



**HAL**  
open science

## Le problème infrarouge pour l'électron habillé non relativiste dans un champ magnétique

Laurent Amour, Jérémy Faupin, Benoit Grebert, Jean-Claude Guillot

► **To cite this version:**

Laurent Amour, Jérémy Faupin, Benoit Grebert, Jean-Claude Guillot. Le problème infrarouge pour l'électron habillé non relativiste dans un champ magnétique. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 2008, pp.1045-1050. 10.1016/j.crma.2008.09.015 . hal-00385851

**HAL Id: hal-00385851**

**<https://hal.science/hal-00385851>**

Submitted on 20 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Le problème infrarouge pour l'électron habillé non relativiste dans un champ magnétique

Laurent Amour\*, Jérémy Faupin†, Benoît Grébert‡, Jean-Claude Guillot§

## Résumé

Nous considérons un électron non relativiste interagissant avec un champ magnétique classique dans la direction  $x_3$  et un champ électromagnétique quantifié. Le système est invariant par translation suivant  $x_3$  et l'Hamiltonien correspondant admet une décomposition  $H \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H(P_3) dP_3$ . Pour une impulsion  $P_3$  fixée suffisamment petite, nous montrons que  $H(P_3)$  possède un état fondamental dans la représentation Fock si et seulement si  $E'(P_3) = 0$ , où  $P_3 \mapsto E'(P_3)$  est la dérivée de l'application  $P_3 \mapsto E(P_3) = \inf \sigma(H(P_3))$ . Lorsque  $E'(P_3) \neq 0$ , nous obtenons l'existence d'un état fondamental dans une représentation non équivalente à la représentation Fock. Ce résultat est valable pour des valeurs suffisamment petites de la constante de couplage.

## Abstract

### The infrared problem for the dressed non-relativistic electron in a magnetic field.

We consider a non-relativistic electron interacting with a classical magnetic field pointing along the  $x_3$ -axis and with a quantized electromagnetic field. The system is translation invariant in the  $x_3$ -direction and the corresponding Hamiltonian has a decomposition  $H \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H(P_3) dP_3$ . For a fixed momentum  $P_3$  sufficiently small, we prove that  $H(P_3)$  has a ground state in the Fock representation if and only if  $E'(P_3) = 0$ , where  $P_3 \mapsto E'(P_3)$  is the derivative of the map  $P_3 \mapsto E(P_3) = \inf \sigma(H(P_3))$ . If  $E'(P_3) \neq 0$ , we obtain the existence of a ground state in a non-Fock representation. This result holds for sufficiently small values of the coupling constant.

## Abridged english version

We consider a non-relativistic electron of charge  $e$  and mass  $m$  interacting with a classical magnetic field pointing along the  $x_3$ -axis, an electrostatic potential, and the quantized electromagnetic field in the Coulomb gauge. The position and the momentum of the electron are denoted respectively by  $x = (x_1, x_2, x_3)$  and  $p = (p_1, p_2, p_3) = -i\nabla_x$ . The classical magnetic field is of the form  $(0, 0, b(x'))$ , where  $x' = (x_1, x_2)$  and  $b(x') = (\partial a_2 / \partial x_1)(x') - (\partial a_1 / \partial x_2)(x')$ . Here  $a(x')$  is a vector potential. The electrostatic potential is denoted by  $V(x')$ . The quantized electromagnetic field in the Coulomb gauge is defined by (1.2), where  $\rho$  is a real ultraviolet cutoff function satisfying (1.3),

---

\*Laboratoire de Mathématiques EDPPM, FRE-CNRS 3111, Université de Reims, Moulin de la Housse - BP 1039, 51687 REIMS Cedex 2, France. laurent.amour@univ-reims.fr

†Institut for Matematiske Fag, Aarhus Universitet, Ny Munkegade, 8000 Aarhus C, Denmark. faupin@imf.au.dk. Supported by the Centre for Theory in Natural Science

‡Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UMR-CNRS 6629, Université de Nantes, 2, rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 3, France. benoit.grebert@univ-nantes.fr

§Centre de Mathématiques Appliquées, UMR-CNRS 7641, Ecole polytechnique, 99128 Palaiseau Cedex, France. guillot@cmmapx.polytechnique.fr

