



HAL
open science

Un problème européen : La théorie de l'élimination au XVIIIe siècle à travers les publications des Academies de Berlin, Londres et Paris

Liliane Alfonsi

► **To cite this version:**

Liliane Alfonsi. Un problème européen : La théorie de l'élimination au XVIIIe siècle à travers les publications des Academies de Berlin, Londres et Paris. Colloque national de la recherche en IUT, May 2007, Thionville, France. pp.cédérom CNRIUT 2007-Atelier 2-articles-liliane alfonsi. hal-00388482v2

HAL Id: hal-00388482

<https://hal.science/hal-00388482v2>

Submitted on 27 May 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un problème européen : la théorie de l'élimination au XVIII^e siècle, à travers les publications des Académies de Berlin, Londres, Paris

Liliane Alfonsi

IUT de Sceaux
Département GEA 2
8 Avenue Cauchy, 92330 Sceaux
liliane.alfonsi@wanadoo.fr

Sections de rattachement : 72, 71, 25
Secteur : Tertiaire

RÉSUMÉ. L'élimination des inconnues dans les systèmes de plusieurs équations fut l'un des centres d'intérêt des mathématiciens européens du XVIII^e siècle. Le résultat "Une courbe de degré n et une courbe de degré m se coupent en au plus $m.n$ points", longtemps considéré comme une vérité intuitive, commença à être démontré. Dans l'évolution de ces démonstrations à travers l'Europe, le rôle des Académies des sciences de divers pays fut loin d'être négligeable. Lieux officiels du savoir, elles donnaient de l'audience à leurs membres, enregistraient les découvertes, servaient d'arbitres dans les querelles de priorité et leurs publications, soumises à l'approbation de rapporteurs qualifiés, étaient un trait d'union entre des savants géographiquement éloignés.

C'est sur le cas de la théorie de l'élimination que nous étudierons le rôle social important tenu par les Académies dans l'information, l'émulation et la communication entre scientifiques.

MOTS-CLÉS : Courbes / Équations / élimination / résultante / algèbre / géométrie algébrique / Bézout / Euler / Cramer / MacLaurin / Académies / mémoires / mathématiques / mathématiques en IUT / histoire des sciences / épistémologie / didactique /

1. La théorie de l'élimination et les intersections de courbes

Comment calculer les points d'intersection de deux courbes planes ?

Les mathématiciens savaient, bien avant le XVIII^e siècle, relier chaque courbe à une équation à deux inconnues d'un certain degré. Les équations des deux courbes étant alors données, il s'agissait d'en déduire une équation – la « résultante » - dans laquelle ne subsistait plus qu'une seule inconnue : On disait alors que l'on avait « éliminé » l'autre. Cette nouvelle équation donnait une condition d'existence de solutions, d'où l'on pouvait tirer les valeurs de l'inconnue restante qui, une fois calculées, permettaient de

trouver celles de l'autre inconnue. On avait ainsi les coordonnées des points d'intersection. Mais on éliminait surtout par substitution : ceci entraînait souvent, pour des degrés élevés, des facteurs manquants ou, au contraire, superflus dans la résultante et donc des solutions soit manquantes soit fausses.

Pourtant la recherche du nombre de points d'intersection de deux courbes planes ne semble pas avoir mobilisé les savants jusqu'au milieu du XVIII^e siècle. Il leur semblait évident que deux courbes se coupaient en au moins autant de points que le produit de leurs degrés respectifs. Pour Newton le nombre de points d'intersection de deux courbes planes était même, de toute évidence et sans démonstration, égal au produit des degrés des deux courbes. Il écrit vers 1665 ¹, dans un papier non publié de son temps, que pour lui c'est plus un principe qu'un problème : « Il suffit » d'éliminer une inconnue, et on trouve « autant d'intersections que le rectangle des dimensions des courbes. »

2. Colin Maclaurin à la Royal Society de Londres

Colin Maclaurin, professeur de mathématiques à l'Université d'Édimbourg et membre de la Royal Society, l'Académie des Sciences de Londres, est un disciple de Newton. Il utilise donc dans ses travaux le résultat qu'il y a « autant d'intersections que le rectangle des dimensions des courbes », sans la moindre justification. Il semble lui aussi le considérer comme évident.

