translations sur $\mathbb{A}_{\alpha\beta}$. Le bord à l'infini $S_{\alpha\beta}$ de $\mathbb{A}_{\alpha\beta}$ est la sphère de Levi (cf [Serre]) de $\partial_\infty X$ associée au sous-groupe de Levi $\mathbf{G}_{\alpha\beta}$ de $\mathbf{P}_\alpha$, et $f = f(\alpha) = g^{-1}c_I$ est un simplexe maximal de $S_{\alpha\beta}$. L'étoile $\Delta_f$ de $f$ (union des facettes fermées contenant $f$) est incluse dans $\partial_\infty X_{\alpha\beta}$. Le bord à l'infini de $X^{\alpha\beta}$ s'identifie à (une réalisation géométrique de) $\Delta_f$.

1.2.11. *Décomposition $U_I^- G_I U_I^+$.* Le résultat classique suivant signifie géométriquement que, pour deux points du bord opposés $\alpha$ et $\beta$, l'application $n \mapsto n\beta$ est un homéomorphisme de $U_\alpha$ sur l'ensemble des points du bord opposés à $\alpha$, qui forment un ouvert dans leur orbite.

**Proposition 1.** *Soit $I \subset \Lambda$. L'application*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} U_I^- \times G_I \times U_I^+ & \to & G \\ (u, r, n) & \mapsto & urn \end{array}$$

*est un homéomorphisme sur son image $\mathcal{O}_I$, qui est un ouvert* [BoTi, 4.2]. □

1.2.12. *Contraction par conjugaison.* Le fait classique suivant est fondamental pour l'étude de la topologie des orbites de $G$ dans $\mathrm{R} = \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$.

**Proposition 2.** *Soit $I$ un sous-ensemble de racines simples.*

(1) *La projection $p_I : P_I \longrightarrow G_I$ est limite de conjugaisons : plus précisément, soit $a$ dans $A_I$ tel que le vecteur de translation $\nu(a)$ de $\mathbb{A}$ associé soit dans $-\mathfrak{C}_I$ (i.e. tel que $\forall \varphi \in \Lambda - I,\ |\varphi(a)| < 1$), alors, pour tout $g$ dans $P_I$, la suite $a^i g a^{-i}$ tend vers $p_I(g)$ quand l'entier $i$ tend vers l'infini.*
(2) *Soit $\rho$ dans $\mathrm{R}$ tel que $\rho(\Gamma)$ est inclus dans $P_I$. La représentation $\rho_I = p_I \circ \rho$ est dans l'adhérence de l'orbite $A_I \cdot \rho$.*

*Démonstration.* Un tel $a$ existe car $\nu(A_I)$ est cocompact dans $\mathbb{A}_I$ et $\mathfrak{C}_I$ est un cône convexe ouvert de $\mathbb{A}_I$. Alors $a$ centralise $G_I$ et contracte $U_I$ (voir par exemple la proposition 3 ci-dessous, en notant que $a^{-i}$ est alors une suite $I$-fondamentale,

pour une preuve détaillée dans un cadre plus général ). Le second point découle immédiatement du premier. □

La propriété de contraction plus forte suivante permet de comprendre l'action (par conjugaison) des suites $I$-fondamentales sur les ouverts $U_I^- G_I U_I^+$ de $G$ (voir proposition 22). On note $g \cdot h = ghg^{-1}$ l'action par conjugaison de $G$ sur lui-même.

**Proposition 3.** *Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite $I$-fondamentale dans $A$. Pour toute suite $(n_i)_i$ de $U_I$ (resp. $(u_i)_i$ de $U_I^-$) bornée, on a $a_i^{-1} \cdot n_i \to 1$ (resp. $a_i \cdot u_i \to 1$) quand $i \longrightarrow +\infty$.*

*Démonstration.* Notons $\mathbf{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$ et $\mathfrak{g} = \mathbf{g}(\mathbb{K})$. Notons $\mathbf{u}_I$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{U}_I$ et $\mathfrak{u}_I = \mathbf{u}_I(\mathbb{K})$. Il existe $f : U_I \longrightarrow \mathfrak{u}_I$ un homéomorphisme $A$-équivariant (i.e. $f(a \cdot u) = \mathrm{Ad}(a)(f(u))$) [Mar, 1.3.3] (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ c'est l'inverse de l'application exponentielle). On note $\mathfrak{g}_\varphi$ l'ensemble des $Z \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathrm{Ad}(a)Z = \varphi(a)Z$ pour tout $a$ de $A$. Alors $\mathfrak{u}_I = \oplus_{\varphi\in\Phi_I^+}\mathfrak{g}_\varphi$, où $\Phi_I^+$ est l'ensemble des racines positives qui ne sont pas combinaison linéaire d'éléments de $I$. Notons $Z_i = f(n_i)$ et $Z_i = \sum_{\varphi\in\Phi_I^+} Z_i^\varphi$ la décomposition de $Z_i$ suivant la décomposition $\mathfrak{u}_I = \oplus_{\varphi\in\Phi_I^+}\mathfrak{g}_\varphi$. Alors $f(a_i^{-1} \cdot n_i) = \mathrm{Ad}(a_i^{-1})Z_i = \sum_{\varphi\in\Phi_I^+} \varphi(a_i)^{-1} Z_i^\varphi$. Or, pour tout $\varphi \in \Phi_I^+$, la suite $(Z_i^\varphi)_i$ est bornée, et $\left|\varphi(a_i)^{-1}\right| \longrightarrow 0$ (car $\varphi$ est combinaison linéaire positive d'éléments de $\Lambda - I$). On a donc que $f(a_i^{-1} \cdot n_i) \to 0$ dans $\mathfrak{u}_I$, et donc que $a_i^{-1} \cdot n_i \to 1$ dans $U_I$. □

## 2. Actions non-paraboliques en géométrie CAT(0)

Dans cette section, on se place dans le cadre général où $G$ est un groupe métrisable localement compact, dénombrable à l'infini, agissant sur un espace $X$ métrique CAT(0) propre (voir section 1.1 pour les notations et propriétés utilisées).

### 2.1. **Déplacement d'une action.**

**Définition 4.** Soit $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une action de $\Gamma$ sur $X$. On appelle *fonction de déplacement* de $\rho$ (relativement à la partie génératrice $S$) et on note $d_\rho$ la fonction convexe continue de $X$ dans $[0, +\infty[$

$$d_\rho : x \mapsto \sqrt{\sum_{s\in S} d(x, \rho(s)x)^2}.$$

On appelle *minimum de déplacement* de $\rho$ (relativement à la partie génératrice $S$) et on note $\lambda(\rho)$ la borne inférieure de $d_\rho$ sur $X$, et *ensemble de déplacement minimal* de $\rho$ (relativement à la partie génératrice $S$) le convexe fermé $\mathrm{Min}(\rho)$, éventuellement vide, formé des points de $X$ où $d_\rho$ atteint son minimum.

*Remarques.* On peut voir $d_\rho$, $\lambda(\rho)$ et $\mathrm{Min}(\rho)$ comme une généralisation des notions analogues classiques pour une isométrie individuelle $g \in \mathrm{Isom}\,(X)$ [BrHa, II,6.1] (et ces notions coïncident si $S$ est réduite à un seul élément $s$ et $g = \rho(s)$). Attention (si $S$ n'est pas réduite à un élément), $\mathrm{Min}(\rho)$ n'est a priori pas stable par $\rho(\Gamma)$. Le centralisateur $Z(\rho)$ de $\rho$ dans $G$ préserve $\mathrm{Min}(\rho)$. On notera que la fonction $\lambda$ : $\mathrm{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est semicontinue (supérieurement) : si $\rho_i \to \rho$, alors $\limsup \lambda(\rho_i) \leq \lambda(\rho)$.

La définition donnée ici diffère légèrement de celle de [Par1] (où $d_\rho$ est défini par $d_\rho(x) = \max_{s\in S} d(x, \rho(s)x)$). Cela ne change pas les propriétés qu'on y utilisait, car les deux versions sont des fonctions convexes continues équivalentes. Celle-ci est meilleure, notamment car elle passe bien aux produits (voir ci-dessous), et permet de prouver, dans les espaces symétriques, que "$\mathrm{Min}(\rho)$ non vide" entraîne la complète réductibilité (proposition 18).

