



HAL
open science

Espaces de représentations complètement réductibles

Anne Parreau

► **To cite this version:**

| Anne Parreau. Espaces de représentations complètement réductibles. 2009. hal-00396963v1

HAL Id: hal-00396963

<https://hal.science/hal-00396963v1>

Preprint submitted on 19 Jun 2009 (v1), last revised 10 Jun 2010 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ESPACES DE REPRÉSENTATIONS COMPLÈTEMENT RÉDUCTIBLES

ANNE PARREAU

ABSTRACT. We study some geometric properties of actions on nonpositively curved spaces related to complete reducibility and semisimplicity, focusing on representations of a finitely generated group Γ in the group G of rational points of a reductive group over a local field, acting on the associated space (symmetric space or affine building). We prove that the space of completely reducible classes is the maximal Hausdorff quotient space for the conjugacy action of G on $\text{Hom}(\Gamma, G)$.

INTRODUCTION

Soit Γ un groupe infini, engendré par une partie finie S . Soit X un espace métrique CAT(0) propre, muni d'une action isométrique propre et cocompacte d'un groupe topologique localement compact G . Nous nous intéressons ici aux propriétés topologiques de l'action par conjugaison (au but) de G sur l'espace $\mathbb{R} = \text{Hom}(\Gamma, G)$ des représentations de Γ dans G , en lien avec les propriétés géométriques des représentations ρ de \mathbb{R} comme actions de Γ sur X . Notons que \mathbb{R} s'identifie naturellement à un fermé de l'espace G^S des S -uplets de G muni de l'action de g par conjugaison simultanée, via l'application de restriction $\rho \mapsto (\rho(s))_{s \in S}$.

L'espace topologique quotient \mathbb{R}/G est en général loin d'être séparé, ne serait-ce que parce que certaines classes de conjugaison dans G ne sont pas fermées, comme par exemple, lorsque G est le groupe linéaire sur un corps local \mathbb{K} , celle d'une matrice triangulaire supérieure non diagonale (qui adhère à sa partie diagonale). On peut même avoir que toutes les classes de conjugaison soient fermées sans pour autant que le quotient soit séparé, comme par exemple dans le cas où ($\Gamma = \mathbb{Z}$ et) X est le plan euclidien et $G = \text{Isom}(X)$ (en effet une suite de rotations d'angles tendant vers zéro adhère modulo conjugaison à toutes les translations).

Le cas qui nous intéresse au premier chef est celui où $G = \mathbf{G}(\mathbb{K})$, avec \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe défini sur un corps local \mathbb{K} , agissant sur son espace associé X (espace symétrique dans le cas archimédien, ou immeuble de Bruhat-Tits dans le cas non archimédien).

Dans ce cadre algébrique, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la théorie des actions des groupes algébriques réductifs réels permet de construire un bon quotient \mathbb{R}/G à partir des orbites fermées ([Luna], [RiSi]). Richardson a démontré que dans ce cas les orbites fermées sont celles des représentations *semisimples* ([Ric]). La notion de représentation semisimple peut se caractériser géométriquement par la notion suivante introduite par J. P. Serre ([Serre]), qui a un sens pour une action ρ sur un espace métrique CAT(0) quelconque : ρ est *complètement réductible* (cr) si, lorsque ρ fixe un point α dans le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de X , alors il existe un point β dans $\partial_\infty X$, opposé (i.e. joint par une géodésique dans X) à α , également fixé par ρ .

Dans cet article, nous étudions diverses propriétés géométriques des actions sur un espace métrique CAT(0) reliées à la complète réductibilité.

Date: juin 2009.

Key words and phrases. nonpositive curvature, symmetric spaces, affine buildings, reductive groups over local fields, complete reducibility, moduli spaces of representation.

Avec le soutien de l'ANR Repeurf : ANR-06-BLAN-0311.

Une action $\rho \in \mathbb{R}$ est dite *non-parabolique* si elle n'a pas de point fixe non trivial à l'infini de X . Nous montrons que, dans un cadre très général, l'action de $G/Z(G)$ sur le sous-espace des représentations non-paraboliques est propre (section 2).

À une représentation ρ nous associons une fonction convexe d_ρ sur X , définie par $d_\rho(x) = \sqrt{\sum_{s \in S} d(x, \rho(s)x)^2}$. Nous démontrons (en section 3) que, dans le cas des espaces symétriques, il y a équivalence entre les propriétés naturelles suivantes pour une représentation $\rho \in \mathbb{R}$.

- (i) ρ est complètement réductible.
- (ii) ρ est non-parabolique dans un convexe fermé stable de X .
- (iii) La fonction $d_\rho : X \rightarrow [0, +\infty[$ atteint sa borne inférieure.

On notera que ces équivalences ne sont pas vraies en général (par exemple elles sont fausses dans un arbre ou dans un immeuble).

Dans le cas général (\mathbb{K} corps local quelconque), nous donnons enfin (section 4) une démonstration du résultat suivant.

Théorème. (1) *Toute orbite de G dans \mathbb{R} contient dans son adhérence une unique orbite complètement réductible.*

- (2) *L'espace topologique quotient $\mathcal{X}_{cr} = \mathbb{R}_{cr}/G$ de l'espace \mathbb{R}_{cr} des représentations cr est le plus gros quotient séparé de \mathbb{R} sous G .*

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Richardson [Ric] a démontré le point 1, et que les orbites complètement réductibles sont les orbites fermées. Le point 2 découle donc de [Luna] et [RiSl]. Pour \mathbb{K} de caractéristique 0, on peut déduire les résultats ci-dessus de [Bre], en utilisant que les orbites complètement réductibles sont les orbites fermées (ce qui découle de [Ric] et [Bre]).

La démonstration que nous donnons ici est nouvelle, indépendante et plus directe. Elle traite de manière unifiée tous les corps locaux sans distinction de caractéristique, dont le cas nouveau de la caractéristique non nulle. Les méthodes utilisées proviennent uniquement de la géométrie en courbure négative ou nulle et des propriétés de base des groupes algébriques réductifs sur les corps locaux.

Remerciements. Je remercie Frédéric Paulin pour son soutien et ses commentaires, ainsi que Michel Brion et Philippe Eyssidieux pour des discussions instructives sur la théorie géométrique des invariants et sur l'application moment.

1. NOTATIONS ET RAPPELS

1.1. Pour les actions sur les espaces métriques $CAT(0)$. Dans tout cet article, l'espace X est un espace métrique géodésique $CAT(0)$ propre (on renvoie par exemple à [BrHa] pour la définition et les propriétés de ces espaces), et G est un groupe topologique métrisable localement compact, agissant sur X par isométries, tel que l'action de G soit continue et propre (mais pas forcément fidèle) (en particulier, G est dénombrable à l'infini, donc à base dénombrable d'ouverts). Pour $g, h \in G$ on note $i_g(h) = ghg^{-1}$. On note $Z(G)$ le centre de G .

1.1.1. Bord à l'infini, sous-groupes paraboliques, faisceaux. On note $\partial_\infty X$ le bord à l'infini de X . Il est muni de la distance de Tits. Le stabilisateur dans G d'un point α de $\partial_\infty X$ sera noté P_α et appelé sous-groupe *parabolique* de G (par analogie avec le cas des groupes réductifs, voir section 1.2). Deux points α et β de $\partial_\infty X$ sont dits *opposés* s'il existe une géodésique dans X les joignant. On note $G_{\alpha\beta}$ le fixateur $\text{Fix}_G(\alpha, \beta) = P_\alpha \cap P_\beta$, et $X_{\alpha\beta}$ la réunion des géodésiques de β à α , qui est un sous-espace convexe fermé de X (*faisceau*).

1.1.2. *Facteur translaté.* Sauf indication contraire, le produit $X = X_1 \times X_2$ de deux espaces métriques X_1 et X_2 sera toujours muni de la distance produit $\sqrt{d_{X_1}^2 + d_{X_2}^2}$. On dira que X_1 est un facteur de X si X est isométrique à un produit $X_1 \times X_2$. Le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de X est alors le joint sphérique $\partial_\infty X_1$ et de $\partial_\infty X_2$. Le *facteur translaté (maximal)* du G -espace X est le facteur (dans une décomposition en produit préservée par G) euclidien maximal X_0 sur lequel le groupe G agit par translations. En particulier, G (donc toute action) fixe point par point le bord du facteur translaté. On note alors $X = X_0 \times X'$. Une action ρ de Γ sur X se décompose parallèlement en produit (ρ_0, ρ') . Par exemple, si α et β sont deux points opposés de $\partial_\infty X$, l'action de $G_{\alpha\beta}$ sur $X_{\alpha\beta}$ possède un facteur translaté non trivial naturel. Un autre exemple d'action possédant un facteur translaté non trivial est fourni par l'action du groupe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur son espace symétrique associé $X = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$.