Mais, à l'Université d'Édimbourg, Maclaurin a un collègue Braikenridge qui vient souvent lui demander conseil et auquel Maclaurin confie volontiers l'état de ses recherches sur les courbes planes. En 1732, c'est donc avec stupéfaction et colère qu'il découvre que Braikenridge a envoyé à la Royal Society, un mémoire dans lequel il s'approprie des résultats de Maclaurin. Ce dernier réagit aussitôt et envoie une lettre à John Machin, secrétaire de cette Académie, qui sera lue en séance le 21 décembre 1732.

Dans cette lettre, publiée dans les *Philosophical Transactions* ², Maclaurin accuse Braikenridge de lui avoir volé la paternité de certains résultats ³ et, pour prévenir ce genre de manœuvres, il annonce une liste de théorèmes qu'il n'a pas encore eu le temps de publier. Il écrit : « Vous savez qu'en 1721, j'ai fait imprimer plusieurs feuilles d'un supplément à mon livre de la description des lignes courbes, que je n'ai cependant point mis au jour, parce que, depuis ce temps là, j'ai eu presque toujours des occupations différentes et que je me suis appliqué à d'autres sujets. » Il donne ensuite un « Extrait de ce qui a été imprimé depuis 1721 pour servir de supplément au Traité de la description des lignes courbes publié en 1719 et de ce que l'auteur veut ajouter à ce supplément » et on trouve dans cet extrait :

¹ *The mathematical papers of Sir Isaac Newton*, vol. 1, p. 498. Voir bibliographie.

² Il s'agit des recueils de mémoires publiés par la Royal Society.

³ Entre autres celui-ci : « si n est le nombre de dimension de la ligne, n^2+1 est le nombre de points par lequel la ligne peut être décrite »

« Dans la première partie du supplément, on a donné une démonstration générale du Théorème que, si deux lignes des ordres ou dimensions exprimées par les nombres m et n , sont décrites dans le même plan, le plus grand nombre de points, dans lesquels ces lignes se coupent, sera $m.n$, ou le produit des nombres qui expriment les dimensions des lignes ou des ordres auxquelles elles appartiennent. »

Maclaurin ne considère donc plus, en 1721, ce résultat comme un principe, mais comme un théorème dont il revendique la paternité de la démonstration. Il reconnaît (en 1732) qu'il ne l'a pas publiée, seulement imprimée, ce qui à l'époque était différent, et il ne la donne pas dans sa lettre mais l'annonce pour une publication ultérieure. Pourtant ni dans ses œuvres publiées de son vivant, ni dans celles publiées à titre posthume ⁴ en 1748 par ses amis, dont Martin Folkes président de la Royal Society, on ne retrouve cette démonstration.

C'est en tout cas la première fois qu'un mathématicien évoque une démonstration pour trouver le nombre de points d'intersection de deux courbes planes et c'est devant l'Académie des sciences de Londres qu'il prend date pour que l'on ne lui vole pas l'antériorité de sa preuve. Dans la querelle avec Braikenridge, la Royal Society, qui ne peut prendre parti puisque Maclaurin n'a pas de preuves de la malhonnêteté de son rival, s'en tient à une position neutre et objective puisqu'elle publie dans le même volume – *Philosophical Transactions* N°439, année 1732 – aussi bien le mémoire du premier que la lettre qui le conteste du second.

3. Gabriel Cramer à Genève

Gabriel Cramer, qui vit à Genève, connaît la lettre de Maclaurin à la Royal Society. Il sait aussi que l'annonce de ce dernier n'a pas été suivie d'effet. Aussi quand, en 1750, il publie son célèbre ouvrage *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, il revendique la priorité de sa démonstration. Dans la préface, en exposant les différents sujets qu'il va aborder dans son livre, il écrit : « On y voit [...] le nombre des points dans lesquels une ligne d'un ordre donné peut rencontrer une ligne du même ordre ou d'un autre ordre aussi donné. La règle qui détermine ce nombre est très importante dans la théorie des courbes, plusieurs grands géomètres l'ont supposée, mais personne, que je sache, n'en a donné la démonstration. » Et plus loin (p. 76) : « deux lignes algébriques décrites sur un même plan, ne peuvent se rencontrer qu'en autant de points, au plus, qu'il y a d'unités dans le produit des nombres qui sont les exposans de leurs ordres [...] Mr. Maclaurin a démontré la même chose, mais je ne crois pas que sa démonstration ait été rendue publique. Voyez *Transactions Philosophiques* N° 439, page 143. »

