



**HAL**  
open science

# Modélisation plastique bi-linéaire de l'usure de matériaux abrasables: application aux turbo-machines

Mathias Legrand, Christophe Pierre

## ► To cite this version:

Mathias Legrand, Christophe Pierre. Modélisation plastique bi-linéaire de l'usure de matériaux abrasables: application aux turbo-machines. 9e colloque national en calcul des structures, May 2009, Giens, France. hal-00390869

**HAL Id: hal-00390869**

**<https://hal.science/hal-00390869>**

Submitted on 2 Jun 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Modélisation plastique bi-linéaire de l'usure de matériaux abrasables: application aux turbo-machines

M. Legrand, C. Pierre

Laboratoire de Vibrations et Dynamique des Structures  
Département de Génie Mécanique, Université McGill  
817, rue Sherbrooke Ouest, Montréal, QC, H3A 2K6, Canada  
{mathias.legrand,ronan.ung,christophe.pierre}@mcgill.ca

---

**Résumé** — Une prise en compte de l'usure des matériaux abrasables dans les turbo-machines est présentée. Il s'agit plus précisément d'intégrer une loi d'usure simplifiée dans un code d'intégration temporelle explicite dédié à l'étude de l'interaction aube-carter dans un moteur d'avion. L'usure et son rôle sur l'évolution du jeu de fonctionnement sont calculés en temps réel grâce à une loi de comportement plastique de l'abrasable. Il est montré que le comportement de ce matériau est à l'origine de zones d'interaction dangereuses vis-à-vis de la stabilité de l'aube.

**Mots clés** — matériaux abrasables, dynamique explicite, plasticité bi-linéaire

---

## 1 Introduction

La nécessité permanente de réduire les coûts d'achat et de fonctionnement des moteurs d'avion pousse les constructeurs à développer des technologies innovantes comme, par exemple, l'intégration de matériaux légers de type composite capables de résister à des températures élevées ou la mise en œuvre de méthodes d'optimisation dédiées à une meilleure efficacité aérodynamique des aubages. Une composante assez nouvelle concerne la diminution des possibles pertes de charge aérodynamique par fermeture des jeux fonctionnels entre sommets d'aubes et carter. Inévitablement, les contacts structuraux entre les parties tournantes et statiques deviennent courants et il est maintenant usuel de les entrevoir comme faisant partie de la vie normale d'une turbo-machine [1].

C'est dans ce cadre que sont développés les matériaux abrasables disposés en revêtement sur la circonférence du carter faisant face aux sommets d'aubes, au niveau de la zone bleue sur la figure 1. En plus d'une réduction du jeu de fonctionnement nominal, ils s'ajustent mécaniquement pour accepter sans dommage des contacts entre les différents composants et présentent les propriétés mécaniques suivantes [2] :

- résistance aux températures élevées et aux flux de gaz haute pression transportant des particules circulant à des vitesses très élevées ;
- ductilité suffisante afin de ne pas endommager les aubes en cas d'interaction.

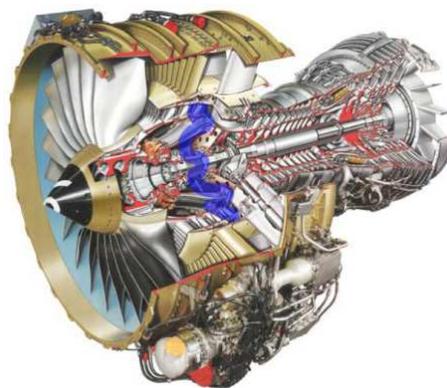


Figure 1 – Compresseur basse pression (Snecma, Groupe Safran)

Malheureusement, il a été détecté expérimentalement que l'usure des revêtements abrasables jouait un rôle clé dans l'apparition de comportements divergents en pieds d'aubes. Il semble donc important de développer des modèles prédictifs menant à une meilleure compréhension de ces événements.

