HAL
open science

Mode d'ouverture d'une fissure : de la mécanique de la rupture à la mécanique de l'endommagement = Crack opening mode : from fracture mecanichs to damage mecanichs

Alain Thionnet

To cite this version:

Alain Thionnet. Mode d'ouverture d'une fissure : de la mécanique de la rupture à la mécanique de l'endommagement = Crack opening mode : from fracture mecanichs to damage mecanichs. JNC 16, Jun 2009, Toulouse, France. 7 p. hal-00386236

HAL Id: hal-00386236

https://hal.science/hal-00386236v1

Submitted on 11 Jun 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Manuscrit auteur, publié dans "JNC 16, Toulouse : France (2009)"

MODE D'OUVERTURE D'UNE FISSURE : DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE A LA MECANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT

CRACK OPENING MODE : FROM FRACTURE MECHANICS TO DAMAGE MECHANICS

***A.Thionnet*[1,2]**

1 - Mines ParisTech, Centre des Matériaux, CNRS UMR 7633, BP 87, 91003 Evry cedex, France
2 - Université de Bourgogne, Mirande, BP 47870, 21078 Dijon, France
e-mail : alain.thionnet@ensmp.fr

RESUME

On propose dans cette étude un modèle de comportement d'un milieu composite microfissuré formulé de manière tridimensionnelle, qui résout l'ensemble des contraintes théoriques indispensables à la cohérence d'un modèle, notamment, le respect de la condition de contact unilatéral et la prise de l'anisotropie induite. Pour parvenir à ce résultat, on a étendu à la Mécanique de l'Endommagement, la notion de Mode d'Ouverture d'une fissure qui existe en Mécanique de la Rupture.

ABSTRACT

Many studies have been carried out in order to build a coherent macroscopic behavior law for a composite containing microcracks. All of them are only partially coherent and none of them is complete. This study proposes a hyperelastic behavior law for a microcracked composite, respecting all the conditions associated with the damage activation/deactivation, stress/strain relation continuity, induced anisotropy and the Clausius-Duhem inequality. This approach is based on the definition of the Crack Opening Mode for Damage Mechanics as it exists in Fracture Mechanics.

Mots clés : mécanique de l'endommagement, contact unilatéral du dommage, modélisation, mode de sollicitation
Keywords : damage mechanics, unilateral effect of damage, modelling, sollicitation mode

hal-00386236, version 1 - 20 May 2009

1 Objectif de l'étude

Les modèles d'endommagement souhaitant décrire les phénomènes de microfissuration ne vérifient généralement pas l'ensemble des conditions requises à la validité d'un modèle pour ce type de phénomène :

- $(c1)$: la loi de comportement doit être continue ;
- $(c2)$: l'anisotropie induite par l'endommagement doit être décrite ;
- $(c3)$: la dégradation des propriétés du matériau doit être faite de manière cohérente ;
- $(c4)$: le contact unilatéral du dommage doit être pris en compte ;
- la vérification des Grands Principes de la Physique et de la Mécanique doit être respectée, à savoir que le modèle doit être :
  . $(c5)$: S-invariant (où S indique le groupe des symétries matérielles) ;
  . $(c6)$: objectif ;
  . $(c7)$: thermodynamiquement admissible.

Deux raisons, parmi d'autres, qui expliquent le non respect de l'intégralité de ces conditions sont que ces modèles ne prennent pas assez appui sur une description microscopique fine du phénomène de microfissuration et utilisent une surabondance de variables.

On propose ici l'extension de la notion de Mode d'Ouverture d'une fissure qui existe en Mécanique de la Rupture, à la notion de Mode d'Ouverture d'un réseau de microfissures pour la Mécanique de l'Endommagement. Ainsi les notions de Mode I, Mode II et Mode III de la Mécanique de la Rupture sont adaptées au cadre de la Mécanique de l'Endommagement par des variables d'état susceptibles de décrire tous ces modes d'ouverture mais aussi tous ceux intermédiaires. C'est l'utilisation de ce dernier concept original qui permet d'assurer la cohérence complète du modèle de comportement proposé. Le travail est basé sur les approches de Talreja [9] [10], Leguillon et Sanchez [7], Allen *et al.* [2] [1] [6], Andrieux [3] et Thionnet *et al.* [4] [12].