Dans le cas où l'espace $X$ est euclidien et le groupe $G$ agit par translations, la fonction de déplacement $d_\rho$ est constante (égale à $\lambda(\rho)$) et $\mathrm{Min}(\rho)$ est l'espace $X$ tout entier. Dans le cas où $\rho$ préserve un convexe fermé $Y$, comme la projection sur $Y$ diminue $d_\rho$, on a $\lambda(\rho_{|Y}) = \lambda(\rho)$ et $\mathrm{Min}(\rho_{|Y}) = \mathrm{Min}(\rho) \cap Y$. Dans le cas où $\rho$ préserve une décomposition de $X$ en produit $X = X_1 \times X_2$, on note $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, et on a $d_\rho^2 = d_{\rho_1}^2 + d_{\rho_2}^2$, d'où $\lambda(\rho)^2 = \lambda(\rho_1)^2 + \lambda(\rho_2)^2$ et $\mathrm{Min}(\rho) = \mathrm{Min}(\rho_1) \times \mathrm{Min}(\rho_2)$.

2.2. **Actions non-paraboliques.** Les actions (de $\Gamma$ sur $X$) ne possédant pas de point fixe global dans le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de $X$ ont des propriétés remarquables, que nous allons voir maintenant. Nous introduisons maintenant la notion de représentation *non-parabolique*, qui est juste une variante plus pratique de cette notion destinée à couvrir le cas où le $G$-espace $X$ possède un facteur translaté non trivial (maximal) $X_0$ (cf 1.1.2). On note alors $X = X_0 \times X'$.

**Définition 5.** On dit qu'une action $\rho$ de $\Gamma$ sur $X$ est *non-parabolique* si $\rho$ n'a pas de point fixe global dans $\partial_\infty X - \partial_\infty X_0$ (ou, de manière équivalente, dans $\partial_\infty X'$).

Remarquons qu'une représentation est non-parabolique si et seulement si les éléments de la partie génératrice $S$ n'ont pas de point fixe commun dans $\partial_\infty X'$.

2.2.1. *Liens avec l'irréductibilité et la stabilité pour les groupes réductifs.* Dans le cas où $G$ est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ agissant sur son espace symétrique $X$ associé, une représentation est non-parabolique si et seulement si l'action linéaire sur $\mathbb{R}^n$ associée est irréductible. Dans le cas où $G$ est un groupe réductif sur un corps local $\mathbb{K}$, agissant sur son espace associé $X$ (espace symétrique ou immeuble de Bruhat-Tits) (cf. hypothèses et notations de la section 1.2), une représentation $\rho$ est non-parabolique si et seulement si elle est $\mathbf{G}$-*irréductible* au sens de [Serre, 3.2.1], c'est-à-dire que son image $\rho(\Gamma)$ n'est incluse dans aucun $\mathbb{K}$-sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{G}$ (en particulier les représentations (d'images) Zariski-denses sont non-paraboliques). Cette notion est donc légèrement plus générale que la notion de représentation (ou $S$-uplet) *stable* de la théorie géométrique des invariants (i.e. $\mathbf{G} \cdot \rho$ fermé de Zariski et $Z_{\mathbf{G}}(\rho)/Z(\mathbf{G})$ fini), qui équivaut à la condition que $\rho(\Gamma)$ n'est inclus dans aucun sous-groupe parabolique (pas nécessairement défini sur $\mathbb{K}$) de $\mathbf{G}$ [Ric, 4.1 et 16.7] (voir aussi par exemple [JoMi]).

2.2.2. *Caractérisation via l'ensemble minimal.* Si $\alpha$ est un point fixe à l'infini de $\rho$, alors la fonction de déplacement $d_\rho$ est décroissante sur tout rayon géodésique allant vers $\alpha$ (par convexité). Cela donne la caractérisation fondamentale suivante.

**Proposition 6.** *Soit $\rho$ une action de $\Gamma$ sur $X$. Alors sont équivalents :*

(1) *L'action $\rho$ n'a pas de point fixe à l'infini.*
(2) *La fonction de déplacement $d_\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est propre.*
(3) *L'ensemble minimal $\mathrm{Min}(\rho)$ est compact non vide.*

*En particulier, si $G$ agit proprement sur $X$, le centralisateur $Z(\rho)$ de $\rho$ dans $G$ est alors compact.* □

*Remarque* 7. On a que $\rho$ est non-parabolique si et seulement si l'action $\rho'$ sur $X'$ induite est sans points fixes à l'infini, si et seulement si $\mathrm{Min}(\rho')$ est compact non vide. Alors en particulier $\mathrm{Min}(\rho) = X_0 \times \mathrm{Min}(\rho')$ est non vide, et, si $G$ agit proprement sur $X$ et $Z(G)$ agit cocompactement sur $X_0$, on a que $Z(\rho)/Z(G)$ est compact.

2.3. **Action de $G$ sur l'espace des actions non-paraboliques.** On note maintenant $\mathrm{R}_0(\Gamma, G)$ ou $\mathrm{R}_0$ le sous-espace de R formé par les représentations de $\Gamma$ dans $G$ sans point fixe à l'infini, c'est-à-dire n'ayant pas de point fixe global dans $\partial_\infty X$.

On note $\mathrm{R}_{np}(\Gamma, G)$ ou $\mathrm{R}_{np}$ le sous-espace de R formé par les représentations non-paraboliques de $\Gamma$ dans $G$. La propriété de base suivante permet de relier la "non propreté" de l'action de $G$ au voisinage de $\rho \in \mathrm{R}$ avec les points fixes à l'infini de $\rho$.

**Lemme 8.** *On considère une suite $(\rho_i)_i$ convergeant vers $\rho$ dans* R*, et une suite $(g_i)_i$ dans $G$ telle que la suite des conjugués $\rho'_i = g_i \cdot \rho_i$ reste dans un compact de* R*. Si pour un (tout) point $x$ de $X$, la suite des points $g_i^{-1}x$ tend vers un point $\alpha$ dans le bord à l'infini de $X$, alors $\rho$ fixe $\alpha$.*

*Démonstration.* Pour $\gamma$ dans $\Gamma$ fixé, le déplacement par $\rho_i(\gamma)$ du point $x_i = g_i^{-1}x$ vaut $d(x_i,\ \rho_i(\gamma)x_i) = d(x,\ \rho'_i(\gamma)x)$, donc est borné. Par conséquent $\rho_i(\gamma)x_i$ tend vers $\alpha$. Comme $\rho_i(\gamma)x_i$ tend aussi vers $\rho(\gamma)\alpha$, on a que $\rho(\gamma)\alpha = \alpha$. □

Le résultat suivant s'en déduit directement.

**Proposition 9.** (1) *L'espace* $\mathrm{R}_0$ *est un ouvert de* R.
(2) *Si $G$ agit proprement sur $X$, alors $G$ agit proprement sur* $\mathrm{R}_0$.

*Démonstration.* La première assertion est claire par compacité du bord à l'infini de $X$ et continuité de l'action de $G$ (une limite de points fixes est un point fixe pour l'action limite). Montrons que $G$ agit proprement sur $\mathrm{R}_0$. Commme $G$ et R sont métrisables, il suffit de voir que, si on a une suite $(\rho_i)_i$ qui tend vers $\rho$ dans $\mathrm{R}_0$ et une suite $(g_i)_i$ dans $G$ telle que $g_i \cdot \rho_i$ tend vers $\rho'$ dans $\mathrm{R}_0$, alors la suite $(g_i)_i$ possède une valeur d'adhérence dans $G$. Or, dans le cas contraire, pour $x_0 \in X$, la suite $g_i^{-1}x_0$ n'est pas bornée dans $X$ (car $G$ agit proprement sur $X$), donc, quitte à extraire, $g_i^{-1}x_0$ tend vers $\alpha$ dans le bord de $X$, qui est fixé par $\rho$ par le lemme 8. C'est impossible car $\rho$ n'a pas de point fixe à l'infini. □

Le résultat analogue suivant permet de couvrir le cas où le $G$-espace $X$ possède un facteur translaté non trivial (l'espace $\mathrm{R}_0$ est alors vide), en particulier il s'applique au cas des groupes réductifs non semisimples (cf. section 1.2).