$\epsilon_1(k)$  and  $\epsilon_2(k)$  are polarization vectors orthogonal to each other and to  $k$ , and  $a_\lambda^*(k)$  and  $a_\lambda(k)$  are the usual creation and annihilation operators obeying the canonical commutation relations (1.5). The Pauli Hamiltonian  $H_g$  associated to the system we consider acts on  $\mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$ , where  $\mathcal{H}_{\text{el}} = L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$  is the Hilbert space for the electron, and  $\mathcal{H}_{\text{ph}}$  is the symmetric Fock space constructed over  $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$  for the photons. The Hamiltonian  $H_g$  is then formally given by (1.1), where the charge of the electron  $e$  is replaced by a coupling parameter  $g$  in the terms containing the quantized electromagnetic field. The Hamiltonian for the photons in the Coulomb gauge is given by (1.4), and  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  is the 3-component vector of the Pauli matrices. Noting that  $H_g$  formally commutes with the operator of total momentum in the direction  $x_3$ ,  $P_3 = p_3 + d\Gamma(k_3)$ , one can show (see [3]) that  $H_g$  has a decomposition

$$H_g = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_g(P_3) dP_3.$$

If  $P_3$  is fixed,  $H_g(P_3)$  acts on  $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_2) \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$  and is formally given by (1.6). The infrared cutoff Hamiltonian  $H_{g,\sigma}(P_3)$  is defined by replacing the integral over  $\{k \in \mathbb{R}^3\}$  in (1.2) by the integral over  $\{k \in \mathbb{R}^3, |k| \geq \sigma\}$ . We set  $E_g(P_3) = \inf \sigma(H_g(P_3))$  and  $E_{g,\sigma}(P_3) = \inf \sigma(H_{g,\sigma}(P_3))$ . The electronic Hamiltonian is  $h(b, V) = \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m} (p_j - ea_j(x'))^2 - \frac{e}{2m} \sigma_3 b(x') + V(x')$ , and we define  $e_0 = \inf \sigma(h(b, V))$  and  $e_1 = \inf[\sigma(h(b, V)) \setminus \{e_0\}]$ . We make the following hypothesis:

**(H<sub>0</sub>)**  $e_0$  is an isolated eigenvalue of multiplicity 1.

**Proposition** *Assume that (H<sub>0</sub>) holds. Then there exist  $g_0 > 0$  and  $P_0 > 0$  such that for all  $0 < |g| \leq g_0$ , for all  $P_3, k_3 \in \mathbb{R}$  such that  $|P_3| \leq P_0$ ,  $|P_3 + k_3| \leq P_0$ , for all  $0 \leq \sigma \leq (e_1 - e_0)/2$ , for all  $\delta > 0$ ,*

$$|E'_{g,\sigma}(P_3 + k_3) - E'_{g,\sigma}(P_3)| \leq C_\delta |k_3|^{\frac{1}{4} - \delta}, \quad (*)$$

where  $C_\delta$  is a positive constant depending on  $\delta$  but independent of  $\sigma$ .

**Remark** *Our proof follows the scheme of [16, 8].*

Let us define a function  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  by

$$f(k, \lambda) = \frac{g}{2m} \frac{\rho(k) \epsilon_\lambda^3(k)}{k_3 |k|^{1/2}} \frac{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3)}{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) + |k|}.$$

We note that if  $P_3 \mapsto E_g(P_3)$  is of class  $C^{1+\delta}$  with  $\delta > 0$ , the property  $E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) \geq -3|k|/4$  (see [3]) implies that the function  $f$  is in  $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$  if and only if the derivative  $E'_g(P_3)$  vanishes. As in [4], we consider a renormalized Hamiltonian  $H_g^{\text{ren}}(P_3)$ , defined by the formal expression  $H_g^{\text{ren}}(P_3) = W(if)H_g(P_3)W(if)^*$ , where for  $h \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ ,  $W(h)$  is the Weyl operator,  $W(h) = e^{i\Phi(h)}$ , with  $\Phi(h) = (a^*(h) + a(h))/\sqrt{2}$ . We then obtain the equation (2.3) which defines  $H_g^{\text{ren}}(P_3)$  no matter whether  $f$  is in  $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$  or not. Note that in (2.3) we have set  $A_j(x', 0) = \Phi(h_j(x'))$ . Our main result is

**Theorem** *Assume that (H<sub>0</sub>) holds. Then there exist  $g_0 > 0$  and  $P_0 > 0$  such that for all  $0 < |g| \leq g_0$  and  $0 < |P_3| \leq P_0$ ,*

- (i)  $H_g(P_3)$  has a ground state if and only if  $E'_g(P_3) = 0$ .
- (ii)  $H_g^{\text{ren}}(P_3)$  has a ground state.