Les différentes étapes de l'étude vont répondre aux questions suivantes :

- quel est le nombre et la nature des variables macroscopiques nécessaires à une modélisation macroscopique cohérente du phénomène d'endommagement au sein d'un comportement élastique non linéaire ?
- quels phénomènes microscopiques doivent décrire ces variables ?
- comment construire explicitement ces variables dans l'objectif supplémentaire d'étendre à la Mécanique de l'Endommagement, la notion de Mode d'Ouverture d'une fissure, qui existe en Mécanique de la Rupture ?

hal-00386236, version 1 - 20 May 2009

2 Cadre de travail

Le matériau considéré est un matériau endommagé par un réseau de fissures planes identiques. Sa microstructure est périodique représentée par la cellule élémentaire notée Y. Le contact entre les lèvres, s'il existe, est supposé sans frottement. Il n'y a aucune contrainte interne résiduelle due à l'endommagement qui soit susceptible de bloquer de l'énergie dans le matériau. On se place dans une configuration où l'endommagement est dans un état donné fixe. On note α la variable scalaire qui caractérise cet état. Cette variable peut être, par exemple, indicatrice de la densité de fissures au sein du matériau. Ici, on ne s'intéresse pas à l'évolution de la variable α. On s'intéresse à la prise en compte cohérente et générale, du phénomène d'endommagement au sein d'un modèle de comportement élastique endommageable écrit dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement. On se place sous l'Hypothèse des Petites Perturbations. Le matériau vierge d'endommagement est supposé orthotrope.

Le repère cartésien $R = (O, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ est attaché à l'échelle macroscopique du matériau. $x = (x_i)_{i=1,2,3}$ désigne, dans ce repère, la position d'un point M. $\vec{U} = (U_i)_{i=1,2,3}$ désigne le déplacement du point M. A cette échelle, au point M, le tenseur des contraintes est noté σ, le tenseur des déformations est noté ε. Le repère cartésien $R_y = (O_y, \vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3})$ est attaché à l'échelle microscopique du matériau, c'est-à-dire à sa cellule de base. $y = (y_i)_{i=1,2,3}$ désigne la position d'un point M. Le vecteur $\vec{u} = (u_i)_{i=1,2,3}$ désigne le déplacement du point M. A cette échelle, au point M, le tenseur des contraintes (microscopique) est noté s et le tenseur des déformations (microscopique) est noté e. On suppose que ce repère coïncide avec le repère privilégié d'orthotropie du matériau sain. Ainsi, le groupe de symétries matérielles du matériau sain est $S_8 = \{T_i, i = 0, \ldots, 7\}$ avec : $T_0 = diag(1,1,1), T_1 = diag(-1,1,1), T_2 = diag(1,-1,1), T_3 = diag(1,1,-1), T_4 = diag(1,-1,-1), T_5 = diag(-1,1,-1), T_6 = diag(-1,-1,1), T_7 = -T_0$. On suppose que les axes des repères R et R_y coincident. La géométrie de la cellule élémentaire du matériau est un parallélépipède rectangle qui contient une unique fissure F (Fig. 1). Les surfaces L_+ et L_- qui désignent les lèvres de la fissure F sont supposées être dans le plan $(\vec{y_1}, \vec{y_3})$. Le groupe de symétries matérielles du milieu fissuré au repos est donc également S_8. On note $\partial\Omega$ la frontière extérieure de la cellule et $\partial\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup L_+ \cup L_-$. Le domaine limité par la surface $\partial\Omega$ (c'est-à-dire le volume de matière plus le volume de la fissure) est noté Ω. Le domaine limité par la surface $\partial\overline{\Omega}$ (c'est-à-dire exclusivement le volume de matière) est noté $\overline{\Omega}$. On note $\vec{n}$ le vecteur normal extérieur unitaire en tout point de la frontière du domaine. Un point M de la fissure F correspond à deux points en regard l'un de l'autre. L'un, M_+, appartient à L_+. L'autre, M_-, appartient à L_-. On pose : $-\vec{n}(M_+) = \vec{n}(M_-) = \vec{y_2} = \vec{n}(M)$. On définit le saut de la quantité Q par : $[Q(M)] = Q(M_+) - Q(M_-)$. Ainsi, le saut de déplacement des lèvres de la fissure, en M, est $[\vec{u}(M)] = \vec{u}(M_+) - \vec{u}(M_-)$. Les composantes de ce vecteur sont appelés dans la suite *sauts de déplacement microscopiques au point M.*