**Corollaire 10.** *On suppose que le centre $Z$ de $G$ agit trivialement sur le facteur $X'$. On note $G' = G/Z$, qui agit sur $X'$. On suppose que l'action de $G'$ sur $X'$ est propre.*

(1) *L'espace* $\mathrm{R}_{np}$ *est un ouvert de* R.
(2) *Le groupe $G'$ agit proprement sur* $\mathrm{R}_{np}$.

*En particulier* $\mathrm{R}_{np}/G$ *est séparé et localement compact.*

*Remarques.* 1. Si l'action de $G$ sur $X$ est cocompacte, minimale (sans sous-espace convexe strict stable) (ce qui est automatique si les géodésiques de $X$ sont extensibles [BrHa, II,6.20]), alors $Z$ agit trivialement sur $X'$ (car $Z$ agit par translations de Clifford sur $X$ [BrHa, II,6.16], de directions fixées par $G$, i.e. dans $X_0$). Si de plus l'action de $G$ sur $X$ est propre, et $Z$ agit cocompactement sur $X_0$, alors $G/Z$ agit proprement sur $X'$. Les hypothèses sont donc vérifiées dans le cas des groupes réductifs agissant sur leur espace associé (cf. section 1.2).

2. Ce résultat généralise donc le résultat suivant de [Ric, proposition 11.11] : lorsque $G$ est un groupe de Lie réductif réel, l'action de $G/Z$ sur le sous-espace $(G^n)^s$ des $n$-uplets stables est propre.

3. En particulier, sous les hypothèses ci-dessus, on a donc que si $\rho$ est non-parabolique, alors $G \cdot \rho$ est fermé dans R et $Z(\rho)/Z(G)$ est compact. Dans les groupes réductifs on peut montrer que cette propriété caractérise en fait les représentations non-paraboliques (en utilisant le théorème 23 et le corollaire 17) (à comparer avec la notion de représentation stable, où compact est remplacé par fini, cf 2.2.1).

*Démonstration.* L'action de $Z$ sur $\mathrm{R}(\Gamma, G)$ est triviale, donc l'action de $G$ passe au quotient en une action continue de $G'$ sur $\mathrm{R}(\Gamma, G)$. On note $\mu$ la projection canonique de $G$ sur $G'$, et $\mu^*$ l'application continue de $\mathrm{R}(\Gamma, G)$ dans $\mathrm{R}(\Gamma, G')$ induite, qui est $G'$-équivariante. Par la proposition 9, on a que $\mathrm{R}_0(\Gamma, G')$ est un ouvert, donc $\mathrm{R}_{np}(\Gamma, G) = (\mu^*)^{-1}(\mathrm{R}_0(\Gamma, G'))$ est aussi un ouvert. De plus $G'$ agit proprement sur $\mathrm{R}_0(\Gamma, G')$, donc aussi sur $\mathrm{R}_{np}(\Gamma, G)$ [Bou3, III.29, prop. 5]. □

## 3. Représentations complètement réductibles

Dans cette section, on introduit la notion de représentation complètement réductible et on étudie des propriétés géométriques (i.e. de l'action sur l'espace métrique CAT(0)), naturellement reliées, dont on montre qu'elles sont en fait équivalentes dans le cas des espaces symétriques (prop. 18).

### 3.1. Dans le cadre général des espaces métriques CAT(0).

**Définition 11.** On dira qu'une représentation $\rho$ (de $\Gamma$ dans $G$) est *complètement réductible* (en abrégé, cr) (dans $X$) si elle satisfait la condition suivante : Si un point $\alpha$ dans le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de $X$ est fixé par $\rho$, alors il existe un point $\beta$ dans $\partial_\infty X$, opposé à $\alpha$, également fixé par $\rho$.

En particulier, une représentation non-parabolique est complètement réductible. Cette notion a été introduite et étudiée par J. P. Serre ([Serre]) dans le cadre des groupes agissant sur des immeubles sphériques (par exemple les sous-groupes des groupes algébriques réductifs sur un corps quelconque).

3.1.1. *Liens avec la semisimplicité dans les groupes réductifs.* Dans le cas où $G$ est un groupe réductif sur un corps local agissant sur son espace CAT(0) associé (notations et hypothèses de la section 1.2), une représentation $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ est complètement réductible si et seulement si $\rho(\Gamma)$ est $\mathbf{G}$-cr au sens de [Serre, 3.2.1]. Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_n\mathbb{K}$, une représentation est complètement réductible si et seulement si l'action linéaire sur $\mathbb{K}^n$ associée est semi-simple.

Si la caractéristique du corps $\mathbb{K}$ est nulle, alors $\rho$ est complètement réductible si et seulement si la composante neutre $\mathbf{H} = (\overline{\rho(\Gamma)}^Z)^0$ de l'adhérence de Zariski de $\rho(\Gamma)$ est un groupe réductif ([Serre, Proposition 4.2]). Cela correspond donc à $\rho$ semisimple (comme $S$-uplet de $\mathbf{G}$) au sens de [Ric]. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Richardson a introduit une notion naturelle (dépendant seulement de la structure de groupe de Lie réel de $G$) de semisimplicité pour les $S$-uplets dans $G^S$ (l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$ est un module semisimple sous le groupe engendré), qui est équivalente à la précédente ([Ric, section 11]), donc à la complète réductibilité. En caractéristique quelconque, dans un corps algébriquement clos, Bate, Martin et Röhrle ont démontré [BMR] que la notion de complète réductibilité est équivalente à la notion de "forte réductivité" de Richardson [Ric].

3.1.2. *Sous-espace stable et ensemble minimal.* Une propriété d'une action $\rho$ naturellement reliée à la "réductibilité" est la suivante (correspondant à la définition "Im$\rho$ réductif" de [Lab] dans le cadre où $X$ une variété riemannienne simplement connexe à courbure négative ou nulle) : *$\rho$ stabilise un sous-espace convexe fermé $Y$ de $X$ et est non-parabolique dans $Y$.* On a alors la propriété suivante.

**Proposition 12** (Ensemble minimal non vide)**.** *On suppose que la représentation $\rho$ est non-parabolique dans un sous-espace (convexe fermé, stable) $Y$ de $X$. Alors la fonction de déplacement $d_\rho$ atteint sa borne inférieure, autrement dit* $\mathrm{Min}(\rho)$ *est non vide.*

*Démonstration.* En effet, on a $\mathrm{Min}(\rho_{|Y}) = \mathrm{Min}(\rho) \cap Y$ par projection orthogonale sur le convexe fermé $Y$. Cet ensemble est non vide car $\rho$ est non-parabolique dans $Y$ (voir la remarque 7). □

3.1.3. *Ensemble minimal non vide et topologie des orbites.* Voici quelques "bonnes" propriétés élémentaires des actions $\rho$ telles que $\mathrm{Min}(\rho)$ est non vide, relativement à la topologie des orbites sous conjugaison.