Et, en effet, la démonstration de Gabriel Cramer, malgré ses lacunes sur certains points, est bien (avec celle d'Euler, que nous verrons plus loin) la première démonstration sérieuse publiée.

⁴ Maclaurin est mort en 1746.

Ses notations sont très personnelles. Chaque courbe étant représentée par une équation à deux inconnues (respectivement A et B), il cherche leurs intersections en résolvant le système ⁵ :

$$\begin{cases} A \dots \dots \dots x^n - [1]x^{n-1} + [1^2]x^{n-2} - [1^3]x^{n-3} + \&c \dots [1^n] = 0 \\ B \dots \dots (0)x^0 + (1)x^1 + (2)x^2 + (3)x^3 + \&c \dots \dots \dots (m)x^m = 0 \end{cases}$$

pour lequel il se place dans le cas général, en considérant que (m) est une constante, $[1]$ et $(m-1)$ sont des polynômes en y de degré au plus 1, $[1^2]$ et $(m-2)$ des polynômes en y de degré au plus deux, etc., $[1^n]$ est de degré au plus n et (0) de degré au plus m .

L'équation A étant de degré n , il affirme qu'elle a n racines, qu'il appelle a, b, c, d , etc. C'est là que sa démonstration est incorrecte puisqu'il suppose l'existence de racines polynomiales pour des équations à coefficients polynomiaux. Cramer écrit alors que les deux courbes auront des points communs si au moins une racine de A est aussi racine de B . En notant par $f(x)=0$ l'équation A , et par $g(x)=0$ l'équation B , nous pouvons écrire l'équation résultante qu'il obtient : $g(a).g(b).g(c).g(d).etc. = 0$.

Il effectue alors tous les produits $g(a).g(b).g(c).g(d).etc.$ Il ne fait pas de remarque sur l'existence et la nature des racines ⁶ a, b, c, d , etc., mais déplore que ces racines soient inconnues « lorsque l'équation A est d'un degré trop élevé pour que l'Algèbre en puisse donner la solution. » C'est pour cela qu'il utilise les relations entre les coefficients et les racines. Grâce à des jeux d'écriture facilités par ses notations qui lui permettent d'évaluer facilement les exposants de y , il montre, après de longs calculs, que le degré de la résultante en y ne peut pas dépasser $m.n$. On remarque chez Cramer, l'idée de caractériser les coefficients par une notation en nombres, déterminée par les puissances qu'ils multiplient. Cette notation, indiquant clairement l'emplacement de chaque coefficient, se rapproche de notations plus modernes et facilite le suivi des calculs.

Si Cramer n'envoie pas son ouvrage à une Académie – il n'y en a pas à Genève – c'est la lecture attentive des publications de la Royal Society qui lui permet de connaître l'état des découvertes de Maclaurin et, avec d'autres sources d'informations, de revendiquer la paternité de la démonstration du théorème sur le nombre de points d'intersection de deux courbes.

4. Leonhardt Euler à l'Académie de Berlin

Pourtant, la même année que l'ouvrage de Cramer, en 1750, un mémoire d'Euler, « Démonstration sur le nombre de points ou deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper », est publié dans le tome 4 des *Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles lettres de Berlin*. On y trouve, comme le titre l'indique, la démonstration du

⁵ L'écriture du système est celle de Cramer (points y -compris).

⁶ On sait aujourd'hui que ces racines existent, ce sont des éléments de la clôture algébrique de $\mathbf{R}(X)$, corps des fractions rationnelles sur \mathbf{R} , mais ce ne sont pas des polynômes.

même théorème. Il semble que ni Cramer ni Euler n'aient connu leurs travaux respectifs car aucun des deux auteurs ne cite les travaux de l'autre. Ceci est sans doute du au fait que l'année de parution est la même pour les deux écrits.