3 Définition d'un passage micro-macro pour la condition de contact unilatéral du dommage et les sauts de déplacements

3.1 Définitions

La déformation macroscopique est définie par : $\varepsilon = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} \vec{u}(M) \otimes_s \vec{n}(M)dS$. La moyenne des déformations microscopiques est : $E = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\overline{\Omega}} e(M)dy$. En intégrant par partie, et sous l'Hypothèse des Petites Perturbations, on montre :

$$\varepsilon = E + \int_F [\vec{u}(M)] \otimes_s \vec{n}(M)dS = E + \begin{pmatrix} 0 & [u_1]_F & 0 \\ [u_1]_F & [u_2]_F & [u_3]_F \\ 0 & [u_3]_F & 0 \end{pmatrix}$$

où on a posé $[\vec{u}]_F = \int_{L_+} \vec{u}(M_+)dS - \int_{L_-} \vec{u}(M_-)dS = \int_F [\vec{u}(M)]dS$, avec, pour une quantité Q quelconque :

$$[Q]_F = \int_{L_+} Q(M_+)dS - \int_{L_-} Q(M_-)dS = \int_F (Q(M_+) - Q(M_-)dS = \int_F [Q(M)]dS$$

Les composantes du vecteur $[\vec{u}]_F$ sont appelés dans la suite *sauts de déplacement macroscopiques.* On observe ainsi que la description macroscopique du milieu endommagé nécessite la déformation macroscopique et 3 autres variables (les composantes du vecteur $[\vec{u}]_F$). Toutefois, pour un état d'endommagement donné α, le comportement est hyperélastique. On peut donc écrire : $[\vec{u}]_F = \eta_\varepsilon(\varepsilon, \alpha)$. En tenant compte du lien qu'il existe entre la déformation macroscopique et la contraite macroscopique, on peut également écrire : $[\vec{u}]_F = \eta_\sigma(\sigma, \alpha)$. L'objectif de la suite est de trouver une écriture de ces relations. Pour cela, on donne d'abord deux définitions. L'une $(D1)$ définit une règle de passage de l'échelle microscopique à celle macroscopique pour le contact unilatéral. L'autre $(D2)$ définit le rôle des fonctions η_ε et η_σ.

hal-00386236, version 1 - 20 May 2009

Définition $(D1)$ - On dira que le contact unilatéral est vérifié au niveau macroscopique s'il est vérifié au premier ordre au niveau microscopique.

Définition $(D2)$ - On dira connaître l'état géométrique du réseau de microfissures contenu dans le matériau si l'on connait les grandeurs $([u_i]_F)_{i=1,2,3}$. Plus précisément ici, puisque pour un état d'endommagement donné, le comportement du milieu est hyperélastique, $([u_i]_F)_{i=1,2,3}$ sont des fonctions des déformations ou des contraintes macroscopiques. Par conséquent, l'état géométrique du réseau de microfissures sera connu si l'on connait l'expression des grandeurs $([u_i]_F)_{i=1,2,3}$ en fonction des déformations ou des contraintes macroscopiques, c'est-à-dire les fonctions η_ε et η_σ.

La Théorie des Invariants sait calculer les invariants d'un ensemble de variables tensorielles lorsqu'un groupe de symétries est donné [14] [13]. Ainsi, dans le cas de la formulation d'un modèle de comportement mécanique, le groupe de symétries de la microstructure du matériau doit être constant donné. Il convient donc de considérer l'ensemble des configurations géométriques possibles de cette microstructure. Dans le cas présent, le groupe de symétries matérielles du matériau fissuré est $S_2 = \{T_0, T_7\}$. Ce groupe de symétries exprime, en particulier, que la modélisation du comportement du matériau doit être insensible aux changement de signe des grandeurs vectorielles qui pourraient y être incluses. Ainsi, la définition $(D2)$ peut être reformulée en la définition $(D2')$.

Définition $(D2')$ - On dira connaître l'état géométrique du réseau de microfissures si l'on connait l'expression des grandeurs $(|[u_i]_F|)_{i=1,2,3}$ en fonction des déformations ou des contraintes macroscopiques.

