



HAL
open science

Théorèmes limites pour des martingales vectorielles à croissance explosive et mixte en temps continu et applications statistiques

Hamdi Fathallah, Ahmed Kebaier

► **To cite this version:**

Hamdi Fathallah, Ahmed Kebaier. Théorèmes limites pour des martingales vectorielles à croissance explosive et mixte en temps continu et applications statistiques. 2009. hal-00389331

HAL Id: hal-00389331

<https://hal.science/hal-00389331>

Preprint submitted on 28 May 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Théorèmes limites pour des martingales vectorielles à croissance explosive et mixte en temps continu et applications statistiques

Hamdi Fathallah* & Ahmed Kebaier†

28 mai 2009

Résumé

Dans ce travail, on établit des résultats autour du théorème limite presque-sûre pour des martingales vectorielles quasi-continues à gauche, en temps continu, à croissance *explosive* et *mixte*. Nous appliquons les résultats obtenus à un modèle de diffusion multidimensionnel mixte puis au modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bivarié utilisé en modélisation biologique et en mathématiques financières.

Mots Clés : Martingales quasi-continues, théorème de la limite centrale presque-sûre, loi forte quadratique, Ornstein-Uhlenbeck bivarié.

Classification Mathématique. 60G46, 60G51, 60F05.

1 Introduction

1.1 Motivation

Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel standard. Le processus Y défini par $Y_t = e^{-t/2} B_{e^t}$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck récurrent positif, de mesure invariante la loi gaussienne centrée réduite $G = \mathcal{N}(0, 1)$. La traduction des théorèmes limites classiques vérifiés par le processus Y au mouvement brownien B fournit les premiers théorèmes limites par moyennisation logarithmique. En effet, l'une des propriétés les plus classiques, vérifiée par le mouvement brownien B , est un théorème limite avec moyennisation logarithmique. Plus précisément, on a la loi forte des grands nombres logarithmique, donnée par

$$(LFL) \quad \forall f \in L^1(G), \quad (\log t)^{-1} \int_1^t f\left(\frac{B_s}{\sqrt{s}}\right) \frac{ds}{s} \longrightarrow \int f dG \quad p.s..$$

Une conséquence immédiate de la propriété (LFL) est le fameux théorème de la limite centrale presque-sûre

$$(TLCPS) \quad (\log t)^{-1} \int_1^t \frac{ds}{s} \delta_{\left\{\frac{B_s}{\sqrt{s}}\right\}} \Longrightarrow G \quad p.s., \quad (\text{où } \Longrightarrow \text{ dénote la convergence étroite),}$$

établi dans une forme plus générale par Brosamler [2]. Le théorème de la limite centrale presque-sûre ainsi que la détermination des vitesses de convergence de la loi forte quadratique sous-jacente ont mené à une littérature étendue durant la décennie passée. En effet, ces propriétés ont été généralisées aux martingales discrètes unidimensionnelles par Chaâbane [3] et Lifshits [14], puis aux martingales discrètes d-dimensionnelles par Chaâbane et al. [7] et Bercu [1], ensuite aux martingales continues par Chaâbane

*Laboratoire LMV, Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines, 45 Avenue des Etats-Unis Batiment Fermat 78035 Versailles (France). Tel : +33139253629; Fax : +33139254645, E-mail address : hamdi.fathallah@math.uvsq.fr

†Université Paris 13, Institut Galilée, Mathématiques, 99, av. JB Clément, 99430 Villetaneuse, (France), E-mail address : kebaier@math.univ-paris13.fr

[4]. Les résultats de Chaâbane [3, 4] ont été obtenus grâce à une approximation forte de la martingale M par une trajectoire brownienne, alors que les résultats de Chaâbane et al. [7] et Chaâbane et Maaouia [6] ont été obtenus en reprenant la technique de la fonction caractéristique utilisée par Touati [18] pour démontrer une extension du théorème de la limite centrale pour les martingales. Plus récemment, Chaâbane et Kebaier [5] ont étendu ce type de théorème pour des martingales quasi-continues à gauche à normalisation régulière.

Le but de ce travail est de généraliser ces propriétés à des martingales quasi-continues à gauche à normalisation *explosive* et *mixte* : (*régulière* et *explosive*) (voir paragraphe 2). Nous exploitons l'ensemble des résultats obtenus dans le cadre d'applications statistiques (voir paragraphe 4) où nous produisons des vitesses de convergence de type fonctionnel pour l'estimation de paramètre dans deux modèles différents :

- un processus de diffusion linéaire multidimensionnel,
- un processus d'Ornstein-Uhlenbeck bivarié, utilisé dernièrement pour modéliser le tissu micro vasculaire dans certaines thérapies contre le cancer (voir Favetto et Samson [8]) et en mathématiques financières (voir les récents travaux de Krämer et Richter [10] et Lo et Wang [15]).

1.2 Préliminaires

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d . Pour une matrice réelle carrée A , A^* , $tr A$ et $\det(A)$ désignent respectivement la matrice transposée, la trace et le déterminant de la matrice A . \mathcal{I}_d dénote la matrice identité $d \times d$. La norme de la matrice A est définie par : $\|A\| = \sqrt{tr(AA^*)}$. On note $Vect(A)$, le vecteur obtenu en empilant les vecteurs colonnes de la matrice A et on note $[Vect(A)Vect(A)^*]^\perp$ la matrice à blocs dont le bloc d'indice $1 \leq i, j \leq d$ est $A_j A_i^*$ où A_1, \dots, A_d sont les vecteurs colonnes de A . Le symbole \otimes désigne le produit tensoriel de mesures ou de matrices.

Rappelons que toute martingale locale M admet une décomposition unique en $M^c + M^d$, où M^c est la partie martingale locale continue alors que M^d est une somme compensée de sauts nulle en zéro. La variation quadratique de M , notée $[M]$, est le processus défini par

$$[M]_t = \langle M^c \rangle_t + \sum_{0 < s \leq t} \Delta M_s \Delta M_s^*,$$

où $\langle M^c \rangle_t$ est l'unique processus croissant continu adapté tel que $MM^* - \langle M^c \rangle_t$ soit une martingale locale nulle en zéro. Le compensateur prévisible du processus $[M]$ est noté par $\langle M \rangle$.

Dans la suite, on considère une martingale quasi-continue à gauche $M = (M_t, t \geq 0)$ d -dimensionnelle, localement de carré intégrable, définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ (voir Jacod et Shiryaev [9]) et un processus déterministe $V = (V_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans l'ensemble des matrices inversibles. Pour $u \in \mathbb{R}^d$, on définit

$$\phi_t(u) := \exp \left(-\frac{1}{2} u^* \langle M^c \rangle_t u + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\exp\{i\langle u, x \rangle\} - 1 - i\langle u, x \rangle) \nu^M(ds, dx) \right)$$

où ν^M est la mesure de Lévy des sauts de la martingale M . L'ensemble de nos résultats de type presque-sûre est basé sur le théorème de la limite centrale généralisé pour les martingales (voir Touati [17]). Il donne une version généralisée du TLC utilisant non pas la condition *classique* de Lindeberg mais plutôt une hypothèse portant sur les fonctions caractéristiques valable même dans le cas non gaussien.

Théorème 1.2.1 (*Théorème limite central généralisé pour des martingales*) Soit $M = (M_t, t \geq 0)$ une martingale locale d -dimensionnelle nulle en zéro et quasi-continue à gauche. Soit $V = (V_t, t \geq 0)$ une famille déterministe de matrices inversibles. Soit \mathcal{Q} une probabilité sur l'espace $C(\mathcal{X}, \mathbb{R}^d)$ des fonctions continues de \mathcal{X} dans \mathbb{R}^d (où \mathcal{X} désigne un espace vectoriel de dimension finie). Si le couple (M, V) vérifie l'hypothèse suivante

$$(\mathcal{H}) : \begin{cases} \phi_t((V_t^*)^{-1}u) \longrightarrow \phi_\infty(\eta, u) \text{ p.s.}, & (t \longrightarrow \infty), \\ \phi_\infty(\eta, u) \text{ non nulle p.s.}, \end{cases}$$

où η désigne une v.a., éventuellement dégénérée à valeurs dans \mathcal{X} . Pour $(z, u) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^d$,

$$\phi_\infty(z, u) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i\langle u, \xi \rangle\} \pi(z, d\xi)$$

désigne la transformée de Fourier des lois conditionnelles unidimensionnelles $(\pi(x, \cdot), x \in \mathcal{X})$ de la probabilité \mathcal{Q} . Alors

$$(TLCG) \quad Z_t := V_t^{-1}M_t \Longrightarrow Z_\infty := \Sigma(\eta) \quad (t \longrightarrow \infty),$$

de manière stable, où $(\Sigma(z), z \in \mathcal{X})$ est un processus de loi \mathcal{Q} indépendant de la v.a. η .

Sous des hypothèses de régularité pour la normalisation V , nous pouvons obtenir des résultats de type TLCPS à partir du TLCG ci-dessus. Une normalisation V est dite *régulière* si elle vérifie la condition $(\mathcal{C}) = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\}$ suivante :

- (\mathcal{C}_1) $t \mapsto V_t$ est de classe \mathcal{C}^1 .
- (\mathcal{C}_2) il existe $s_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq s \geq s_0$, on a $V_s V_s^* \leq V_t V_t^*$ (au sens des matrices réelles symétriques positives).
- (\mathcal{C}_3) il existe une fonction $a = (a_t)$ continue sur \mathbb{R}_+ , décroissante vers 0 à l'infini, telle que

$$A_t = \int_0^t a_s ds \uparrow \infty \quad \text{pour } t \uparrow \infty$$

et une matrice U_1 vérifiant :

$$\begin{cases} a_t^{-1} V_t^{-1} \frac{dV_t}{dt} - U_1 = \Delta_{t,1}, & \text{avec } \Delta_{t,1} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty), \\ U_1 + U_1^* = S_1, & \text{où } S_1 \text{ est une matrice inversible.} \end{cases}$$

Récemment, Chaâbane et Kebaier [5] ont établi, pour une normalisation V de type régulière et dans le cadre d'obtention du TLCG renforcées par certaines hypothèses, que le couple (M, V) vérifie les résultats ci-dessous. Plus précisément, sous les hypothèses (\mathcal{H}) ,

$$(\mathcal{H}_1) \quad V_t^{-1} \langle M \rangle_t (V_t^*)^{-1} \longrightarrow C \text{ p.s.}, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

(où C est une matrice aléatoire ou non) et si de plus la condition (\mathcal{C}_3) est obtenue avec

$$\|\Delta_{t,1}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta}), \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{avec } \beta > 1,$$

ils obtiennent le théorème de la limite centrale presque-sûre généralisé :

$$(TLCP SG) \quad (\log(\det V_t^2))^{-1} \int_0^t \delta_{Z_s} d(\log(\det V_s^2)) \Longrightarrow \mu_\infty, \text{ p.s.}, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

où μ_∞ est la loi de Z_∞ .