La modélisation de l'usure des matériaux abrasables constitue une difficulté majeure du fait de l'ensemble des mécanismes de fissuration, rupture, plastification et décollement impliqués [3, 4]. L'identification expérimentale de ces matériaux est sujet de nombreuses études [5] mais leur modélisation dans des configurations réalistes semble limitée.

Dans ce travail, l'usure est entrevue très simplement comme équivalente à de la plastification [6] uni-axiale, quasi-statique et en compression uniquement. Cette hypothèse permet un archivage en temps réel du profil d'usure, phénomène qui déclencherait l'instabilité. L'outil numérique développé est adapté au cas de l'interaction d'une aube avec un carter rigide, support du matériau abrasable. Les équations du mouvement sont résolues par une approche temporelle explicite de type prédiction/correction pour une gestion précise des conditions de contact et de plasticité.

## 2 Modèles et équations du mouvement

Il s'agit d'étudier la dynamique d'une aube en surlongueur qui vient contacter un carter sur lequel est disposé un revêtement abrasable. La mise en contact réelle est complexe et est initiée ici simplement par un chargement externe sur le carter (figure 2(a)) du compresseur basse pression, structure insensible à l'interaction et dont la dynamique n'est pas prise en compte. L'abrasable, quant à lui, est discrétisé en éléments barres quasi-statiques travaillant en compression avec une phase plastique afin de conserver un profil d'évolution et d'en comprendre le rôle dans la naissance d'un comportement divergent.

Pour des temps de calcul moindres, la dynamique de l'aube est projetée sur une base réduite de Craig-Bampton [7] pour laquelle trois nœuds frontières, où seront traitées les conditions de contact, sont retenus comme illustré sur la figure 2(b). La base de réduction contient neuf modes statiques d'interface et cent modes propres à interface fixe, dans laquelle les équations du mouvement prennent la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (1)$$

où  $\mathbf{u}$  représente le champ de déplacement de l'aube et  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{K}$ , les matrices masse, amortissement et raideur, respectivement. Les efforts de contact  $\boldsymbol{\lambda}$  sont déterminés par les conditions de Signorini usuelles qui s'écrivent au niveau des trois nœuds frontières :

$$\boldsymbol{\lambda} \geq 0, \quad \mathbf{g} \geq 0, \quad \boldsymbol{\lambda}\mathbf{g} = 0 \quad (2)$$

pour lesquelles sont contenues dans  $\mathbf{g}$  les fonctions distances entre l'aube et les éléments d'abrasable comme indiqué sur la figure 2(c). Ces dernières dépendent donc du champ de déplacement de l'aube et des déformations plastiques de l'abrasable dont l'équilibre quasi-statique avec les forces de contact s'écrit :

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}_{\text{int}} \quad (3)$$

Dans l'équation (3), le terme  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  contient les forces intérieures des barres potentiellement en contact avec l'aube à l'instant  $t$  et est organisé de manière cohérente avec le champ de déplacement de l'aube, tout comme  $\boldsymbol{\lambda}$ .

## 3 Rappels sur la plasticité

Du fait des hypothèses de travail concernant le matériau abrasable, la plasticité est ici rappelée dans sa forme uni-axiale avec compression uniquement. Par convention, les contraintes et les