1.1.3. *Espace de représentations.* On se fixe un groupe Γ infini, de type fini et une partie génératrice finie S de Γ . On munit Γ de la topologie discrète. Dans tout ce qui suit, une action de Γ sur X désigne une action par isométries dans G , c'est-à-dire une représentation (morphisme de groupes) de Γ dans G , notée en général ρ . On notera $\mathrm{Fix}_\infty(\rho)$ l'ensemble des points fixes de ρ dans le bord à l'infini de X . On s'intéresse à l'action $g \cdot \rho = i_g \circ \rho$ de G par conjugaison (au but) sur l'espace $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ des représentations de Γ dans G , noté $\mathrm{R}(\Gamma, G)$ ou R , muni de la topologie compacte-ouverte. On note $\mathcal{X}(\Gamma, G)$ ou \mathcal{X} l'espace topologique quotient. L'espace R s'identifie à un fermé de G^S , par l'application qui à une représentation associe sa restriction à S , qui est un homéomorphisme G -équivariant sur son image. En particulier, il est métrisable à base dénombrable et localement compact, car G l'est. Si A est une partie G -stable de R , l'ensemble quotient A/G sera muni de la topologie quotient, dont on rappelle qu'elle coïncide avec la topologie induite par l'inclusion dans $\mathcal{X} = \mathrm{R}/G$ [Bou, III, § 2, proposition 10].

1.2. Pour les groupes réductifs sur les corps locaux. À partir de la section 3.2, on se placera dans le cadre plus restreint des groupes réductifs sur les corps locaux, c'est-à-dire dans le cadre suivant.

On renvoie par exemple à [Borel2] comme référence générale pour les propriétés des groupes réductifs, à [Hel] et à [Ebe] pour les propriétés des groupes de Lie réels réductifs et de leurs espaces symétriques associés, et à [Tits] et [BrTi] pour les groupes réductifs sur les corps locaux non archimédiens et leurs immeubles de Bruhat-Tits associés.

1.2.1. *Le groupe G et l'espace métrique $\mathrm{CAT}(0)$ associé.* On suppose que $G = \mathbf{G}(\mathbb{K})$, où \mathbf{G} un groupe algébrique linéaire connexe réductif défini sur un corps local \mathbb{K} . On note $|\cdot|$ la valeur absolue de \mathbb{K} . Le groupe G est muni de la topologie induite par celle de \mathbb{K} . C'est un groupe topologique métrisable, localement compact, σ -compact (union dénombrable de compacts). Dans le cas où \mathbb{K} est archimédien, on note X son espace symétrique riemannien sans facteur compact associé. Rappelons que $X = G/K$, où K est un sous-groupe compact maximal de G , et qu'il est muni de la métrique riemannienne induite par une métrique sur G invariante à gauche par G et à droite par K .

Dans le cas non archimédien (\mathbb{K} ultramétrique), on note X l'immeuble de Bruhat-Tits (élargi) de \mathbf{G} sur \mathbb{K} , qui est un immeuble affine discret localement compact.

En particulier, X est un espace métrique $\mathrm{CAT}(0)$ propre, et G agit continûment, proprement (avec noyau compact), isométriquement, cocompactement sur X . Les hypothèses de la section 1.1 précédente sont donc satisfaites (et on en reprendra les notations).

1.2.2. *Tores A_I et plats standards \mathbb{A}_I .* On fixe un tore \mathbf{A} déployé sur \mathbb{K} maximal de \mathbf{G} , et on note \mathbb{A} le plat maximal (*standard*) de X associé. On choisit un point x_0 de \mathbb{A} (dans le cas non archimédien, un point spécial). On identifiera \mathbb{A} et son espace vectoriel sous-jacent en prenant x_0 comme origine. Le tore $A = \mathbf{A}(\mathbb{K})$ stabilise le plat \mathbb{A} et agit dessus par translations, cocompactement. On notera $\nu : A \rightarrow \mathbb{A}$ le morphisme correspondant. On rappelle que tout caractère $\xi \in X^*(\mathbf{A})$ s'identifie à une forme linéaire sur \mathbb{A} , qu'on notera également ξ , telle que $\xi(\nu(a)) = -\log |\xi(a)|$ pour tout a de \mathbf{A} .

Soit Φ le système de racines (dans \mathbb{A}^*) de \mathbf{G} relativement à \mathbb{K} défini par le tore \mathbf{A} . On choisit une chambre de Weyl (*standard*) \mathfrak{C} de \mathbb{A} , et on note Λ l'ensemble de racines simples correspondant. Pour une partie I de Λ , on note $\mathbb{A}_I = \bigcap_{\alpha \in I} \ker \alpha$ et \mathfrak{C}_I la facette ouverte de \mathfrak{C} associée (telle que $\overline{\mathfrak{C}}_I = \overline{\mathfrak{C}} \cap \mathbb{A}_I$). On note \mathbf{A}_I le sous-tore de \mathbf{A} formé par la composante neutre de $\bigcap_{\alpha \in I} \ker \alpha$. Le groupe $A_I = \mathbf{A}_I(\mathbb{K})$ agit sur le plat standard \mathbb{A} par des translations de vecteurs formant un sous-groupe cocompact de \mathbb{A}_I . On notera $v = v^I + v_I$ la décomposition d'un vecteur v de \mathbb{A} suivant la somme directe orthogonale $\mathbb{A} = \mathbb{A}^I \oplus \mathbb{A}_I$.

Une suite $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathfrak{C}}$ sera dite *I-fondamentale* si $v_i \in \mathfrak{C}_I$ pour tout i et, pour toute racine $\alpha \notin I$, on a $\alpha(v_i) \rightarrow +\infty$. Une suite (a_i) dans A est dite *I-fondamentale* si la suite des vecteurs de translation $v_i = \nu(a_i)$ des a_i dans \mathbb{A} l'est (i.e. pour tout $\alpha \in I$, $\alpha(a_i) = 1$ et, pour tout $\alpha \notin I$, $|\alpha(a_i)| \geq 1$ pour tout i et $|\alpha(a_i)| \rightarrow +\infty$).

1.2.3. *Immeuble sphérique et facettes à l'infini de X .* Le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de X est une réalisation géométrique de l'immeuble sphérique combinatoire Δ de \mathbf{G} . Les facettes f de cet immeuble sont en bijection avec les \mathbb{K} -sous-groupes paraboliques \mathbf{P}_f de \mathbf{G} , et on a $\text{Stab}_G(f) = \mathbf{P}_f(\mathbb{K})$ (noté P_f). Le stabilisateur P_α dans G d'un point α de $\partial_\infty X$ fixe point par point (l'adhérence de) la facette ouverte $f(\alpha)$ de cet immeuble contenant α , en particulier $P_\alpha = P_{f(\alpha)}$. On appellera *régularité* de α la dimension de $f(\alpha)$. On dit qu'une facette f domine une facette f' si l'adhérence de f contient f' . L'étoile Δ_f (ou *link*, ou *immeuble résiduel*) de f , est la réunion des facettes dominant f . Deux points α et β de $\partial_\infty X$ sont opposés (cf n° 1.1.1) si et seulement si les facettes correspondantes de l'immeuble sphérique à l'infini sont opposées, si et seulement si les \mathbb{K} -sous-groupes paraboliques de \mathbf{G} correspondants sont opposés, c'est-à-dire que leur intersection $\mathbf{G}_{\alpha\beta} = \mathbf{P}_\alpha \cap \mathbf{P}_\beta$ est un groupe réductif, qui est alors un sous-groupe de Lévy de chacun d'eux. On a $G_{\alpha\beta} = \mathbf{G}_{\alpha\beta}(\mathbb{K})$. Le groupe P_α agit transitivement sur l'ensemble des points opposés à α .

1.2.4. *Projection sur un facteur de Lévy et groupe U_α .* On note \mathbf{U}_α le radical unipotent du \mathbb{K} -sous-groupe parabolique \mathbf{P}_α , et $U_\alpha = \mathbf{U}_\alpha(\mathbb{K})$ qu'on appellera le radical unipotent de P_α . Si $\beta \in \partial_\infty X$ est un point opposé à α , on a une projection naturelle $p_{\alpha\beta}$ de P_α sur $G_{\alpha\beta}$. C'est un morphisme de noyau U_α , égal à l'identité sur $G_{\alpha\beta}$, qui correspond à la décomposition en produit semi-direct $P_\alpha = G_{\alpha\beta}U_\alpha$. Si β' est un autre point du bord opposé à α , alors il existe g dans P_α (qu'on peut supposer dans U_α) tel que $\beta' = g\beta$, et les projections associées sont alors conjuguées : $p_{\alpha\beta'} = \dot{i}_g \circ p_{\alpha\beta}$.