**Remark**

1. The previous proposition is used both in the proof of (i) and in the proof of (ii). More precisely, we use (\*) with  $\sigma = 0$  to show the absence of a ground state for  $H_g(P_3)$  when  $E'_g(P_3) \neq 0$ : arguing as in [10, Lemma 2.6], the key point of our proof is to obtain a contradiction when assuming the existence of a ground state  $\Phi_g(P_3)$ , thanks to the property (2.4). On the other hand, to prove the existence of a ground state for  $H_g^{\text{ren}}(P_3)$ , and for  $H_g(P_3)$  in the case  $E'_g(P_3) = 0$ , we follow [3], using (\*) with  $\sigma > 0$  in order to bound the number of photons in the state  $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$  uniformly in  $\sigma$ . Here  $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$  denotes a ground state of the infrared cutoff Hamiltonian  $H_{g,\sigma}(P_3)$ .
2. Our result extends to the Pauli-Fierz model describing dressed mobile atoms and ions (see [1, 2, 14]), replacing the condition  $E'_g(P_3) = 0$  in the theorem by  $Q\nabla E_g(P) = 0$ , where  $Q$  is the total charge of the atomic system, and  $E_g(P)$  is the infimum of the spectrum of the reduced Hamiltonian  $H_g(P)$  at a fixed total momentum  $P$ .

## 1 Définition du modèle et hypothèses

Nous considérons un électron, traité comme une particule quantique non relativiste, en interaction avec un champ magnétique classique dans la direction  $x_3$  et le champ électromagnétique quantifié en jauge de Coulomb. L'espace de Hilbert pour l'électron est  $\mathcal{H}_{\text{el}} := L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ . L'espace de Hilbert pour le champ de photons est l'espace de Fock symétrique construit à partir de  $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ , c'est-à-dire  $\mathcal{H}_{\text{ph}} := \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n [L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)^{\otimes n}]$ , où  $S_n$  désigne la projection orthogonale sur l'espace des fonctions symétriques. Le système que l'on considère est associé à l'opérateur hamiltonien de Pauli  $H_g$  agissant dans  $\mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$ , défini formellement par

$$H_g = \frac{1}{2m} \left( p - ea(x') - gA(x) \right)^2 - \frac{e}{2m} \sigma_3 b(x') - \frac{g}{2m} \sigma \cdot B(x) + V(x') + H_{\text{ph}}. \quad (1.1)$$

Dans cette définition, les unités sont choisies de telle façon que  $\hbar = c = 1$ , où  $\hbar$  est la constante de Planck divisée par  $2\pi$  et  $c$  est la vitesse de la lumière. Les paramètres  $e$  et  $m$  représentent respectivement la charge et la masse de l'électron, et dans les termes contenant le champ électromagnétique quantifié,  $e$  est remplacé par une constante de couplage notée  $g$ . Les opérateurs position et impulsion de l'électron sont notés respectivement  $x = (x_1, x_2, x_3)$  et  $p = (p_1, p_2, p_3) = -i\nabla_x$ . La variable  $x'$  est définie par  $x' = (x_1, x_2)$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  désigne le vecteur des matrices de Pauli, et  $V(x')$  est un potentiel électrique. Le champ magnétique classique est de la forme  $(0, 0, b(x'))$ , où  $b(x') = (\partial a_2 / \partial x_1)(x_1, x_2) - (\partial a_1 / \partial x_2)(x_1, x_2)$  et  $a(x')$  est un potentiel vecteur. Le champ électromagnétique quantifié en jauge de Coulomb s'écrit