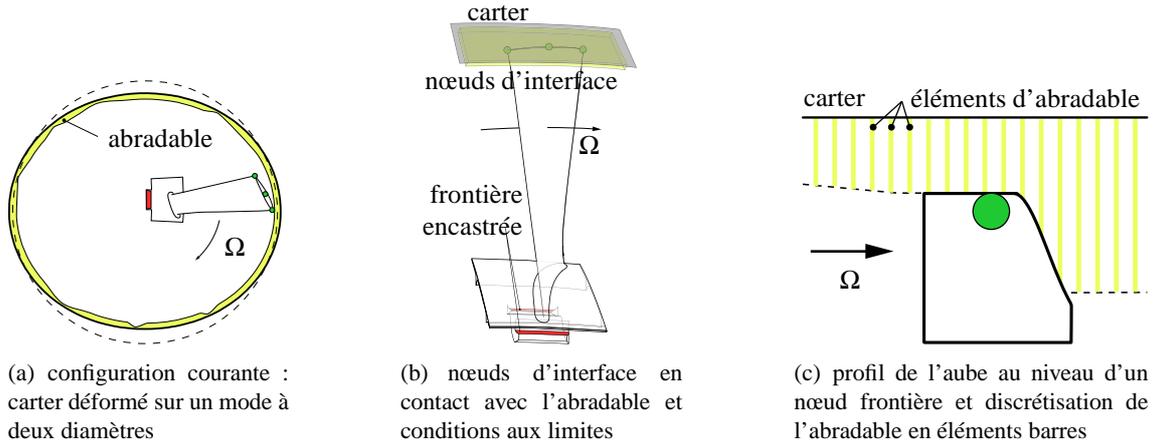


Figure 2 – Aube de compresseur en situation d'interaction

déformations sont donc limitées au domaine  $(\varepsilon, \sigma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Soient une loi de plasticité avec écrouissage isotropique et  $\mathbb{E}_\sigma$ , l'ensemble des contraintes admissibles :

$$\mathbb{E}_\sigma = \{(\sigma, \alpha) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus f(\sigma, \alpha) \leq 0\} \quad (4)$$

où  $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est la variable d'écrouissage interne et  $f$ , une fonction critère. Il est supposé (1) que la déformation totale est séparée entre sa partie élastique  $\varepsilon^e$  et sa partie plastique  $\varepsilon^p$  tel que  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$  et (2) que la relation déformations élastiques-contraintes est linéaire  $\sigma = E\varepsilon^e$ . L'écrouissage est isotropique, donc le centre de  $\mathbb{E}_\sigma$  reste à l'origine, et linéaire selon l'écoulement plastique  $\dot{\varepsilon}^p$ . Ceci mène à un critère de la forme :

$$f(\sigma, \alpha) = \sigma - (\sigma_Y + K\alpha) \quad (5)$$

où  $\sigma_Y > 0$  est la limite élastique et  $K \geq 0$ , le module plastique. La seconde hypothèse permet de considérer uniquement l'équation d'évolution  $\dot{\alpha} = \dot{\varepsilon}^p$  et la condition sur l'écoulement est telle qu'il existe  $\gamma \geq 0$ , paramètre de consistance, tel que  $\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma}$ , ce qui entraîne  $\dot{\varepsilon}^p = \gamma$  du fait de (5).

Les variables duales  $\gamma$  et  $f$  obéissent aux conditions de Kuhn-Tucker, augmentées de la condition de consistance :

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, \alpha) = 0, \quad \gamma \dot{f}(\sigma, \alpha) = 0 \quad (6)$$

Pour une formulation quasi-statique en déformation, adaptée au cadre des éléments finis en déplacement, et pour une loi uni-axiale de type compression, la stratégie de résolution se simplifie grandement même si la nature non-linéaire de la loi de comportement ne peut se traduire que par des approches incrémentales. Soient un état admissible et un incrément de déformation imposé  $\Delta\varepsilon$  tel que :

$$\sigma^{\text{pré}} = E\Delta\varepsilon + \sigma; \quad \Delta\varepsilon^p = 0; \quad \Delta\alpha = 0; \quad f^{\text{pré}} = \sigma^{\text{pré}} - (\sigma_Y + K\alpha) \quad (7)$$

Afin de s'assurer que l'incrément en déformation a engendré un état compatible, il est nécessaire de tester la valeur  $f^{\text{pré}}$  :

- si  $f^{\text{pré}} \leq 0$ , alors l'état supposé est l'état actuel puisqu'il est admissible ;
- si  $f^{\text{pré}} > 0$ , la condition est violée et l'état supposé doit être corrigé. Il s'agit de projeter l'état du système prédit sur la frontière de la fonction seuil  $f = 0$  à déformation constante. Dans ce cadre, il est aisé de démontrer par variation de l'équation (5) que :

$$f = f^{\text{pré}} - \gamma(E + K) \quad (8)$$

Par conséquent  $f = 0$  implique  $\gamma = f^{\text{pré}} / (E + K)$  et donc la mise à jour suivante :

$$\sigma = \sigma^{\text{pré}} - E\gamma; \quad \Delta\varepsilon^p = \gamma; \quad \Delta\alpha = \gamma \quad (9)$$