Leonhardt Euler, membre de l'Académie des Sciences de Berlin, a présenté ce mémoire à ses pairs deux ans auparavant en 1748, mais les délais de vérification et d'impression expliquent ce retard, courant à l'époque. Dans l'introduction il situe l'état du problème par une analyse qu'il est le premier à énoncer clairement : « J'ai rapporté sans démonstration cette proposition, *que deux lignes courbes algébriques, dont l'une est de l'ordre m et l'autre de l'ordre n, se peuvent couper en m.n points.* La vérité de cette proposition est reconnue de tous les géomètres, quoiqu'on doive avouer, qu'on n'en trouve nulle part une démonstration assez rigoureuse. Il y a des vérités générales que notre esprit est prêt d'embrasser aussitôt qu'il en reconnaît la justesse dans quelques cas particuliers : et c'est parmi cette espèce de vérités qu'on peut ranger à bon droit la proposition, dont je viens de faire mention, puisqu'on la trouve vraie non seulement dans quelques ou plusieurs cas, mais aussi dans une infinité de cas différents. Cependant on conviendra aisément que toutes ces preuves infinies ne sont pas capables de mettre cette proposition à l'abri de toutes les objections qu'un adversaire peut former, et qu'il faut absolument une démonstration rigoureuse, pour le réduire au silence. »

Il explique ensuite ce qu'il faut entendre par points d'intersection de deux courbes et avance une conception tout à fait moderne : « le sens de notre proposition est que le nombre des intersections ne peut jamais être plus grand que $m.n$, quoiqu'il soit souvent plus petit ; et alors on juge, ou que quelques intersections s'éloignent à l'infini, ou qu'elles deviennent imaginaires. De sorte qu'en comptant les intersections à l'infini et les imaginaires aussi bien que les réelles, on puisse dire que le nombre des intersections est toujours $= m.n$ », et il écarte le cas d'une infinité de points communs, donc d'une composante commune. Il énonce alors le théorème précis qu'il va démontrer : « Ainsi on pourra énoncer la proposition en question de cette manière : que deux lignes courbes, l'une de l'ordre m et l'autre de l'ordre n , dont les équations ne sont, ni les mêmes, ni qu'elles ont aucun commun diviseur, ne se peuvent jamais couper en plus que $m.n$ points, bien que le nombre des intersections puisse fort souvent être plus petit. »

Partant de deux équations à deux inconnues de degrés respectifs m et n , il ordonne chaque équation par rapport aux puissances de l'inconnue y . Il écrit alors le système suivant (nous respectons ses notations) :

$$\begin{cases} f(y) = y^m - Py^{m-1} + Qy^{m-2} - Ry^{m-3} + Sy^{m-4} - etc. = 0 \\ g(y) = y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} - etc. = 0 \end{cases}$$

où $P, Q, R, S, etc., p, q, r, s, etc.$, sont des polynômes en x , de degrés respectifs, 1, 2, 3, etc., m , pour $P, Q, R, etc.$, et 1, 2, 3, etc., n , pour $p, q, r, etc.$

Si, $A, B, C, etc.$, sont les m racines de la première équation, et $a, b, c, etc.$, les n racines de la seconde, alors les deux équations ont une racine commune, si et seulement si, l'une des racines $A, B, C, etc.$, est égale à l'une des racines $a, b, c, etc.$, donc si et seulement si,

$$[(A-a)(A-b)(A-c) \text{ etc.}].[(B-a)(B-b)(B-c) \text{ etc.}].[(C-a)(C-b)(C-c) \text{ etc.}] \text{ etc.} = 0.$$

Autrement dit, $g(A).g(B).g(C) \text{ etc.} = 0$, ou $f(a).f(b).f(c) \text{ etc.} = 0$

Ces trois dernières équations, qui sont équivalentes, représentent, pour lui, la résultante cherchée. On le voit sa méthode est, jusque-là, la même que celle de Cramer, avec d'ailleurs le même défaut, celui de considérer qu'un polynôme de degré n , à coefficients polynomiaux, a n racines polynomiales. C'est ensuite qu'elle diffère car, au lieu de développer les calculs, Euler, en se servant des relations entre les coefficients et les racines d'une équation, affirme que les racines A, B, C , etc., et a, b, c , etc., peuvent être considérées chacune comme un polynôme de degré 1 en x . Étant donné la première forme de la résultante trouvée, produit de $m.n$ facteurs de degré au plus 1, elle ne peut être que de degré au plus $m.n$ en x .