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{\epsilon_\lambda(k)}{|k|^{1/2}} \rho(k) \left[ e^{-ik \cdot x} a_\lambda^*(k) + e^{ik \cdot x} a_\lambda(k) \right] d^3k, \\ B(x) &= -\frac{i}{2\pi} \sum_{\lambda=1,2} \int |k|^{1/2} \left( \frac{k}{|k|} \wedge \epsilon_\lambda(k) \right) \rho(k) \left[ e^{-ik \cdot x} a_\lambda^*(k) - e^{ik \cdot x} a_\lambda(k) \right] d^3k, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où  $\epsilon_1(k), \epsilon_2(k)$  sont des vecteurs de polarisation,  $\epsilon_\lambda = (\epsilon_\lambda^1, \epsilon_\lambda^2, \epsilon_\lambda^3)$ , satisfaisant  $\epsilon_\lambda(k) \cdot \epsilon_{\lambda'}(k) = \delta_{\lambda\lambda'}$  et  $k \cdot \epsilon_\lambda(k) = 0$ . La fonction  $\rho$  est une fonction de troncature ultraviolette, choisie à valeurs réelles, et telle que

$$\int_{|k| \leq 1} \frac{|\rho(k)|^2}{|k|^2} d^3k + \int_{|k| \geq 1} |k| |\rho(k)|^2 d^3k < \infty. \quad (1.3)$$

Enfin l'opérateur hamiltonien pour les photons en jauge de Coulomb est donné par

$$H_{\text{ph}} = \sum_{\lambda=1,2} \int |k| a_{\lambda}^*(k) a_{\lambda}(k) d^3k. \quad (1.4)$$

Dans (1.2) et (1.4),  $a_{\lambda}^*(k)$  et  $a_{\lambda}(k)$  sont les opérateurs usuels de création et d'annihilation obéissant aux relations canoniques de commutation ( $a^{\#} = a^*$  ou  $a$ ) :

$$\left[ a_{\lambda}^{\#}(k), a_{\lambda'}^{\#}(k') \right] = 0 \quad , \quad \left[ a_{\lambda}(k), a_{\lambda'}^*(k') \right] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k - k'). \quad (1.5)$$

L'opérateur  $H_g$  est invariant par translation dans la direction  $x_3$ , dans le sens où il commute formellement avec l'opérateur  $P_3 = p_3 + d\Gamma(k_3)$ , où  $d\Gamma(k_3)$  est la seconde quantification de l'opérateur de multiplication par  $k_3 \in \mathbb{R}$ . Aussi  $H_g$  admet une décomposition en intégrale directe,  $H_g \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_g(P_3) dP_3$ , où  $H_g(P_3)$  opère dans  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_2) \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$ , et (voir [3])

$$\begin{aligned} H_g(P_3) &= \frac{1}{2m} \sum_{j=1,2} \left( p_j - e a_j(x') - g A_j(x', 0) \right)^2 + \frac{1}{2m} \left( P_3 - d\Gamma(k_3) - g A_3(x', 0) \right)^2 \\ &\quad - \frac{e}{2m} \sigma_3 b(x') - \frac{g}{2m} \sigma \cdot B(x', 0) + V(x') + H_{\text{ph}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Soient  $h(b, V) = \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m} (p_j - e a_j(x'))^2 - \frac{e}{2m} \sigma_3 b(x') + V(x')$  et  $e_0 = \inf \sigma(h(b, V))$ . Nous supposons que  $b$  et  $V$  sont choisis de telle façon que  $e_0$  est une valeur propre isolée et de multiplicité finie (nous renvoyons à [5, 13, 17, 18] pour des choix possibles de couples  $(b, V)$  satisfaisant cette propriété). Nous faisons de plus l'hypothèse suivante :