## 4 Intégration numérique et résolution

Le phénomène d'usure étudié a un caractère fortement transitoire. Une intégration numérique temporelle représente par conséquent un choix naturel pour résoudre les équations du mouvement. Dans ce travail, c'est la méthode des différences finies centrées qui est plébiscitée parce qu'elle permet une prise en compte simple des non-linéarités conditionnelles de types plasticité et contact.

Soit un découpage uniforme d'un intervalle  $[0 T]$  tel que  $t_{n+1} = t_n + h$  où  $h$  représente le pas de temps du schéma. Accélération et vitesse s'écrivent :

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{h^2} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2h} \quad (10)$$

où  $\mathbf{u}_n$  est une quantité vectorielle approchée de déplacement  $\mathbf{u}(t_n)$  recherché.

À l'image de ce qui est proposé dans [8], il s'agit d'adopter un schéma de prédiction/correction. En relisant les équations (1) et (3), les efforts de contact deviennent une variable intermédiaire qui n'est pas traitée ici. En termes simples, il faut, pour chaque pas de temps, tester si l'aube a pénétré l'abradable pendant la phase de prédiction et si tel est le cas, corriger son déplacement afin que sa dynamique soit en équilibre avec les forces intérieures de l'abradable. L'algorithme final est le suivant :

1. **Prédiction des déplacements**  $\mathbf{u}_{n+1}$  du pas de temps courant  $n$  sans prendre en compte les contraintes de contact. Ces déplacements prédits  $\mathbf{u}_{n+1}^{\text{pré}}$  s'écrivent :

$$\mathbf{u}_{n+1}^{\text{pré}} = \left[ \frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\mathbf{D}}{2h} \right]^{-1} \left( \left( \frac{2\mathbf{M}}{h^2} - \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_n + \left( \frac{\mathbf{D}}{2h} - \frac{\mathbf{M}}{h^2} \right) \mathbf{u}_{n-1} \right) \quad (11)$$

2. **Détermination des distances** entre l'aube et l'abradable, distances regroupées dans le vecteur  $\mathbf{g}_{n+1}$ . Une procédure de recherche identifie tous les éléments d'abradable, dont les indices  $i$  sont rassemblés dans l'ensemble  $I$ , contactés par les nœuds frontières de l'aube.
3. **Calcul des forces intérieures dans l'abradable** grâce à l'incrément de déformation  $\Delta\epsilon$  induit par les pénétrations. Les contraintes respectives  $\sigma_{i \in I}$ , les variables d'érouissage  $\alpha_{i \in I}$  et les déformations plastiques  $\epsilon_{i \in I}^p$  sont mises à jour en utilisant la procédure définie plus haut. Le vecteur des forces intérieures s'obtient par intégration sur le domaine de chaque élément d'abradable impacté :

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \sum_{i \in I} S_i \sigma_i \quad (12)$$

où  $S_i$  représente l'aire de la section du  $i^{\text{e}}$  élément barre et dépend de la densité numérique d'abradable.

4. **Correction des déplacements**

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{\text{pré}} - \left[ \frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\mathbf{D}}{2h} \right]^{-1} \mathbf{F}_{\text{int}} \quad (13)$$

### 4.1 Résultats

#### Convergence

La densité des barres d'abradable sur la circonférence du carter est sujette à investigation afin d'assurer la convergence de l'algorithme. Il s'agit de trouver le nombre minimal d'éléments d'abradable conduisant à un profil d'usure invariant après plusieurs passages de l'aube. Une simulation sur dix tours est menée. Le niveau vibratoire observé sur l'aube pour ces trois densités d'abradable est indiqué sur la figure 3(a) : la différence entre les courbes est négligeable. Le profil issu

de l'interaction est quant à lui illustré sur la figure 3(b) pour laquelle la différence entre les courbes est également faible. Ces résultats confirment que la convergence en espace est atteinte pour une certaine densité d'abradable.