5. Étienne Bézout à l'Académie des sciences de Paris

En 1764 Étienne Bézout, membre de l'Académie des sciences de Paris, présente à cette institution un écrit intitulé « Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations » qui sera publié dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences*. Bézout, dans cet ouvrage, commence par faire l'historique du problème de l'élimination, en citant trois noms : Newton, Euler et Cramer. Il a étudié leurs travaux et ne veut pas (p. 289) « envelopper dans [son] travail ce qui peut appartenir à d'autres. »

Il calcule ensuite le degré de la résultante pour deux équations à deux inconnues et l'explique avec beaucoup de modestie (p. 291) : « non que je prétende décider ma méthode préférable à celle que M^{rs}. Euler & Cramer ont donnée pour ce cas seulement, mais parce que cette méthode ⁷ étant uniforme, j'ai cru me rendre plus clair en fortifiant l'analogie par la réunion de ce cas avec les autres, & en même temps parce que dans un travail aussi long que l'est souvent celui de l'élimination, il n'est pas inutile de multiplier les méthodes sur lesquelles les Calculateurs peuvent porter leur choix. » Comme nous allons le voir, cette méthode n'a, en effet, rien de commun avec les démonstrations d'Euler et de Cramer exposées précédemment et Bézout va donner ainsi la première démonstration correcte du fait qu'une courbe de degré m et une courbe de degré n , sans composante commune, se coupent au plus en $m.n$ points.

Il multiplie les deux équations
$$\begin{cases} Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + V = 0 \\ A'x^{m'} + B'x^{m'-1} + C'x^{m'-2} + \dots + V' = 0 \end{cases} \text{ - dans}$$

lesquelles A, B, C , etc., A', B', C' , etc., sont des polynômes en la deuxième inconnue y , de degrés respectifs : $p, p+1, p+2$, etc., et $p', p'+1, p'+2$, etc. - respectivement, par les polynômes aux coefficients indéterminés (L) et (L') suivants :

⁷ Bézout envisage une méthode plus générale qui serait valable pour un nombre quelconque d'équations et d'inconnues

(L) $Mx^n + Nx^{n-1} + Px^{n-2} + \dots + T$ et obtient, pour que chaque
 (L') $M'x^{n'} + N'x^{n'-1} + P'x^{n'-2} + \dots + T'$
 puissance de x disparaisse dans l'équation formée par la somme des 2 produits, le
 système ci-dessous où M, M', N, N' , etc. sont les inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} AM + A'M' = 0 \\ AN + A'N' + BM + B'M' = 0 \\ AP + A'P' + BN + B'N' + CM + C'M' = 0 \\ \text{etc.} \\ VT + V'T' = 0 \end{array} \right.$$

avec les conditions $m+n=m'+n'$, et $m+n+1=n'+1+1$ (i.e. autant d'équations que d'inconnues). Les valeurs de n et n' sont alors fixées ($n=m'-1$; $n'=m-1$), et le déterminant du système doit être nul pour que les solutions puissent être non nulles.

Or, l'annulation de ce déterminant donne l'équation résultante du système de départ, et par des calculs astucieux, il trouve que le maximum possible du degré de cette résultante est : $G=mm'+mp'+m'p$. Si les deux équations de départ sont de degrés respectifs m et m' , alors $p=p'=0$, et on retrouve dans sa formule, pour maximum du degré de la résultante, le produit $m.m'$ des degrés des deux équations.