1.2.5. *Sous-groupes paraboliques standards.* Soit $I \subset \Lambda$. On note c_I ou $\partial_\infty \mathfrak{C}_I$ (resp. c_I^-) la facette (ouverte) à l'infini de \mathfrak{C}_I (resp. de $-\mathfrak{C}_I$). On note P_I^+ ou P_I le sous-groupe parabolique (*standard*) P_{c_I} , et U_I^+ ou U_I son radical unipotent. De même, on note $P_I^- = P_{c_I^-}$ et U_I^- son radical unipotent, et $G_I = P_I^+ \cap P_I^-$. Le tore A_I est central dans G_I .

1.2.6. *Structure des faisceaux.* Si α et β sont deux points opposés de $\partial_\infty X$, il existe $g \in G$ et un unique $I \subset \Lambda$ tel que $g\alpha \in c_I$ et $g\beta \in c_I^-$. Alors $gP_\alpha g^{-1} = P_I$ et $gP_\beta g^{-1} = P_I^-$ (et $gG_{\alpha\beta} g^{-1} = G_I$, etc.). On note $\mathbb{A}_{\alpha\beta} = g^{-1}\mathbb{A}_I$. On a alors une

décomposition naturelle en produit $X_{\alpha\beta} = \mathbb{A}_{\alpha\beta} \times X^{\alpha\beta}$ (qui ne dépend pas du choix de g). Le groupe $G_{\alpha\beta}$ préserve cette décomposition et agit par translations sur $\mathbb{A}_{\alpha\beta}$. Le bord à l'infini $S_{\alpha\beta}$ de $\mathbb{A}_{\alpha\beta}$ est la sphère de Lévy de $\partial_\infty X$ associée au sous-groupe de Lévy $\mathbf{G}_{\alpha\beta}$ de \mathbf{P}_α , et $f = f(\alpha)$ est un simplexe maximal de $S_{\alpha\beta}$. L'étoile Δ_f de f (union des facettes fermées contenant f) est incluse dans $\partial_\infty X_{\alpha\beta}$. Le bord à l'infini de $X^{\alpha\beta}$ s'identifie à (une réalisation géométrique de) $\Delta_{f(\alpha)}$.

1.2.7. *Décomposition $U_I^- G_I U_I^+$* . Le résultat classique suivant signifie géométriquement que, pour deux points du bord opposés α et β , l'application $n \mapsto n\beta$ est un homéomorphisme de U_α sur l'ensemble des points du bord opposés à α , qui forment un ouvert dans leur orbite.

Proposition 1. *Soit $I \subset \Lambda$. L'application*

$$\phi : \begin{array}{ccc} U_I^- \times G_I \times U_I^+ & \rightarrow & G \\ (u, r, n) & \mapsto & urn \end{array}$$

est un homéomorphisme sur son image \mathcal{O}_I , qui est un ouvert [BoTi, 4.2]. \square

1.2.8. *Contraction par conjugaison.* Le fait classique suivant est fondamental pour l'étude de la topologie des orbites de G dans $\mathbf{R} = \text{Hom}(\Gamma, G)$.

Proposition 2. *Soit I un sous-ensemble de racines simples.*

- (1) *La projection $p_I : P_I \rightarrow G_I$ est limite de conjugaisons : plus précisément, il existe un élément a dans A_I tel que, pour tout g dans P_I , la suite $a^i g a^{-i}$ tend vers $p_I(g)$ quand l'entier i tend vers l'infini.*
- (2) *Soit ρ dans \mathbf{R} tel que $\rho(\Gamma)$ est inclus dans P_I . La représentation $\rho_I = p_I \circ \rho$ est dans l'adhérence de l'orbite $A_I \cdot \rho$.*

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de choisir $a \in A_I$ tel que, pour tout $\alpha \in \Delta - I$, on ait $|\alpha(a)| < 1$. Alors a centralise G_I et contracte U_I (voir par exemple la proposition 3 ci-dessous pour une preuve détaillée dans un cadre plus général). Le second point découle immédiatement du premier. \square

La propriété de contraction plus forte suivante permet de comprendre l'action (par conjugaison) des suites I -fondamentales sur les ouverts $U_I^- G_I U_I^+$ de G (voir proposition 22). On rappelle qu'on note $g \cdot h = ghg^{-1}$ l'action par conjugaison de G sur lui-même.

Proposition 3. *Soit $(a_i)_i$ une suite I -fondamentale dans A . Pour toute suite $(n_i)_i$ de U_I (resp. $(u_i)_i$ de U_I^-) bornée, on a $a_i^{-1} \cdot n_i \rightarrow 1$ (resp. $a_i \cdot u_i \rightarrow 1$).*

Démonstration. Notons \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de \mathbf{G} et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\mathbb{K})$. Notons \mathfrak{u}_I l'algèbre de Lie de \mathbf{U}_I et $\mathfrak{u}_I = \mathfrak{u}_I(\mathbb{K})$. Il existe $f : U_I \rightarrow \mathfrak{u}_I$ un homéomorphisme A -équivariant (i.e. $f(a \cdot u) = \text{Ad}(a)(f(u))$) [Mar, 1.3.3]. On note \mathfrak{g}_α l'ensemble des $Z \in \mathfrak{g}$ tels que $\text{Ad}(a)Z = \alpha(a)Z$ pour tout a de A . Alors $\mathfrak{u}_I = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_I^+} \mathfrak{g}_\alpha$, où Φ_I^+ est l'ensemble des racines positives qui ne sont pas combinaison linéaire d'éléments de I . Notons $Z_i = f(n_i)$ et $Z_i = \sum_{\alpha \in \Phi_I^+} Z_i^\alpha$ la décomposition de Z_i dans $\mathfrak{u}_I = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_I^+} \mathfrak{g}_\alpha$, alors $f(a_i^{-1} \cdot n_i) = \text{Ad}(a_i^{-1})Z_i = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_I^+} \alpha(a_i)^{-1} Z_i^\alpha$. Pour tout $\alpha \in \Phi_I^+$, la suite $(Z_i^\alpha)_i$ est bornée, et $|\alpha(a_i)^{-1}|$ tend vers 0. (car α est combinaison linéaire positive d'éléments de $\Lambda - I$), On a donc que $f(a_i^{-1} \cdot n_i) \rightarrow 0$ dans \mathfrak{u}_I , et donc $a_i^{-1} \cdot n_i \rightarrow 1$ dans U_I . \square

2. ACTIONS NON-PARABOLIQUES EN GÉOMÉTRIE CAT(0)

Dans cette section, on se place dans le cadre général où G est un groupe topologique métrisable agissant proprement sur un espace X métrique CAT(0) (hypothèses et notations de la section 1.1).

2.1. Déplacement d'une action.

Définition 4. Soit $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ une action de Γ sur X . On appelle *fonction de déplacement* de ρ (relativement à la partie génératrice S) et on note d_ρ la fonction convexe continue de X dans $[0, +\infty[$

$$d_\rho : x \mapsto \sqrt{\sum_{s \in S} d(x, \rho(s)x)^2}.$$

On appelle *minimum de déplacement* de ρ (relativement à la partie génératrice S) et on note $\lambda(\rho)$ la borne inférieure de d_ρ sur X , et *ensemble de déplacement minimal* de ρ (relativement à la partie génératrice S) le convexe fermé $\text{Min}(\rho)$, éventuellement vide, formé des points de X où d_ρ atteint son minimum.

Remarques. On peut voir d_ρ , $\lambda(\rho)$ et $\text{Min}(\rho)$ comme des analogues des fonction de déplacement, longueur de translation et ensemble minimal classiques d'une isométrie individuelle g [BrHa, II,6.1] (et ces notions coïncident si S est réduite à un seul élément s et $g = \rho(s)$).

Attention (si S n'est pas réduite à un élément), $\text{Min}(\rho)$ n'est a priori pas stable par $\rho(\Gamma)$. Le centralisateur $Z(\rho)$ de ρ dans G préserve $\text{Min}(\rho)$.

La définition donnée ici diffère légèrement de celle de [Par] (où d_ρ est défini par $d_\rho(x) = \max_{s \in S} d(x, \rho(s)x)$). Cela ne change pas les propriétés qu'on y utilisait, car les deux versions sont des fonctions convexes continues équivalentes. Celle-ci est meilleure, notamment car elle passe bien aux produits (voir ci-dessous), et permet de prouver, dans les espaces symétriques, que "Min(ρ) non vide" implique la complète réductibilité (proposition 18).