Du fait du caractère conditionnellement stable du schéma choisi, il est aussi nécessaire de s'assurer de la convergence par rapport au pas de temps. Il existe un pas de temps seuil en dessous duquel les résultats coïncident et deviennent pertinents. Le déplacement de l'aube est indiqué sur la figure 3(c) pour trois pas de temps différents : les différences sont négligeables et le pas de temps maximal admissible est de l'ordre de  $h = 5 \cdot 10^{-7}$  s.

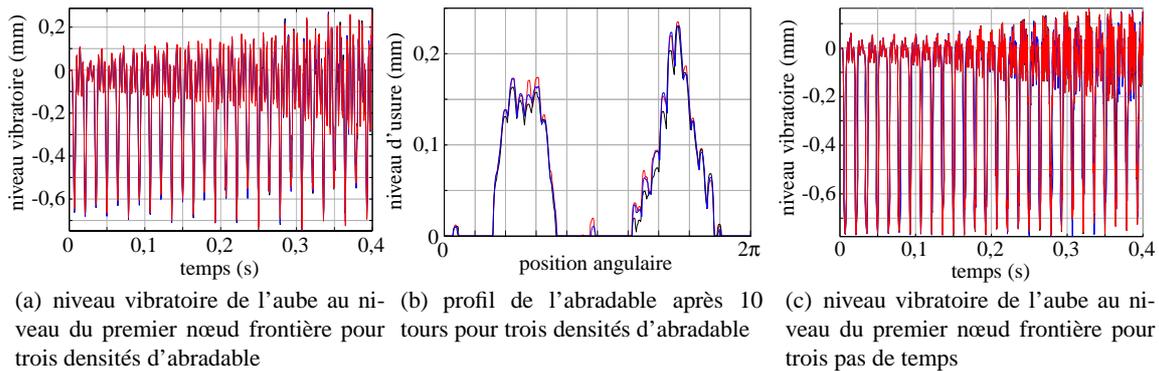


Figure 3 – Étude de la convergence de l'outil numérique pour  $\Omega = 0,38f_1$

### Cas d'interaction

Les niveaux d'usure sont pilotés par les paramètres de la loi de comportement plastique  $\sigma_S$ ,  $K$  et  $E$ . Trois situations sont analysées à jeu fonctionnel initial égal : la première sans usure avec contact direct, la seconde avec une faible usure finale et la dernière avec un niveau d'usure élevé. Les niveaux vibratoires sont illustrés par des diagrammes donnant le contenu fréquentiel de la réponse de l'aube en fonction de sa vitesse de rotation sur la figure 4. Apparaît clairement la

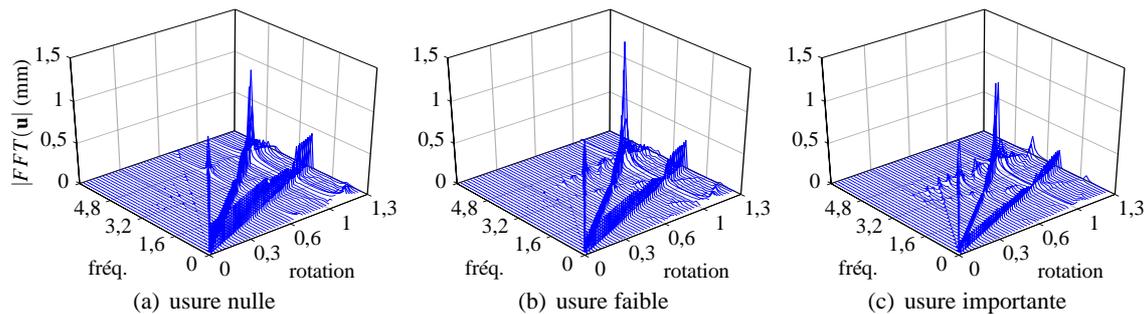


Figure 4 – Contenu fréquentiel de la réponse de l'aube, normalisé par rapport à sa 1<sup>re</sup> fréquence propre  $f_1$ , en fonction du niveau d'usure de l'abradable

