



**HAL**  
open science

# Une preuve simple de résultats classiques en lambda-calcul

René David

► **To cite this version:**

René David. Une preuve simple de résultats classiques en lambda-calcul. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1995, 320, p 1401-1406. hal-00384995

**HAL Id: hal-00384995**

**<https://hal.science/hal-00384995>**

Submitted on 18 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Une preuve simple de résultats classiques en $\lambda$ calcul

(A simple proof of basic results in  $\lambda$  calculus)

René David

Résumé : Nous donnons une preuve simple de 3 théorèmes " de base " du lambda calcul pur : le théorème de Church - Rosser, le théorème de standardisation et le théorème des développements finis. Nous donnons également une généralisation - dans le lambda calcul pur - du théorème des développements finis qui a comme corollaire immédiat le théorème de normalisation forte dans le système de types simples avec intersection .

Abstract : We give a simple proof of 3 basic theorems of pure lambda calculus : the Church-Rosser theorem, the standardisation theorem and the finiteness of developpements theorem . We also give an extension - in the pure lambda calculus - of the later that immediately gives the strong normalisation theorem for the type system D (simple types with intersection).

### Abridged version

Usually in courses on Lambda Calculus, the Church-Rosser theorem is first proved and then the standardisation theorem and the finiteness of developpements theorem . I give here a complete proof of these theorems by showing first the standardisation theorem, then the finiteness of developpements theorem and finally the Church-Rosser theorem.

*notations* :  $\text{Red}(t)$  denotes the set of redexes in  $t$ . For  $F \not\subseteq \text{Red}(t)$ , a sequence - finite or infinite - of reductions  $t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \dots$  is an  $F$  developpement of  $t$  ( it is denoted by  $t \rightarrow_F t'$  if it is finite and finishes with  $t'$  ) iff the reduced redexes are residues of redexes in  $F$ .

$t \rightarrow^R t'$  means that  $t$  gives  $t'$  by reducing the redex  $R$ . A sequence - finite or infinite - of reductions  $t = t_0 \rightarrow^{R_0} t_1 \rightarrow^{R_1} \dots$  is a standard reduction ( it is denoted  $t \rightarrow_{st} t'$  if it is finite and finishes with  $t'$  ) if there is no pair  $(i,j)$  such that  $i > j$  and  $R_j$  is a residue of a redex in  $t_j$  on the left of  $R_i$ .  $t \rightarrow_{st,F} t'$  denotes a sequence of reductions that is both standard and an  $F$  developpement of  $t$ .

*Sketch of proofs* : - The standardisation theorem is proved by induction on  $\text{lg}(t \rightarrow^* t')$  (where  $\text{lg}(t \rightarrow^* t')$  is the length of the reduction  $t \rightarrow^* t'$  ) by showing : 1) that  $\rightarrow_{st}$ ,  $\rightarrow_F$ ,  $\rightarrow_{st,F}$ , are congruences (lemma 1, proved by induction on  $(\text{lg}(u \rightarrow u'), \text{cxe}(u))$  where  $\text{cxe}(t)$  represents the complexity of  $t$  ) and 2) that if  $t \rightarrow_{st} t_1 \rightarrow^R t_2$  then  $t \rightarrow_{st} t_2$  ( lemma 2, proved by induction on  $(\text{lg}(t \rightarrow_{st} t_1), \text{cxe}(t))$  ).

- The theorem on the finiteness of developpements is proved by induction on  $\text{cxe}(t)$ , after having proved (lemma 1, proved by induction on  $\text{cxe}(t)$ , using the theorem I) that if  $t$  and  $\mathbf{a}$  satisfy the theorem, then so does  $t[\mathbf{a}/\mathbf{x}]$ , where  $\mathbf{a}$  is any sequence of terms.

- The Church-Rosser theorem is proved by showing that  $\rightarrow_F$  is confluent. This follows immediately from the standardisation theorem and the fact that  $\rightarrow_F$  is strongly normalizing.