Dans le cas où l'espace X est euclidien et le groupe G agit par translations, la fonction de déplacement d_ρ est constante (égale à $\lambda(\rho)$) et $\text{Min}(\rho)$ est l'espace X tout entier. Dans le cas où ρ préserve un convexe fermé Y , la fonction de déplacement de la restriction $\rho|_Y$ est la restriction $d_{\rho|_Y}$ de la fonction de déplacement de ρ , et comme la projection sur Y diminue d_ρ , on a $\lambda(\rho|_Y) = \lambda(\rho)$ et $\text{Min}(\rho|_Y) = \text{Min}(\rho) \cap Y$. Dans le cas où ρ préserve une décomposition de X en produit $X = X_1 \times X_2$, on note $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, et on a $d_\rho^2 = d_{\rho_1}^2 + d_{\rho_2}^2$, d'où $\lambda(\rho)^2 = \lambda(\rho_1)^2 + \lambda(\rho_2)^2$ et $\text{Min}(\rho) = \text{Min}(\rho_1) \times \text{Min}(\rho_2)$.

2.2. Actions non-paraboliques. Les actions (de Γ sur X) ne possédant pas de point fixe global dans le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de X ont des propriétés remarquables, que nous allons voir maintenant. La notion de représentation non-parabolique est juste une variante plus pratique de cette notion destinée à couvrir le cas où le G -espace X possède un facteur translaté non trivial X_0 (cf n° 1.1).

Définition 5. On dit qu'une action ρ de Γ sur X est *non-parabolique* si ρ n'a pas de point fixe global dans $\partial_\infty X - \partial_\infty X_0$ (ou, de manière équivalente, dans $\partial_\infty X'$).

Remarquons qu'une représentation est non-parabolique si et seulement si les éléments de la partie génératrice S n'ont pas de points fixes communs dans $\partial_\infty X'$.

2.2.1. Liens avec l'irréductibilité et la stabilité pour les groupes réductifs. Dans le cas où G est $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ agissant sur son espace symétrique X associé, une représentation est non-parabolique si et seulement si l'action linéaire sur \mathbb{R}^n associée est irréductible. Dans le cas où G est un groupe réductif un corps local \mathbb{K} , agissant sur son espace associé X (espace symétrique ou immeuble de Bruhat-Tits) (cf. hypothèses et notations de la section 1.2), une représentation ρ est non-parabolique si et seulement si elle est **G-irréductible** au sens de [Serre, 3.2.1], c'est-à-dire que son image $\rho(\Gamma)$ n'est incluse dans aucun \mathbb{K} -sous-groupe parabolique propre de **G** (en particulier les représentations (d'images) Zariski-denses sont non-paraboliques).

Cette notion est donc légèrement plus générale que la notion de représentation (ou S -uplet) *stable* de la théorie géométrique des invariants (i.e. $\mathbf{G} \cdot \rho$ fermé de Zariski et $Z_{\mathbf{G}}(\rho)/Z(\mathbf{G})$ fini), qui équivaut à la condition que $\rho(\Gamma)$ n'est inclus dans aucun sous-groupe parabolique (pas nécessairement défini sur \mathbb{K}) de \mathbf{G} [Ric, 4.1 et 16.7] (voir aussi par exemple [JoMi]). Ces deux notions ne sont en général pas équivalentes.

2.2.2. Caractérisation via l'ensemble minimal. La convexité de la fonction de déplacement permet d'obtenir la caractérisation fondamentale suivante.

Proposition 6. *Soit ρ une action de Γ sur X . Alors sont équivalents :*

- (1) *L'action ρ n'a pas de point fixe à l'infini.*
- (2) *La fonction de déplacement $d_\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ est propre.*
- (3) *L'ensemble minimal $\text{Min}(\rho)$ est compact non vide.*

En particulier, le centralisateur $Z(\rho)$ de ρ dans G est alors compact. □

Remarque 7. On a que ρ est non-parabolique si et seulement si ρ' est non-parabolique si et seulement si $\text{Min}(\rho')$ est compact non vide. Alors en particulier $\text{Min}(\rho) = X_0 \times \text{Min}(\rho')$ est non vide.

2.3. Action de G sur l'espace des actions non-paraboliques. On note maintenant $R_0(\Gamma, G)$ ou R_0 le sous-espace de R formé par les représentations de Γ dans G sans point fixe à l'infini, c'est-à-dire n'ayant pas de point fixe global dans $\partial_\infty X$. On note $R_{np}(\Gamma, G)$ ou R_{np} le sous-espace de R formé par les représentations non-paraboliques de Γ dans G ,

La propriété de base suivante permet de relier le défaut pour l'action de G d'être propre au voisinage de ρ dans R avec les points fixes à l'infini de ρ .

Lemme 8. *On considère une suite $(\rho_i)_i$ convergeant vers ρ dans R , et une suite $(g_i)_i$ dans G telle que la suite des conjugués $\rho'_i = g_i \cdot \rho_i$ soit bornée dans R . Si pour un (tout) point x de X , la suite des points $g_i^{-1}x$ tend vers un point α dans le bord à l'infini de X , alors ρ fixe α .*

Démonstration. Pour γ dans Γ fixé, le déplacement par $\rho_i(\gamma)$ du point x_i vaut $d(x_i, \rho_i(\gamma)x_i) = d(x, \rho'_i(\gamma)x)$, donc est borné. Par conséquent $\rho_i(\gamma)x_i$ tend vers α . Comme $\rho_i(\gamma)x_i$ tend aussi vers $\rho(\gamma)\alpha$, on a $\rho(\gamma)\alpha = \alpha$. □

Le résultat suivant s'en déduit directement.

Proposition 9. (1) *L'espace R_0 est un ouvert de R .*

(2) *Le groupe G agit proprement sur R_0 .*

Démonstration. La première assertion est claire par compacité du bord à l'infini de X et continuité de l'action de G (une limite de points fixes est un point fixe pour l'action limite). Montrons que G agit proprement sur R_0 . Si on a une suite $(\rho_i)_i$ qui tend vers ρ dans R_0 et une suite $(g_i)_i$ dans G telle que $g_i \cdot \rho_i$ soit bornée, alors la suite $(g_i)_i$ est bornée dans G . En effet, sinon $g_i^{-1}x_0$ n'est pas borné, donc quitte à extraire $g_i^{-1}x_0$ tend vers α dans le bord de X , qui est fixé par ρ par le lemme 8. C'est impossible car ρ n'a pas de point fixe à l'infini. □

Le résultat analogue suivant permet de couvrir le cas où le G -espace X possède un facteur translaté non trivial (l'espace R_0 est alors vide), en particulier il s'applique au cas des groupes réductifs non semisimples (cf. section 1.2).

Corollaire 10. *On suppose que le centre Z de G agit trivialement sur le facteur X' . On note $G' = G/Z$, qui agit sur X' . On suppose que l'action de G' sur X' est propre.*

(1) *L'espace R_{np} est un ouvert de R .*

(2) *Le groupe G' agit proprement sur R_{np} .*

Remarques. 1) Si l'action de G sur X est cocompacte, minimale (sans sous-espace convexe strict stable) (ce qui est automatique si les géodésiques de X sont extensibles [BrHa, II,6.20]) alors Z agit trivialement sur X' et par translations sur X_0 . Si de plus Z agit cocompactement sur X_0 , alors G/Z agit proprement sur X' .

2) Ce résultat est une généralisation de [Ric, proposition 11.11] : lorsque G est un groupe de Lie réductif réel, l'action de G/Z sur le sous-espace $(G^n)^s$ des n -uplets stables est propre.

3) En particulier, si ρ est non-parabolique, alors $G \cdot \rho$ est fermé dans R et $Z(\rho)/Z(G)$ est compact.

Démonstration. L'action de Z sur $R(\Gamma, G)$ est triviale, donc l'action de G passe au quotient en une action de G' sur $R(\Gamma, G)$. On note μ la projection canonique de G sur G' , et μ^* l'application continue de $R(\Gamma, G)$ dans $R(\Gamma, G')$ induite, qui est G' -équivariante. Par la proposition 9, on a que $R_0(\Gamma, G')$ est ouvert donc $R_{np}(\Gamma, G)$, qui est son image réciproque par μ^* continue, aussi. De plus G' agit proprement sur $R_0(\Gamma, G')$, donc aussi sur $R_{np}(\Gamma, G)$ [Bou, Ch. 3, §4, Prop. 5]. \square

3. REPRÉSENTATIONS COMPLÈTEMENT RÉDUCTIBLES

Dans cette section, on introduit la notion de représentation complètement réductible et on étudie des propriétés géométriques (i.e. de l'action sur l'espace métrique $CAT(0)$) naturellement reliées qui sont en fait équivalentes dans le cas des espaces symétriques.