Si de plus le couple (M, V) vérifie les hypothèses

$$(\mathcal{H}_2) \quad V_t^{-1} [M]_t (V_t^*)^{-1} \longrightarrow C \text{ p.s.}, \quad (t \longrightarrow \infty) \text{ et}$$

$$(\mathcal{H}_3) \quad C = \int x x^* d\mu_\infty(x),$$

alors ils démontrent une loi forte quadratique :

$$(LFQ) \quad (\log(\det V_t^2))^{-1} \int_0^t V_s^{-1} M_s M_s^* (V_s^*)^{-1} d(\log(\det V_s^2)) \longrightarrow C \text{ p.s.}, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

et une loi du logarithme

$$(LL) \quad \|V_t^{-1} M_t\| = \mathbf{o}(\sqrt{\log(\det V_t^2)}) \text{ p.s.}$$

Notons que les relations LFQ et LL restent vraies, en remplaçant (\mathcal{H}_2) par

$$(\mathcal{H}'_2) \quad \exists p \in [1, 2] \text{ tel que } \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} A_s^{-p} \|V_s^{-1} x\|^{2p} \nu^M(ds, dx) < \infty \text{ p.s.}$$

Enfin, en renforçant (\mathcal{H}'_2) de la manière suivante

$$(\mathcal{H}''_2) \quad \exists p \in [1, 2] \text{ tel que } \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} A_s^{-p/2} \|V_s^{-1} x\|^{2p} \nu^M(ds, dx) < \infty \text{ p.s.},$$

et en supposant que la condition (\mathcal{C}_3) est obtenue avec

$$\|\Delta_{t,1}\| = \mathcal{O}(t^{-\frac{3}{2}}), \quad (t \longrightarrow \infty),$$

ils démontrent le théorème de la limite centrale de la loi forte quadratique :

$$(TLC) \quad (\log(\det V_t^2))^{-1/2} \int_0^t \{U \tilde{D}_s + \tilde{D}_s U^*\} d(\log(\det V_s^2)) \Longrightarrow \nu_\infty, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

où $\tilde{D}_s = V_s^{-1}(M_s M_s^* - \langle M \rangle_s)(V_s^*)^{-1}$ et conditionnellement à C , ν_∞ est une loi gaussienne matricielle centrée, indépendante de la v.a. C et de covariance

$$\mathcal{C} = 2C \otimes C + 2[(Vect(C))(Vect(C))^*]^\perp.$$

Remarque 1.1 Notons que le TLC classique s'obtient sous l'hypothèse (\mathcal{H}_1) et la condition de Lindeberg

$$(\mathcal{H}') \quad \forall \delta > 0, \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \|V_t^{-1} x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|V_t^{-1} x\| > \delta\}} \nu^M(ds, dx) \longrightarrow 0 \text{ p.s.}, \quad (t \longrightarrow \infty)$$

lesquelles impliquent l'hypothèse (\mathcal{H}) avec

$$\eta = C^{1/2} \quad \text{et} \quad \Phi_\infty(\eta, u) = \exp\left(-\frac{1}{2} u^* C u\right)$$

et que les preuves sont plus faciles à mener sous (\mathcal{H}') que sous (\mathcal{H}) .

Le but de ce travail est d'étendre ces résultats au cas *explosif* : c'est-à-dire à une normalisation V satisfaisant la condition (\mathcal{C}_3) ci-dessus avec $a_t = 1$; et au cas *mixte*, c'est-à-dire que la martingale M s'écrit $M = (M_1, M_2)$ où M_1 désigne une martingale avec une normalisation régulière V_1 et M_2 une martingale avec une normalisation explosive V_2 .

Les principaux résultats seront énoncés au paragraphe 2. Dans le paragraphe 3, afin d'éviter de reprendre des preuves analogues à celles données au cas régulier dans [5], on se contente de démontrer les résultats dans le cas mixte. Pour illustrer nos résultats, on donne dans le paragraphe 4 deux applications statistiques. Dans la première on étudie un modèle de diffusion mixte à temps continu et dans la seconde, on étudie le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bivarié à temps continu.

2 Enoncés des résultats

2.1 Martingale à croissance explosive

Soit $M = (M_t, t \geq 0)$ une martingale locale d-dimensionnelle nulle en zéro et quasi-continue à gauche. Soit $V = (V_t, t \geq 0)$ une famille déterministe de matrices inversibles. Une normalisation V est dite *explosive* si elle vérifie la condition $(\mathcal{C}') = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}'_3\}$ suivante :

- (\mathcal{C}_1) $t \mapsto V_t$ est de classe \mathcal{C}^1 .
- (\mathcal{C}_2) il existe $s_0 \geq 0$ telque pour tout $t \geq s \geq s_0$ on a $V_s V_s^* \leq V_t V_t^*$ (au sens des matrices réelles symétriques positives).
- (\mathcal{C}'_3) il existe une matrice U_2 vérifiant :

$$\begin{cases} V_t^{-1} \frac{dV_t}{dt} - U_2 = \Delta_{t,2}, & \text{avec } \Delta_{t,2} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow \infty), \\ U_2 + U_2^* = S_2, & \text{où } S_2 \text{ est une matrice inversible.} \end{cases}$$

Ces conditions sont notamment vérifiées dans le cas où V_t est une normalisation scalaire de type $V_t = v_t I_d$ avec v_t une fonction scalaire donnée par $v_t = c e^{bt}$ où c et b sont deux réels.

Les techniques utilisées pour démontrer les résultats de [5], cités ci-dessus, s'adaptent facilement dans le cas d'une normalisation V explosive. Ainsi, on a les résultats suivants :

Théorème 2.1.1 *Si le couple (M, V) satisfait aux hypothèses (\mathcal{H}) et (\mathcal{H}_1) . On suppose que la condition (\mathcal{C}'_3) est obtenu avec*

$$\|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta}), \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{avec } \beta > 1,$$

alors on a

$$(TLCPSG) \quad \mu_t = t^{-1} \int_0^t \delta_{Z_s} ds \implies \mu_\infty \text{ p.s.}, \quad \text{où } \mu_\infty \text{ est la loi limite de } Z_\infty.$$

Si de plus le couple (M, V) vérifie (\mathcal{H}_2) et (\mathcal{H}_3) , alors on a

$$(LFQ) \quad t^{-1} \int_0^t V_s^{-1} M_s M_s^* (V_s^*)^{-1} ds \longrightarrow C \text{ p.s.}, \quad (t \longrightarrow \infty)$$

et

$$(LL) \quad \|V_t^{-1} M_t\| = \mathbf{o}(t^{1/2}) \text{ p.s.}$$

Enfin, si le couple (M, V) vérifie (\mathcal{H}) , (\mathcal{H}_1) ,

$$(\mathcal{H}''_2) \quad \exists p \in [1, 2] \text{ tel que } \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (1+s)^{-p/2} \|V_s^{-1} x\|^{2p} \nu^M(ds, dx) < \infty \text{ p.s.},$$

(\mathcal{H}_3) et en plus on suppose que la condition (\mathcal{C}'_3) est obtenue avec

$$\|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-\frac{3}{2}}), \quad (t \longrightarrow \infty),$$

alors on a

$$(TLC) \quad t^{-1/2} \int_0^t \{U_2 \tilde{D}_s + \tilde{D}_s U_2^*\} ds \implies \nu_\infty, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

où $\tilde{D}_s = V_s^{-1} (M_s M_s^* - \langle M \rangle_s) (V_s^*)^{-1}$ et conditionnellement à C , ν_∞ est une loi gaussienne matricielle centrée, indépendante de la variable aléatoire C et de covariance

$$\mathcal{C} = (\text{tr}(S_2))^{-1} \{2C \otimes C + 2[(\text{Vect}(C))(\text{Vect}(C))^*]^\perp\}.$$

2.2 Martingales à croissance mixte

On dit qu'une normalisation $V = (V_t, t \geq 0) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est *mixte* si elle est de la forme $V = \text{Diag}(V_1, V_2)$ où V_1 (resp. V_2) est une famille déterministe de matrices inversibles de $\mathbb{R}^{d_1 \times d_1}$ (resp. $\mathbb{R}^{d_2 \times d_2}$) satisfaisant aux conditions de croissance régulière (\mathcal{C}) (resp. aux conditions de croissance explosive (\mathcal{C}')). Dans tout ce paragraphe on désigne par $M = (M_1, M_2)$ une martingale locale d -dimensionnelle, quasi-continue à gauche, nulle en zéro avec $M_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ et $M_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ où $d = d_1 + d_2$ et on pose $Z_t := V_t^{-1} M_t$.

2.2.1 Théorème limite centrale presque sûre généralisé

Théorème 2.2.1 Soit M une martingale locale, d -dimensionnelle, nulle en zéro et quasi-continue à gauche. Soit V une normalisation mixte de matrices inversibles avec

$$\|\Delta_{1,t}\| = \mathcal{O}(A_t^{-\beta}) \quad \text{et} \quad \|\Delta_{2,t}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta}) \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{où } \beta > 1.$$

Si le couple (M, V) vérifie les hypothèses (\mathcal{H}) et (\mathcal{H}_1) avec $C = \text{Diag}(C_1, C_2)$ une matrice aléatoire ou non où $C_k \in \mathbb{R}^{d_k \times d_k}$, $k \in \{1, 2\}$.

Alors les mesures aléatoires $\mu_t = A_t^{-1} \int_0^t \delta_{Z_s} dA_s$ vérifient la version généralisée du TLCPS suivante

$$(TLCPSG) \quad \mu_t \Longrightarrow \mu_\infty \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

où A_t est la fonction définie dans la condition (\mathcal{C}_3) .

2.2.2 Loi forte quadratique associée au TLCPS

Théorème 2.2.2 Sous les hypothèses du théorème précédent. Si le couple (M, V) vérifie de plus les hypothèses (\mathcal{H}_2) et (\mathcal{H}_3) et en renforçant la condition (\mathcal{C}) par :

$$(\mathcal{C}_4) \quad \text{il existe } \alpha \in]0, 1], \text{ tel que } \frac{ta_t}{A_t} \rightarrow 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \frac{ta'_t}{a_t} \rightarrow -\alpha \quad (t \rightarrow \infty)$$

Alors on a

$$(LFQ) \quad A_t^{-1} \int_0^t V_s^{-1} M_s M_s^* (V_s^*)^{-1} dA_s \rightarrow C \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

Remarque 2.1 1. Le résultat reste vrai en remplaçant l'hypothèse (\mathcal{H}_2) par

$$(\mathcal{H}'_2) \quad \exists p \in [1, 2]; \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{A}_s^{-p} \|V_s^{-1} x\|^{2p} \nu^M(ds, dx) < \infty \quad p.s.,$$

avec $\tilde{A}_s = \text{Diag}((1 + A_s)\mathcal{I}_{d_1}, (1 + s)\mathcal{I}_{d_2})$.

La quelle implique

$$\int_0^t V_{1,s}^{-1} (d[M_1]_s - d\langle M_1 \rangle_s) (V_{1,s}^*)^{-1} = \mathbf{o}(A_t) \quad p.s.,$$

et

$$\int_0^t V_{2,s}^{-1} (d[M_2]_s - d\langle M_2 \rangle_s) (V_{2,s}^*)^{-1} = \mathbf{o}(t) \quad p.s..$$

2. Notons que (\mathcal{H}_3) est automatiquement vérifiée sous les hypothèses (\mathcal{H}') et (\mathcal{H}_1) , car dans ce cas $Z_\infty = C^{1/2}G_d$ où G_d est une variable d -dimensionnelle standard gaussienne indépendante de C .