**Proposition 13.** *Supposons que $X$ est quasi-homogène sous $G$, i. e. que l'action de $G$ sur $X$ est cocompacte.*

(1) *Pour toute représentation $\rho$ de* R*, il existe une représentation $\rho'$ dans l'adhérence de $G \cdot \rho$ telle que* $\mathrm{Min}(\rho')$ *est non vide, et $\lambda(\rho') = \lambda(\rho)$. En particulier, si l'orbite $G \cdot \rho$ de $\rho$ est fermée, alors* $\mathrm{Min}(\rho)$ *est non vide.*
(2) *Soit $(\rho_i)_i$ telle que $\lambda(\rho_i)$ est borné. Alors il existe une sous-suite de conjugués $\rho'_{i_k} \in G \cdot \rho_{i_k}$ convergeant vers $\rho$ telle que* $\mathrm{Min}(\rho)$ *n'est pas vide, et $\lambda(\rho) = \liminf \lambda(\rho_i)$.*

*Démonstration.* Le premier point est un cas particulier du deuxième point, prouvons ce dernier. Soit $\lambda = \liminf \lambda(\rho_i)$. Quitte à extraire on peut supposer que $\lambda(\rho_i) \to \lambda$. Pour tout entier $i$, soit $x_i$ un point de $X$ tel que $\lambda(\rho_i) \leq d_{\rho_i}(x_i) \leq \lambda(\rho_i) + \frac{1}{i}$. Quitte à remplacer chaque $\rho_i$ par un conjugué, on peut supposer que la suite $(x_i)$ est bornée (car l'action de $G$ sur $X$ est cocompacte). Quitte à extraire, on a alors que $x_i$ tend vers $x$ et $\rho_i$ tend vers $\rho$. Pour tout $y \in X$, on a que $d_{\rho_i}(y) \geq \lambda(\rho_i)$ pour tout $i$, donc que $d_\rho(y) \geq \lim \lambda(\rho_i) = \lambda$. Or $d_\rho(x) = \lambda$. On en conclut que $\lambda(\rho) = \liminf \lambda(\rho_i)$ et que $x$ est dans $\mathrm{Min}(\rho)$. □

3.1.4. *Symétrie en un point intérieur.* Dans le cas des espaces symétriques, on verra que la propriété "$\mathrm{Min}(\rho)$ non vide" suffit en fait à caractériser les représentations complètement réductibles (proposition 18) (ce qui n'est pas le cas dans les arbres par exemple, voir le contre-exemple ci-dessous). Nous allons maintenant en voir l'idée principale.

Dans le cas où $X$ est à géodésiques uniquement extensibles (i.e. tout rayon géodésique se prolonge de manière unique en une géodésique complète) (par exemple une variété de Hadamard), on peut définir l'*opposé en $x \in X$* de $\alpha \in \partial_\infty X$. On dit qu'une partie $Y$ de $\partial_\infty X$ est *symétrique par rapport à $x$*, si, pour tout point $\alpha$ de $Y$, l'opposé $\beta$ de $\alpha$ en $x$ est aussi dans $Y$. On dira que $X$ est *sans demi-bande plate*, si les rayons parallèles se prolongent en géodésiques parallèles (c'est le cas des espaces symétriques ou plus largement des variétés de Hadamard analytiques) (notons qu'un analogue de cette condition est utilisé dans [Lab]). On a alors la propriété suivante.

**Proposition 14** ($\mathrm{Min}(\rho)$ non vide implique cr)**.** *On suppose que $X$ est à géodésiques uniquement extensibles et sans demi-bande plate. On suppose que* $\mathrm{Min}(\rho)$ *est non vide. Alors, pour tout point $x$ dans* $\mathrm{Min}(\rho)$*, l'ensemble* $\mathrm{Fix}_\infty(\rho)$ *des points fixes de $\rho$ dans $\partial_\infty X$ est symétrique par rapport à $x$. En particulier, $\rho$ est cr.*

*Démonstration.* Supposons $\mathrm{Min}(\rho)$ non vide. Soit $x$ un point de $\mathrm{Min}(\rho)$. Montrons que $\mathrm{Fix}_\infty(\rho)$ est symétrique par rapport à $x$. Soit $\alpha$ un point fixe à l'infini de $\rho$ et $r$ la géodésique issue de $x$ vers $\alpha$. Pour tout $s$ de $S$, la fonction $t \mapsto d(r(t),\ \rho(s)r(t))$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus la somme $d_\rho(r(t)) = \sqrt{\sum_{s\in S} d(r(t),\ \rho(s)r(t))^2}$ atteint son minimum en 0. Par conséquent, pour tout $s$ de $S$, la fonction $t \mapsto d(r(t),\ \rho(s)r(t))$ est constante sur $\mathbb{R}^+$, donc sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\rho$ fixe le symétrique $r(-\infty)$ en $x$ de $\alpha = r(+\infty)$. □

*Remarque.* On a au passage démontré que, pour $X$ quelconque, si $x$ est dans $\mathrm{Min}(\rho)$ alors le cône en $x$ sur $\mathrm{Fix}_\infty(\rho)$ est inclus dans $\mathrm{Min}(\rho)$. Il en découle que, si $\mathrm{Min}(\rho)$ est non vide alors $\partial_\infty \mathrm{Min}(\rho) = \mathrm{Fix}_\infty(\rho)$.

3.1.5. *Un contre-exemple.* Dans le cas général, "non-parabolique dans un sous-espace convexe fermé stable" n'entraîne pas que $\rho$ soit cr (ou que l'orbite $G \cdot \rho$ soit fermée), comme le montre le contre-exemple simple suivant.

On considère le groupe $G = \mathrm{SL}_2\mathbb{K} \times \mathrm{SL}_2\mathbb{K}$, pour un corps local $\mathbb{K}$ non archimédien, agissant sur son immeuble de Bruhat-Tits $X$ associé (produit de deux arbres $X_1$ et $X_2$). Soit $t \in \mathbb{K}$ tel que $|t| > 1$ et $g = (g_1, g_2)$ dans $G$, avec $g_1 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ et $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $g_1$ translate une géodésique $\sigma$ de $X_1$ et $g_2$ fixe un rayon géodésique $r$ de $X_2$ donc $g$ translate une géodésique $Y = \sigma \times r(0)$ de $X$. En particulier $g$ est non-parabolique dans le sous-espace convexe fermé $Y$. Néanmoins, $g$ n'est pas complètement réductible dans $X$, car le point à l'infini $r(+\infty)$ n'a pas de point opposé fixé par $g$. Et $G \cdot g$ n'est pas fermée dans $G$, car son adhérence contient $(g_1, Id)$.

3.2. **Dans les groupes réductifs.** On suppose désormais que $G$ est un groupe réductif sur un corps local $\mathbb{K}$, agissant sur son espace CAT(0) associé $X$ (espace symétrique ou immeuble affine) (hypothèses et notations de la section 1.2). Les résultats de cette section découlent pour la plupart, par une simple traduction dans $X$, de [Serre], sauf le point 2 de la proposition 16.

**Proposition 15.** *(*[Serre, Prop 2.7]*) Si une représentation $\rho$ fixe deux points opposés $\alpha, \beta$ à l'infini de $X$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*

*(i) L'action de $\rho$ sur $X$ est complètement réductible.*

*(ii) L'action de $\rho$ sur le sous-espace stable $X_{\alpha\beta}$ est complètement réductible.* □

On s'intéresse maintenant au dévissage des représentations $\rho$ paraboliques via leurs projections sur des sous-groupes de Levi (voir 1.2.8) (qu'on appelera *réductions* de $\rho$), qui permet de "semisimplifier" $\rho$, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 16.** *Soit $\rho$ dans* R*. Soit $\alpha$ un point fixe de $\rho$ dans $\partial_\infty X$ et $\beta$ un point de $\partial_\infty X$ opposé à $\alpha$. Soit $\rho_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} \circ \rho$.*

1. *Si $\rho$ est complètement réductible, alors elle est conjuguée à $\rho_{\alpha\beta}$ (par un élément de $U_\alpha$).*
2. *On a $d_{\rho_{\alpha\beta}} \leq d_\rho$ sur $X_{\alpha\beta}$ et $\lambda(\rho_{\alpha\beta}) = \lambda(\rho)$.*
3. *(voir aussi* [Serre, prop. 3.3]*) Si $\rho_{\alpha\beta}$ fixe un point $\alpha'$ dans $\partial_\infty X^{\alpha\beta}$, alors $\rho$ fixe une facette $f''$ de $\partial_\infty X$ dominant strictement la facette $f(\alpha)$.*
4. *(voir aussi* [Serre, prop. 3.3]*) Si $\alpha$ est un point de régularité maximale dans $\mathrm{Fix}_\infty(\rho)$, alors $\rho_{\alpha\beta}$ est non-parabolique dans le faisceau $X_{\alpha\beta}$.*

*Démonstration.* Le point 1 découle du fait que, en prenant $\beta'$ opposé à $\alpha$ fixé par $\rho$, les projections correspondantes $p_{\alpha\beta}$ et $p_{\alpha\beta'}$ (qui fixe $\rho$) sont conjuguées (cf. section (1.2.8)).

