



**HAL**  
open science

## Modes non-linéaires appliqués aux problèmes de contact : application à une aube de turbomachine

Denis Laxalde, Mathias Legrand, Christophe Pierre

### ► To cite this version:

Denis Laxalde, Mathias Legrand, Christophe Pierre. Modes non-linéaires appliqués aux problèmes de contact : application à une aube de turbomachine. Colloque national en calcul des structures, May 2009, Giens, France. pp.Session dynamique 2. hal-00390124

**HAL Id: hal-00390124**

**<https://hal.science/hal-00390124v1>**

Submitted on 1 Jun 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modes non-linéaires appliqués aux problèmes de contact: application à une aube de turbomachine

D. Laxalde, M. Legrand et C. Pierre

Laboratoire de Vibrations et Dynamique des Structures  
Département de Génie Mécanique, Université McGill  
817, rue Sherbrooke Ouest, Montréal, QC, H3A 2K6, Canada  
{denis.laxalde,mathias.legrand,christophe.pierre}@mcgill.ca

---

**Résumé** — Une méthode d’analyse modale non-linéaire pour les systèmes mécaniques comportant des interfaces de contact sans frottement est proposée. La formulation est fondée sur le principe d’une minimisation du quotient de Rayleigh sous contraintes de contact unilatéral. L’approche choisie est celle des lagrangiens augmentés. En application, on étudie une aube de compresseur en contact avec un carter rigide au niveau de son sommet. Les effets du contact sur les paramètres modaux non-linéaires sont mis en évidence.

**Mots clés** — modes non-linéaires, dynamique, contact, aube.

---

## 1 Introduction

Le concept de mode non-linéaire [1] est aujourd’hui fréquemment utilisé pour l’analyse des systèmes dynamiques non-linéaires. Les premières approches proposées étaient plutôt analytiques et ainsi peu adaptées aux systèmes de grande taille. Plus récemment, des méthodes numériques [2–5] ont été proposées pour répondre à cette problématique. En revanche, peu d’applications concernent des non-linéarités non régulières ou encore non conservatives. Ce travail porte sur l’analyse des phénomènes de contact dans le cadre des modes non-linéaires et l’application visée est le contact rotor-stator dans les machines tournantes [6]. Une telle approche est assez nouvelle et contraste avec la majorité des études de contact qui sont pour la plupart basées sur des algorithmes temporels [7]. Le problème aux valeurs propres est défini à partir d’une formulation aux limites du système autonome avec des contraintes inégalitaires puis exprimé comme un problème de stationnarité du quotient de Rayleigh. Un lagrangien augmenté [8] est enfin introduit pour résoudre ce problème contraint. La formulation proposée est adaptée à un traitement numérique et illustrée sur un exemple pratique : une aube de compresseur en contact avec un carter rigide pour laquelle on étudie les conséquences du contact sur les paramètres modaux.

## 2 Formulation théorique

On considère un solide élastique occupant un domaine  $\Omega$  dans les hypothèses de petites perturbations en mécanique. On note  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  le champ de déplacement au point  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(\partial u_k / \partial x_l + \partial u_l / \partial x_k)$  le tenseur des déformations et  $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$  le tenseur des contraintes selon la loi de Hooke. Le système est autonome et la seule non-linéarité provient d’une interface de contact unilatéral définie à l’aide d’une fonction jeu :

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} - g_0(\mathbf{x}) \quad (1)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante à la surface de contact  $\Gamma_c$ ,  $\mathbf{g}_0$  est le jeu initial et  $\tau_N = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est la pression de contact. Le frottement n'est pas pris en compte et le système est donc conservatif.