3.1. Dans le cadre général des espaces métriques $CAT(0)$.

Définition 11. On dira qu'une représentation ρ (de Γ dans G) est *complètement réductible* (en abrégé, cr) si elle satisfait la condition suivante. Si un point α dans le bord à l'infini $\partial_\infty X$ de X est fixé par ρ , alors il existe un point β dans $\partial_\infty X$, opposé à α , également fixé par ρ .

En particulier, une représentation non-parabolique est complètement réductible.

Cette notion a été introduite et étudiée par J. P. Serre ([Serre]) dans le cadre des groupes agissant sur des immeubles sphériques (par exemple les sous-groupes des groupes algébriques réductifs sur un corps quelconque).

3.1.1. *Liens avec la semisimplicité dans les groupes réductifs.* Dans le cas où G est un groupe réductif un corps local agissant sur son espace $CAT(0)$ associé (espace symétrique ou immeuble affine) (voir section 1.2), une représentation ρ de Γ dans G est complètement réductible si et seulement si, pour tout \mathbb{K} -sous-groupe parabolique P de G contenant $\mathfrak{S}\rho$, il existe un \mathbb{K} -sous-groupe parabolique Q de G contenant $\mathfrak{S}\rho$, opposé à P . En particulier, dans le cas où $G = GL_n \mathbb{K}$, une représentation est complètement réductible si et seulement si l'action linéaire sur \mathbb{K}^n associée est semi-simple.

Si la caractéristique du corps \mathbb{K} est nulle, alors ρ est complètement réductible si et seulement si la composante neutre $\mathbf{H} = \overline{(\rho(\Gamma))^Z}^0$ de l'adhérence de Zariski de $\rho(\Gamma)$ est un groupe réductif ([Serre, Proposition 4.2]). Cela correspond donc à ρ semisimple (comme S -uplet de \mathbf{G}) au sens de [Ric]. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, Richardson a introduit une notion naturelle (dépendant seulement de la structure de groupe de Lie réel de G) de semisimplicité pour les S -uplets dans G^S (l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G est un module semisimple sous le groupe engendré), qui est équivalente à la précédente ([Ric, section 11]), donc à la complète réductibilité. En caractéristique quelconque, dans un corps algébriquement clos, Bate, Martin et Röhrle ont démontré [BMR] que la notion de complète réductibilité est équivalente à la notion de "forte réductivité" de Richardson [Ric].

3.1.2. *Sous-espace stable et ensemble minimal.* Une propriété d’une action ρ naturellement reliée à la “réductibilité” est la suivante (correspondant à la définition “Imp ρ réductif” de [Lab] dans le cadre où X une variété riemannienne simplement connexe à courbure négative ou nulle) : ρ stabilise un sous-espace convexe fermé Y de X et est non-parabolique dans Y . On a alors la propriété suivante.

Proposition 12 (Ensemble minimal non vide). *On suppose que la représentation ρ est non-parabolique dans un sous-espace (convexe fermé, stable) Y de X . Alors la fonction de déplacement d_ρ atteint sa borne inférieure, autrement dit $\text{Min}(\rho)$ est non vide.*

Démonstration. En effet, on a $\text{Min}(\rho|_Y) = \text{Min}(\rho) \cap Y$ par projection orthogonale sur le convexe fermé Y . Cet ensemble est non vide car ρ est non-parabolique dans Y (voir la remarque 7). \square

3.1.3. *Ensemble minimal non vide et topologie des orbites.* Voici quelques “bonnes” propriétés élémentaires des actions ρ telles que $\text{Min}(\rho)$ est non vide, relativement à la topologie des orbites sous conjugaison.

Proposition 13. *Supposons que X est quasi-homogène sous G , i. e. que l’action de G sur X est cocompacte.*

- (1) *Pour toute représentation ρ de \mathbb{R} , il existe une représentation ρ' dans l’adhérence de l’orbite de ρ sous G telle que $\text{Min}(\rho')$ est non vide, et $\lambda(\rho') = \lambda(\rho)$. En particulier, si l’orbite $G \cdot \rho$ de ρ est fermée, alors $\text{Min}(\rho)$ est non vide.*
- (2) *Soit $(\rho_i)_i$ une suite bornée dans \mathbb{R} , i. e. telle que $\lambda(\rho_i)$ est borné. Alors il existe une sous-suite de conjugués $\rho'_{i_k} \in G \cdot \rho_{i_k}$ convergeant vers ρ telle que $\text{Min}(\rho)$ n’est pas vide, et $\lambda(\rho) = \liminf \lambda(\rho_i)$.*

Démonstration. Le premier point est un cas particulier du deuxième point, prouvons ce dernier. Pour tout entier i , soit x_i un point de X tel que $d_{\rho_i}(x_i) \leq \lambda(\rho_i) + \frac{1}{i}$. Quitte à remplacer chaque ρ_i par un conjugué, on peut supposer que la suite (x_i) est bornée (car l’action de G sur X est cocompacte). Quitte à extraire, on a alors que x_i tend vers x et ρ_i tend vers ρ . La fonction d_ρ est la limite de d_{ρ_i} , donc partout supérieure ou égale à $\liminf \lambda(\rho_i)$. Or $d_\rho(x)$ est inférieur ou égal à $\liminf \lambda(\rho_i)$. On en conclut que $\lambda(\rho) = \liminf \lambda(\rho_i)$ et que x est dans $\text{Min}(\rho)$. \square

3.1.4. *Symétrie en un point intérieur.* Dans le cas des espaces symétriques, on verra que la propriété “ $\text{Min}(\rho)$ non vide” suffit en fait à caractériser les représentations complètement réductibles (proposition 18) (ce qui n’est pas le cas dans les arbres par exemple, voir le contre-exemple ci-dessous). Nous allons maintenant en voir l’idée principale.

Dans le cas où X est à géodésiques uniquement extensibles (i.e. tout rayon géodésique se prolonge de manière unique en une géodésique complète) (par exemple une variété de Hadamard), on peut définir l’opposé en $x \in X$ de $\alpha \in \partial_\infty X$. On dit qu’une partie Y de $\partial_\infty X$ est *symétrique par rapport à x* , si, pour tout point α de Y , l’opposé β de α en x est aussi dans Y . On dira que X est *sans demi-bande plate*, si les rayons parallèles se prolongent en géodésiques parallèles (c’est le cas des espaces symétriques ou plus largement des variétés de Hadamard analytiques) (on notera qu’un analogue de cette condition est utilisé dans [Lab]). On a alors la propriété suivante.

Proposition 14 ($\text{Min}(\rho)$ non vide implique cr). *On suppose que X est à géodésiques uniquement extensibles et sans demi-bande plate. On suppose que $\text{Min}(\rho)$ est non vide. Alors, pour tout point x dans $\text{Min}(\rho)$, l’ensemble $\text{Fix}_\infty(\rho)$ des points fixes de*

ρ dans le bord à l'infini de X est symétrique par rapport à x . En particulier, ρ est cr.

Démonstration. Supposons $\text{Min}(\rho)$ non vide. Soit x un point de $\text{Min}(\rho)$. Montrons que $\text{Fix}_\infty(\rho)$ est symétrique par rapport à x . Soit α un point fixe à l'infini de ρ et r la géodésique issue de x vers α . Pour tout s de S , la fonction $t \mapsto d(r(t), \rho(s)r(t))$ est décroissante sur \mathbb{R} . De plus la somme $d_\rho(r(t)) = \sqrt{\sum_{s \in S} d(r(t), \rho(s)r(t))^2}$ atteint son minimum en 0. Par conséquent, pour tout s de S , la fonction $t \mapsto d(r(t), \rho(s)r(t))$ est constante sur \mathbb{R}^+ , donc sur \mathbb{R} , c'est-à-dire que ρ fixe le symétrique $r(-\infty)$ en x de $\alpha = r(+\infty)$. \square

Remarque. On a au passage démontré que, pour X quelconque, si x est dans $\text{Min}(\rho)$ alors le cône en x sur $\text{Fix}_\infty(\rho)$ est inclus dans $\text{Min}(\rho)$. Il en découle que, si $\text{Min}(\rho)$ est non vide alors $\partial_\infty \text{Min}(\rho) = \text{Fix}_\infty(\rho)$.