Pour le point 2, quitte à conjuguer on peut se ramener au cas standard où $\alpha \in c_I$ et $\beta \in c_I^-$ pour un certain $I \subset \Lambda$ (cf section 1.2.10). La projection $p_{\alpha\beta} = p_I$ est la limite de conjugaisons par $a^i$ avec $a \in A_I$ tel que $\nu(a) \in -\mathfrak{C}_I$ (cf prop. 2). Soit $x \in X_{\alpha\beta}$, et $s \in S$. Soit $\sigma$ la géodésique translatée par $a^{-1}$ passant par $x$. Comme $g = \rho(s)$ fixe la facette ouverte contenant $\alpha$, qui est $c_I$, on a que $g$ fixe aussi $\sigma(+\infty)$ (car $\nu(a^{-1}) \in \mathfrak{C}_I$), donc que la distance entre les géodésiques $\sigma$ et $g\sigma$ est décroissante. Donc $d(x, a^i g a^{-i} x) = d(a^{-i}x, g a^{-i} x) \leq d(x, gx)$, et $d(x, p_{\alpha\beta}(g)x) \leq d(x, gx)$ par passage à la limite en $i \to +\infty$. Donc $d_{\rho_{\alpha\beta}}(x) \leq d_\rho(x)$.

Pour la seconde partie, comme $\rho_{\alpha\beta}$ est limite de conjugués de $\rho$, on a que $\lambda(\rho) \leq \lambda(\rho_{\alpha\beta})$ par semicontinuité de $\lambda$. Montrons que $\lambda(\rho_{\alpha\beta}) \leq \lambda(\rho)$. Soit $\varepsilon > 0$ et $y \in X$

tel que $d_\rho(y) \leq \lambda(\rho) + \varepsilon$. Soit $\beta'$ opposé à $\alpha$ tel que $y \in X_{\alpha\beta'}$. Par ce qui précède on a $\lambda(\rho_{\alpha\beta'}) \leq d_{\rho_{\alpha\beta'}}(y) \leq d_\rho(y) \leq \lambda(\rho) + \varepsilon$. Or $\lambda(\rho_{\alpha\beta'}) = \lambda(\rho_{\alpha\beta})$ car $p_{\alpha\beta}$ et $p_{\alpha\beta'}$, donc $\rho_{\alpha\beta}$ et $\rho_{\alpha\beta'}$, sont conjuguées. On conclut en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0.

Pour le point 3, comme le groupe $U_\alpha = \ker p_{\alpha\beta}$ fixe point par point l'étoile $\Delta_f$ de $f = f(\alpha)$, la représentation $\rho$ coincïde avec $\rho_{\alpha\beta}$ sur $\Delta_f$. Or $\rho_{\alpha\beta}$ fixe le segment de $\alpha$ à $\alpha'$ (pour la distance de Tits), donc la facette $f'$ de l'étoile de $f(\alpha)$ qui contient dans son intérieur un germe de ce segment. Le dernier point est une conséquence directe du précédent. □

On en déduit immédiatement la caractérisation suivante.

**Corollaire 17.** *Pour $\rho$ dans* R*, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *$\rho$ est complètement réductible.*
(2) *Ou bien $\rho$ est non-parabolique dans $X$, ou bien il existe $\alpha$ et $\beta$ dans $\partial_\infty X$ opposés, fixés par $\rho$, tels que $\rho$ est non-parabolique dans le faisceau $X_{\alpha,\beta}$.* □

*En particulier* $\mathrm{Min}(\rho)$ *est alors non vide.*

3.3. **Cas des espaces symétriques.** On a maintenant obtenu l'équivalence des différentes caractérisations géométriques remarquables suivantes, dans les espaces symétriques (i.e. dans le cas des groupes réductifs réels, cf section 1.2).

**Proposition 18.** *On suppose que $G$ est un groupe réductif réel, agissant sur son espace symétrique sans facteur compact $X$ associé. Soit $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation. les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *$\rho$ est complètement réductible dans $X$.*
(2) *Ou bien $\rho$ est non-parabolique dans $X$, ou bien $\rho$ fixe deux points à l'infini opposés $\alpha$ et $\beta$, et est non-parabolique dans le faisceau $X_{\alpha,\beta}$.*
(3) *$\rho$ stabilise un sous-espace convexe fermé $Y$ de $X$, et est non-parabolique dans $Y$.*
(4) *La fonction de déplacement $d_\rho : x \mapsto \sqrt{\sum_{s\in S} d(x, \rho(s)x)^2}$ atteint sa borne inférieure, autrement dit* $\mathrm{Min}(\rho)$ *est non vide.*
(5) *Il existe un point $x$ de $X$ tel que* $\mathrm{Fix}_\infty(\rho)$ *est symétrique par rapport à $x$.*

*Démonstration.* On vient de voir que (1) équivaut à (2) dans le cadre des groupes réductifs ([Serre], cf. Corollaire 17). On a clairement que (2) implique (3), et que (5) implique (1). L'implication (3) $\Rightarrow$ (4) est vraie dans tout espace métrique CAT(0) propre $X$ (proposition 12). L'implication (4) $\Rightarrow$ (5) est vraie, pour tout $x$ de $\mathrm{Min}(\rho)$, dans le cadre plus général où $X$ est à géodésiques uniquement extensibles et sans demi-bande plate (proposition 14). □

*Remarque.* On peut démontrer que l'ensemble minimal $\mathrm{Min}(\rho)$ est ici un sous-espace totalement géodésique (car si $d_\rho$ est constante sur un segment géodésique $\sigma[0,1]$, alors on montre aisément que $d_{\rho(s)}$ aussi pour tout $s$ de $S$) sur lequel le centralisateur $Z(\rho)$ de $\rho$ agit transitivement (car le transport parallèle le long de $\sigma$ - prolongée à $\mathbb{R}$ - est dans $Z(\rho)$). On peut alors en déduire les propriétés suivantes, analogues aux résultats de base de la théorie de l'application moment (voir par exemple [RiSl]) : si on note $\mathcal{M}$ le sous-ensemble des $\rho \in$ R telles que $d_\rho$ atteint sa borne inférieure en $x_0$, alors $\rho$ est cr si et seulement si $G \cdot \rho$ rencontre $\mathcal{M}$, et on a alors $\mathcal{M} \cap G \cdot \rho = K \cdot \rho$, où $K$ est le sous-groupe compact $\mathrm{Stab}_G(x_0)$.

## 4. Séparation et espace quotient

On se place dorénavant dans le cadre où $G$ est un groupe réductif sur un corps local agissant sur son espace (espace symétrique ou immeuble affine) associé (notations et hypothèses de la section 1.2). Dans cette section on montre (théorème 23)

que l'espace $\mathcal{X}_{cr}$ des classes de représentations cr est le plus gros quotient séparé de $\mathrm{R} = \mathrm{Hom}(\Gamma, G) \subset G^S$ sous l'action (par conjugaison) de $G$.

On note $\mathrm{R}_{cr}$ le sous-espace formé des représentations complètement réductibles, et $\mathcal{X}_{cr} = \mathrm{R}_{cr}/G$ l'espace topologique quotient. Notons que l'espace $\mathcal{X}_{cr}$ est à base dénombrable (car R l'est).

On dira que deux points $x$ et $x'$ d'un espace topologique $E$ sont *séparés* par une action continue de $G$ dans $E$ s'il existe deux voisinages $V$ et $V'$ de $x$ et $x'$ dont les orbites $G \cdot V$ et $G \cdot V'$ ne se rencontrent pas. Sinon, on dira que $x$ et $x'$ sont *$G$-voisins dans $E$* (on notera que ce n'est pas *a priori* une relation d'équivalence).

4.1. **Séparation des orbites cr.** Nous allons ici démontrer le résultat de séparation des orbites cr suivant, qui est une variante (contenant l'essentiel) du théorème 23 (et donc connu en caractéristique nulle, voir les remarques suivant le théorème 23). On rappelle (cf. section 3.2) qu'une *réduction* d'une représentation $\rho$ désigne une représentation de la forme $\sigma = p_{\alpha\beta} \circ \rho$ où $p_{\alpha\beta} : P_\alpha \longrightarrow G_{\alpha\beta}$ est la projection canonique associée à deux points à l'infini opposés $\alpha$ et $\beta$ avec $\alpha$ fixé par $\rho$.