La résultante qu'il obtient, étant le déterminant d'un système dont les coefficients sont des polynômes en y , Bézout est sûr que c'est, elle-même, un polynôme en y , puisqu'il ne fait que des multiplications et des sommes de polynômes. Euler et Cramer manipulant, sans en avoir clairement conscience, des fractions et des racines de polynômes, n'ont pas montré ce point de façon convaincante.

Étienne Bézout a démontré ainsi, sans aucun point obscur ou discutable, que deux courbes planes de degrés respectifs m et m' , se coupent au plus en $m.m'$ points. Avant même la généralisation qu'il fera en 1779, pour un nombre quelconque d'équations et d'inconnues, cela justifie déjà que le théorème correspondant porte son nom.

6. Les Académies, vecteurs de reconnaissance et de communication

Un problème qui ne paraissait en être un pour aucun mathématicien, le nombre de points d'intersections de deux courbes, a brusquement occupé le devant de la scène quand un savant - menacé par un confrère qui lui avait volé la priorité de ses résultats en les présentant avant lui à la Royal Society -, voulut prendre date devant cette Académie en annonçant à l'avance, au milieu de plusieurs autres, une démonstration qu'il n'avait apparemment pas établie. Sur la foi accordée aux *Philosophical Transactions*, en Allemagne, en Suisse et peut-être ailleurs, des mathématiciens célèbres attendirent la preuve promise et se mirent sans doute à la chercher. Convaincus par des éditions posthumes, dont le responsable était le président de l'Académie de Londres, qu'elle

n'avait pas encore été trouvée, ils publièrent les leurs. C'est ainsi, de façon bien sûr un peu schématique, que l'on pourrait évoquer le début de la théorie de l'élimination.

Le rôle joué par la Royal Society est fondamental : reconnaissance accordée à Braikenridge, publication de la lettre de Maclaurin, éditions posthumes de ce dernier par son président. L'ouvrage genevois de Cramer et la publication du mémoire d'Euler par l'Académie de Berlin ont influencé ensuite les recherches de Bézout. Car c'est sans doute parce qu'il a vu le défaut de leurs démonstrations que Bézout, malgré sa protestation d'humilité - « non que je prétende décider ma méthode préférable à celle que M^{rs}. Euler & Cramer ont donnée » - a cherché et trouvé une preuve rigoureuse du théorème sur le nombre de points d'intersection de deux courbes planes. C'est enfin l'Académie royale des sciences de Paris qui a permis, en publiant en 1766 le mémoire d'Étienne Bézout de 1764, de faire connaître cette démonstration. En 1779 c'est encore elle qui, en autorisant la publication de la *Théorie générale des équations algébriques*, consacra l'œuvre de Bézout et permettra à la postérité de donner son nom à la généralisation de ce théorème.

Lieux officiels du savoir, les Académies des sciences européennes apportaient reconnaissance et audience à leurs membres – Maclaurin, Euler et Bézout en faisaient partie – et les investissaient de leur autorité en soumettant leurs publications à des rapporteurs qualifiés. Elles enregistraient les découvertes et servaient d'arbitre dans les querelles de priorité.

Malgré les importants délais de parution de l'époque, les Académies semblent bien avoir joué un rôle européen de trait d'union entre des savants géographiquement éloignés : diffusion des connaissances, émulation et communication.

Bibliographie

Alfonsi L., Étienne Bézout (1730-1783) : mathématicien, académicien et professeur au siècle des Lumières, Thèse Paris VI, 2005

Bézout E., « Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens que l'on doit employer pour trouver ces équations », *Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences*, Paris, 1764, p. 288-338.

Bézout E., *Théorie générale des équations algébriques*, Paris, Pierres, 1779.

Cramer G., *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève, 1750.

Euler L., « Démonstration sur le nombre de points où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper », *Mémoires de l'Académie des sciences et belles lettres de Berlin* [4], Berlin, 1750, p. 234-248.

Newton I., *The mathematical papers of Sir Isaac Newton*, éd. par D.T.Whitehead, Cambridge University Press, 7 vol., 1967-1981.

Maclaurin C., « A letter to John Machin », *Philosophical Transactions*, N°439, p. 143-165.