3.2 Formulation macroscopique de la condition de contact unilatéral

Pour trouver une forme à $[\vec{u}]_F = \eta_\varepsilon(\varepsilon, \alpha)$ et $[\vec{u}]_F = \eta_\sigma(\varepsilon, \alpha)$, on utilise les résultats de la littérature [5] [8] [11] et une résolution numérique des problèmes d'homogénéisation en élasticité posés sur des milieux microfissurés (symboliquement notés (P_H^F)) (pour des caractéristiques géométriques et un matériau donnés). Les conclusions déduites de ces travaux, formulées en terme de déformations ou en terme en contraintes sont :

- dans l'espace des déformations (respectivement, contraintes) macroscopiques, la frontière qui délimite les configurations où les lèvres sont ouvertes ($[u_2]_F > 0$) ou collées ($[u_2]_F = 0$) est un plan dont l'équation est de la forme : $F_\varepsilon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) = a(Y)\varepsilon_{22} + b(Y)\varepsilon_{11} + c(Y)\varepsilon_{33} = 0$, (respectivement, $F_\sigma(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) = p(Y)\sigma_{22} + q(Y)\sigma_{11} + r(Y)\sigma_{33} = 0$). Les grandeurs $a(Y)$, $b(Y)$ et $c(Y)$ (respectivement, $p(Y)$, $q(Y)$ et $r(Y)$) sont des constantes qui dépendent des caractéristiques géométriques (dont celles des lèvres de la fissure) et du matériau de la cellule Y. Les écritures de F_ε et F_σ en dépendent donc aussi. Toutefois, leur caractère qualitatif est tout à fait général. Leur caractère quantitatif peut être résolu par des expériences ou des calculs comme dans une procédure d'identification des coefficients d'un modèle associé à matériau donné ;
- pour une formulation en déformations (respectivement, contraintes) :
  . les lèvres sont ouvertes si $F_\varepsilon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) > 0$ (respectivement, $F_\sigma(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) > 0$) ;
  . les lèvres sont collées si $F_\varepsilon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) \leq 0$ (respectivement, $F_\sigma(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) \leq 0$).

3.3 Formulation macroscopique des sauts de déplacements

L'unicité de la solution en déplacement (à une translation près) et la linéarité des problèmes (P_H^F) permettent d'écrire, de manière unique, pour une formulation en déformation (respectivement, en contrainte) :

$$[\vec{u}]_F = \eta_\varepsilon(\varepsilon, \alpha) = \left(\begin{array}{l} [u_1]_F = k_1^\varepsilon(Y)\varepsilon_{12} \\ [u_2]_F = \left\{ \begin{array}{l} k_2^\varepsilon(Y)F_\varepsilon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) \text{ si } F_\varepsilon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) > 0 \\ 0 \text{ si } F_\varepsilon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) \leq 0 \end{array} \right. \\ [u_3]_F = k_3^\varepsilon(Y)\varepsilon_{23} \end{array} \right)$$

$$[\vec{u}]_F = \eta_\sigma(\sigma, \alpha) = \left(\begin{array}{l} [u_1]_F = k_1^\sigma(Y)\sigma_{12} \\ [u_2]_F = \left\{ \begin{array}{l} k_2^\sigma(Y)F_\sigma(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) \text{ si } F_\sigma(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) > 0 \\ 0 \text{ si } F_\sigma(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) \leq 0 \end{array} \right. \\ [u_3]_F = k_3^\sigma(Y)\sigma_{23} \end{array} \right)$$

Les grandeurs $(k_i^\varepsilon(Y))_{i=1,2,3}$ (respectivement, $(k_i^\sigma(Y))_{i=1,2,3}$) sont elles aussi des constantes qu'il convient d'identifier.

hal-00386236, version 1 - 20 May 2009

4 Définition des modes d'ouverture d'un réseau de microfissures dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement

4.1 Définition des modes d'ouverture d'une fissure plane pour la Mécanique de l'Endommagement

Selon le vocabulaire de la Mécanique de la Rupture, l'ouverture de la fissure plane F est définie par un scalaire appelé *mode* qui peut prendre trois valeurs distinctes. Chaque valeur correspondant à un mouvement particulier de ses lèvres. Ainsi :

- le Mode d'Ouverture qualifié de *mode 1* est défini comme étant celui associé à un saut de déplacement des points des lèvres de la fissure strictement positif dans la direction perpendiculaire à son plan ;
- le Mode d'Ouverture qualifié de *mode 2* est défini comme étant celui associé à un saut de déplacement des points des lèvres de la fissure non nul suivant $(\vec{y_1})$;
- le Mode d'Ouverture qualifié de *mode 3* est défini comme étant celui associé à un saut de déplacement des points des lèvres de la fissure non nul suivant $(\vec{y_3})$.