2.2.3 TLC de la LFQ

En vue de démontrer un TLC précisant la vitesse de convergence en loi de la LFQ établie ci-dessus, on renforce l'hypothèse (\mathcal{H}'_2) de la façon suivante

$$(\mathcal{H}''_2) \quad \exists p \in [1, 2] \text{ tel que } \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{A}_s^{-p/2} \|V_s^{-1} x\|^{2p} \nu^M(ds, dx) < \infty \quad p.s..$$

Remarque 2.2 Notons que sous (\mathcal{H}''_2) , on a que

$$\int_0^t V_{1,s}^{-1} (d[M_1]_s - d\langle M_1 \rangle_s) (V_{1,s}^*)^{-1} = \mathbf{o}(A_t^{1/2}) \quad p.s.,$$

et

$$\int_0^t V_{2,s}^{-1} (d[M_2]_s - d\langle M_2 \rangle_s) (V_{2,s}^*)^{-1} = \mathbf{o}(t^{1/2}) \quad p.s..$$

Théorème 2.2.3 Soit M une martingale locale, d -dimensionnelle, nulle en zéro et quasi-continue à gauche. Soit V une normalisation mixte de matrices inversibles. On suppose que la condition (C) est renforcée par (C₄) et que

$$\|\Delta_{1,t}\| = \mathcal{O}(A_t^{-3/2}) \quad \text{et} \quad \|\Delta_{2,t}\| = \mathcal{O}(t^{-3/2}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Si le couple (M, V) vérifie les hypothèses (\mathcal{H}) , (\mathcal{H}_1) , (\mathcal{H}_3) et (\mathcal{H}''_2) .

Alors

$$\text{tr} \left\{ t^{-1/2} \int_0^t \{V_s^{-1}(M_s M_s^* - \langle M \rangle_s)(V_s^*)^{-1}\} V_s^{-1} dV_s \right\} \Longrightarrow \sqrt{\text{tr}\{\tilde{C}_2 \otimes C_2\}} G,$$

où $\tilde{C}_2 = U_2 C_2 + C_2 U_2^*$.

Dans la suite, on suppose que la normalisation mixte $V = \text{Diag}(V_1, V_2)$ est telle que V_1 est de type scalaire à savoir $V_{1,t} = v_t \mathcal{I}_{d_1}$.

Théorème 2.2.4 Soit M une martingale locale, d -dimensionnelle, nulle en 0 et quasi-continue à gauche. Soit V une normalisation mixte de matrices inversibles vérifiant de plus :

$$v_t^{-1} \frac{dv_t}{dt} = r^2 t^{-\alpha} + \mathbf{o}(t^{-(1+\alpha)}) \quad \text{avec } r > 0 \text{ et } \alpha \in [3/4, 1[$$

et

$$\|\Delta_{t,2}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta}) \quad (t \rightarrow \infty), \quad \text{avec } \beta > 1.$$

Si le couple (M, V) vérifie les hypothèses (\mathcal{H}) , (\mathcal{H}_1) , (\mathcal{H}''_2) , (\mathcal{H}_3) .

Alors

$$\text{tr} \left\{ t^{-(1-\alpha)/2} \int_1^t s^{-\alpha} V_s^{-1} (M_s M_s^* - \langle M \rangle_s) (V_s^*)^{-1} \tilde{S} ds \right\} \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{r\sqrt{1-\alpha}} \text{tr}\{C_1\} G.$$

où $\tilde{S} = \text{Diag}(\mathcal{I}_{d_1}, S_2)$.

Remarque 2.3 Le premier TLC associé à la LFQ (théorème 2.2.3) découle de l'application des TLC de la LFQ associés aux deux martingales M_1 et M_2 . Ainsi, la normalisation exponentielle tue la partie régulière. La covariance de la limite s'exprime donc uniquement en fonction de la covariance limite associée à M_2 . Dans le second TLC (théorème 2.2.4), on change la pondération et de ce fait le résultat obtenu s'exprime en fonction de la covariance limite associée à M_1 .

3 Preuve des principaux résultats

Dans cette section, nous donnons une esquisse de preuve pour le théorème 2.2.1 (resp. théorème 2.2.2) qui se démontre d'une manière analogue que le théorème 2.1 (resp. théorème 2.2) de [5]. Les preuves des théorèmes 2.2.3 et 2.2.4, se démontrent par de nouvelles techniques qui seront détaillées dans la suite.

3.1 Esquisse de preuve du théorème 2.2.1

Pour montrer le résultat de ce théorème, il suffit de montrer que pour $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ on a

$$\psi_t(u) \longrightarrow \psi_\infty(\eta, u) \quad (t \longrightarrow \infty), \quad (1)$$

avec ψ_t la fonction caractéristique associée aux mesures (μ_t) données par

$$\psi_t(u) = A_t^{-1} \int_0^t \exp\{i\langle u, Z_s \rangle\} dA_s \quad \text{où } Z_s = (Z_{1,s}, Z_{2,s})$$

et $\psi_\infty(\eta, u)$ est la fonction caractéristique associée à la mesure limite μ_∞ , la loi limite de Z_∞ .

Dans la suite on introduit les processus $L = (L_1, L_2)$ et $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ définis par

$$L_{t,k}(u_k) = (\phi_{t,k}(u_k))^{-1} \exp i\langle u_k, M_{t,k} \rangle, \quad \text{et} \quad \phi_{t,k}(u_k) = \exp B_{t,k}(u_k), \quad k \in \{1, 2\},$$

avec

$$B_{t,k}(u_k) = -\frac{1}{2}u_k^* \langle M_k^c \rangle_t u_k + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{d_k}} (\exp\{i\langle u_k, x \rangle\} - 1 - i\langle u_k, x \rangle) \nu^{M_k}(ds, dx), \quad k \in \{1, 2\}.$$

Par conséquent, montrer (1) revient à établir la convergence suivante

$$A_t^{-1} \int_0^t L_s((V_s^*)^{-1}u) \phi_s((V_s^*)^{-1}u) dA_s \longrightarrow \psi_\infty(\eta, u) \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (2)$$

En adaptant les mêmes techniques utilisées dans le lemme 3-2 de [5], on montre que

$$|L_t(u)| = (\phi_t(u))^{-1} \exp i\langle u, M_t \rangle \leq \exp \frac{1}{2} u^* \langle M \rangle_t u. \quad (3)$$

En introduisant le temps d'arrêt $T_r := \inf_r \{T_{r,b}; T_{r,c}^u\}$ où

$$T_{r,b} := \begin{cases} \inf\{t \leq r \text{ telque } \text{tr}(V_r^{-1} \langle M \rangle_t (V_r^*)^{-1}) > b\} & \text{si } E_{r,b} \text{ est réalisé,} \\ r & \text{si non} \end{cases}$$

et

$$T_{r,c}^u := \begin{cases} \inf\{t \leq r \text{ telque } |\phi_t((V_t^*)^{-1}u)|^{-1} > c\} & \text{si } E_{r,c}^u \text{ est réalisé,} \\ r & \text{si non} \end{cases}$$

avec $E_{r,b} = \{\text{tr}(V_r^{-1} \langle M \rangle_r (V_r^*)^{-1}) > b\}$ et $E_{r,c}^u = \{|\phi_r((V_r^*)^{-1}u)|^{-1} > c\}$, pour $u \in \mathbb{R}^d$ et $b > 0$ (resp. $c > 0$) désigne un point de continuité de la variable aléatoire $\text{tr}(C)$ (resp. un point de continuité de la variable aléatoire $|\phi_\infty(\eta, u)|^{-1}$), on déduit que la martingale locale complexe $\tilde{L}_t(u) = L_{t \wedge T_t}((V_t^*)^{-1}u)$ est bornée et d'espérance égale à 1. Ainsi pour $u \in \mathbb{R}^d$, on a

$$A_t^{-1} \int_0^t \tilde{L}_s(u) \phi_s((V_s^*)^{-1}u) dA_s - \phi_\infty(\eta, u) = A_t^{-1} \int_0^t \{\tilde{L}_s(u) - 1\} \phi_\infty(\eta, u) dA_s + \Sigma_t. \quad (4)$$

avec $\Sigma_t = \Delta_t + \delta'_t + \delta''_t$ où

$$\Delta_t = A_t^{-1} \int_0^t \{\exp i\langle u, Z_s \rangle - \exp i\langle u, V_s^{-1} M_{s \wedge T_s} \rangle\} dA_s,$$

$$\delta'_t = A_t^{-1} \int_0^t \tilde{L}_s(u) \{\phi_s((V_s^*)^{-1}u) - \phi_\infty(\eta, u)\} dA_s,$$

$$\delta''_t = A_t^{-1} \int_0^t \tilde{L}_s(u) \{\phi_{s \wedge T_s}((V_s^*)^{-1}u) - \phi_s((V_s^*)^{-1}u)\} dA_s.$$

En tenant compte des hypothèses suivantes

$$\|\Delta_{1,t_0}\| = \mathcal{O}(A_{t_0}^{-\beta}) \quad \text{et} \quad \|\Delta_{2,t_0}\| = \mathcal{O}(t_0^{-\beta}), \quad (t_0 \rightarrow \infty), \beta > 1, \quad (5)$$

et de la même façon que pour démontrer les relations (3.11) et (3.12) de [5] à savoir

$$\limsup_{t,b,c \rightarrow \infty} |\Delta_t| + \delta''_t = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\delta'_t| = 0 \quad (6)$$

et

$$A_t^{-1} \int_0^t \{L_{s \wedge T_s}((V_s^*)^{-1}u) - 1\} dA_s \longrightarrow 0 \quad p.s., (t \longrightarrow \infty). \quad (7)$$

Le résultat du théorème (2.2.1) est établi, en utilisant (5), (6) et (7).

3.2 Esquisse de preuve du théorème 2.2.2

Tout d'abord, on montre la convergence suivante

$$A_t^{-1} \int_0^t a_s \|Z_s\|^2 ds \longrightarrow tr(C) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (8)$$

où $Z_t = (Z_{1,t}, Z_{2,t})$ et $C = \text{Diag}(C_1, C_2)$.

En écrivant

$$A_t^{-1} \int_0^t a_s \|Z_s\|^2 ds = A_s^{-1} \int_0^t a_s \|Z_{1,s}\|^2 ds + A_t^{-1} \int_0^t a_s \|Z_{2,s}\|^2 ds.$$

Grâce à la loi forte quadratique, le premier terme du membre de droite tend vers $tr(C_1)$, lorsque t tend vers ∞ . Par une intégration par parties on montre que le deuxième terme s'écrit,

$$A_t^{-1} \int_0^t a_s d\Gamma_s = A_t^{-1} a_t \Gamma_t - A_t^{-1} \int_0^t \Gamma_s a'_s ds \quad \text{avec} \quad d\Gamma_s = \|Z_{2,s}\|^2 ds. \quad (9)$$

En appliquant la LFQ, dans le cas d'une normalisation explosive, on obtient

$$\frac{\Gamma_t}{t} \longrightarrow tr(C_2) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (10)$$

En utilisant la condition (C_4) , on obtient

$$A_t^{-1} a_t \Gamma_t \longrightarrow (1 - \alpha) tr(C_2) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (11)$$

En tenant compte de (10) et l'hypothèse (C_4) , on obtient

$$A_t^{-1} \int_0^t \Gamma_s a'_s ds \longrightarrow -\alpha tr(C_2) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (12)$$

Insérons (11) et (12) dans (9), on obtient la relation (8).