## 2.1 Formulation forte du problème aux valeurs propres

Le problème avec les conditions aux limites de Dirichlet et Signorini [8] s'écrit :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \quad (2a)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \times \mathbb{R}_*^+ \quad (2b)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \tau_N \leq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}) \cdot \tau_N = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times \mathbb{R}_*^+ \quad (2c)$$

On recherche des solutions périodiques (non triviales) du problème aux limites (2), c'est à dire les solutions propres. Le champ de déplacement est par conséquent formulé dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une série de Fourier de fréquence fondamentale  $\omega = 2\pi/T$  :

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\mathbf{u}}_n e^{jn\omega t} \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{T} \int_T \mathbf{u}(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (3)$$

Par conséquent le problème aux valeurs propres consiste à trouver  $\{\omega, \hat{\mathbf{u}}\}$ , avec  $\hat{\mathbf{u}} = \{\hat{\mathbf{u}}_n, n \in \mathbb{Z}\}$  tel que,

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}_n) = (n\omega)^2 \hat{\mathbf{u}}_n \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{Z} \quad (4a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \times \mathbb{Z} \quad (4b)$$

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}) \leq 0, \quad \tau_N \leq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \tau_N = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times [0, T] \quad (4c)$$

On notera que la fonction jeu  $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}})$  s'exprime maintenant en fonction des composantes fréquentielles de  $\mathbf{u}$  et que, si les équations (4a) et (4b) sont formulées dans le domaine fréquentiel, l'équation (4c) reste dans le domaine temporel.

Dans la suite, une formulation variationnelle sera utilisée. Pour cela, on introduit  $V$  l'espace des déplacements cinématiquement admissibles (respectant la condition de Dirichlet) muni du produit scalaire classique (noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) ainsi que les formes linéaires définies sur  $V \times V$  :

$$m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{v} dx \quad \text{et} \quad k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx \quad (5)$$

## 2.2 Quotient de Rayleigh et lagrangien augmenté

Nous introduisons maintenant une forme généralisée du quotient de Rayleigh tenant compte de la décomposition de Fourier :

$$r(\hat{\mathbf{u}}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{k(\hat{\mathbf{u}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n)}{m(\hat{\mathbf{u}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n)} \quad (6)$$

Les points critiques du quotient de Rayleigh sont les vecteurs propres du système et sa valeur en ces points donne les valeurs propres correspondantes  $\omega^2 = r(\hat{\mathbf{u}})$ . Ici, du fait des conditions de Signorini, on se ramène à un problème de minimisation sous contraintes inégalitaires :

$$\min_{\hat{\mathbf{u}}_n \in V} r(\hat{\mathbf{u}}) \quad \text{s.c.} \quad \mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}) \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad \forall t \in [0, T] \quad (7)$$

dont les conditions d'optimalité impliquent l'existence d'un multiplicateur de Lagrange  $\lambda(t) > 0$  telle que :

$$\nabla_{\hat{\mathbf{u}}_n} r(\hat{\mathbf{u}}) + \int_T \langle \lambda(t), \nabla_{\hat{\mathbf{u}}_n} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}) \rangle dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (8a)$$

$$\lambda(t) > 0 \quad \text{et} \quad \langle \lambda(t), \mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}) \rangle = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (8b)$$

Le système (8), une fois développé, donne le problème variationnel :  
*Trouver*  $\{\hat{\mathbf{u}}_n, n \in \mathbb{Z}\}$  *tel que*  $\forall \mathbf{v} \in V$

$$2m(\hat{\mathbf{u}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n)^{-1} (k(\hat{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}) - n^2 \omega^2(\hat{\mathbf{u}}) m(\hat{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v})) + \int_T \langle \lambda, \mathbf{v} \rangle e^{jn\omega t} dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (9a)$$

$$\lambda > 0 \text{ et } \langle \lambda, \mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}) \rangle = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (9b)$$