deuxième harmonique de la vitesse de rotation du fait de la déformée imposée au carter. Il est intéressant de voir que lorsque l'excitation non linéaire de l'aube croise sa première fréquence propre  $f_1$ , les niveaux vibratoires augmentent mais dépendent aussi de la ductilité de l'abradable. Un contact direct limite directement les amplitudes de vibration, une faible usure autorise des amplitudes de vibration plus élevées avec des efforts de contact qui les alimentent et une usure importante limite les efforts de contact et l'excitation de l'aube. Il y a donc un compromis à trouver entre ductilité et ouverture du jeu.

## 5 Conclusion

La modélisation de l'usure d'un revêtement abrasable, matériau utilisé dans les moteurs d'avion, est proposée sous la forme très simple d'une loi de comportement plastique. Lors du passage d'une aube, l'abrasable est écrasé, plastifié et conserve un profil d'usure en temps réel. Les simulations montrent que la convergence en espace et en temps est assurée.

Deux cas d'usure avec des caractéristiques matériau différentes illustrent la sensibilité de l'interaction aube-carter à l'abrasable. Il s'avère que le revêtement, en s'usant, ouvre le jeu de fonctionnement et autorise des déplacements de l'aube de plus en plus importants. Ce comportement indésirable est cohérent avec des résultats expérimentaux déjà observés.

À l'avenir, il faudra ajouter le frottement. La loi d'usure sera améliorée au niveau de ses comportements mécaniques (limiter les possibles phénomènes de rebonds engendrés par la loi actuelle) et algorithmique (augmenter la vitesse d'exécution). Il s'agira ensuite de généraliser les types de matériaux et d'intégrer ces modèles à des étages où le carter est flexible, ceci afin d'améliorer la compréhension des interactions modales déjà étudiées dans le cadre du contact unilatéral [9] et d'explorer de nouveaux scénarios d'interaction.

## Remerciements

Les auteurs remercient la Société Snecma pour son soutien technique et financier. Ce travail s'inscrit dans le projet fédérateur MAIA de recherche et technologie en mécanique soutenu par le CNRS, l'Onera et le groupe SAFRAN.

## Références

- [1] S.K. Sinha : Non-linear dynamic response of a rotating radial timoshenko beam with periodic pulse loading at the free-end. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40:113–149, 2005.
- [2] M. Yi, J. He, B. Huang et H. Zhou : Friction and wear behavior and abrasability of abrasable seal coating. *Wear*, 231:47–53, 1999.
- [3] Y.-F. Wang et Z.-G. Yang : Finite element model of erosive wear on ductile and brittle materials. *Wear*, 265(5-6):871–878, 2008.
- [4] M.S. Eltongy et M.A. Elbestawi : Finite element modeling of erosive wear. *Wear*, 45(11): 1337–1346, 2005.
- [5] F. Peyraut, J.-L. Seichepine, C. Coddet et M. Hertter : Finite element modeling of abrasable materials - identification of plastic parameters and issues on minimum hardness against coating's thickness. *International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design and Optimization*, 2:209–215, 2008.
- [6] J.C. Simo et T.J.R. Hughes : *Computational Inelasticity*. 1998.
- [7] R.R. Craig et C.C. Bampton : Coupling of substructures for dynamics analyses. *AIAA Journal*, 6(7):1313–1319, 1968.
- [8] N.J. Carpenter, R.L. Taylor et M.G. Katona : Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:130–128, 1991.
- [9] M. Legrand, C. Pierre, P. Cartraud et J.-P. Lombard : Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction. *Journal of Sound and Vibration*, 319:366–391, 2009.