- The theorem IV is an immediate consequence of the following extension of the theorem II. First, a slight extension of the notion of redex is necessary to - I believe - better capture the notion of creation of a redex : a term  $(a b)$  is a (generalized) redex if  $a \rightarrow^* \lambda x a'$ . For  $F \not\subseteq \text{Red}(t)$ , associate to every  $R$  in  $F$  a natural number. Define  $F$  developpements as follows : Recursively allow the reduction of the redex  $S$  iff the number associated to  $S$  is positive. If  $S$  is a residue of  $R$ , associate to  $S$  the same number as the one of  $R$ . If  $S$  has been created by the reduction of  $R$  ( and  $n$  is associated to  $R$  ), associate  $(n-1)$  to  $S$ . With this notion of developpement, every term is strongly normalizing and the proof is essentially the same as the one of the theorem II.

## 0 Définitions et notations

Les notions ( notamment celles de résidus ) et notations sont standards. Voir [Bar] ou [Kr]. L'application de  $u$  à  $v$  est notée  $(u v)$  ( voir [Bar] ). Le système de types simples avec intersection est le système appelé système  $D$  dans [Kr].

-  $t \rightarrow t'$  (resp  $t \rightarrow^* t'$  ) signifie qu'on passe de  $t$  à  $t'$  par une (resp un nombre quelconque de )  $\beta$  réductions . On utilisera indistinctement cette notation pour indiquer que  $t$  peut se réduire à  $t'$  ou pour représenter une réduction particulière ( dans ce cas on notera  $lg(t \rightarrow^* t')$  la longueur de cette réduction ), le contexte indiquant clairement le sens.

-  $t \rightarrow^R t'$  signifie qu'on passe de  $t$  à  $t'$  en réduisant le radical  $R$  .

-  $cxé(t)$  représente la complexité de  $t$  .

- On note  $\text{Red}(t)$  l'ensemble des radicaux de  $t$  . soit  $F \not\subseteq \text{Red}(t)$  : une suite - finie ou infinie - de réductions  $t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \dots$  est un  $F$  développement de  $t$  ( et on la notera  $t \rightarrow_F t'$  si elle est finie et se termine par  $t'$  ) ssi les radicaux réduits sont tous des résidus de radicaux dans  $F$ .  $t \rightarrow_F t'$  est un  $F$  développement complet de  $t$  si  $t'$  ne contient pas de ( résidus de ) radicaux de  $F$ .

- Une suite - finie ou infinie - de réductions  $t = t_0 \xrightarrow{R_0} t_1 \xrightarrow{R_1} \dots$  est une réduction standard ( et on la notera  $t \rightarrow_{st} t'$  si elle est finie et se termine par  $t'$  ) ssi il n'y a pas de couple  $(i,j)$  tel que  $i > j$  et  $R_i$  est le résidu d'un radical de  $t_j$  qui est à gauche de  $R_j$  .

- on notera  $t \rightarrow_{st,F} t'$  une chaîne de réductions qui est à la fois une réduction standard et un  $F$  développement de  $t$ .

- Dans toute la suite  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$  représenteront des suites de termes .

- on notera  $(u a_1 a_2 \dots a_n)$  pour  $(\dots(u a_1) a_2) \dots a_n)$

### **Théorème 1** (de standardisation)

Si  $t \rightarrow^* t'$  alors  $t \rightarrow_{st} t'$  . De plus cette preuve est constructive et si  $t \rightarrow_F t'$  alors la réduction standard obtenue est aussi un  $F$  développement de  $t$  .

### **Corollaire**

Si  $t$  n'est pas fortement normalisable alors il existe une réduction standard infinie :  $t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \dots$

**Théorème 2 (des développements finis)**

Soit  $F \notin \text{Red}(t)$  : Il n'existe pas de  $F$  développement infini de  $t$ .

**Théorème 3 (confluence de la  $\beta$ -réduction)**

Si  $t \rightarrow^* t_1$  et  $t \rightarrow^* t_2$  alors il existe  $t_3$  tel que  $t_1 \rightarrow^* t_3$  et  $t_2 \rightarrow^* t_3$ .

**Théorème 4 (de normalisation forte)**

Tout terme typable dans le système de type simple avec intersection est fortement normalisable.

*Remarques* : les preuves ci dessous " correspondent " d'une certaine maniere à celles qu'on peut trouver dans la thèse de JJ Levy ( [Le] ) dans un cadre étiqueté . Dans [Le] la standardisation n'est prouvée que dans le cas de termes fortement normalisables . La notion de radical généralisée introduite au § IV semble être la "bonne " notion quand on étudie la création de radicaux .