On introduit maintenant un formalisme de lagrangien augmenté qui permet de transformer le problème de minimisation sous contraintes en un problème itératif de minimisation classique en  $\hat{\mathbf{u}}$  dans lequel le multiplicateur de Lagrange est augmenté jusqu'à convergence. On définit un lagrangien augmenté sous la forme [9] :

$$L_\kappa(\hat{\mathbf{u}}, \theta) = r(\hat{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2} \int_T \|\sqrt{\kappa}(\mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}) + \theta)\|_+^2 dt \quad (10)$$

où  $\kappa\theta$  représente un multiplicateur de Lagrange et  $\kappa$  est une matrice diagonale de coefficients de pénalité. Dans une procédure itérative, les estimations de  $\theta$  et  $\kappa$  sont utilisées pour trouver  $\hat{\mathbf{u}}(\theta, \kappa)$  qui minimise le lagrangien augmenté. La première condition d'optimalité implique

$$\nabla_{\hat{\mathbf{u}}_n} L_\kappa(\hat{\mathbf{u}}, \theta) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (11)$$

qui, comme précédemment se décline sous forme variationnelle :

*Trouver*  $\{\hat{\mathbf{u}}_n, n \in \mathbb{Z}\}$  *tel que*  $\forall \mathbf{v} \in V$

$$2m(\hat{\mathbf{u}}_n, \hat{\mathbf{u}}_n)^{-1} (k(\hat{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}) - n^2 \omega^2(\hat{\mathbf{u}}) m(\hat{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v})) + \int_T \langle \kappa(\mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}) + \theta)_+, \mathbf{v} \rangle e^{jn\omega t} dt = 0 \quad (12)$$

Ensuite, le paramètre  $\theta$  est augmenté :

$$\theta \leftarrow \theta + \max_{\mathbf{x}, t} (\mathbf{g}(\hat{\mathbf{u}}), -\theta) \quad (13)$$

tandis que les coefficients de pénalité  $\kappa$  peuvent être ajustés si la vérification des contraintes n'est pas améliorée. On détaille plus loin l'algorithme utilisé en pratique.

### 2.3 Normalisation des modes

Dans un problème aux valeurs propres, la fréquence est une inconnue du problème et, cette indétermination est classiquement levée grâce à une normalisation des modes. On définit une amplitude modale notée  $q$  dont les paramètres modaux  $\hat{\mathbf{u}}_n(q)$  et  $\omega(q)$  dépendent. Dans une formulation discrétisée, on peut choisir  $q$  comme une (ou deux dans les cas non-conservatifs) coordonnée *maître* qui gouverne le mouvement et dont dépendent les autres coordonnées.

### 2.4 Approximation numérique et algorithme

Dans le cadre d'une modélisation éléments-finis, on note  $\mathbf{U}$  le champ de déplacement discrétisé et les formes linéaires (5) permettent de définir les matrices de masse  $\mathbf{M}$  et raideur  $\mathbf{K}$ . L'équation de contraintes (1) se reformule en  $\mathbf{g}(\mathbf{U}) = \mathbf{A}\mathbf{U} - \mathbf{g}_0$  à l'aide d'une matrice  $\mathbf{A}$  qui permet de restreindre  $\mathbf{U}$  aux degrés de liberté de contact.

Une discrétisation temporelle uniforme est aussi introduite  $t = \{t_k = kT/m, k = 1, \dots, m\}$  telle que  $\bar{\mathbf{u}}_k = \mathbf{u}(t_k)$  représentent les valeurs discrètes du déplacement. La série de Fourier (3) est en pratique tronquée à  $2 \times N - 1$  harmoniques ce qui permet de relier les variables temporelles et fréquentielles à l'aide d'une transformée de Fourier discrète :

$$\hat{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \bar{\mathbf{u}}_k e^{-j \frac{2\pi kn}{m}} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{u}}_k = \sum_{n=-N}^N \hat{\mathbf{u}}_n e^{j \frac{2\pi kn}{m}} \quad (14)$$

Finalement, le problème aux valeurs propres approché s'écrit :

$$2\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} - (n\omega)^2\mathbf{M}) \hat{\mathbf{U}}_n + \mathbf{A}^T \sum_{k=1}^m \kappa (\mathbf{g}(\hat{\mathbf{U}}) + \theta_k)_+ e^{i\frac{2\pi kn}{m}} = 0 \quad (15)$$

Pour conclure cette partie, on donne l'algorithme 1 de lagrangien augmenté utilisé dans cette étude [9]. Il fait intervenir une mesure de convergence  $G = \max_{d.d.l.} |\max_k (\mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}}_k), -\theta_k)|$  et permet une mise à jour des paramètres de pénalité et des multiplicateurs.