Compte tenu du théorème 2.2.1 et de l'hypothèse (H_3) , on en déduit que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} tr\{A_t^{-1} \int_0^t a_s \|Z_s\|^2 ds - C\} \geq 0. \quad (13)$$

En combinant la convergence (8) et l'inégalité (13), on obtient le résultat du théorème (2.2.2).

3.3 Preuve du théorème 2.2.3

Pour $Z_t = V_t^{-1} M_t$, la formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} Z_t Z_t^* &= \int_0^t V_s^{-1} M_s dM_s^* (V_s^*)^{-1} - \int_0^t V_s^{-1} M_s M_s^* (V_s^*)^{-1} dV_s^* (V_s^*)^{-1} \\ &\quad - \int_0^t V_s^{-1} dV_s V_s^{-1} M_s M_s^* (V_s^*)^{-1} + \int_0^t V_s^{-1} dM_s M_s^* (V_s^*)^{-1} \\ &\quad + \int_0^t V_s^{-1} d[M]_s (V_s^*)^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Alors

$$\tilde{D}_t + \int_0^t V_s^{-1} dV_s \tilde{D}_s + \int_0^t \tilde{D}_s (dV_s)^* (V_s^*)^{-1} = H_t + H_t^* + \bar{H}_t, \quad (15)$$

avec $\tilde{D}_t = V_t^{-1} (MM^* - \langle M \rangle_t) (V_t^*)^{-1}$, $H = \text{Diag}(H_1, H_2)$ et $\bar{H} = \text{Diag}(\bar{H}_1, \bar{H}_2)$, définis à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_1 \times d_2}$, par

$$H_{k,t} = \int_0^t V_{k,s}^{-1} M_{k,s} dM_{k,s}^* (V_{k,s}^*)^{-1} \quad \text{et} \quad \bar{H}_{k,t} = \int_0^t V_{k,s}^{-1} (d[M_k]_s - d\langle M_k \rangle_s) (V_{k,s}^*)^{-1}, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Par conséquent, on obtient la relation clef suivante :

$$\begin{aligned} \text{tr} \left\{ t^{-1/2} \int_0^t \{ V_s^{-1} M_s M_s^* (V_s^*)^{-1} - V_s^{-1} \langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} \} V_s^{-1} dV_s \right\} = \\ -\frac{1}{2} t^{-1/2} \text{tr} \{ \tilde{D}_t \} + t^{-1/2} \text{tr} \{ H_t \} + \frac{1}{2} t^{-1/2} \text{tr} \{ \bar{H}_t \}, \end{aligned} \quad (16)$$

Vu que

$$t^{-1/2} \tilde{D}_t = t^{-1/2} V_t^{-1} M_t M_t^* (V_t^*)^{-1} - t^{-1/2} V_t^{-1} \langle M \rangle_t (V_t^*)^{-1},$$

de l'hypothèse (H_1) , on obtient que

$$\text{tr} \{ t^{-1/2} \tilde{D}_t \} \longrightarrow 0 \quad p.s., (t \longrightarrow \infty). \quad (17)$$

Par ailleurs, sous l'hypothèse (\mathcal{H}''_2) , le lemme 3 de Le Breton et Museila [13] s'applique et on a

$$A_t^{-1/2} \bar{H}_{1,t} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad t^{-1/2} \bar{H}_{2,t} \longrightarrow 0 \quad p.s., (t \longrightarrow \infty).$$

En écrivant

$$t^{-1/2} \bar{H}_{1,t} = t^{-1/2} A_t^{1/2} A_t^{-1/2} \bar{H}_{1,t},$$

L'hypothèse (\mathcal{C}_4) , implique

$$t^{-1/2} \bar{H}_{1,t} \longrightarrow 0 \quad p.s., (t \longrightarrow \infty).$$

Ainsi,

$$t^{-1/2} \text{tr} \{ \bar{H}_t \} \longrightarrow 0 \quad p.s., (t \longrightarrow \infty). \quad (18)$$

Le lemme suivant donne le comportement asymptotique du terme $\text{tr} \{ t^{-1/2} H_t \}$.

Lemme 3.1 *Avec les notations précédentes, on a*

$$A_t^{-1/2} H_{1,t} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \tilde{C}_1 \otimes C_1), \quad \text{avec} \quad \tilde{C}_1 = U_1 C_1 + C_1 U_1^*, \quad (19)$$

et

$$t^{-1/2} H_{2,t} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \tilde{C}_2 \otimes C_2), \quad \text{avec} \quad \tilde{C}_2 = U_2 C_2 + C_2 U_2^*. \quad (20)$$

La première assertion de ce lemme est démontré par Chaâbane et Kebaier (voir relation (3.37) dans [5]). La seconde assertion est démontrée en annexe. De la première assertion du lemme 3.1 et de la condition (\mathcal{C}_4) on en déduit que $t^{-1/2} H_{1,t}$ tend vers zéro en probabilité. Par suite il vient :

$$t^{-1/2} \text{tr} \{ H_t \} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \text{tr} \{ \tilde{C}_2 \otimes C_2 \}). \quad (21)$$

En insérant (17), (18) et (21) dans (16), on obtient le résultat du théorème 2.2.3.

3.4 Preuve du théorème 2.2.4

Notons tout d'abord qu'en posant $\tilde{S} = \text{Diag}(I_{d_1}, S_2)$, on a

$$\text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha} \tilde{D}_s \tilde{S} ds \right\} = \text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha} \tilde{D}_{1,s} ds \right\} + \text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha} \tilde{D}_{2,s} S_2 ds \right\}. \quad (22)$$

avec $\tilde{D}_{t,1} = v_t^{-2} (M_1 M_1^* - \langle M_1 \rangle_t)$ et $\tilde{D}_{t,2} = V_{t,2}^{-1} (M_2 M_2^* - \langle M_2 \rangle_t) (V_{t,2}^*)^{-1}$.

Par conséquent, afin de montrer le résultat du théorème, on étudie les comportements asymptotiques des deux termes de droite de cette dernière égalité lesquels se déduisent des deux propriétés suivantes : Pour $\gamma > 0$ et $k \in \{1, 2\}$, on a

$$(\mathcal{P}_1) : \quad t^{-\gamma} \tilde{D}_{k,t} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

et

$$(\mathcal{P}_2) : \quad t^{-(1-\alpha)/2} \int_1^t s^{-(\gamma + \frac{1+\alpha}{2})} \text{tr} \{ \tilde{D}_{k,s} \} ds \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Ces deux propriétés sont une conséquence directe des faits que les couples (M_k, V_k) vérifient l'hypothèse (\mathcal{H}_1) pour $k \in \{1, 2\}$ et donc $V_{k,t}^{-1} M_{k,t}$ converge en loi et de l'application du lemme de Toeplitz.

1. **Comportement asymptotique de $\text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha} \tilde{D}_{2,s} S_2 ds \right\}$:**

Nous réécrivons la relation (15), pour le couple $(M_{2,t}, t^{\alpha/2} V_{2,t})$, on obtient

$$\int_1^t s^{-\alpha} \text{tr} \{ \tilde{D}_{2,s} V_{2,s}^{-1} dV_{2,s} \} + \int_1^t s^{-\alpha} \text{tr} \{ \tilde{D}_{2,s} (V_{2,s}^{-1} dV_{2,s})^* \} = -\text{tr} \{ t^{-\alpha} \tilde{D}_{2,t} \} + \alpha \int_1^t s^{-\alpha-1} \text{tr} \{ \tilde{D}_{2,s} \} ds + \int_1^t s^{-\alpha} \text{tr} \{ (2dH_{2,s} + d\bar{H}_{2,s}) \}, \quad (23)$$

avec $H_{2,t} = \int_0^t V_{2,s}^{-1} M_{2,s} dM_{2,s}^* (V_{2,s}^*)^{-1}$ et $\bar{H}_{2,t} = \int_0^t V_{2,s}^{-1} (d[M_2]_s - d\langle M_2 \rangle_s) (V_{2,s}^*)^{-1}$.

Vu la condition (C'_3) et le fait que $\|\Delta_{2,t}\| = \mathcal{O}(t^{-\beta})$, alors,

$$\int_1^t s^{-\alpha} \text{tr} \{ \tilde{D}_{2,s} V_{2,s}^{-1} dV_{2,s} \} + \int_1^t s^{-\alpha} \text{tr} \{ \tilde{D}_{2,s} (V_{2,s}^{-1} dV_{2,s})^* \} = \text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha} \tilde{D}_{2,s} S_2 ds \right\} + \mathcal{O} \left(\text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha-\beta} \tilde{D}_{2,s} ds \right\} \right).$$

Par conséquent, la relation (23) devient

$$\text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha} \tilde{D}_{2,s} S_2 ds \right\} = -\text{tr} \{ t^{-\alpha} \tilde{D}_{2,t} \} + \alpha \int_1^t s^{-\alpha-1} \text{tr} \{ \tilde{D}_{2,s} \} ds + \int_1^t s^{-\alpha} \text{tr} \{ (2dH_{2,s} + d\bar{H}_{2,s}) \} + \mathcal{O} \left(\text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha-\beta} \tilde{D}_{2,s} ds \right\} \right). \quad (24)$$

Notons qu'en choisissant $\gamma = (1 + \alpha)/2$ dans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) d'une part, on a que

$$\text{tr} \{ t^{-\alpha} \tilde{D}_{2,t} \} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (25)$$

et d'autre part

$$\int_1^t s^{-\alpha-1} \text{tr} \{ \tilde{D}_{2,s} \} ds \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (26)$$

De même, en choisissant $\gamma = \beta - (1 - \alpha)/2$, dans (\mathcal{P}_2) , on obtient

$$\text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha-\beta} \tilde{D}_{2,s} ds \right\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (27)$$

Par ailleurs, notons

$$B_{2,t} = \int_1^t s^{-\alpha} \text{tr} \{ dH_{2,s} \}, \quad \text{et} \quad \bar{B}_{2,t} = \int_1^t s^{-\alpha} \text{tr} \{ d\bar{H}_{2,s} \}.$$

alors, on a

$$\int_1^t s^{-\alpha} \text{tr} \{ (2dH_{2,s} + d\bar{H}_{2,s}) \} = 2 B_{2,t} + \bar{B}_{2,t} \quad (28)$$

Dans la suite, on étudie le comportement asymptotique des deux martingales $B_{2,t}$ et $\bar{B}_{2,t}$.