**Théorème 19.** *Soient $\rho$ et $\rho'$ deux points $G$-voisins dans* R*. Alors*

(1) *$\rho$ et $\rho'$ possèdent deux réductions conjuguées dans $G$.*
(2) *Les adhérences de leurs orbites se rencontrent ($\overline{G \cdot \rho} \cap \overline{G \cdot \rho'} \neq \emptyset$).*
(3) *Si de plus $\rho$ et $\rho'$ sont cr, alors elles sont conjuguées ($G \cdot \rho = G \cdot \rho'$).*

*En particulier, l'espace topologique quotient $\mathcal{X}_{cr} = \mathrm{R}_{cr}/G$ est séparé.*

Pour démontrer ce théorème, on commence par le petit lemme suivant, qui montre que, comme "les parties compactes ne comptent pas", on peut se ramener, grâce à un analogue de la décomposition de Cartan, à l'action d'une suite $I$-fondamentale de $A$.

**Lemme 20.** *On considère une action continue de $G$ sur un espace topologique $E$ à base dénombrable. Soient $x, x'$ dans $E$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Les points $x$ et $x'$ sont $G$-voisins dans $E$.*
(2) *il existe $h, k$ dans $G$, une partie $I$ de $\Lambda$, une suite $I$-fondamentale $(a_i)_i$ de $A$, et une suite $(y_i)_i$ dans $E$, tels que $y_i \to y$ et $a_i \cdot y_i \to y'$ avec $y = h \cdot x$ et $y' = k \cdot x'$ quand $i \to +\infty$.*

*Démonstration.* Si $x$ et $x'$ sont $G$-voisins, il existe une suite $(x_i)_i$ dans $E$ et une suite $(g_i)_i$ dans $G$ telles que $x_i \to x$ et $g_i \cdot x_i \to x'$ quand $i \to +\infty$. Comme $\overline{\mathfrak{C}}$ est un domaine fondamental pour l'action du sous-groupe compact $K = \mathrm{Stab}_G(x_0)$ sur $X$, il existe $k_i \in K$ tel que $g_i x_0 = k_i v_i$ avec $v_i$ dans $\overline{\mathfrak{C}}$. Soit $I$ l'ensemble des racines simples $\varphi$ de $\Lambda$ non bornées sur la suite $(v_i)$. La suite des projections $v_i^I$ de $v_i$ sur $\mathbb{A}^I$ est alors bornée. La suite des projections $v_{i,I}$ de $v_i$ sur $\mathbb{A}_I$ est à distance bornée d'une suite $u_i = a_i x_0$, avec $a_i \in A_I$ (car $A_I$ agit cocompactement sur $\mathbb{A}_I$). On note $g_i = k_i a_i h_i$. La suite $(h_i)_i$ est bornée dans $G$ car la suite $h_i x_0 = a_i^{-1} v_i$ du plat $\mathbb{A}$ a ses composantes dans $\mathbb{A}^I \oplus \mathbb{A}_I$ bornées. On a donc, quitte à extraire, que $k_i$ tend vers $k^{-1}$ et $h_i$ tend vers $h$ dans $G$, et la suite $y_i = h_i \cdot x_i$ convient. L'autre sens est clair. □

On décrit maintenant les limites de conjugués par une suite $I$-fondamentale $(a_i)_i$ de $A$. La preuve repose sur la décomposition $U_I^- G_I U_I^+$ (cf prop. 1).

**Proposition 21** (Action d'une suite $I$-fondamentale dans $A$.)**.** *Soit $I$ une partie de $\Lambda$ et $(a_i)_i$ une suite $I$-fondamentale dans $A$. Soient deux représentations $\rho$ et $\rho'$ de* R*, et une suite $(\rho_i)_i$ convergeant vers $\rho$ dans* R*, telles que la suite des conjugués $(a_i \cdot \rho_i)_i$ tend vers $\rho'$. Alors*

(1) *La représentation $\rho'$ est (d'image) incluse dans le sous-groupe parabolique $P_I^+$, et $\rho$ est (d'image) incluse dans le sous-groupe parabolique opposé $P_I^-$.*

(2) *Les projections $r$ et $r'$ de $\rho$ et $\rho'$ sur le sous-groupe de Levi commun $G_I$ sont égales.*
(3) *Soit $\rho = ur$ la décomposition de $\rho$ suivant la décomposition $P_I^- = U_I^- G_I$ et $\rho' = rn'$ la décomposition de $\rho'$ suivant la décomposition $P_I^+ = G_I U_I^+$. Alors, à partir d'un certain rang, on a $\rho_i = u_i r_i n_i$, pour des suites $r_i \to r$ dans $(G_I)^\Gamma$, et $u_i \to u$ dans $(U_I^-)^\Gamma$, et enfin $n_i = a_i^{-1} \cdot n_i'$ où $n_i' \to n'$ dans $(U_I^+)^\Gamma$.*

Remarquons que le point 3 décrit complètement la situation. En effet, les propriétés de contraction de la conjugaison par la suite $(a_i)$ sur $U_I^-$ et $U_I^+$ (proposition 3) permettent de voir qu'on a la réciproque suivante (attention, ici $\rho_i : \Gamma \longrightarrow G$ n'a pas de raisons a priori d'être un morphisme).

**Proposition 22.** *Soient $\rho = ur$ une représentation à valeurs dans $P_I^- = U_I^- G_I$ et $\rho' = rn'$ une représentation à valeurs dans $P_I^+ = G_I U_I^+$, de même projection $r$ sur $G_I$. Pour toute suite $I$-fondamentale $(a_i)$ de $A_I$, si $\rho_i = u_i r_i n_i$ avec $r_i \to r$ dans $(G_I)^\Gamma$ et $u_i \to u$ dans $(U_I^-)^\Gamma$ quelconques, et $n_i = a_i^{-1} \cdot n_i'$ avec $n_i' \to n'$ dans $(U_I^+)^\Gamma$ quelconque, alors on a $\rho_i \to \rho$ et $a_i \cdot \rho_i \to \rho'$. En particulier, $\rho$ et $\rho'$ sont $A$-voisines.* □

*Preuve de la proposition 21.* Il suffit de prouver ces points "terme à terme", c'est-à-dire pour un élément fixé $\gamma$ de $\Gamma$. On note alors $g = \rho(\gamma)$ et $g' = \rho'(\gamma)$.

On commence par projeter, en utilisant une décomposition $U_J^- G_J U_J^+$, dans un $G_J$, a priori plus gros que $G_I$, tel que $P_J^+$ contient $g'$ et $P_J^-$ contient $g$. Puis on montre qu'en fait $J = I$ par un argument de minimalité, d'où le résultat pour le bon $I$.

*Existence d'une facette à l'infini fixée "commune".* On note $v_i = \nu(a_i)$ (vecteur de la translation de $\mathbb{A}$ réalisée par $a_i$). Quitte à extraire, on peut supposer que $v_i$ tend vers un point $v$ dans le bord à l'infini de la facette $\overline{\mathfrak{C}}_I$. Soit $\mathfrak{C}_L$ la facette ouverte de $\mathfrak{C}_I$ contenant $v$. Alors $g'$ fixe la facette à l'infini $\partial_\infty \mathfrak{C}_L$ (d'après le lemme 8). De même, en remplaçant $v_i$ par $-v_i$ qui tend vers $-v$, on voit que $g$ fixe le bord à l'infini de la facette opposée $\mathfrak{C}_L^- = -\mathfrak{C}_L$.

*Choix de $J$ minimal.* On suppose désormais que $\mathfrak{C}_J$ est une facette maximale (pour l'inclusion) parmi les facettes de $\mathfrak{C}_I$ telle que $g'$ fixe $\partial_\infty \mathfrak{C}_J$ (c'est-à-dire $g' \in P_J^+$) et $g$ fixe $\partial_\infty(\mathfrak{C}_J^-)$ (c'est-à-dire $g \in P_J^-$).