Soit  $i = 0, i_{\max}, G^{(0)} = \infty, \theta = \theta^{(1)}, \kappa = \kappa^{(1)}$  et  $\alpha > 1, \beta > 1, \varepsilon > 0$ ;  
**while**  $G^{(i)} > \varepsilon$  et  $i < i_{\max}$  **do**  
    Trouver  $\{\hat{\mathbf{u}}_n\}_{n=-N, \dots, N}$  solution de (15) et évaluer  $\{\mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}}_k)\}_{k=1, \dots, m}$ ;  
    Définir  $\mathbf{l} = \{l : |\max (\mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}}_k), -\theta_k)| \geq G^{(i)}/\alpha\}$  et  $\bar{G} = \max |\max (\mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}}_k), -\theta_k)|$ ;  
    **if**  $\bar{G} \geq G^{(i)}$  **then**  $\forall l \in \mathbf{l}, \kappa_{k,l} \leftarrow \beta \kappa_{k,l}$  et  $\theta_{k,l} \leftarrow \theta_{k,l}/\beta$ ;  
    **else**  
         $i \leftarrow i + 1$   $\theta_k^{(i)} \leftarrow \theta_k, \kappa_k^{(i)} \leftarrow \kappa_k$  et  $G^{(i)} \leftarrow \bar{G}$ ;  
         $\theta_k \leftarrow \theta_k^{(i)} + \max (\mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}}_k), -\theta_k)$ ;  
        **if**  $G^{(i)} \geq G^{(i-1)}/\alpha$  **then**  $\forall l \in \mathbf{l}, \kappa_{k,l} \leftarrow \beta \kappa_{k,l}$ ;

**Algorithme 1** : Lagrangien augmenté du problème aux valeurs propres

### 3 Étude d'une aube en contact avec un carter rigide

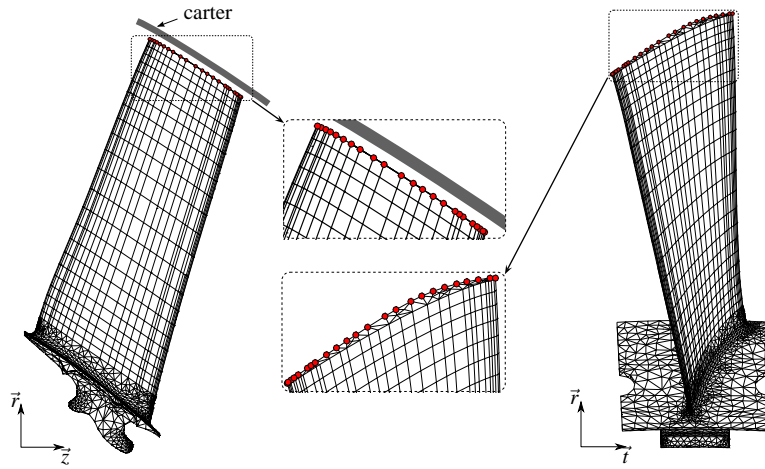


Figure 1: Modèle de l'aube et détails de l'interface de contact

La figure 1 illustre le modèle d'aube de compresseur qui est considéré en application. Un modèle réduit de Craig et Bampton comportant 24 nœuds d'interface au niveau de la zone de contact (voir figure 1) et 40 modes normaux est utilisé dans les calculs. Le contact a lieu dans la direction radiale  $\vec{r}$  et un jeu initial uniforme est considéré. Les résultats en déplacements ou vitesses qui suivent sont normalisés par rapport à la valeur de ce jeu.