3.1.5. *Un contre-exemple.* Dans le cas général, “non-parabolique dans un sous-espace convexe fermé stable” n'entraîne pas que ρ soit cr (ou que l'orbite $G \cdot \rho$ soit fermée), comme le montre le contre-exemple simple suivant.

On considère le groupe $G = \text{SL}_2\mathbb{K} \times \text{SL}_2\mathbb{K}$, pour un corps local \mathbb{K} non archimédien, agissant sur son immeuble de Bruhat-Tits X associé (produit de deux arbres X_1 et X_2). Soit $g = (g_1, g_2)$ dans G , avec g_1 diagonal et g_2 unipotent. Alors g_1 translate une géodésique de X_1 et g_2 fixe un point de X_2 donc g translate une géodésique Y de X , en particulier g est non-parabolique dans un sous-espace convexe fermé Y . Néanmoins, le groupe engendré par g n'est pas complètement réductible dans G .

3.2. **Dans les groupes réductifs.** On suppose désormais que G est un groupe réductif un corps local \mathbb{K} , agissant sur son espace $\text{CAT}(0)$ associé X (espace symétrique ou immeuble affine) (hypothèses et notations de la section 1.2). Les résultats de cette section découlent, par une simple traduction dans X , de [Serre].

Proposition 15. ([Serre, Prop 2.7]) *Si une représentation ρ fixe deux points opposés α, β à l'infini de X , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*

- (i) *L'action de ρ sur X est complètement réductible.*
- (ii) *L'action de ρ sur le sous-espace stable $X_{\alpha\beta}$ est complètement réductible.* \square

On s'intéresse maintenant au dévissage des représentations ρ paraboliques via leurs projections sur des sous-groupes de Lévy (qu'on appellera *réductions* de ρ), qui permet de “semisimplifier” ρ , comme le montre la proposition suivante.

Proposition 16. *Soit ρ dans \mathbb{R} . Soit α un point fixe à l'infini de ρ et β un point de $\partial_\infty X$ opposé à α . Soit $\rho_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} \circ \rho$.*

- (1) *Si ρ est complètement réductible, alors elle est conjuguée à $\rho_{\alpha\beta}$ (par un élément de U_α).*
- (2) *Si $\rho_{\alpha\beta}$ fixe un point α dans le bord à l'infini de $X^{\alpha\beta}$, alors ρ fixe une facette f'' de $\partial_\infty X$ dominant strictement la facette $f(\alpha)$.*
- (3) *Si α est un point de régularité maximale parmi les points fixes à l'infini de ρ , alors $\rho_{\alpha\beta}$ est non-parabolique dans le faisceau $X_{\alpha\beta}$.*

(voir aussi [Serre, prop. 3.3])

Démonstration. Le point 1 découle du fait que, en prenant β' opposé à α fixé par ρ , les projections correspondantes $p_{\alpha\beta}$ et $p_{\alpha\beta'}$ (qui fixe ρ) sont conjuguées (cf. section (1.2.4)).

Pour le point 2, comme le groupe $U_\alpha = \ker p_{\alpha\beta}$ fixe point par point l'étoile Δ_f de $f = f(\alpha)$, la représentation ρ coïncide avec $\rho_{\alpha\beta}$ sur Δ_f . Or $\rho_{\alpha\beta}$ fixe le segment de α à α' (pour la distance de Tits), donc la facette f' de l'étoile de $f(\alpha)$ qui contient

dans son intérieur un germe de ce segment. Le dernier point est une conséquence directe du précédent. \square

On en déduit immédiatement la caractérisation suivante de la complète réductibilité.

Corollaire 17. *Pour ρ dans R , les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (1) ρ est complètement réductible.
- (2) Ou bien ρ est non-parabolique dans X , ou bien ρ fixe deux points à l'infini opposés α et β , et est non-parabolique dans le faisceau $X_{\alpha,\beta}$. \square

3.3. Cas des espaces symétriques. Dans les espaces symétriques (i.e. dans le cas où le corps \mathbb{K} est archimédien, i.e. égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C}), on a maintenant obtenu l'équivalence des différentes caractérisations géométriques remarquables suivantes.

Proposition 18. *On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Pour ρ dans R , les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (1) La représentation ρ est complètement réductible.
- (2) Ou bien la représentation ρ est non-parabolique dans X , ou bien ρ fixe deux points à l'infini opposés α et β , et est non-parabolique dans le faisceau $X_{\alpha,\beta}$.
- (3) La représentation ρ stabilise un sous-espace convexe fermé Y de X , et est non-parabolique dans Y .
- (4) La fonction de déplacement $d_\rho : x \mapsto \sqrt{\sum_{s \in S} d(x, \rho(s)x)^2}$ atteint sa borne inférieure, autrement dit $\text{Min}(\rho)$ est non vide.
- (5) Il existe un point x de X tel que $\text{Fix}_\infty(\rho)$ est symétrique par rapport à x .

Démonstration. On vient de voir que (1) équivaut à (2) dans le cadre des groupes réductifs ([Serre], cf. Corollaire 17). On a clairement que (2) implique (3), et que (5) implique (1). L'implication (3) \Rightarrow (4) est vraie dans tout espace métrique CAT(0) propre X (proposition 12). L'implication (4) \Rightarrow (5) est vraie, pour tout x de $\text{Min}(\rho)$, dans le cadre plus général où X est à géodésiques uniquement extensibles et sans demi-bande plate (proposition 14). \square

4. SÉPARATION ET ESPACE QUOTIENT

On se place dorénavant dans le cadre où G est un groupe réductif sur un corps local agissant sur son espace (espace symétrique ou immeuble affine) associé (notations et hypothèses de la section 1.2). On s'intéresse maintenant aux propriétés topologiques de l'action de G par conjugaison sur l'espace $R = \text{Hom}(\Gamma, G) \subset G^S$ en lien avec les représentations complètement réductibles. On note R_{cr} le sous-espace formé des représentations complètement réductibles, et $\mathcal{X}_{cr} = R_{cr}/G$ l'espace topologique quotient. Notons que l'espace \mathcal{X}_{cr} est à base dénombrable (car R l'est).

On dira que deux points x et x' d'un espace topologique E sont *séparés* par une action continue de G dans E s'il existe deux voisinages V et V' de x et x' dont les orbites $G \cdot V$ et $G \cdot V'$ ne se rencontrent pas. Sinon, on dira que x et x' sont *G -voisins dans E* .

4.1. Séparation des orbites cr. Cette section est consacrée à la preuve du résultat suivant. On rappelle qu'une réduction d'une représentation ρ désigne une représentation de la forme $\sigma = p \circ \rho$ où $p : P \rightarrow L$ est la projection canonique d'un sous-groupe parabolique P contenant $\rho(\Gamma)$ sur un de ses sous-groupes de Lévy L (cf. section 3.2).

Théorème 19. *Soient ρ et ρ' deux points G -voisins dans R . Alors*

- (1) ρ et ρ' possèdent deux réductions conjuguées dans G .

- (2) Les adhérences de leurs orbites se rencontrent, i. e. $\overline{G \cdot \rho} \cap \overline{G \cdot \rho'} \neq \emptyset$.
- (3) Si de plus les représentations ρ et ρ' sont complètement réductibles, alors elles sont conjuguées, i.e. $G \cdot \rho = G \cdot \rho'$.

En particulier, l'espace topologique quotient $\mathcal{X}_{cr} = \mathbf{R}_{cr}/G$ est séparé.

En premier lieu, ainsi que l'exprime le lemme suivant, comme "les parties compactes ne comptent pas", on peut se ramener, grâce à un analogue de la décomposition de Cartan, à l'action d'une suite I -fondamentale de A .

Lemme 20. *On considère une action continue de G sur un espace topologique E à base dénombrable et deux points x et x' de E . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) Les points x et x' sont G -voisins dans E .
- (2) il existe h, k dans G , une partie I de Λ , une suite I -fondamentale $(a_i)_i$ de A , et une suite $(y_i)_i$ dans E , tels que $y_i \rightarrow y$ et $a_i \cdot y_i \rightarrow y'$ avec $y = h \cdot x$ et $y' = k \cdot x'$ quand $i \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Si x et x' sont G -voisins, il existe une suite $(x_i)_i$ dans E et une suite $(g_i)_i$ dans G telles que $x_i \rightarrow x$ et $g_i \cdot x_i \rightarrow x'$ quand $i \rightarrow +\infty$. Comme $\overline{\mathcal{C}}$ est un domaine fondamental pour l'action du sous-groupe compact $K = \text{Stab}_G(x_0)$ sur X , il existe $k_i \in K$ tel que $g_i x_0 = k_i v_i$ avec v_i dans $\overline{\mathcal{C}}$. Soit I l'ensemble des racines simples α de \mathbb{A} non bornées sur la suite (v_i) . La suite des projections v_i^I de v_i sur \mathbb{A}^I est alors bornée. La suite des projections $v_{i,I}$ de v_i sur \mathbb{A}_I est à distance bornée d'une suite $u_i = a_i x_0$, avec $a_i \in A_I$ (car A_I agit cocompactement sur \mathbb{A}_I). En notant $g_i = k_i a_i h_i$, la suite $(h_i)_i$ est bornée dans G car la suite $h_i x_0 = a_i^{-1} v_i$ du plat \mathbb{A} a ses composantes dans $\mathbb{A}^I \oplus \mathbb{A}_I$ bornées. Quitte à extraire on a donc que k_i tend vers k^{-1} et h_i tend vers h dans G , et la suite $y_i = h_i \cdot x_i$ convient. L'autre sens est clair. \square

On décrit maintenant les limites de conjugués par une suite I -fondamentale $(a_i)_i$ de A . La preuve repose sur la décomposition $U_I^- G_I U_I^+$ (cf prop. 1).