On cherche à généraliser les notions qui viennent d'être définies par la Mécanique de la Rupture au cas de la Mécanique de l'Endommagement. On souhaite également que ces nouveaux concepts puissent être inclus dans l'écriture des modèles d'endommagement. Pour cela, on va définir des variables qui soient des indicateurs à l'échelle macroscopique, de l'état géométrique du réseau de microfissures contenues dans le matériau, i.e., de l'état géométrique de la fissure F contenue dans la cellule Y. Nous choisissons ici que ces variables soient des scalaires. La définition de ces variables doit être cohérente avec la définition $(D2')$. Pour cela, il faut que leur connaissance permette le calcul biunivoque des trois grandeurs $(|[u_i]_F|)_{i=1,2,3}$. Par ce choix, on s'impose finalement le nombre de variables scalaires indépendantes à utiliser pour généraliser le concept de la Mécanique de Rupture à la Mécanique de l'Endommagement : il est de 3. Dans la suite, toutefois, 4 variables sont définies. On verra qu'en fait seules 3 sont de vraies variables. La quatrième est une constante présente seulement pour rendre proches le concept de Mode d'Ouverture écrit pour la Mécanique de l'Endommagement et celui existant pour la Mécanique de la Rupture.

Deux de ses variables sont notées m_1 et m_{23} et appelées *mode 1* et *mode 2-3*. Elles représentent pour la Mécanique de l'Endommagement, la notion de Mode d'Ouverture d'une fissure qui existe en Mécanique de la Rupture. Par référence au langage habituel, elles sont définies de la manière suivante :

- quels que soient les sauts de déplacement colinéaires aux axes $(\vec{y_1})$ et $(\vec{y_3})$, $m_1 = 1$ si le saut de déplacement colinéaire à $(\vec{y_2})$ est non nul. On pose $m_1 = 2$ si ce saut est nul. Cette définition est l'extension de la définition du *mode 1* de la Mécanique de la Rupture ;
- quels que soient les sauts de déplacement colinéaire à $(\vec{y_2})$,
  - $m_{23} = 2$ si le seul saut de déplacement non nul est celui colinéaire à $(\vec{y_1})$;
  - $m_{23} = 3$ si le seul saut de déplacement non nul est celui colinéaire à $(\vec{y_3})$;
  - m_{23} prend toutes valeurs intermédiaires dans des configurations mixtes des deux précédentes et on pose que $m_{23} = 2$ si les deux sauts sont nuls.

  Cette définition est l'extension de la définition du *mode 2* et du *mode 3* de la Mécanique de la Rupture.

Deux autres variables sont définies. Elles sont notées r_1 et r_{23} et appelées *rayon 1* et *rayon 2-3*. Elles traduisent l'amplitude de l'ouverture des lèvres suivant les modes *mode 1* et *mode 2-3*.

On identifie dans les paragraphes suivants une expression possible de ces variables en fonction des grandeurs $([u_i]_F)_{i=1,2,3}$ et une expression de ces variables en fonction soit des déformations macroscopiques, soit des contraintes macroscopiques. Ces expressions permettront de retrouver le caractère hyperélastique du comportement du milieu fissuré. Ces expressions sont inspirées de travaux antérieurs réalisés dans le cadre d'une modélisation plane [4] [15] [12].

4.2 Expression des variables mode et rayon en fonction des sauts de déplacements macroscopiques

En fonction des sauts de déplacements macroscopiques, on écrit les quantités m_1, m_{23}, r_1 et r_{23} de la manière suivante :

$$m_1 = \mu_1([\vec{u}]_F) = \begin{cases} 1 \text{ si } [u_2]_F > 0 \\ 2 \text{ si } [u_2]_F = 0 \end{cases}$$

$$m_{23} = \mu_{23}([\vec{u}]_F) = \begin{cases} \frac{2[u_1]_F^2 + 3[u_3]_F^2}{[u_1]_F^2 + [u_3]_F^2} \text{ si } [u_3]_F \neq 0 \\ 2 \text{ si } [u_3]_F = 0 \end{cases}$$

$$r_1 = \rho_1([\vec{u}]_F) = \begin{cases} \sqrt{[u_2]_F^2} \text{ si } [u_2]_F > 0 \\ 0 \text{ si } [u_2]_F = 0 \end{cases}$$

$$r_{23} = \rho_{23}([\vec{u}]_F) = \sqrt{[u_1]_F^2 + [u_3]_F^2}$$

On vérifie aisément que la connaissance du triplet $\{m_{23}, r_1, r_{23}\}$ donne accès de manière unique au triplet $\{|[u_i]_F|_{i=1,2,3}\}$. On confirme ainsi que seules 3 grandeurs sont finalement inscrites dans la modélisation et que la grandeur m_1 n'est qu'accessoire.