Soit $g = ur$ la décomposition de $g$ suivant la décomposition $P_J^- = U_J^- G_J$ et $g' = rn'$ la décomposition de $g'$ suivant la décomposition $P_J^+ = G_J U_J^+$.

*Projection sur $G_J$ via la décomposition $U_J^- G_J U_J^+$.* On considère maintenant la décomposition $\mathcal{O}_J = U_J^- G_J U_J^+$ de la proposition 1. Comme $\mathcal{O}_J$ est un ouvert qui contient $P_J^-$ et $P_J^+$, donc $g$ et $g'$, les suites $g_i$ et $g_i'$ sont dans $\mathcal{O}_J$ à partir d'un certain rang. On a donc les décompositions $g_i = u_i r_i n_i$ et $g_i' = u_i' r_i' n_i'$, où $u_i$ et $u_i'$ sont dans $U_J^-$, $n_i$ et $n_i'$ sont dans $U_J^+$, et $r_i$ et $r_i'$ sont dans $G_J$. La décomposition $U_J^- G_J U_J^+$ étant unique, continue, et conservée par la conjugaison par $a_i$, on a que $r_i \to r$ et que $r_i' = a_i \cdot r_i \to r'$. De même, on a que $u_i \to u$ et que $n_i' = a_i \cdot n_i \to n'$.

*Montrons enfin que $I = J$.* Notons $v_i = v_i^J + v_{i,J}$ la décomposition de $v_i$ suivant la somme orthogonale $\mathbb{A} = \mathbb{A}^J \oplus \mathbb{A}_J$. Si $J \neq I$, alors $v_i^J$ n'est pas borné : en effet il existe $\varphi \in J - I$, et $\varphi(v_i^J) = \varphi(v_i)$ tend vers $+\infty$, car la suite $v_i$ est $I$-fondamentale. Quitte à extraire, on a donc que $v_i^J$ tend vers un point $v^J$ dans le bord à l'infini de $\mathbb{A}^J$. Comme $A_J$ agit cocompactement sur $\mathbb{A}_J$, il existe $b_i \in A_J$ tel que $v_{i,J} - \nu(b_i)$ reste borné. Notons $a_i' = a_i b_i^{-1}$, alors $a_i' x_0$ tend encore vers $v$. Comme $A_J$ est central dans $G_J$, on a que $a_i'.r_i = a_i.r_i$, qui converge vers $r'$. On en déduit que $r'$ fixe $v^J$ (par le lemme 8). Comme $\varphi(v^J) \geq 0$ pour toutes les racines $\varphi$ de $J$ et qu'on a $\varphi(v^J) > 0$ pour au moins une racine $\varphi$ de $J$ (car $v^J \notin \mathbb{A}_J$), on a que le cône $\mathbb{R}^+ v^J \oplus \mathbb{A}_J$ rencontre une facette ouverte $\mathfrak{C}_{J'}$ dominant strictement la facette $\mathfrak{C}_J$.

Comme $r'$ fixe tous les points du bord à l'infini de $\mathbb{R}^+v^J + \mathbb{A}_J$, il fixe la facette à l'infini $\partial_\infty \mathfrak{C}_{J'}$. Donc $g'$ fixe également $\partial_\infty \mathfrak{C}_{J'}$ (car $U_J$ fixe $\partial_\infty \overline{\mathfrak{C}}$). On voit de même, en remplaçant $a'_i$ par $(a'_i)^{-1}$ que $g$ fixe le bord à l'infini de la facette opposée $\mathfrak{C}^-_{J'}$ (car $(a'_i)^{-1}x_0 \to -v^J$). Ce qui contredit l'hypothèse "$\mathfrak{C}_J$ maximale" faite ci-dessus, car $\mathfrak{C}_{J'}$ domine strictement la facette $\mathfrak{C}_J$. On a donc en fait $r'_i = r_i$ pour tout $i$ (car $a_i \in A_J$ central dans $G_J$), d'où $r' = r$. □

*Preuve du théorème 19.* Comme les réductions d'une représentation sont dans l'adhérence de son orbite (cf proposition 2) et qu'une représentation complètement réductible est conjuguée à toutes ses réductions (cf proposition 16, point 1), il suffit de voir le premier point. Quitte à conjuguer $\rho$ et $\rho'$, on peut supposer qu'il existe une suite $I$-fondamentale $(a_i)$ dans $A$ et une suite $\rho_i$ dans R convergeant vers $\rho$ telles que $a_i \cdot \rho_i$ converge vers $\rho'$ (lemme 20). Les points (1) et (2) de la proposition 21 permettent alors de conclure. □

4.2. **Semisimplification et plus gros quotient séparé.** Soient $\rho$ et $\rho'$ dans R. D'après le théorème 19, $\rho$ et $\rho'$ sont $G$-voisines si et seulement si $\overline{G \cdot \rho} \cap \overline{G \cdot \rho'} \neq \emptyset$. On note dans ce cas $\rho \sim \rho'$, et il est facile de voir que $\sim$ est alors une relation d'équivalence. On note $\mathrm{R}//G = \mathrm{R}/\sim$ l'espace topologique quotient, et $p : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}//G$ la projection correspondante (qui passe au quotient en une application continue surjective $\overline{p} : \mathrm{R}/G \longrightarrow \mathrm{R}//G$).

**Théorème 23.** (1) *Pour tout $\rho$ de* R*, l'adhérence de $G \cdot \rho$ contient une unique orbite complètement réductible.*

*On note $\pi : \mathrm{R} \longrightarrow \mathcal{X}_{cr}$ la projection $G$-invariante associée (*semisimplification*).*

(2) *L'application $\pi$ est continue et induit un homéomorphisme de* $\mathrm{R}//G$ *sur $\mathcal{X}_{cr}$. En particulier,* $\mathrm{R}//G$ *(resp. $\mathcal{X}_{cr}$) est le plus gros quotient séparé de* R *sous $G$ (toute application continue $G$-invariante $f$ de* R *vers un espace séparé factorise à travers $p$ (resp. $\pi$)).*

*Remarques.* Le point 1 est prouvé dans [Ric] pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par ailleurs, un résultat analogue, mais en remplaçant les orbites cr par les orbites fermées, et pour des actions plus générales de groupes réductifs, est prouvé, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dans [Luna] et [RiSl], et plus généralement, pour $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle ; dans [Bre, 5.4 et 5.11]. Il implique alors le résultat ci-dessus quand en utilisant que les orbites fermées sont exactement les orbites complètement réductibles ([Ric] pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et, plus généralement pour $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, on peut le déduire de [Ric] et [Bre]).

*Démonstration.* Pour le point 1 : En projetant sur un sous-groupe de Levi correspondant à un point fixe de $\rho$ dans $\partial_\infty X$ de régularité maximale, on obtient bien une représentation complètement réductible adhérente à l'orbite de $\rho$ par la proposition 16 et le corollaire 17. L'unicité à conjugaison près découle de la séparation des orbites cr (théorème 19).