Proposition 21 (Action d'une suite I -fondamentale dans A). *Soit I une partie de Λ et $(a_i)_i$ une suite I -fondamentale dans A . Soient deux représentations ρ, ρ' de \mathbf{R} , et une suite $(\rho_i)_i$ convergeant vers ρ dans \mathbf{R} , telles que la suite des conjugués $(a_i \cdot \rho_i)_i$ tend vers ρ' . Alors*

- (1) La représentation ρ' est (d'image) incluse dans le sous-groupe parabolique P_I^+ , et ρ est (d'image) incluse dans le sous-groupe parabolique opposé P_I^- .
- (2) Les projections r et r' de ρ et ρ' sur le sous-groupe de Lévy commun G_I sont égales.
- (3) Soit $\rho = ur$ la décomposition de ρ suivant la décomposition $P_I^- = U_I^- G_I$ et $\rho' = rn'$ la décomposition de ρ' suivant la décomposition $P_I^+ = G_I U_I^+$. Alors, à partir d'un certain rang, on a $\rho_i = u_i r_i n_i$, pour des suites $r_i \rightarrow r$ dans $(G_I)^\Gamma$, et $u_i \rightarrow u$ dans $(U_I^-)^\Gamma$, et enfin $n_i = a_i^{-1} \cdot n'_i$ où $n'_i \rightarrow n'$ dans $(U_I^+)^\Gamma$.

Remarquons que le point 3 décrit complètement la situation. En effet, les propriétés de contraction de la conjugaison par la suite a_i sur U_I^- et U_I^+ (proposition 3) permettent de voir qu'on a la réciproque suivante (attention, ici $\rho_i : \Gamma \rightarrow G$ n'a pas de raisons a priori d'être un morphisme).

Proposition 22. *Soient $\rho = ur$ une représentation à valeurs dans $P_I^- = U_I^- G_I$ et $\rho' = rn'$ une représentation à valeurs dans $P_I^+ = G_I U_I^+$, de même projection r sur G_I . Pour toute suite I -fondamentale (a_i) de A_I , si $\rho_i = u_i r_i n_i$ avec $r_i \rightarrow r$*

dans $(G_I)^\Gamma$ et $u_i \rightarrow u$ dans $(U_I^-)^\Gamma$ quelconques, et $n_i = a_i^{-1} \cdot n'_i$ avec $n'_i \rightarrow n'$ dans $(U_I^+)^\Gamma$ quelconque, alors on a $\rho_i \rightarrow \rho$ et $a_i \cdot \rho_i \rightarrow \rho'$. En particulier, ρ et ρ' sont A -voisines. \square

Preuve de la proposition 21. Il suffit de prouver ces points “terme à terme”, c’est-à-dire pour un élément fixé γ de Γ . On note alors $g = \rho(\gamma)$ et $g' = \rho'(\gamma)$.

On commence par projeter, en utilisant une décomposition $U_J^- G_J U_J^+$, dans un G_J , a priori plus gros que G_I , tel que P_J^+ contient g' et P_J^- contient g . Puis on montre qu’en fait $J = I$ par un argument de minimalité, d’où le résultat pour le bon I .

Existence d’une facette à l’infini fixée “commune”. On note $v_i = \nu(a_i)$ (vecteur de la translation de \mathbb{A} réalisée par a_i). Quitte à extraire, on peut supposer que v_i tend vers un point v dans le bord à l’infini de la facette $\overline{\mathcal{C}}_I$. Soit \mathcal{C}_L la facette ouverte de \mathcal{C}_I contenant v . Alors g' fixe la facette à l’infini $\partial_\infty \mathcal{C}_L$ (d’après le lemme 8). De même, en remplaçant v_i par $-v_i$ qui tend vers $-v$, on voit que g fixe le bord à l’infini de la facette opposée $\mathcal{C}_L^- = -\mathcal{C}_L$.

Choix de J minimal. On suppose désormais que \mathcal{C}_J est une facette maximale (pour l’inclusion) parmi les facettes de \mathcal{C}_I telle que g' fixe $\partial_\infty \mathcal{C}_J$ (c’est-à-dire $g' \in P_J^+$) et g fixe $\partial_\infty(\mathcal{C}_J^-)$ (c’est-à-dire $g \in P_J^-$).

Soit $g = ur$ la décomposition de g suivant la décomposition $P_J^- = U_J^- G_J$ et $g' = rn'$ la décomposition de g' suivant la décomposition $P_J^+ = G_J U_J^+$.

Projection sur G_J via la décomposition $U_J^- G_J U_J^+$. On considère maintenant la décomposition $\mathcal{O}_J = U_J^- G_J U_J^+$ de la proposition 1 associée à J . Comme \mathcal{O}_J est ouvert et contient P_J^\pm , donc g et g' , les suites g_i et g'_i sont dans \mathcal{O}_J à partir d’un certain rang. On a donc les décompositions $g_i = u_i r_i n_i$ et $g'_i = u'_i r'_i n'_i$, où u_i et u'_i sont dans U_J^- , n_i et n'_i sont dans U_J^+ , et r_i et r'_i sont dans G_J . La décomposition $U_J^- G_J U_J^+$ étant unique, continue, et conservée par la conjugaison par a_i , on a que $r_i \rightarrow r$ et que $r'_i = a_i \cdot r_i \rightarrow r'$. De même, on a que $u_i \rightarrow u$ et que $n'_i = a_i \cdot n_i \rightarrow n'$.

Montrons enfin que $I = J$. Notons $v_i = v_i^J + v_{i,J}$ la décomposition de v_i suivant la somme orthogonale $\mathbb{A} = \mathbb{A}^J \oplus \mathbb{A}_J$. Si $J \neq I$, alors v_i^J n’est pas borné : en effet il existe $\alpha \in J - I$, et $\alpha(v_i^J) = \alpha(v_i)$ tend vers $+\infty$, car la suite v_i est I -fondamentale. Quitte à extraire, on a donc que v_i^J tend vers un point v^J dans le bord à l’infini de \mathbb{A}^J . Comme A_J agit cocompactement sur \mathbb{A}_J , il existe $b_i \in A_J$ tel que $v_{i,J} - \nu(b_i)$ reste borné. Notons $a'_i = a_i b_i^{-1}$, alors $a'_i x_0$ tend encore vers v . Comme A_J est central dans G_J , on a que $a'_i \cdot r_i = a_i \cdot r_i$, qui converge vers r' . On en déduit alors que r' fixe v^J (cf lemme 8). Comme $\alpha(v^J) \geq 0$ pour toutes les racines α de J et qu’on a $\alpha(v^J) > 0$ pour au moins une racine α de J (car $v^J \notin \mathbb{A}_J$), on a que le cône $\mathbb{R}^+ v^J \oplus \mathbb{A}_J$ rencontre une facette ouverte $\mathcal{C}_{J'}$ dominant strictement la facette \mathcal{C}_J . Comme r' fixe tous les points du bord à l’infini de $\mathbb{R}^+ v^J + \mathbb{A}_J$, il fixe la facette à l’infini $\partial_\infty \mathcal{C}_{J'}$. Donc g' fixe également $\partial_\infty \mathcal{C}_{J'}$ (car U_J fixe $\partial_\infty \overline{\mathcal{C}}$). On voit de même, en remplaçant a'_i par $(a'_i)^{-1}$ que g fixe le bord à l’infini de la facette opposée $\mathcal{C}_{J'}$ (car $(a'_i)^{-1} x_0 \rightarrow -v^J$). Ce qui contredit l’hypothèse “ \mathcal{C}_J maximale” faite ci-dessus, car $\mathcal{C}_{J'}$ domine strictement la facette \mathcal{C}_J . On a donc en fait $r'_i = r_i$ pour tout i (car $a_i \in A_J$ central dans G_J), d’où $r' = r$. \square