4.3 Expression des variables mode et rayon en fonction des déformations et des contraintes macroscopiques

On note $\varepsilon_{22}^c(\alpha)$, $\varepsilon_{12}^c(\alpha)$ et $\varepsilon_{23}^c(\alpha)$ les déformations à rupture du matériau équivalent à celui fissuré, dépendants a priori de l'état d'endommagement (α). Compte tenu de l'expression des sauts de déplacements macroscopiques en fonction des déformations macroscopiques, on écrit :

$$m_1 = m_1^\varepsilon(\varepsilon, \alpha) = \begin{cases} 1 \text{ si } \varepsilon_{22} + b(Y)\varepsilon_{11} + c(Y)\varepsilon_{33} > 0 \\ 2 \text{ si } \varepsilon_{22} + b(Y)\varepsilon_{11} + c(Y)\varepsilon_{33} \leq 0 \end{cases}$$

$$m_{23} = m_{23}^\varepsilon(\varepsilon, \alpha) = \begin{cases} \frac{2\frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2} + 3\frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{23}^c(\alpha)^2}}{\frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2} + \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{23}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \varepsilon_{23} \neq 0 \\ 2 \text{ si } \varepsilon_{23} = 0 \end{cases}$$

$$r_1 = r_1^\varepsilon(\varepsilon, \alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{(\varepsilon_{22} + b(Y)\varepsilon_{11} + c(Y)\varepsilon_{33})^2}{\varepsilon_{22}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \varepsilon_{22} + b(Y)\varepsilon_{11} + c(Y)\varepsilon_{33} > 0 \\ 0 \text{ si } \varepsilon_{22} + b(Y)\varepsilon_{11} + c(Y)\varepsilon_{33} \leq 0 \end{cases}$$

$$r_{23} = r_{23}^\varepsilon(\varepsilon, \alpha) = \sqrt{\frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2} + \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{23}^c(\alpha)^2}}$$

On note $\sigma_{22}^c(\alpha)$, $\sigma_{12}^c(\alpha)$ et $\sigma_{23}^c(\alpha)$ les contraintes à rupture du matériau équivalent à celui fissuré, dépendants a priori de l'état d'endommagement (α). Compte tenu de l'expression des sauts de déplacements macroscopiques en fonction des contraintes macroscopiques, on écrit :

$$m_1 = m_1^\sigma(\sigma, \alpha) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sigma_{22} > 0 \\ 2 \text{ si } \sigma_{22} \leq 0 \end{cases}$$

$$m_{23} = m_{23}^\sigma(\sigma, \alpha) = \begin{cases} \frac{2\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2} + 3\frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_{23}^c(\alpha)^2}}{\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2} + \frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_{23}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \sigma_{23} \neq 0 \\ 2 \text{ si } \sigma_{23} = 0 \end{cases}$$

$$r_1 = r_1^\sigma(\sigma, \alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \sigma_{22} > 0 \\ 0 \text{ si } \sigma_{22} \leq 0 \end{cases}$$

$$r_{23} = r_{23}^\sigma(\sigma, \alpha) = \sqrt{\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2} + \frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_{23}^c(\alpha)^2}}$$

On vérifie aisément que la connaissance du triplet $\{m_{23}, r_1, r_{23}\}$ donne accès de manière unique au triplet $\left\{\frac{(\varepsilon_{22} + b(Y)\varepsilon_{11} + c(Y)\varepsilon_{33})^2}{\varepsilon_{22}^c(\alpha)^2}, \frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2}, \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{23}^c(\alpha)^2}\right\}$ dans le cas d'une formulation écrite en déformation, et au triplet $\left\{\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22}^c(\alpha)^2}, \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2}, \frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_{23}^c(\alpha)^2}\right\}$ dans le cas d'une formulation écrite en contrainte. L'utilisation de la relation η_ε (respectivement, η_σ) dans le cas de l'approche en déformation (respectivement, contrainte) donne alors accès de manière unique au triplet $\{|[u_i]_F|_{i=1,2,3}\}$. Remarquons également que m_1 est directement reliée à r_1. Sa présence n'est donc pas utile : toutefois, comme nous l'avons déjà signalé (§- 4.1), m_1 permet retrouver aisément les définitions usuelles de la Mécanique de la Rupture.