**I Preuve du théorème 1****Lemme I.1 :**

$\rightarrow_{st}$ ,  $\rightarrow_F$ ,  $\rightarrow_{st,F}$ , passent au contexte , i.e (par exemple)  
 si  $u \rightarrow_{st} u'$ ,  $a \rightarrow_{st} a'$  alors  $u[a/x] \rightarrow_{st} u'[a'/x]$ ,  $\lambda x u \rightarrow_{st} \lambda x u'$  et  
 $(u a) \rightarrow_{st} (u' a')$

*preuve* : ( pour  $\rightarrow_{st}$ , les autres sont identiques ) Le résultat est clair pour  $\lambda x u$  et  $(u a)$  ; pour  $u[a/x]$  on le prouve par récurrence sur  $(\text{lg}(u \rightarrow_{st} u'), \text{cxté}(u))$  ordonné lexicographiquement .

- si  $u = \lambda y v$  ou  $u = (y v)$  où  $y$  est une variable : évident
- si  $u = (\lambda y b c d)$  : si le radical  $(\lambda y b c)$  n'est pas réduit dans  $u \rightarrow_{st} u'$  le résultat est clair, sinon il est réduit en premier et on a  $u \rightarrow (b[c/y] d) \rightarrow_{st} u'$  et  $u[a/x] \rightarrow (b[c/y] d)[a/x] \rightarrow_{st} u'[a'/x]$  est - par hypothèse de récurrence - standard  $\rightarrow$

*preuve du théorème* : par récurrence sur  $\text{lg}(t \rightarrow^* t')$  ; il suffit de prouver :

**Lemme I.2**

Si  $t \rightarrow_{st} t_1 \xrightarrow{R} t_2$  alors  $t \rightarrow_{st} t_2$ .

*Preuve* : par récurrence sur  $(\text{lg}(t \rightarrow_{st} t_1), \text{cxté}(t))$  ordonné lexicographiquement .

- si  $t = \lambda x u$  ou  $t = (x a)$  le résultat est trivial .
- si  $t = (\lambda x a b c)$  ; soit  $S$  le radical  $(\lambda x . a b)$ 
  - si  $S$  n'a pas été réduit dans  $t \rightarrow_{st} t_1$  alors  $t_1 = (\lambda x a_1 b_1 c_1)$  avec  $a \rightarrow_{st} a_1$ ,  $b \rightarrow_{st} b_1$ ,  $c \rightarrow_{st} c_1$  .
    - si  $R$  est le résidu de  $S$  alors ( par le lemme I.1 )  $t \rightarrow (a[b/x] c) \rightarrow_{st} (a_1[b_1/x] c_1) = t_2$  est une réduction standard .
    - sinon  $R$  est un radical dans  $a_1$  ou dans  $b_1$  ou dans  $c_1$ ; supposons qu'il est dans  $a_1$  ( les autres cas sont identiques) alors

$a \rightarrow_{st} a_1 \rightarrow^R a_2$  et  $t_2 = (\lambda x a_2 b_1 c_1)$  ; par hypothèse de récurrence ( appliquée à  $a \rightarrow_{st} a_1 \rightarrow^R a_2$ ) on a  $a \rightarrow_{st} a_2$  et donc ( par le lemme I.1)  $t \rightarrow_{st} t_2$  .

- si S a été réduit dans  $t \rightarrow_{st} t_1$  : comme la réduction est standard, il a été réduit en premier donc :  $t \rightarrow ( a[b/x] c ) \rightarrow_{st} t_1$  ; par hypothèse de récurrence appliquée à  $( a[b/x] c ) \rightarrow_{st} t_1 \rightarrow^R t_2$  on a  $( a[b/x] c ) \rightarrow_{st} t_2$  et donc  $t \rightarrow_{st} t_2 \rightarrow$

*preuve du corollaire* : à partir d'une suite infinie de réductions on en construit une qui est standard en itérant le processus suivant : on regarde le radical  $(\lambda x a b)$  le plus à gauche ; s'il n'est pas réduit au cours de la réduction infinie, a ou b admet une réduction infinie et on itère avec a ou b ; sinon on utilise le théorème pour obtenir une nouvelle suite infinie de réductions dans laquelle ce radical est réduit en premier  $\rightarrow$

## II Preuve du théorème 2

### Lemme II.1

Soit  $t$  un terme,  $\mathbf{a}$  une suite de termes et  $F \not\subseteq \text{Red}(t) \approx \text{Red}(\mathbf{a})$ . Si  $t[\mathbf{a}/\mathbf{x}]$  a un  $F$  développement infini, alors il y en a un dans  $t$  ou dans l'un des  $a_i$ .