(a) **Comportement asymptotique de $(B_{2,t})$:**

La variation quadratique prévisible de la martingale $(B_{2,t}, t \geq 0)$ est donnée par

$$\langle B_2 \rangle_t = \int_1^t s^{-2\alpha} \text{tr} \{ d\langle H_2 \rangle_s \}.$$

Par une intégration par parties, on obtient

$$\int_1^t s^{-2\alpha} \text{tr}\{d\langle H_2 \rangle_s\} = t^{1-2\alpha} \text{tr}\left\{\frac{\langle H_2 \rangle_t}{t}\right\} + 2\alpha \int_1^t s^{-2\alpha} \text{tr}\left\{\frac{\langle H_2 \rangle_s}{s}\right\} ds.$$

Vu que $\langle H_2 \rangle_t/t$ converge p.s., (voir lemme 3.1 en annexe), il vient que

$$t^{1-2\alpha} \text{tr}\left\{\frac{\langle H_2 \rangle_t}{t}\right\} = \mathbf{o}(1) \quad p.s.,$$

et

$$\int_1^t s^{-2\alpha} \text{tr}\left\{\frac{\langle H_2 \rangle_s}{s}\right\} ds = \mathcal{O}(1) \quad p.s..$$

Par conséquent

$$\langle B_2 \rangle_t = \int_1^t s^{-2\alpha} \text{tr}\{d\langle H_2 \rangle_s\} = \mathcal{O}(1) \quad p.s..$$

Donc

$$B_{2,t} = \mathcal{O}(1) \quad p.s.. \quad (29)$$

(b) **Comportement asymptotique de $(\bar{B}_{t,2})$:**

De même par une intégration par parties, on obtient

$$\bar{B}_{2,t} = t^{-\alpha} \text{tr}\{\bar{H}_{2,t}\} + \alpha \int_1^t s^{-(\alpha+1)} \text{tr}\{\bar{H}_{2,s}\} ds.$$

Sous l'hypothèse (\mathcal{H}''_2) , (voir remarque (2.2)), à savoir

$$\int_0^t V_{2,s}^{-1} (d[M_2]_s - d\langle M_2 \rangle_s) (V_{2,s}^*)^{-1} = \mathbf{o}(t^{1/2}) \quad p.s.,$$

on obtient

$$\bar{H}_{2,t} = \mathbf{o}(t^{1/2}) \quad p.s..$$

Par conséquent,

$$t^{-\alpha} \text{tr}\{\bar{H}_{2,t}\} = \mathbf{o}(t^{1/2-\alpha}) \quad p.s.,$$

et

$$\int_1^t s^{-(\alpha+1)} \text{tr}\{\bar{H}_{2,s}\} ds = \mathcal{O}(1) \quad p.s..$$

Ce qui implique

$$\bar{B}_{2,t} = \mathbf{o}(t^{(1-\alpha)/2}) \quad p.s.. \quad (30)$$

Vu les relations (24), (25), (26), (27), (29) et (30) il vient que

$$t^{-(1-\alpha)/2} \text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha} \tilde{D}_{2,s} S ds \right\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

2. **Comportement asymptotique de $\text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha} \tilde{D}_{1,s} ds \right\}$:**

De même, en réécrivant la relation (15) pour le couple (M_1, V_1) et en appliquant la trace, on obtient

$$\text{tr} \left\{ \int_1^t \tilde{D}_{1,s} \frac{dv_s}{v_s} \right\} = -\frac{1}{2} \text{tr}\{\tilde{D}_{1,t}\} + \text{tr}\{H_{1,t}\} + \frac{1}{2} \text{tr}\{\bar{H}_{1,t}\}. \quad (31)$$

avec $H_{1,t} = \int_0^t v_s^{-2} M_{1,s} dM_{1,s}^*$ et $\bar{H}_{1,t} = \int_0^t v_s^{-2} (d[M_1]_s - d\langle M_1 \rangle_s)$.

Vu que, pour $\alpha \in [3/4, 1[$, on a

$$v_t^{-1} \frac{dv_t}{dt} = r^2 t^{-\alpha} + \mathbf{o}(t^{-(1+\alpha)}), \quad (32)$$

il vient que

$$\text{tr} \left\{ \int_1^t \tilde{D}_{1,s} \frac{dv_s}{v_s} \right\} = r^2 \text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha} \tilde{D}_{1,s} ds \right\} + \mathbf{o} \left(\text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-(1+\alpha)} \tilde{D}_{1,s} ds \right\} \right).$$

Par conséquent la relation (31), devient

$$r^2 \text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-\alpha} \tilde{D}_{1,s} ds \right\} = -\frac{1}{2} \text{tr} \{ \tilde{D}_{1,t} \} + \frac{1}{2} \text{tr} \{ \bar{H}_{1,t} \} + \text{tr} \{ H_{1,t} \} + \mathbf{o} \left(\text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-(1+\alpha)} \tilde{D}_{1,s} ds \right\} \right). \quad (33)$$

En choisissant $\gamma = (1 - \alpha)/2$ dans (\mathcal{P}_1) , on a que

$$t^{-(1-\alpha)/2} \text{tr} \{ \tilde{D}_{1,t} \} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (34)$$

De même, en choisissant $\gamma = (1 + \alpha)/2$, dans (\mathcal{P}_2) , on obtient que

$$t^{-(1-\alpha)/2} \text{tr} \left\{ \int_1^t s^{-(1+\alpha)} \tilde{D}_{1,s} ds \right\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (35)$$

Sous l'hypothèse (\mathcal{H}''_2) , (voir remarque 2.2), on a

$$\int_0^t v_s^{-2} (d[M_1]_s - d\langle M_1 \rangle_s) = \mathbf{o}(A_t^{1/2}) \quad p.s..$$

De la condition (32), on en déduit que

$$\bar{H}_{1,t} = \mathbf{o}(t^{(1-\alpha)/2}) \quad p.s.. \quad (36)$$

Par ailleurs, la première assertion du lemme 3.1 et la relation (32), impliquent que

$$\frac{\sqrt{1-\alpha}}{r} t^{-(1-\alpha)/2} \text{tr} \{ H_{1,t} \} \implies \mathcal{N}(0, 2(\text{tr} \{ C_1 \})^2). \quad (37)$$

Ainsi, le résultat du théorème 2.2.3 découle des propriétés (33), (34), (35), (36) et (37). Ainsi, le résultat du théorème 2.2.3 est établi.

4 Applications statistiques

4.1 Modèle de diffusion linéaire multidimensionnel à régularité mixte

Dans ce premier exemple, on considère un modèle de diffusion mixte. Soit X_t , solution de l'équation différentielle stochastique, définie par

$$X_t = X_0 + N \int_0^t X_s ds + B_t \quad (38)$$

où B_t est un mouvement brownien standard p -dimensionnel et N une matrice inconnue d'ordre p . En appliquant les théorèmes obtenus dans le paragraphe 2, on obtient des vitesses de convergence pour des fonctionnelles de l'estimateur de la matrice N . Dans la suite, on suppose que le polynôme caractéristique P de la matrice N , vérifie

$$P(z) = P_1(z)P_2(z), \quad (39)$$

avec P_1 est un polynôme de degré p_1 , ayant des racines strictement négatives la plus petite (resp. la plus grande) des solutions sera notée $\lambda_{min}(\theta_1)$ (resp. $\lambda_{max}(\theta_1)$) et P_2 est un polynôme de degré p_2 , ayant une seule racine réelle strictement positive notée $\lambda(\theta_2)$. (Un modèle plus général que ce dernier a été étudié dans Touati [18]). La relation (39) implique l'existence d'une matrice A d'ordre p telle que

$$ANA^{-1} := \theta = \text{Diag}\{\theta_1, \theta_2\}$$

où θ_i est une matrice d'ordre $p_i \times p_i$ dont le polynôme caractéristique est P_i où $i \in \{1, 2\}$. Le modèle (38), s'écrit

$$AX_t = AX_0 + \theta \int_0^t AX_s ds + AB_t.$$

En écrivant A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

avec A_i une matrice d'ordre $p_i \times p$ pour $i \in \{1, 2\}$, on obtient la décomposition suivante

$$A_i X_t = A_i X_0 + \theta_i \int_0^t A_i X_s ds + A_i B_t, \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}.$$

On notera $X_{i,t} = A_i X_t$ pour $i \in \{1, 2\}$, où $X_{1,t}$ est une diffusion de type régulière et $X_{2,t}$ est une diffusion de type explosive. Ainsi on a

$$X_{i,t} = X_{i,0} + \theta_i \int_0^t X_{i,s} ds + A_i B_t.$$

Dans la suite, on considère $\hat{\theta}_t$ l'estimateur de moindres carrés de θ , définie par

$$\hat{\theta}_t = \left(\int_0^t AX_s d(AX_s)^* \right)^* \left(\int_0^t AX_s (AX_s)^* ds \right)^{-1}.$$

Ainsi on construit un estimateur fortement consistant de N , donné par

$$\hat{N}_t := A^{-1} \hat{\theta}_t A. \tag{40}$$

De la relation (38), on obtient

$$(\hat{N}_t - N)P_t = M_t$$

où $P_t = \int_0^t X_s X_s^* A^* ds$ et M_t est la martingale définie par

$$M_t = \int_0^t dB_s (AX_s)^* \quad \text{avec} \quad \langle M \rangle_t = \int_0^t AX_s X_s^* A^* ds.$$

Dans la suite on écrit M_t sous la forme $M_t = (M_{1,t}, M_{2,t})$ avec

$$M_{i,t} = \int_0^t dB_s X_{i,s}^* \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}.$$

L'avantage de cette écriture est de décomposer M_t en deux composantes, la première étant à normalisation régulière alors que la seconde est à normalisation explosive. Notons que la variation quadratique de M_t s'écrit aussi

$$\langle M \rangle_t = \begin{pmatrix} \langle M_1 \rangle_t & \langle M_1, M_2 \rangle_t \\ \langle M_2, M_1 \rangle_t & \langle M_2 \rangle_t \end{pmatrix}.$$

En posant $V_t = \text{Diag}(\sqrt{t}\mathcal{I}_{p_1}, e^{\theta_2 t})$ et $I_t = V_t^{-1}\langle M \rangle_t(V_t^*)^{-1}$, on a

$$I_t = \begin{pmatrix} I_{t,1} & \frac{1}{\sqrt{t}}\langle M_1, M_2 \rangle_t e^{-\theta_2^* t} \\ \frac{e^{-\theta_2 t}}{\sqrt{t}}\langle M_2, M_1 \rangle_t & I_{t,2} \end{pmatrix},$$

où $I_{1,t} = \frac{1}{t}\langle M_1 \rangle_t$ et $I_{2,t} = e^{-\theta_2 t}\langle M_2 \rangle_t e^{-\theta_2^* t}$.

Le lemme suivant, nous donne le comportement asymptotique de I_t .