On s'intéresse au premier mode de flexion. La figure 2a montre l'évolution de la fréquence propre de ce mode non-linéaire en fonction de l'amplitude modale. On note que lorsque cette dernière augmente au delà d'une certaine limite, correspondant au jeu initial, la fréquence augmente du fait des effets rigidifiants du contact. La figure 2b montre une variété de ce mode sur laquelle on observe clairement l'effet limitatif (à une valeur de 1) du contact sur l'amplitude. Les figures 3 montrent l'évolution des déplacements radiaux de toute l'interface en fonction du temps et pour

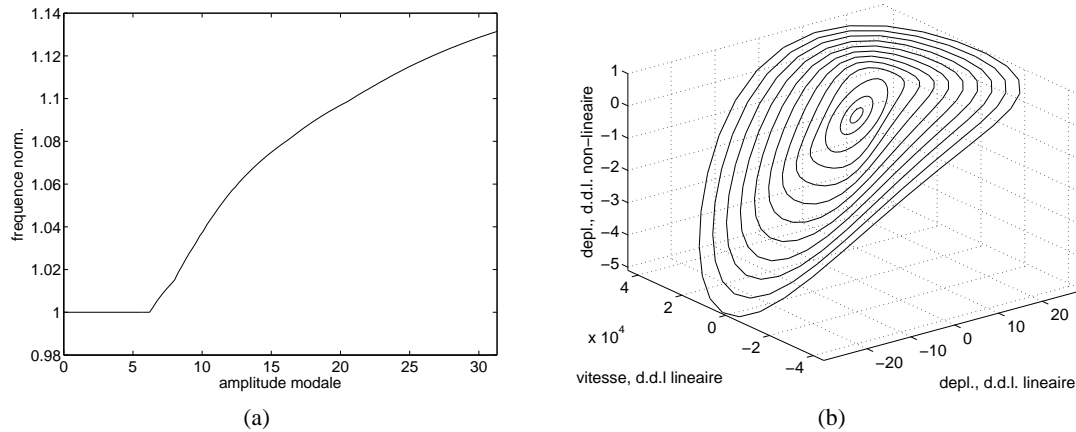


Figure 2: Premier mode non-linéaire : (a) évolution de la fréquence propre en fonction de l'amplitude modale et (b) un exemple de variété.

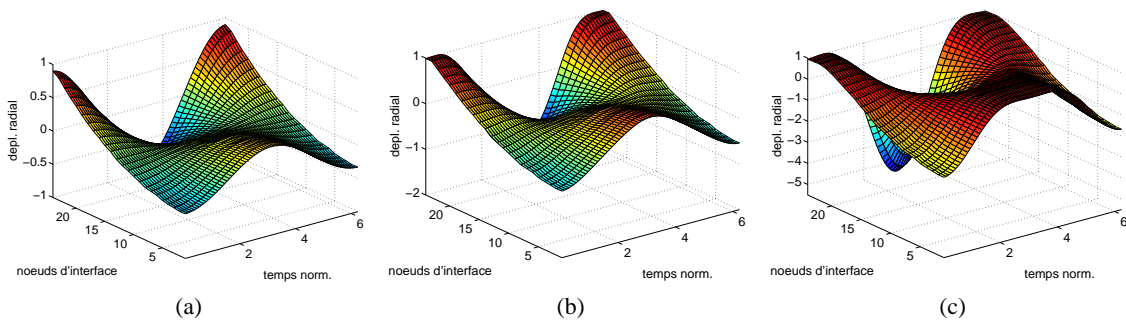


Figure 3: Déplacements radiaux à l'interface pour trois valeurs de l'amplitude modale : (a) 5.7, (b) 9.3 et (c) 31.3. Le contact a lieu pour une amplitude égale à 1.

plusieurs amplitudes modales. Dans le premier cas, l'amplitude modale est telle que le jeu initial n'est pas consommé et la dynamique est donc linéaire. Dans le second cas, les derniers nœuds de l'interface sont en contact durant environ 15% de la période. Enfin, le troisième cas montre que les deux bords de l'aube sont en contact en opposition de phase. Pour terminer, les figures 4 illustrent les déformées modales sur le maillage pour ces trois valeurs de l'amplitude modale. Les changements de forme ainsi que la dissymétrie du mouvement sont notables.