Preuve du théorème 19. Comme les réductions d’une représentation sont dans l’adhérence de son orbite (cf proposition 2) et qu’une représentation complètement réductible est conjuguée à toutes ses réductions (cf proposition 16, point 1), il suffit de voir le premier point. Quitte à conjuguer ρ et ρ' , on peut supposer qu’il existe une suite I -fondamentale (a_i) dans A et une suite ρ_i dans R convergeant vers ρ telles que $a_i \cdot \rho_i$ converge vers ρ' (lemme 20). Les points (1) et (2) de la proposition 21 permettent alors de conclure. \square

4.2. Semisimplification et plus gros quotient séparé. Soient ρ et ρ' dans R . D'après le théorème 19, ρ et ρ' sont G -voisines si et seulement si $\overline{G \cdot \rho} \cap \overline{G \cdot \rho'} \neq \emptyset$. On note dans ce cas $\rho \sim \rho'$, et il est facile de voir que \sim est alors une relation d'équivalence. On note $R//G = R/\sim$ l'espace topologique quotient, et $p : R \rightarrow R//G$ la projection correspondante (qui passe au quotient en une application continue surjective $\bar{p} : R/G \rightarrow R//G$).

Théorème 23. (1) *Pour tout ρ de R , l'adhérence de $G \cdot \rho$ contient une unique orbite complètement réductible.*

On note $\pi : R \rightarrow \mathcal{X}_{cr}$ la projection G -invariante associée (semisimplification).

(2) *L'application π est continue et induit un homéomorphisme de $R//G$ sur \mathcal{X}_{cr} . En particulier, $R//G$ (resp. \mathcal{X}_{cr}) est le plus gros quotient séparé de R sous G (toute application continue G -invariante f de R vers un espace séparé factorise à travers p (resp. π)).*

Remarques. Le point 1 est prouvé dans [Ric] pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par ailleurs, un résultat analogue, mais en remplaçant les orbites cr par les orbites fermées, et pour des actions plus générales de groupes réductifs, est prouvé dans [Luna] et [RiSl] pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et dans [Bre, 5.4 et 5.11] plus généralement pour \mathbb{K} de caractéristique nulle. Il implique le résultat ci-dessus quand on sait que les orbites fermées sont exactement les orbites complètement réductibles ([Ric] pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et, plus généralement pour \mathbb{K} de caractéristique nulle, on peut le déduire de [Ric] et [Bre]).

Démonstration. Pour le point 1 : En projetant sur un sous-groupe de Lévy correspondant à un point fixe de ρ de régularité maximale dans le bord à l'infini de X , on obtient une représentation complètement réductible adhérente à l'orbite de ρ (Proposition 16 et corollaire 17). L'unicité à conjugaison près découle de la séparation des orbites cr (théorème 19).

Pour le point 2, il s'agit essentiellement de montrer la continuité de π . Les arguments suivants sont inspirés par des idées de Maxime Wolff [Wol]. Comme R et \mathcal{X}_{cr} sont à base dénombrable et séparés (théorème 19), il suffit de montrer que, si ρ_i tend vers ρ dans R , alors, quitte à extraire, $\pi(\rho_i)$ tend vers $\pi(\rho)$. On peut tout d'abord supposer ρ complètement réductible (quitte à remplacer ρ par σ dans $\overline{G \cdot \rho}$ et complètement réductible, et ρ_i par une suite extraite et conjuguée qui converge vers σ). Si ρ n'a pas de point fixe à l'infini, alors, à partir d'un certain rang ρ_i n'en a pas non plus, et est donc complètement réductible. On a donc que $\pi(\rho_i) = [\rho_i]$ tend vers $[\rho] = \pi(\rho)$ dans \mathcal{X}_{cr} , ce qui conclut. Sinon, on peut choisir un point fixe à l'infini α_i de ρ_i de régularité maximale, de type constant (c'est-à-dire dans une orbite de G fixée) (quitte à extraire). Quitte à extraire, on peut supposer que α_i tend vers un point α de $\partial_\infty X$, qui est alors fixé par ρ . Quitte à remplacer ρ_i par un conjugué $k_i \cdot \rho_i$ avec $(k_i)_i$ une suite dans le sous-groupe compact $K = \text{Stab}_G(x_0)$ convergeant vers 1, on peut supposer que α_i est toujours égal à α (en prenant k_i tel que $k_i \alpha_i = \alpha$). Comme ρ est complètement réductible, elle fixe un point β de $\partial_\infty X$ opposé à α . La composée σ_i de ρ_i par la projection $p_{\alpha\beta}$ est alors une semisimplification de ρ_i (proposition 16 et corollaire 17), et tend vers $p_{\alpha\beta} \circ \rho = \rho$. On a donc que $[\sigma_i] = \pi(\rho_i)$ tend vers $[\rho] = \pi(\rho)$ dans \mathcal{X}_{cr} , ce qui conclut pour la continuité de π .

L'application π passe alors au quotient en $\bar{\pi} : R//G \rightarrow \mathcal{X}_{cr}$ continue, et on vérifie aisément que la restriction de $\bar{p} : R/G \rightarrow R//G$ à \mathcal{X}_{cr} en est un inverse. \square

Remarque. L'espace \mathcal{X}_{cr} est dénombrable à l'infini et localement compact : en effet l'image par $\pi : R \rightarrow \mathcal{X}_{cr}$ de la trace sur R_{cr} d'une base dénombrable d'ouverts

relativement compacts de \mathbb{R} fournit une base dénombrable d'ouverts (car la restriction de π à R_{cr} est ouverte et surjective) relativement compacts (car π est continue sur \mathbb{R}) de \mathcal{X}_{cr} .

RÉFÉRENCES

- [BMR] M. Bate, B. Martin, G. Röhrle, *A geometric approach to complete reducibility*, Invent. Math. **161** (2005), 177–218.
- [Borel1] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Math., **126**. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Borel2] A. Borel, *Linear algebraic groups*. 1966 Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965) 3–19.
- [BoTi] A. Borel, J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. math. I.H.É. S. **27**, 1965, 55-150.
- [Bou] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1971.
- [Bre] R. J. Bremigan, *Quotients for algebraic group actions over non-algebraically closed fields*, J. Reine Angew. Math. **453** (1994), 21–47.
- [BrHa] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag, 1999.
- [BrTi] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local, I. Données radicielles valuées*, Publ. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-252.
- [Ebe] P. Eberlein, *Geometry of non-positively curved manifolds*, Chicago L. N. in Math., The Univ. of Chicago Press, 1996.
- [Hel] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [JoMi] D. Johnson, J. J. Millson, *Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds*, Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984), Progr. Math. **67**, Birkhäuser (1987) 48-106.
- [Lab] F. Labourie, *Existence d'applications harmoniques tordues à valeurs dans les variétés à courbure négative*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991) 877-882.
- [LuMa] A. Lubotzky, A. R. Magid, *Varieties of representations of finitely generated groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **58**, 1985.
- [Luna] D. Luna, *Sur certaines opérations différentiables des groupes de Lie*, Amer. J. Math. **97** (1975), 172–181.
- [Mar] G. Margulis, *Discrete subgroups of semi-simple groups*, Ergeb. Math. Grenz. **17**, Springer Verlag, 1991.
- [Par] A. Parreau, *Dégénérescences de sous-groupes discrets de groupes de Lie semisimples et actions de groupes sur des immeubles affines*, thèse de doctorat, Univ. Orsay, 2000.
- [Ric] R. W. Richardson, *Conjugacy classes of n -tuples in Lie algebras and algebraic groups*, Duke Math. J. **57** (1988) 1-35.
- [RiSl] R. W. Richardson, P. J. Slodowy, *Minimum vectors for real reductive algebraic groups*, J. London Math. Soc. **42** (1990), 409–429.
- [Serre] J.-P. Serre, *Complète Reductibilité*, Séminaire Bourbaki 2003-2004, Astérisque **299**, Exp. No. 932, 195-217.
- [Tits] J. Tits *Reductive groups over local fields*, Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., 1979, 29–69.
- [Wolf] M. Wolff, *Sur les composantes exotiques des espaces d'actions de groupes de surfaces sur le plan hyperbolique*, thèse de doctorat, Univ. Grenoble 1, 2007.

INSTITUT FOURIER, UMR 5582, BP 74, UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I, 38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES CEDEX, FRANCE

E-mail address: Anne.Parreau@ujf-grenoble.fr