**(H<sub>0</sub>)**  $e_0$  est une valeur propre isolée de multiplicité 1.

Nous posons également  $e_1 = \inf[\sigma(h(b, V)) \setminus \{e_0\}]$ . Définissons  $H_{g,\sigma}(P_3)$  l'opérateur obtenu en introduisant dans  $H_g(P_3)$  une troncature infrarouge, c'est-à-dire en remplaçant l'intégrale sur  $\mathbb{R}^3$  définissant  $A(x)$  dans (1.2) par l'intégrale sur  $\{k \in \mathbb{R}^3, |k| \geq \sigma\}$ . Il est établi dans [3] que, pour  $g$  et  $P_3$  suffisamment petits, et pour tout  $\sigma \geq 0$ ,  $H_{g,\sigma}(P_3)$  est auto-adjoint et semi-borné inférieurement. Nous notons  $E_{g,\sigma}(P_3) = \inf \sigma(H_{g,\sigma}(P_3))$  l'infimum du spectre de  $H_{g,\sigma}(P_3)$  pour  $\sigma > 0$ , et  $E_g(P_3) = \inf \sigma(H_g(P_3))$  pour  $\sigma = 0$ . D'après [3], pour tout  $\sigma > 0$ ,  $H_{g,\sigma}(P_3)$  possède un état fondamental  $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$ , et, si l'on suppose de plus l'hypothèse **(H<sub>0</sub>)** vérifiée,  $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$  est non dégénéré.

## 2 Résultats et remarques

Notre résultat principal (voir le théorème 2.3 plus bas) fournit une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'un état fondamental pour  $H_g(P_3)$ . L'une des propriétés cruciales que nous utilisons pour obtenir ce résultat est la régularité de l'application  $P_3 \mapsto E_g(P_3)$ .

**Proposition 2.1** *Supposons l'hypothèse **(H<sub>0</sub>)** satisfaite. Alors il existe  $g_0 > 0$  et  $P_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < |g| \leq g_0$ , pour tous  $P_3, k_3 \in \mathbb{R}$  tels que  $|P_3| \leq P_0$ ,  $|P_3 + k_3| \leq P_0$ , pour tout  $0 \leq \sigma \leq (e_1 - e_0)/2$ , pour tout  $\delta > 0$ ,*

$$\left| E'_{g,\sigma}(P_3 + k_3) - E'_{g,\sigma}(P_3) \right| \leq C_{\delta} |k_3|^{\frac{1}{4} - \delta}, \quad (2.1)$$

où  $C_{\delta}$  est une constante dépendant de  $\delta$  mais ne dépendant pas de  $\sigma$ .

## Remarques 2.2

1. Le cas d'un électron libre interagissant avec le champ électromagnétique quantifié a été étudié récemment (cf [7, 8]). Le modèle correspondant présente des similarités avec le nôtre, dans la mesure où il est invariant par translation et conduit à l'étude d'un Hamiltonien  $H_g(P)$  pour une impulsion totale fixée  $P \in \mathbb{R}^3$ . Il est toutefois à noter que pour ce modèle où un seul électron est considéré,  $H_g(P)$  ne contient pas de partie électronique  $h(b, V)$  ( $H_g(P)$  agit dans  $\mathcal{H}_{\text{ph}}$  uniquement), ce qui, dans une certaine mesure, simplifie l'étude par rapport au modèle envisagé ici. Dans [7], pour un électron avec spin, le caractère  $C^2$  de l'application  $P \mapsto E_g(P) = \inf \sigma(H_g(P))$  est obtenu à partir d'une méthode basée sur l'utilisation d'un groupe de renormalisation (voir aussi [6]). L'auteur montre de plus que  $\nabla E_g(P) = 0$  si et seulement si  $P = 0$ . Dans [8], à partir du travail antérieur de A. Pizzo sur le modèle de Nelson, [16], il est établi que  $P \mapsto E_g(P)$  est de classe  $C^{1+\delta}$  pour tout  $0 \leq \delta < 1/4$ . Nous avons pu adapter cette dernière méthode à notre modèle.
2. La preuve de la proposition 2.1 s'adapte au cas des atomes et des ions habillés non relativistes en interaction avec le champ électromagnétique quantifié (voir [1]), mais toujours sous une hypothèse de simplicité du type de  $(\mathbf{H}_0)$ . Le problème paraît plus difficile dans le cas dégénéré.