*Preuve* : par récurrence sur  $\text{exté}(t)$ .

- si  $t = \lambda x u$  ou si  $t = (y \mathbf{b})$  et  $y$  n'est pas dans  $\mathbf{x}$  : trivial
- si  $t = (x \mathbf{b})$  :  $t[\mathbf{a}/\mathbf{x}] = (\mathbf{a} \mathbf{b} [\mathbf{a}/\mathbf{x}])$  or l'application qui est à la racine de  $(\mathbf{a} \mathbf{b} [\mathbf{a}/\mathbf{x}])$  ne peut être réduite car ce n'est pas un résidu d'un radical de  $F$  et on conclut par récurrence.
- si  $t = (\lambda y \mathbf{b} d \mathbf{c})$ , soit  $S$  le radical  $(\lambda y \mathbf{b} d)$ 
  - si aucun résidu de  $S$  n'est réduit, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.
  - sinon, par le théorème 1 on peut supposer que  $S$  est réduit le premier donc  $t[\mathbf{a}/\mathbf{x}] \rightarrow (\mathbf{b}[\mathbf{a}/\mathbf{x}, d[\mathbf{a}/\mathbf{x}]/y] \mathbf{c}[\mathbf{a}/\mathbf{x}]) \rightarrow_F \dots$

Or l'application qui est à la racine de  $(\mathbf{b}[\mathbf{a}/\mathbf{x}, d[\mathbf{a}/\mathbf{x}]/y] \mathbf{c}[\mathbf{a}/\mathbf{x}])$  ne peut être réduite car ce n'est pas un résidu d'un radical de  $F$ ; on a donc un  $F$  développement infini dans  $\mathbf{c}[\mathbf{a}/\mathbf{x}]$  ou dans  $\mathbf{b}[\mathbf{a}/\mathbf{x}, d[\mathbf{a}/\mathbf{x}]/y]$  et on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence  $\rightarrow$

*Preuve du théorème* : par récurrence sur  $\text{exté}(t)$ ; on suppose qu'il existe un  $F$  développement infini de  $t$ .

- si  $t = \lambda x u$  ou  $t = (x \mathbf{a})$  le résultat est trivial.
- si  $t = (\lambda x \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})$ , soit  $S$  le radical  $(\lambda x \mathbf{a} \mathbf{b})$ .
  - si aucun résidu de  $S$  n'est réduit, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.
  - sinon on a  $t \rightarrow_F t_1 = (\lambda x a_1 b_1 c_1) \rightarrow_F (a_1[b_1/x] c_1) \rightarrow_F \dots$ ; par le théorème 1 on a  $t \rightarrow_{\text{st}, F} (a_1[b_1/x] c_1) \rightarrow_F \dots$  et donc  $t \rightarrow (a[b/x] \mathbf{c}) \rightarrow_F (a_1[b_1/x] c_1) \rightarrow_F \dots$ ; or l'application qui est à la racine de  $(a[b/x] \mathbf{c})$  ne peut être réduite car ce n'est pas un résidu d'un radical de  $F$ , on a donc un  $F$  développement infini dans  $\mathbf{c}$  ou dans  $a[b/x]$ ; on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence et le lemme II.1  $\rightarrow$

## III Preuve du théorème 3

### Lemme III.1

La clôture transitive d'une relation qui a la propriété de Church - Rosser a aussi cette propriété.

*Preuve* : trivial  $\rightarrow$

En appliquant le lemme III.1 à  $\rightarrow_F$  où  $F = \text{Red}(t)$ , il suffit de prouver :

### Lemme III.2

Si  $t \rightarrow_F t_1$  et  $t \rightarrow_F t_2$  alors il existe  $t_3$  tel que  $t_1 \rightarrow_F t_3$  et  $t_2 \rightarrow_F t_3$

*preuve* : Soit  $t \rightarrow_F t_1$  et  $t \rightarrow_F t_2$ ; soit  $F_1 = \{ R / R \in \text{Red}(t_1), R \text{ résidu d'un radical dans } F \}$ ; par le lemme III.3 ci-dessous soit  $t_i \rightarrow u_i$  un  $F_1$  développement complet de  $t_i$ , alors  $t \rightarrow t_1 \rightarrow u_1$  et  $t \rightarrow t_2 \rightarrow u_2$  sont des  $F$  développements complets de  $t$  donc  $u_1 = u_2 \rightarrow$

### Lemme III.3

Pour tout  $t$  et  $F \notin \text{Red}(t)$  il existe un  $F$  développement complet de  $t$  ; si  $t \rightarrow t_1$  et  $t \rightarrow t_2$  sont des  $F$  développements complets de  $t$  alors  $t_1 = t_2$ .