## 4 Conclusions

Une méthode d'analyse modale pour les structures élastiques avec des interfaces de contact a été proposée. À partir d'une formulation mixte en temps-fréquence du problème aux valeurs propres, on aboutit à une minimisation sous contraintes du quotient Rayleigh que l'on résout par une méthode de lagrangien augmenté. L'application industrielle proposée montre la validité de l'approche et en illustre la pertinence. Les temps de calcul associés étant nettement moindres que ceux d'approches temporelles, de nombreuses perspectives sont envisageables comme par exemple des analyses robustes ou encore des optimisations.

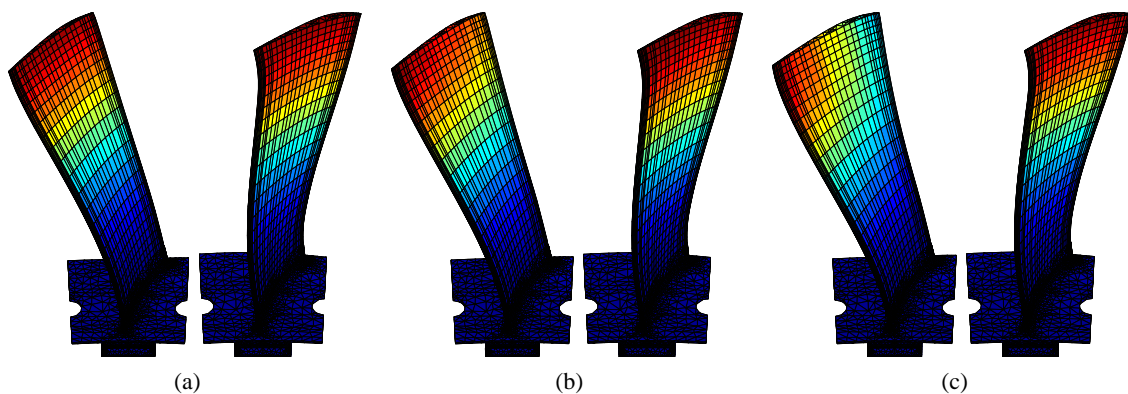


Figure 4: Déformées modales à  $t = 0$  et  $t = T/2$  pour trois valeurs de l'amplitude modale : (a) 5.7, (b) 9.3 et (c) 31.3.

## Remerciements

Les auteurs remercient la Société Snecma pour son soutien technique et financier. Ce travail s'inscrit dans le projet fédérateur MAIA de recherche et technologie en mécanique soutenu par le CNRS, l'Onera et le groupe SAFRAN.

## Références

- [1] A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, Y. V. Mikhlin, V. N. Pilichuk et A. A. Zevin : *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. Wiley series in nonlinear science, 1996.
- [2] D. Jiang, C. Pierre et S. W. Shaw : Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3-5):869–891, 5 2004.
- [3] R. Arquier, S. Bellizzi, R. Bouc et B. Cochelin : Two methods for the computation of nonlinear modes of vibrating systems at large amplitudes. *Computers & Structures*, 84(24-25):1565–1576, 2006.
- [4] M. Peeters, R. Vigié, G. Sérandour, G. Kerschen et J.-C. Golinval : Nonlinear normal modes, part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1):195–216, 2009.
- [5] D. Laxalde et F. Thouverez : Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 2009.
- [6] M. Legrand, C. Pierre, P. Cartraud et J.-P. Lombard : Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1-2):366–391, 2009.
- [7] N. J. Carpenter : Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(1):103, 1991.
- [8] P. Wriggers : *Computational Contact Mechanics*. 2002.
- [9] J. S. Arora, A. I. Chahande et J. K. Paeng : Multiplier methods for engineering optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(7):1485, 1991.