Posons  $\Phi(h) = (a^*(h) + a(h))/\sqrt{2}$  pour  $h \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ , où  $a^*(h) = \sum_{\lambda=1,2} \int h(k, \lambda) a_\lambda^*(k) d^3k$  et  $a(h) = \sum_{\lambda=1,2} \int \bar{h}(k, \lambda) a_\lambda(k) d^3k$ . Le produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$  est défini par  $(h_1, h_2) = \sum_{\lambda=1,2} \int \bar{h}_1(k, \lambda) h_2(k, \lambda) d^3k$ . Soit  $W(h) = e^{i\Phi(h)}$  l'opérateur de Weyl, et soit  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par

$$f(k, \lambda) = \frac{g}{2m} \frac{\rho(k) \epsilon_\lambda^3(k)}{k_3 |k|^{1/2}} \frac{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3)}{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) + |k|}. \quad (2.2)$$

Notons que, si  $P_3 \mapsto E_g(P_3)$  est de classe  $C^{1+\alpha}$  avec  $\alpha > 0$ , en utilisant le fait que pour  $g$  et  $P_3$  suffisamment petits,  $E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) \geq -3|k|/4$  (cf. [3, Lemma 4.3]), on a  $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$  si et seulement si  $E'_g(P_3) = 0$ . Introduisons, de la même façon que dans [4], un opérateur "renormalisé"  $H_g^{\text{ren}}(P_3)$  à partir de l'expression formelle  $H_g^{\text{ren}}(P_3) = W(if)H_g(P_3)W(if)^*$ . Nous obtenons (voir par exemple [9]) :

$$\begin{aligned} H_g^{\text{ren}}(P_3) &= \frac{1}{2m} \sum_{j=1,2} \left( p_j - e a_j(x') - g A_j(x', 0) + g \text{Re}(h_j(x'), f) \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2m} \left( P_3 - d\Gamma(k_3) + \Phi(k_3 f) + \frac{1}{2} (k_3 f, f) - g A_3(x', 0) + g \text{Re}(h_3(x'), f) \right)^2 \\ &- \frac{e}{2m} \sigma_3 b(x') - \frac{g}{2m} \sigma \cdot B(x', 0) + V(x') + H_{\text{ph}} - \Phi(|k|f) - \frac{1}{2} (|k|f, f), \end{aligned} \quad (2.3)$$

où l'on a posé  $A_j(x', 0) = \Phi(h_j(x'))$ . Remarquons que  $H_g^{\text{ren}}(P_3)$  est unitairement équivalent à  $H_g(P_3)$  si et seulement si  $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ . Notre principal résultat est alors :

**Théorème 2.3** *Supposons l'hypothèse  $(\mathbf{H}_0)$  satisfaite. Alors il existe  $g_0 > 0$  et  $P_0 > 0$  tels que pour tous  $0 < |g| \leq g_0$  et  $0 < |P_3| \leq P_0$ ,*

- (i)  $H_g(P_3)$  possède un état fondamental si et seulement si  $E'_g(P_3) = 0$ .
- (ii)  $H_g^{\text{ren}}(P_3)$  possède un état fondamental.

## Remarques 2.4

1. L'inégalité (2.1) est utilisée à la fois dans la preuve de (i) et dans celle de (ii). Plus précisément, nous utilisons (2.1) avec  $\sigma = 0$  afin d'obtenir l'absence d'état fondamental de  $H_g(P_3)$  lorsque  $E'_g(P_3) \neq 0$  : nous basant sur [10, Lemme 2.6], nous obtenons une contradiction en supposant l'existence d'un état fondamental  $\Phi_g(P_3)$ , grâce à la propriété

$$(k, \lambda) \mapsto \left\| [a_\lambda(k) - f(k, \lambda)] \Phi_g(P_3) \right\| \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2). \quad (2.4)$$

L'existence d'un état fondamental pour  $H_g^{\text{ren}}(P_3)$ , ou pour  $H_g(P_3)$  lorsque  $E'(P_3) = 0$ , s'obtient quant à elle de la même façon que dans [3], en utilisant de plus (2.1) avec  $\sigma > 0$  pour contrôler le nombre de photons dans l'état fondamental de  $H_{g,\sigma}(P_3)$ .