Lemme 4.1 *Avec les notations précédentes, on a*

$$I_t \longrightarrow I_\infty := \text{Diag}(I_{1,\infty}, I_{2,\infty}) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty)$$

où

$$I_{1,\infty} = \int_0^{+\infty} e^{\theta_1 s} e^{\theta_1^* s} ds$$

et

$$I_{2,\infty} = \int_0^{+\infty} e^{-\theta_2 s} Z Z^* e^{-\theta_2^* s} ds \quad \text{avec} \quad Z = \int_0^{+\infty} e^{-\theta_2 s} dB_s.$$

Preuve

Le fait que $I_{i,t} \longrightarrow I_{i,\infty} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty)$ pour $i \in \{1, 2\}$, est une conséquence directe de [11] et [12]. Il reste à montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\langle M_1, M_2 \rangle_t e^{-\theta_2^* t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t X_{2,s} X_{1,s}^* ds e^{-\theta_2^* t} \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

En effet, on a

$$\left\{ \mathbb{E} \left\| \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t X_{2,s} X_{1,s}^* ds e^{-\theta_2^* t} \right\|^2 \right\} \leq \frac{1}{t} \left\| e^{-\theta_2^* t} \right\|^2 \left(\int_0^t \mathbb{E} \|X_{2,s} X_{1,s}^*\| ds \right)^2,$$

de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\left(\int_0^t \mathbb{E} \|X_{2,s} X_{1,s}^*\| ds \right)^2 \leq \int_0^t \mathbb{E} \|X_{1,s}^* X_{1,s}\| ds \int_0^t \mathbb{E} \|X_{2,s}^* X_{2,s}\| ds. \quad (41)$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|X_{1,s}^* X_{1,s}\| &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^s dB_u^* A_1^* e^{-\theta_1^* u} e^{\theta_1^* s} e^{\theta_1 s} \int_0^s e^{-\theta_1 u} A_1 dB_u \right\} \\ &= \int_0^s \left\| e^{\theta_1^* s} e^{-\theta_1 u} A_1 \right\|^2 du. \end{aligned}$$

En tenant compte des équivalences suivantes

$$\|e^{\theta_1^* s}\| \sim \|e^{\theta_1 s}\| \sim e^{\lambda_{\min}(\theta_1)s} \quad \text{et} \quad \|e^{-\theta_1^* s}\| \sim \|e^{-\theta_1 s}\| \sim e^{-\lambda_{\max}(\theta_1)s} \quad (s \longrightarrow \infty),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{E} \|X_{1,s}^* X_{1,s}\| ds &\leq \frac{\|A_1\|^2}{2|\lambda_{\max}(\theta_1)|} \times \\ &\left\{ \frac{1}{2|\lambda_{\min}(\theta_1)|} \left(e^{2\lambda_{\min}(\theta_1)t} - 1 \right) - \frac{1}{2(\lambda_{\min}(\theta_1) - \lambda_{\max}(\theta_1))} \left(e^{2(\lambda_{\min}(\theta_1) - \lambda_{\max}(\theta_1))t} - 1 \right) \right\}. \quad (42) \end{aligned}$$

De même, en utilisant les équivalences suivantes

$$\|e^{\theta_2^* s}\| \sim \|e^{\theta_2 s}\| \sim e^{\lambda(\theta_2)s} \quad \text{et} \quad \|e^{-\theta_2^* s}\| \sim \|e^{-\theta_2 s}\| \sim e^{-\lambda(\theta_2)s} \quad (s \rightarrow \infty),$$

on obtient

$$\int_0^t \mathbb{E} \|X_{2,s}^* X_{2,s}\| ds \leq \frac{\|A_2\|^2}{(2\lambda(\theta_2))^2} \left(e^{2\lambda(\theta_2)t} - 1 \right). \quad (43)$$

En insérant (42) et (43) dans (41), on obtient que

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \langle M_1, M_2 \rangle_t e^{-\theta_2^* t} \rightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \rightarrow \infty).$$

D'où le résultat du lemme. \square

Vitesse de convergences pour des fonctionnelles de l'estimateur \hat{N} de N :

Le théorème de la limite centrale pour la martingale M_t découle directement du lemme précédent. Plus précisément, on a

$$V_t^{-1} M_t \Rightarrow \mathcal{N}(0, I_\infty)$$

où I_∞ est donné par le lemme 4.1. On en déduit des relations (38) et (40), un TLC pour \hat{N}_t , à savoir :

$$(TLC) \quad V_t^{-1} \{ \hat{N}_t - N \} P_t \Rightarrow \mathcal{N}(0, I_\infty).$$

Dans ce cadre d'étude, la normalisation mixte V_t vérifie les conditions (C) et (C₄) avec $U_1 = 1/2 \mathcal{I}_{p_1}$, $A_t = \log t$, $\Delta_{1,t} = 0$ et $\alpha = 1$, ainsi que la condition (C') avec $U_2 = \theta_2$ et $\Delta_{2,t} = 0$. En appliquant les résultats des théorèmes 2.2.1, 2.2.2 et théorème 2.2.3 au couple (M, V) , on en déduit que l'estimateur \hat{N}_t de N vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 4.1 *l'estimateur \hat{N}_t de N vérifie*

1. (TLCPS)
$$\frac{1}{\log t} \int_1^t \delta_{\{V_s^{-1} \{ \hat{N}_s - N \} P_s\}} \frac{ds}{s} \Rightarrow \mathcal{N}_{p \times p}(0, I_\infty) \quad p.s..$$
2. (LFQ)
$$\frac{1}{\log t} \int_1^t V_s^{-1} \{ \hat{N}_s - N \} P_s P_s^* \{ \hat{N}_s - N \}^* (V_s^*)^{-1} \frac{ds}{s} \rightarrow I_\infty \quad p.s..$$
3. (TLC de LFQ)
$$t^{-1/2} \text{tr} \left\{ \int_1^t (V_s^{-1} \{ \hat{N}_s - N \} P_s P_s^* \{ \hat{N}_s - N \}^* (V_s^*)^{-1} - I_s) J_s ds \right\} \Rightarrow \mathcal{N}_{p \times p}(0, \mathfrak{C}),$$

avec la covariance \mathfrak{C} est donnée par $\mathfrak{C} = 4 \text{tr} \{ (\theta_2 I_{2,\infty} + I_{2,\infty} \theta_2^*) \otimes I_{2,\infty} \}$ et $J_s = \text{Diag}(\frac{1}{2s} I_{p_1}, \theta_2)$.

4.2 Modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bivarié

La deuxième application concerne le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bidimensionnel. Ce modèle, plus connu sous le nom de modèle d'Ornstein-Uhlenbeck bivarié, est souvent utilisé notamment en mathématiques financières (voir par exemple Lo et Wang [15] et Krämer et Richter [10]), mais aussi en biologie où il a permis de modéliser le tissu microvasculaire dans certaines thérapies contre le cancer (voir Favetto et Samson [8]). Ainsi, les énoncés ci-dessous, viennent compléter les résultats d'estimation des paramètres de ce modèle faits par [8] et [10].

Soit $Z = \{\Omega, \mathcal{F}, (P_z; z \in \mathbb{R}^2)\}$, $F = (\mathcal{F}_t; t \geq 0)$, $(Z_t; t \geq 0)$ une version canonique de la diffusion sur \mathbb{R}^2 , solution du système différentiel stochastique suivant

$$\begin{cases} dX_t = \theta_1 X_t dt + \theta_2 Y_t dt + dB_t, & X_0 = x, \\ dY_t = \theta_3 Y_t dt + dW_t, & Y_0 = y, \end{cases} \quad (44)$$

où $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3$ avec $0 < \theta_3 < \theta_1$ et F est la filtration naturelle de $Z_t = (X_t, Y_t)$, P_z est la loi de Z partant de $z = (x, y)$ et $\Gamma = (B, W)$ est un (F, P_z) mouvement brownien plan nul en 0.

En posant $A(\theta) = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ 0 & \theta_3 \end{pmatrix}$, le système (44) s'écrit sous la forme vectorielle

$$dZ_t = A(\theta)Z_t dt + d\Gamma_t; t \geq 0, \quad Z_0 = z. \quad (45)$$

On notera $P_{\theta, z}$ la loi de Z partant de z , pour bien marquer sa dépendance en fonction de θ et $P_{0, z}$ la loi du mouvement brownien Γ . Notons $P_{\theta, z}^t$ et $P_{0, z}^t$ les restrictions de $P_{\theta, z}$ et $P_{0, z}$ à la tribu \mathcal{F}_t . D'après le théorème de Cameron Martin Girsanov (voir [16]), on a

$$\frac{dP_{\theta, z}^t}{dP_{0, z}^t} = \exp \mathcal{V}_t(\theta)$$

où

$$\mathcal{V}_t(\theta) = \int_0^t (\theta_1 X_s + \theta_2 Y_s) dX_s + \theta_3 \int_0^t Y_s dY_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\theta_1 X_s + \theta_2 Y_s)^2 ds - \frac{\theta_3^2}{2} \int_0^t Y_s^2 ds$$

Soit $D^{(1)}\mathcal{V}_t(\theta)$ la dérivée première de $\mathcal{V}_t(\theta)$ par rapport à θ , on a

$$D^{(1)}\mathcal{V}_t(\theta) = \begin{pmatrix} \int_0^t X_s dX_s - \theta_1 \int_0^t X_s^2 ds - \theta_2 \int_0^t X_s Y_s ds \\ \int_0^t Y_s dX_s - \theta_1 \int_0^t X_s Y_s ds - \theta_2 \int_0^t Y_s^2 ds \\ \int_0^t Y_s dY_s - \theta_3 \int_0^t Y_s^2 ds \end{pmatrix}.$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ est une solution de l'équation $D^{(1)}\mathcal{V}_t(\theta) = 0$, qui vérifie la relation matricielle suivante

$$M_t = \langle M \rangle_t (\hat{\theta}_t - \theta), \quad (46)$$

où M_t est une $(F, P_{\theta, z})$ martingale définie par

$$M_t = \left(\int_0^t X_s dB_s, \int_0^t Y_s dB_s, \int_0^t Y_s dW_s \right)$$

dont la variation quadratique prévisible est donnée par

$$\langle M \rangle_t = \begin{pmatrix} \int_0^t X_s^2 ds & \int_0^t X_s Y_s ds & 0 \\ \int_0^t X_s Y_s ds & \int_0^t Y_s^2 ds & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^t Y_s^2 ds \end{pmatrix}.$$

Dans [17], Touati a déterminé le comportement asymptotique du crochet de M_t à savoir

$$I_t := V_t^{-1} \langle M \rangle_t (V_t^*)^{-1} \longrightarrow I_\infty \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty),$$

où

$$V_t = \begin{pmatrix} e^{t\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\theta_3} \end{pmatrix}$$

et

$$I_\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\theta_1} X^2(\theta) & \frac{1}{\theta_1 + \theta_3} X(\theta) Y(\theta) & 0 \\ \frac{1}{\theta_1 + \theta_3} X(\theta) Y(\theta) & \frac{1}{2\theta_1} Y^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\theta_1} Y^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a que $I_t V_t(\hat{\theta}_t - \theta) \implies \mathcal{N}(0, I_\infty)$. Comme I_∞ est inversible, le TLC précédent s'écrit aussi

$$(TLC) \quad V_t(\hat{\theta}_t - \theta) \implies \mathcal{N}(0, I_\infty^{-1}).$$

Vitesse de convergences pour des fonctionnelles de l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ :

La normalisation V_t vérifie la condition (C') avec $U_2 = \text{Diag}(\theta_1, \theta_3, \theta_3)$ et $\Delta_{2,t} = 0$. Le théorème 2.1.1, appliqué au couple (M, V) définie ci-dessus, permet d'en déduire que l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ vérifie les propriétés asymptotiques suivantes

Proposition 4.2 *l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ vérifie*

$$1. (TLCPS) \quad t^{-1} \int_0^t \delta_{\{I_s V_s(\hat{\theta}_s - \theta)\}} ds \implies \mathcal{N}_{3 \times 3}(0, I_\infty) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

$$2. (LFQ) \quad t^{-1} \int_0^t I_s V_s(\hat{\theta}_s - \theta)(\hat{\theta}_s - \theta)^* V_s^* I_s^* ds \longrightarrow I_\infty \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Pour $\tilde{D}_s = I_s V_s(\hat{\theta}_s - \theta)(\hat{\theta}_s - \theta)^* V_s^* I_s^* - I_s$, on a

$$3. (TLC de LFQ) \quad t^{-1/2} \int_0^t (U_2 \tilde{D}_s + \tilde{D}_s U_2) ds \implies \nu_\infty, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

où conditionnellement à I_∞ , ν_∞ est une gaussienne matricielle centrée, indépendante de la v.a. I_∞ et de covariance

$$\mathcal{C} = (2\theta_1 + 4\theta_3)^{-1} \{2I_\infty \otimes I_\infty + 2[(\text{Vect}(I_\infty))(\text{Vect}(I_\infty))^*]^\perp\}.$$

A Annexe

A.1 Preuve du lemme 3.1

La première assertion du lemme a été établi dans [5] (voir relation 3.37). Nous allons montrer la seconde à savoir

$$t^{-1/2} H_{2,t} \implies \mathcal{N}(0, \tilde{C}_2 \otimes C_2)$$

où $H_{2,t} = \int_0^t V_{2,s}^{-1} M_{2,s} (dM_{2,s})^* (V_{2,s}^*)^{-1}$ et $\tilde{C}_2 = U_2 C_2 + C_2 U_2^*$. Nous allons établir que la martingale H_2 vérifie le TLC. Pour cela nous allons étudier le comportement asymptotique de sa variation quadratique prévisible et la validité de la condition de Lindeberg.

A.1.1 Comportement asymptotique de la variation quadratique de la martingale H_2

Pour $u \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$H_{2,t}^u := \int_0^t V_{2,s}^{-1} M_{2,s} (dM_{2,s})^* (V_{2,s}^*)^{-1} u.$$

On le résultat suivant :

Lemme A.1 *Posons $\tilde{C}_2 = U_2 C_2 + C_2 U_2^*$, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$t^{-1} \langle H_2^u \rangle_t \longrightarrow (u^* \tilde{C}_2 u) C_2, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent,

$$t^{-1} \langle \text{Vect}(H_2) \rangle_t \longrightarrow \tilde{C}_2 \otimes C_2, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Preuve :

La variation quadratique prévisible de la martingale $(H_{2,t}^u)$ est donnée par

$$\langle H_2^u \rangle_t = \int_0^t Z_{2,s} \{u^* V_{2,s}^{-1} d\langle M_2 \rangle_s (V_{2,s}^*)^{-1} u\} Z_{2,s}^*.$$

Pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} x^* \langle H_2^u \rangle_t x &= \int_0^t x^* Z_{2,s} \{ u^* V_{2,s}^{-1} d\langle M_2 \rangle_s (V_{2,s}^*)^{-1} u \} Z_{2,s}^* x \\ &= \int_0^t \langle x, Z_{2,s} \rangle^2 dF_s^u, \end{aligned}$$

avec $F_t^u = u^* F_t u$ où $F_t = \int_0^t V_{2,s}^{-1} d\langle M_2 \rangle_s (V_{2,s}^*)^{-1} ds$. Le processus F_t s'écrit

$$F_t = C_{2,t} + \int_0^t C_{2,s} (V_{2,s}^{-1} \frac{dV_{2,s}}{ds})^* ds + \int_0^t (V_{2,s}^{-1} \frac{dV_{2,s}}{ds}) C_{2,s} ds. \quad (47)$$

Alors, pour $u \in \mathbb{R}^d$, on obtient

$$dF_t^u = d(u^* C_{2,t} u) + u^* \left\{ C_{2,t} (V_{2,t}^{-1} \frac{dV_{2,t}}{ds})^* + (V_{2,t}^{-1} \frac{dV_{2,t}}{dt}) C_{2,t} \right\} u.$$

Il en résulte que, pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} x^* \langle H_2^u \rangle_t x &= \int_0^t \langle x, Z_{2,s} \rangle^2 d(u^* C_{2,s} u) + 2 \int_0^t \langle x, Z_{2,s} \rangle^2 u^* \Delta_{2,s} C_{2,s}^2 u ds \\ &\quad + \int_0^t \langle x, Z_{2,s} \rangle^2 u^* (C_{2,s} U^* + U C_{2,s}) u ds. \end{aligned} \quad (48)$$

La loi forte quadratique dans le cas d'une normalisation explosif, donne

$$\frac{1}{t} \int_0^t \langle x, Z_{2,s} \rangle^2 ds \longrightarrow x^* C_2 x \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (49)$$

En utilisant la convergence (49), la condition (C'_3) , l'hypothèse (H_1) et en appliquant le lemme de Toeplitz, on obtient pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\int_0^t \langle x, Z_{2,s} \rangle^2 u^* \Delta_{2,s} C_{2,s}^2 u ds = o(t) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty) \quad (50)$$

et

$$\frac{1}{t} \int_0^t \langle x, Z_{2,s} \rangle^2 u^* (C_{2,s} U_2^* + U_2 C_{2,s}) u ds \longrightarrow (u^* \tilde{C}_2 u) (x^* C_2 x) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (51)$$

Par ailleurs,

$$\int_0^t \langle x, Z_{2,s} \rangle^2 d(u^* C_{2,s} u) \leq \|x\|^2 \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 d|u^* C_{2,s} u|.$$

Du fait que

$$|u^* C_{2,s} u| \leq \|u\|^4 \|C_{2,s}\| = \|u\|^4 tr\{C_{2,s}\},$$

alors, on obtient

$$\int_0^t \langle x, Z_{2,s} \rangle^2 d(u^* C_{2,s} u) \leq C^{te} \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 d(tr\{C_{2,s}\}).$$

Par une intégration par parties, on obtient

$$\int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 d(tr\{C_{2,s}\}) = \|Z_{2,t}\|^2 tr\{C_{2,t}\} - \int_0^t tr\{C_{2,s}\} d(\|Z_{2,s}\|^2).$$

Par l'hypothèse (H_1) , il vient que presque sûrement $\text{tr}\{C_{2,s}\} = \mathcal{O}(1)$. En appliquant la LL dans le cas d'une normalisation explosif, on déduit que les deux termes du membre de droite de cette égalité est presque sûrement un $\mathbf{o}(t)$. Par conséquent

$$\int_0^t \langle x, Z_{2,s} \rangle^2 d(u^* C_{2,s} u) = \mathbf{o}(t) \text{ p.s.}, \quad (t \rightarrow \infty). \quad (52)$$

En insérant (50), (51) et (52) dans (48), on obtient alors que pour $x \in \mathbb{R}^d$

$$t^{-1} x^* \langle H_2^u \rangle_t x \rightarrow (u^* \tilde{C}_2 u) x^* C_2 x \text{ p.s.}, \quad (t \rightarrow \infty).$$

D'où la première assertion du lemme A.1. La deuxième assertion découle directement de la relation suivante

$$\langle H_2^i, H_2^j \rangle_t = \int_0^t Z_{2,s} e_i^* V_{2,s}^{-1} d\langle M_2 \rangle_s (V_{2,s}^*)^{-1} e_j Z_{2,s}^*,$$

pour $1 \leq i, j \leq d$, où (e_1, \dots, e_d) désigne la base canonique de \mathbb{R}^d . \square

Vu le résultat de la proposition précédente, pour appliquer le théorème TLC à la martingale (H_t) , il reste à vérifier la validité de la condition de Lindeberg. Pour ce faire on rappelle (voir Chaâbane et Ke-baier [5]) que pour $A = (A_t; t \geq 0)$ et $B = (B_t; t \geq 0)$ deux processus croissants issus de 0, on dit que A est *dominé au sens fort* par B et on note $A \ll B$ si $(B_t - A_t)$ est un processus croissant. On désigne par \tilde{A}_t (resp \tilde{B}_t), le compensateur prévisible du processus A (resp B). On a le résultat suivant

$$\text{Si } A \ll B, \quad \text{alors } \tilde{A} \ll \tilde{B}. \quad (53)$$

Le saut de la martingale matricielle $H_{t,2}$, est donnée par

$$\Delta H_{2,t} = Z_{2,t} (\Delta M_{2,t})^* (V_{2,t}^*)^{-1},$$

sa norme vérifie

$$\begin{aligned} \|\Delta H_{2,t}\|^2 &= \text{tr}\{\Delta H_{2,t} \Delta H_{2,t}^*\} \\ &= \text{tr}\{Z_{2,t} Z_{2,t}^*\} \{\Delta M_{2,t}^* (V_{2,t}^*)^{-1} V_{2,t}^{-1} \Delta M_{2,t}\} \\ &= \|Z_{2,t}\|^2 \text{tr}\{V_{2,t}^{-1} \Delta M_{2,t}^* \Delta M_{2,t} (V_{2,t}^*)^{-1}\} \\ &= \|Z_{2,t}\|^2 \text{tr}\{V_{2,t}^{-1} \Delta [M_2]_t (V_{2,t}^*)^{-1}\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\|\Delta H_{2,t}\|^2 = \|Z_{2,t}\|^2 \Delta \Lambda_t \quad \text{avec} \quad \Delta \Lambda_t = \text{tr}\{V_{2,t}^{-1} \Delta [M_2]_t (V_{2,t}^*)^{-1}\},$$

où $\Lambda = (\Lambda_t; t \geq 0)$ est le processus croissant donnée par

$$\Lambda_t = \text{tr} \left\{ \int_0^t V_{2,s}^{-1} d[M_2]_s (V_{2,s}^*)^{-1} \right\}.$$

A.1.2 Vérification de la condition de Lindeberg pour la martingale $(H_{2,t})$

Désormais, on pose

$$\sigma_t^{H_2}(r) = \sum_{s \leq t} \|\Delta H_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_{2,s}\| > r\}} \quad t > 0, r > 0.$$

La condition de Lindeberg au sens de la convergence presque sûre pour la martingale H_2 s'écrit

$$\forall \epsilon > 0, \quad \widetilde{\sigma_t^{H_2}(\epsilon\sqrt{t})} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

La preuve de ce dernier résultat découle des deux lemmes techniques suivants :

Lemme A.2 Sous l'hypothèse (\mathcal{H}_2) on a presque sûrement

$$\sup_{t>0} \|V_t^{-1} \Delta M_{2,t}\| < +\infty.$$

Preuve

En remarquant que

$$\sum_{s \leq \cdot} \Delta M_{2,s} (\Delta M_{2,s})^* \ll [M_2]. ,$$

alors pour $t \geq 0$, on a

$$\|V_{2,t}^{-1} \Delta M_{2,t}\|^2 \leq \sum_{s \leq t} \|V_{2,s}^{-1} \Delta M_{2,s}\|^2 \ll \text{tr}\{V_{2,t}^{-1} [M_2]_t (V_{2,t}^*)^{-1}\}.$$