hal-00386236, version 1 - 20 May 2009

hal-00386236, version 1 - 20 May 2009

5 Conclusion

On a généralisé le concept de Mode d'Ouverture d'une fissure propre à la Mécanique de la Rupture à la Mécanique de l'Endommagement en subsituant le triplet $\{|[u_i]_F|_{i=1,2,3}\}$ par le triplet $\{m_{23}, r_1, r_{23}\}$. Cette substitution est bijective : la connaissance des variables $\{m_{23}, r_1, r_{23}\}$ donne donc la connaissance de l'état géométrique du réseau de fissures.

Les grandeurs m_1 et m_{23}, vues comme des fonctions des grandeurs macroscopiques σ ou ε, ne sont pas continues en tout point. Il conviendra donc de faire en sorte que ce défaut ne cause pas de discontinuité dans la relation comportementale hyperélastique entre σ et ε lorsque ces variables seront inscrites dans un modèle d'endommagement.

Références

[1] D.H. Allen. Homogenization principles and their application to continuum damage mechanics. *Composites sciences and technology*, 61 :2223–2230, 2001.

[2] D.H. Allen, C.E. Harris, and S.E. Groves. A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage, parts I and II. *International Journal of Solids and Structures*, 23(9) :1301–1338, 1987.

[3] S. Andrieux. Un modèle de matériau microfissuré, applications aux roches et aux bétons. *Thèse, Université Paris 6, France*, 1983.

[4] E. Aussedat, A. Thionnet, and J. Renard. Comportement en compression des composites par une définition du mode de sollicitation en mécanique de l'endommagement. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série II*, 321 :533–540, 1995.

[5] J.D. Eshelby. The determination of an elastic field of an ellipsoïdal inclusion and related problem. *Proceedings of The Royal Society of London, A*, 24/1226 :376–396, 1957.

[6] J. Lee, C.E. Harris, and D.H. Allen. Internal state variable approach for predicting stiffness reduction in fibrous laminated composites with matrix cracks. *Journal of Composite Materials*, 23 :1273–1291, 1989.

[7] D. Leguillon and E. Sanchez-Palencia. On the behaviour of a cracked elastic body with or without friction. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée (1)*, 2 :195–209, 1982.

[8] N.I. Muskhelishvili. Some basics problems of the mathematical theory of elasticity. *Noordhoff*, 1953.

[9] R. Talreja. Fatigue of composite materials. *Technical University of Denmark*, 1985.

[10] R. Talreja. Continuum modelling of damage in ceramic matrix composites. *Mechanics of Materials*, 12 :165–180, 1991.

[11] M. Taya and T.W. Chou. On two kinds of ellipsoïdal inhomogeneities in a infinite elastic body : an application to a hybrid composite. *International Journal of Solids and Structures*, 17 :553–563, 1981.

[12] A. Thionnet. A model for the recovery of thermomechanical properties in strongly anisotropic damaged materials. *Journal of Composite Materials*, 35 :731–750, 2001.

[13] A. Thionnet and C. Martin. A new constructive method using the theory of invariants to obtain material behavior laws. *International Journal of Solids and Structures*, 43/2 :325–345, 2006.

[14] A. Thionnet, C. Martin, and S. Barradas. Mécanique et comportements des milieux continus, tome 2 : applications et théorie des invariants. *Editions Ellipses, ISBN 2-7298-1807-3*, 2003.