2. La preuve du théorème 2.3 s'adapte au cas des atomes et des ions (voir [1]), en remplaçant la condition  $E'_g(P_3) = 0$  dans (i) par  $Q\nabla E_g(P) = 0$ , où  $Q$  représente la charge totale du système atomique. Le cas des atomes,  $Q = 0$ , est traité dans [2]. Pour toute valeur de la constante de couplage, l'existence d'un état fondamental pour  $Q = 0$  est également obtenue dans [14], en adaptant la méthode de [11], mais sous l'hypothèse  $E_g(P) \geq E_g(0)$  qui, jusqu'à maintenant, n'a pas pu être vérifiée pour une valeur quelconque de  $g$ . Dans [12], les auteurs montrent l'absence d'état fondamental pour  $H_g(P)$  dans le cas  $Q < 0$ , en supposant que  $\nabla E_g(P)$  est différent de 0. Ainsi, par rapport à ces résultats, la méthode que nous employons permet en plus d'obtenir l'existence d'un état fondamental pour  $H_g^{\text{ren}}(P)$  et pour  $H_g(P)$  lorsque  $\nabla E_g(P) = 0$ .
3. Si  $E'_g(P_3) \neq 0$ , (ii) fournit l'existence d'un état fondamental dans une représentation non équivalente à la représentation Fock des relations canoniques de commutation, comme dans le cas du modèle de Nelson (pour un système atomique non invariant par translation, voir [4], [10], [15]).

## References

- [1] L. Amour, J. Faupin, B. Grébert, and J.-C. Guillot. The infrared problem for the dressed mobile ions. In preparation.
- [2] L. Amour, B. Grébert, and J.-C. Guillot. The dressed mobile atoms and ions. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 86(3):177–200, 2006.
- [3] L. Amour, B. Grébert, and J.-C. Guillot. The dressed nonrelativistic electron in a magnetic field. *Math. Methods Appl. Sci.*, 29(10):1121–1146, 2006.
- [4] A. Arai. Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation. *Rev. Math. Phys.*, 13(9):1075–1094, 2001.
- [5] J. Avron, I. Herbst, and B. Simon. Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions. *Duke Math. J.*, 45(4):847–883, 1978.
- [6] V. Bach, T. Chen, J. Fröhlich, and I. M. Sigal. The renormalized electron mass in non-relativistic quantum electrodynamics. *J. Funct. Anal.*, 243(2):426–535, 2007.
- [7] T. Chen. Infrared renormalization in non-relativistic qed and scaling criticality. *J. Funct. Anal.*, 2008. doi:10.1016/j.jfa.2008.01.001.
- [8] T. Chen, J. Fröhlich, and A. Pizzo. Infraparticle Scattering States in Non-Relativistic QED II. Mass Shell Properties. arxiv.org, math-ph/07092812, 2007.
- [9] J. Dereziński and C. Gérard. Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians. *Rev. Math. Phys.*, 11(4):383–450, 1999.
- [10] J. Dereziński and C. Gérard. Scattering theory of infrared divergent Pauli-Fierz Hamiltonians. *Ann. Henri Poincaré*, 5(3):523–577, 2004.

- [11] M. Griesemer, E. H. Lieb, and M. Loss. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. *Invent. Math.*, 145(3):557–595, 2001.
- [12] D. Hasler and I. Herbst. Absence of Ground States for a Class of Translation Invariant Models of Non-relativistic QED. arxiv.org, math-ph/0702096, 2007.
- [13] A. Iwatsuka and H. Tamura. Asymptotics distribution of eigenvalues for Pauli operators with non constant magnetic fields. *Duke Math. J.*, 93:535–574, 1998.
- [14] M. Loss, T. Miyao, and H. Spohn. Lowest energy states in nonrelativistic QED: atoms and ions in motion. *J. Funct. Anal.*, 243(2):353–393, 2007.
- [15] A. Panati. Existence and non existence of a ground state for the massless Nelson model under binding condition. arxiv.org, math-ph/0609065, 2006.
- [16] A. Pizzo. One-particle (improper) states in Nelson’s massless model. *Ann. Henri Poincaré*, 4(3):439–486, 2003.
- [17] G.D. Raikov. Eigenvalue asymptotics for the Pauli operator in strong non-constant magnetic fields. *Ann. Inst. Fourier*, 49:1603–1636, 1999.
- [18] A. V. Sobolev. On the Lieb-Thirring estimates for the Pauli operator. *Duke Math. J.*, 82(3):607–635, 1996.