Vu l'hypothèse (\mathcal{H}_2) , on obtient

$$\|V_t^{-1} \Delta M_t\|^2 = \mathcal{O}(1), \quad (t \rightarrow \infty).$$

D'où le résultat du lemme. \square

Lemme A.3 Pour $t > 0$ et $r > 0$ en posant

$$\begin{aligned} \sigma_t^1(r) &= \sum_{s \leq t} \|\Delta H_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{2,s}\| > r\}}, \\ \sigma_t^2(r) &= \sum_{s \leq t} \|\Delta H_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|V_{2,s}^{-1} \Delta M_{2,s}\| > r\}}. \end{aligned}$$

Alors pour $\alpha \in]0, 1]$, on a

$$\sigma_t^{H_2}(\alpha^{-3}) \ll \sigma_t^1(\alpha^{-1}) + \sigma_t^2(\alpha^{-1}).$$

Preuve

En écrivant $\sigma_t^{H_2}(\alpha^{-3})$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} \sigma_t^{H_2}(\alpha^{-3}) &= \sum_{s \leq t} \|\Delta H_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_{2,s}\| > \alpha^{-3}, \|Z_{2,s}\| > \alpha^{-1}\}}, \\ &+ \sum_{s \leq t} \|\Delta H_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_{2,s}\| > \alpha^{-3}, \|Z_{2,s}\| \leq \alpha^{-1}, \|V_{2,s}^{-1} \Delta M_{2,s}\| \leq \alpha^{-1}\}}, \\ &+ \sum_{s \leq t} \|\Delta H_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_{2,s}\| > \alpha^{-3}, \|Z_{2,s}\| \leq \alpha^{-1}, \|V_{2,s}^{-1} \Delta M_{2,s}\| > \alpha^{-1}\}}. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que, d'une part, on a

$$\sum_{s \leq t} \|\Delta H_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_{2,s}\| > \alpha^{-3}, \|Z_{2,s}\| > \alpha^{-1}\}} \ll \sigma_t^1(\alpha^{-1})$$

et

$$\sum_{s \leq t} \|\Delta H_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\Delta H_{2,s}\| > \alpha^{-3}, \|Z_{2,s}\| \leq \alpha^{-1}, \|V_{2,s}^{-1} \Delta M_{2,s}\| > \alpha^{-1}\}} \ll \sigma_{2,t}^2(\alpha^{-1}),$$

d'autre part

$$\|\Delta H_{2,s}\|^2 = \|Z_{2,s}\|^2 \|V_{2,s}^{-1} \Delta M_{2,s}\|^2,$$

le résultat du lemme est établi vu que

$$\{\|\Delta H_{2,s}\| > \alpha^{-3}, \|Z_{2,s}\| \leq \alpha^{-1}, \|V_{2,s}^{-1} \Delta M_{2,s}\| > \alpha^{-1}\} = \emptyset \text{ p.s.} \quad \square$$

Une conséquence immédiate est que

$$\begin{aligned} \sigma^1(r) &\ll \int_0^\cdot \|Z_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{2,s}\| > r\}} d\Lambda_s \\ \text{et} \\ \sigma^2(r) &\ll \int_0^\cdot \|Z_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\Delta \Lambda_s > r^2\}} d\Lambda_s \end{aligned}$$

et pour tout $t \geq 0$ et $r \geq 0$, on a

$$\widetilde{\sigma^1(r)} \leq \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{2,s}\| > r\}} d\tilde{\Lambda}_s$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma^2(r)} &\leq \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\Delta\Lambda_s > r^2\}} d\tilde{\Lambda}_s \\ &\leq \mathbf{1}_{\{\sup_{s \leq t} \Delta\Lambda_s > r^2\}} \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 d\tilde{\Lambda}_s \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{\Lambda}_s = tr \left\{ \int_0^t V_s^{-1} d\langle M \rangle_s (V_s^*)^{-1} \right\}.$$

Il en résulte que pour tout $\alpha \in]0, 1]$ et $\epsilon > 0$, on a

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \widetilde{\sigma_t^{H_2}(\epsilon\sqrt{t})} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \widetilde{\sigma_t^{H_2}(\alpha^{-3})}.$$

En fin, pour terminer, il suffit de prouver que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \widetilde{\sigma_t^{H_2}(\alpha^{-3})} = 0. \quad (54)$$

En effet, d'après le lemme A.3, on a

$$\widetilde{\sigma_t^{H_2}(\alpha^{-3})} \leq \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{2,s}\| > \alpha^{-1}\}} d\tilde{\Lambda}_s + \mathbf{1}_{\{\sup_{s \leq t} \Delta\Lambda_s > \alpha^{-2}\}} \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 d\tilde{\Lambda}_s,$$

par suite

$$t^{-1} \widetilde{\sigma_t^{H_2}(\alpha^{-3})} \leq t^{-1} \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{2,s}\| > \alpha^{-1}\}} d\tilde{\Lambda}_s + \mathbf{1}_{\{\sup_{s \leq t} \Delta\Lambda_s > \alpha^{-2}\}} t^{-1} \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 d\tilde{\Lambda}_s. \quad (55)$$

Or d'après la LFQ, on a

$$t^{-1} \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 ds \longrightarrow \int_0^{+\infty} \|x\|^2 d\mu_\infty(x) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Alors

$$t^{-1} \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{2,s}\| > \alpha^{-1}\}} ds \longrightarrow \int_0^{+\infty} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|x\| > \alpha^{-1}\}} d\mu_\infty(x) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Soit le processus \mathcal{K} donné par

$$\mathcal{K}_t = \int_0^t V_{2,s}^{-1} d[M_2]_s (V_{2,s}^*)^{-1},$$

il vérifie

$$t^{-1} \mathcal{K}_t \longrightarrow C_2 U_2^* + U_2 C_2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (56)$$

Le compensateur prévisible du processus (\mathcal{K}_t) donné par

$$\bar{\mathcal{K}}_t = \int_0^t V_{2,s}^{-1} d\langle M_2 \rangle_s (V_{2,s}^*)^{-1},$$

vérifie

$$t^{-1} \bar{\mathcal{K}}_t \longrightarrow C_2 U_2^* + U_2 C_2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Ce qui implique que

$$\tilde{\Lambda}_t = tr\{\bar{\mathcal{K}}\} = \mathcal{O}(t) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} t^{-1} \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 d\tilde{\Lambda}_s &\leq C^{te} t^{-1} \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 ds \\ t^{-1} \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{2,s}\| > \alpha^{-1}\}} d\tilde{\Lambda}_s &\leq C^{te} t^{-1} \int_0^t \|Z_{2,s}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|Z_{2,s}\| > \alpha^{-1}\}} ds. \end{aligned}$$

En tenant compte de (55), pour tout $\alpha \in]0, 1]$, on a

$$t^{-1} \widetilde{\sigma_t^{H_2}(\alpha^{-3})} \leq \int_0^{+\infty} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|x\| > \alpha^{-1}\}} d\mu_\infty(x) + \mathbf{1}_{\{\sup_{s \leq t} \Delta \Lambda_s > \alpha^{-2}\}} \int_0^{+\infty} \|x\|^2 d\mu_\infty(x).$$

En faisant tendre α vers 0, le deuxième terme du membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0 puisque d'après le lemme (A.2) on a presque sûrement

$$\sup_{t > 0} \Delta \Lambda_s < +\infty,$$

ce qui implique que $\mathbf{1}_{\{\sup_{s \leq t} \Delta \Lambda_s > \alpha^{-2}\}}$ tend vers 0, lorsque α tend vers 0.

De même, si α tend vers 0, on a $\mathbf{1}_{\{\|x\| > \alpha^{-1}\}}$ tend vers 0, alors

$$\int_0^{+\infty} \|x\|^2 \mathbf{1}_{\{\|x\| > \alpha^{-1}\}} d\mu_\infty(x) \longrightarrow 0, \quad (\alpha \longrightarrow 0).$$

Ainsi la relation (54) est établit. Par conséquent la martingale H vérifie la condition de Lindeberg au sens de la convergence presque sûre. \square

Références

- [1] B. Bercu. On the convergence of moments in the almost sure central limit theorem for martingales with statistical applications. *Stochastic Process. Appl.*, 111(1) :157–173, 2004.
- [2] Gunnar A. Brosamler. An almost everywhere central limit theorem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 104(3) :561–574, 1988.
- [3] F. Chaâbane. Version forte du théorème de la limite centrale fonctionnel pour les martingales. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(2) :195–198, 1996.
- [4] F. Chaâbane. Invariance principles with logarithmic averaging for martingales. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 37(1-2) :21–52, 2001.
- [5] F. Chaâbane and A. Kebaier. Théorèmes limites avec poids pour les martingales vectorielles à temps continu. *ESAIM Probab. Stat.*, 12 :464–491, 2008.
- [6] F. Chaâbane and F. Maaouia. Théorèmes limites avec poids pour les martingales vectorielles. *ESAIM Probab. Statist.*, 4 :137–189 (electronic), 2000.
- [7] F. Chaâbane, F. Maôouia, and A. Touati. Généralisation du théorème de la limite centrale presque-sûr pour les martingales vectorielles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(2) :229–232, 1998.
- [8] B. Favetto and A. Samson. Parameter estimation for a bidimensional partially observed Ornstein-Uhlenbeck process with biological application. 2008.
- [9] J. Jacod and A.N. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.
- [10] R. Krämer and M. Richter. A generalized bivariate Ornstein-Uhlenbeck model for financial assets. 2007.

- [11] A. Le Breton. Propriétés asymptotiques et estimation des paramètres pour les diffusions gaussiennes homogènes hypoelliptiques dans le cas purement explosif. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(6) :185–188, 1984.
- [12] A. Le Breton and M. Musiela. Some parameter estimation problems for hypoelliptic homogeneous Gaussian diffusions. In *Sequential methods in statistics*, volume 16 of *Banach Center Publ.*, pages 337–356. PWN, Warsaw, 1985.
- [13] A. Le Breton and M. Musiela. Laws of large numbers for semimartingales with applications to stochastic regression. *Probab. Theory Related Fields*, 81(2) :275–290, 1989.
- [14] M. A. Lifshits. Almost sure limit theorem for martingales. In *Limit theorems in probability and statistics, Vol. II (Balatonlelle, 1999)*, pages 367–390. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002.
- [15] A. W. Lo and J. Wang. Implementing option pricing models when asset returns are predictable. *The Journal of Finance*, 50 :87–129, 1995.
- [16] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Foundations, Reprint of the second (1994) edition.
- [17] A. Touati. Sur la convergence en loi fonctionnelle de suites de semimartingales vers un mélange de mouvements browniens. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 36(4) :744–763, 1991.
- [18] A. Touati. Deux théorèmes de convergence en loi pour des intégrales stochastiques et application statistique. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 38(1) :128–153, 1993.