[15] A. Thionnet and J. Renard. Modelling unilateral damage effect in strongly anisotropic materials by the introduction of loading mode in damage mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 36 :4269–4287, 1999.

hal-00386236, version 1 - 20 May 2009

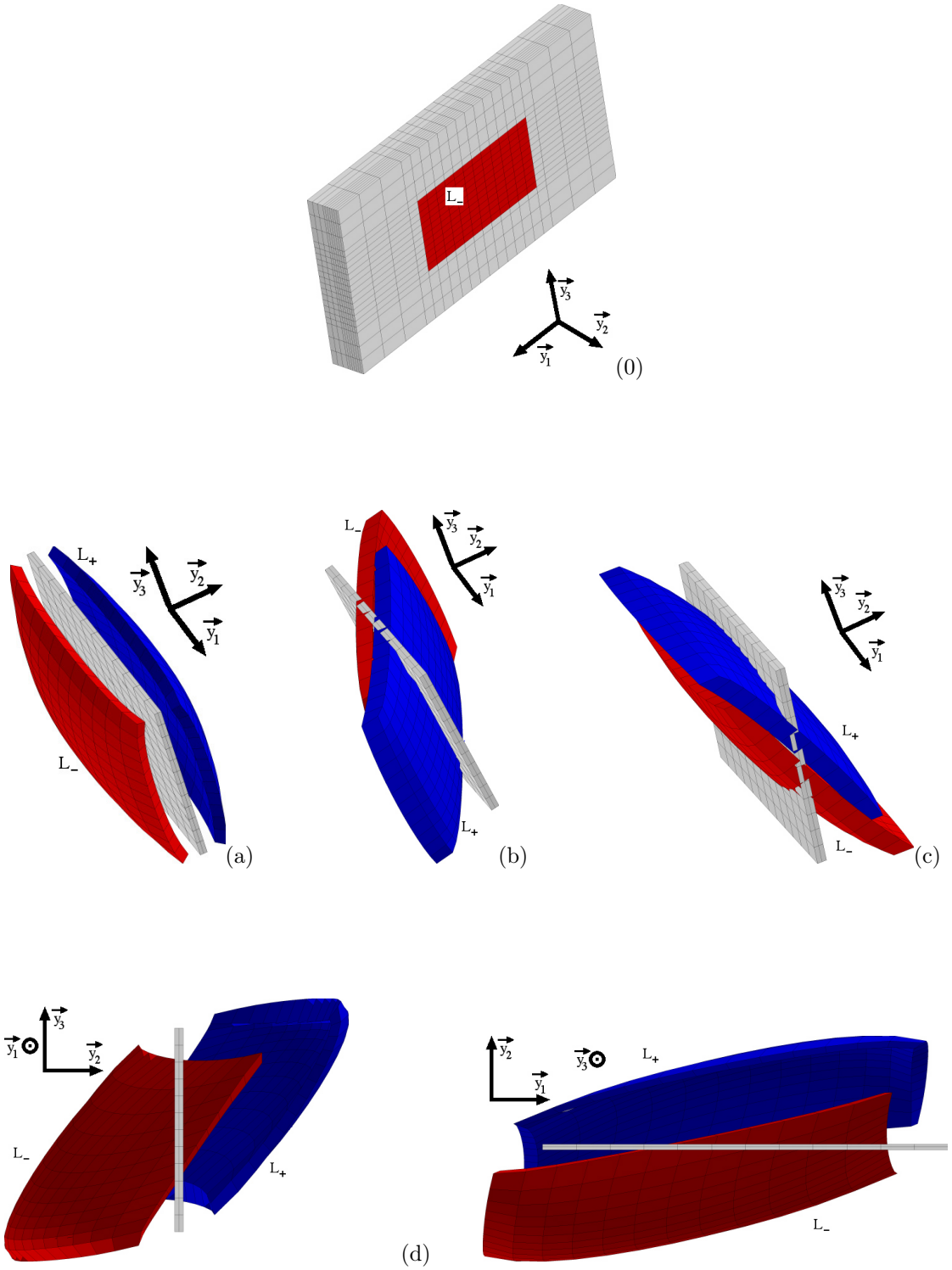

FIG. 1 – Illustration des variables d'état modélisant le Mode d'Ouverture d'une microfissure. (0) Moitié de la cellule représentative du milieu microfissuré (en rouge : la lèvre L_- de la fissure). (a) Mode I de la Mécanique de la Rupture : $m_1 = 1$, $m_{23} = 2$. (b) Mode II de la Mécanique de la Rupture : $m_1 = 2$, $m_{23} = 2$. (c) Mode III de la Mécanique de la Rupture : $m_1 = 2$, $m_{23} = 3$. (d) Mode mixte de la Mécanique de la Rupture, Mode I/Mode II/Mode III : $m_1 = 1$, $2 < m_{23} < 3$. (0-a-d) En gris, le plan de la microfissure non chargée.