Pour le point 2, il s'agit essentiellement de montrer la continuité de $\pi$. Les arguments suivants sont inspirées par des idées de Maxime Wolff [Wolff, 2.2.6]. Comme R et $\mathcal{X}_{cr}$ sont à base dénombrable et séparés (théorème 19), il suffit de montrer que, si $\rho_i$ tend vers $\rho$ dans R, alors, quitte à extraire, $\pi(\rho_i)$ tend vers $\pi(\rho)$. On peut tout d'abord supposer $\rho$ complètement réductible (quitte à remplacer $\rho$ par $\sigma$ cr dans $\overline{G \cdot \rho}$, et $\rho_i$ par une suite extraite et conjuguée qui converge vers $\sigma$). Si $\rho_i$ n'a pas de point fixe à l'infini, et est donc complètement réductible, à partir d'un certain rang, on a que $\pi(\rho_i) = G \cdot \rho_i$ tend vers $G \cdot \rho = \pi(\rho)$ dans $\mathrm{R}_{cr}/G$, ce qui conclut. Sinon, quitte à extraire, il existe pour tout $i$ un point fixe à l'infini $\alpha_i$ de $\rho_i$, qu'on peut choisir de régularité maximale et de type constant (c'est-à-dire dans une orbite de $G$ fixée). Quitte à extraire, on peut supposer que $\alpha_i$ tend vers un point $\alpha$ de $\partial_\infty X$,

qui est alors fixé par $\rho$. Quitte à remplacer $\rho_i$ par un conjugué $k_i \cdot \rho_i$ avec $(k_i)_i$ une suite dans le sous-groupe compact $K = \mathrm{Stab}_G(x_0)$ convergeant vers $1_G$, on peut supposer que $\alpha_i$ est toujours égal à $\alpha$ (en prenant $k_i$ tel que $k_i\alpha_i = \alpha$). Comme $\rho$ est complètement réductible, elle fixe un point $\beta$ de $\partial_\infty X$ opposé à $\alpha$. La composée $\sigma_i$ de $\rho_i$ par la projection $p_{\alpha\beta}$ est alors une semisimplification de $\rho_i$ (proposition 16 et corollaire 17), et tend vers $p_{\alpha\beta} \circ \rho = \rho$. On a donc que $G \cdot \sigma_i = \pi(\rho_i)$ tend vers $G \cdot \rho = \pi(\rho)$ dans $\mathrm{R}_{cr}/G$, ce qui conclut pour la continuité de $\pi$.

L'application $\pi$ passe alors au quotient en $\overline{\pi} : \mathrm{R}//G \longrightarrow \mathcal{X}_{cr}$ continue, et on vérifie aisément que la restriction de $\overline{p} : \mathrm{R}/G \longrightarrow \mathrm{R}//G$ à $\mathcal{X}_{cr}$ en est un inverse. □

On inclut pour finir quelques propriétés de $\mathrm{R}//G$ ayant un intérêt propre.

**Proposition 24.** *L'espace $\mathcal{X}_{cr}$ est localement compact et dénombrable à l'infini.*

*Démonstration.* En effet l'image par $\pi : \mathrm{R} \longrightarrow \mathcal{X}_{cr}$ de la trace sur $\mathrm{R}_{cr}$ d'une base dénombrable d'ouverts relativement compacts de R fournit une base dénombrable d'ouverts (car la restriction de $\pi$ à $\mathrm{R}_{cr}$ est ouverte et surjective) relativement compacts (car $\pi$ est continue sur R) de $\mathcal{X}_{cr}$. □

**Proposition 25.** *L'application "minimum de déplacement" $\lambda : \mathrm{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue, et passe au quotient en une fonction continue et propre sur* $\mathrm{R}//G$.

*Remarque* 26. Dans un espace CAT(0) quelconque, $\lambda$ est semicontinue, mais elle n'est pas continue en général (par exemple, dans le cas du plan euclidien).

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que $\lambda$ passe au quotient. On a $\lambda(\pi(\rho)) = \lambda(\rho)$ par la proposition 16 (2)(car $\pi(\rho)$ est une réduction de $\rho$). Donc $\lambda$ passe au quotient en une fonction $\mathrm{R}//G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qu'on notera aussi $\lambda$.

Montrons maintenant la continuité de $\lambda$ sur R : soit $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans R telle que $\rho_i \to \rho$. Alors $\lambda(\rho_i)$ est borné. Supposons (quitte à extraire) que $\lambda(\rho_i) \to \ell$. On peut alors choisir une suite de conjugués $\rho'_i$ de $\rho_i$ telle que $\rho'_i \to \rho'$ avec $\lambda(\rho') = \ell$ (prop. 13, (2)). On a que $\pi(\rho'_i) \to \pi(\rho')$ et $\pi(\rho_i) \to \pi(\rho)$ par continuité de $\pi$ (thm 23), or $\pi(\rho'_i) = \pi(\rho_i)$ pour tout $i$, donc $\pi(\rho) = \pi(\rho')$ (car $\mathcal{X}_{cr}$ séparé). On a vu qu'alors $\lambda(\rho) = \lambda(\rho') = \ell$, ce qui conclut.

L'application quotient $\lambda : \mathrm{R}//G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est donc continue. Montrons qu'elle est propre. Soit $D > 0$. Comme $G$ agit cocompactement sur $X$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que si $\lambda(\rho) < D$ alors il existe $g \in G$ tel que $d_{g\cdot\rho}(x_0) \leq C$. En particulier $p(\rho)$ est alors dans l'image par $p$ continue du compact $\{\rho \in \mathrm{R},\ d_\rho(x_0) \leq C\}$ de R, qui est un compact de $\mathrm{R}//G$, ce qui conclut. □

## Références


[BMR] M. Bate, B. Martin, G. Röhrle, *A geometric approach to complete reducibility*, Invent. Math. **161** (2005), 177–218.

[Borel1] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Math., **126**. Springer-Verlag, New York, 1991.

[Borel2] A. Borel, *Linear algebraic groups.* 1966 Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965) 3–19.

[BoTi] A. Borel, J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. math. I.H.É. S. **27**, 1965, 55-150.

[Bou1] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap 6. *Valuations*, Hermann, Paris, 1964.

[Bou2] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Paris, 1968.

[Bou3] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1971.

[Bre] R. J. Bremigan, *Quotients for algebraic group actions over non-algebraically closed fields*, J. Reine Angew. Math. **453** (1994), 21–47.

[BrHa] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag, 1999.

[Bro] K. Brown, *Buildings*, Springer Verlag, 1989.

[BrTi] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-252.

[Ebe] P. Eberlein, *Geometry of non-positively curved manifolds*, Chicago L. N. in Math., The Univ. of Chicago Press, 1996.

[Hel] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.

[JoMi] D. Johnson, J. J. Millson, *Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds*, Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984), Progr. Math. **67**, Birkhäuser (1987) 48-106.

[Lab] F. Labourie, *Existence d'applications harmoniques tordues à valeurs dans les variétés à courbure négative*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991) 877-882.

[LuMa] A. Lubotzky, A. R. Magid, *Varieties of representations of finitely generated groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **58**, 1985.

[Luna] D. Luna, *Sur certaines opérations différentiables des groupes de Lie*, Amer. J. Math. **97** (1975), 172–181.

[Mar] G. Margulis, *Discrete subgroups of semi-simple groups*, Ergeb. Math. Grenz. **17**, Springer Verlag, 1991.

[Par1] A. Parreau, *Dégénérescences de sous-groupes discrets de groupes de Lie semisimples et actions de groupes sur des immeubles affines*, thèse de doctorat, Univ. Orsay, 2000.

[Par2] A. Parreau, *Immeubles affines : construction par les normes et étude des isométries*, Crystallographic groups and their generalizations (Kortrijk, 1999), 263-302, Contemp. Math., 262, Amer. Math. Soc., 2000.

[Par3] A. Parreau, *Compactification d'espaces de représentations de groupes de type fini*, prépublication, arXiv :1003.1111.

[Ric] R. W. Richardson, *Conjugacy classes of $n$-tuples in Lie algebras and algebraic groups*, Duke Math. J. **57** (1988) 1-35.

[RiSl] R. W. Richardson, P. J. Slodowy, *Minimum vectors for real reductive algebraic groups*, J. London Math. Soc. **42** (1990), 409–429.

[Rou] G. Rousseau, *Euclidean buildings*, Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités (A. Parreau L. Bessières and B. Rémy, eds.), Séminaires et Congrès **18**, Société mathématique de France, 2008.

[Serre] J.-P. Serre, *Complète Reductibilite*, Séminaire Bourbaki 2003-2004, Astérisque **299**, Exp. No. 932, 195-217.

[Tits] J. Tits *Reductive groups over local fields*, Automorphic forms, representations and $L$-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., 1979, 29–69.

[Wolff] M. Wolff, *Sur les composantes exotiques des espaces d'actions de groupes de surfaces sur le plan hyperbolique*, thèse de doctorat, Univ. Grenoble 1, 2007.

Institut Fourier, UMR 5582, BP 74, Université de Grenoble I, 38402 Saint-Martin-d'Hères cedex, France

*E-mail address*: `Anne.Parreau@ujf-grenoble.fr`