*preuve* : L'existence est conséquence immédiate du théorème 2 .

Unicité : par le théorème 1 il suffit de montrer que si  $t \rightarrow_{st, F} t_1$  et

$t \rightarrow_{st, F} t_2$  sont des  $F$  développements complets alors  $t_1 = t_2$  . La preuve - par récurrence sur  $(\text{lg}(t \rightarrow_{st, F} t_1) + \text{lg}(t \rightarrow_{st, F} t_2), \text{cxté}(t))$  - est immédiate  $\rightarrow$

### IV Preuve du théorème 4

Le théorème 4 est un corollaire immédiat de la proposition IV.1 et du lemme IV.2 . La proposition IV.1 signifie - intuitivement - que si on autorise la réduction des radicaux créés jusqu'à un ordre marqué, alors le théorème des développements finis reste valide.

#### Définitions

1) un radical généralisé est un terme de la forme  $(a \ b)$  où  $a \rightarrow^* \lambda x \ a'$ . On note  $\text{GRed}(t)$  l'ensemble des radicaux généralisés de  $t$ .

2) Soit  $t$  un terme . On note  $\text{FGRed}(t)$  l'ensemble des fonctions de domaine un sous ensemble de  $\text{GRed}(t)$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

3) Soit  $t \rightarrow^R t'$  et  $S \in \text{GRed}(t')$  .  $S$  est créé par la réduction de  $R$  si  $R$  est de la forme  $(\lambda x \dots (a \ b) \dots c)$ ,  $(a \ b)$  n'est pas un radical généralisé et  $S$  est  $(a[c/x] \ b[c/x])$ .

*Remarque* : cette notion n'est pas *exactement* la notion usuelle de création . Il y a - avec la notion usuelle - 3 situations de création de radicaux :  $R = (\lambda x \ \lambda y \ a \ b \ c)$  et  $S = (\lambda y \ a[b/x] \ c)$ ,  $R = ((\lambda x \ x) \ (\lambda y \ a) \ b)$  et  $S = (\lambda y \ a \ b)$  et enfin  $R = (\lambda x \dots (x \ a) \dots \lambda y \ b)$  et  $S = (\lambda y \ b \ a[\lambda y \ b/x])$  . On considère ici que dans les deux premières situations il n'y a pas création : les radicaux - généralisés - étaient déjà présents .

4) Soient  $t$  un terme et  $F \in \text{FGRed}(t)$  : une suite - finie ou infinie - de réductions  $t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \dots$  est un  $F$  développement de  $t$  ( et on la notera  $t \rightarrow_F t'$  si elle est finie et se termine par  $t'$  ) ssi pour tout radical  $R$  réduit  $\phi(R)$  est défini et positif où, pour tout  $R \in \text{GRed}(t_k)$ ,  $\phi(R)$  est défini par récurrence sur  $k$  par:

- si  $R \in \text{GRed}(t_0)$ :  $\phi(R) = F(R)$

- si  $R \in \text{GRed}(t_{k+1})$  et  $R$  est un résidu de  $S \in \text{GRed}(t_k)$  :  $\phi(R) = \phi(S)$

- si  $R$  est créé par la réduction de  $S$  :  $\phi(R) = \phi(S) - 1$ .

( *note* : la notion de résidu - habituellement défini pour les radicaux - se généralise immédiatement aux radicaux généralisés)

5) Soient  $t$  un terme et  $F \in \text{FGRed}(t)$  :  $t$  est  $F$  fortement normalisable ssi  $t$  n'a pas de  $F$  développement infini; on note alors  $\text{Long}(F, t)$  la longueur du plus grand  $F$  développement de  $t$  ( le lemme de König montre que ce nombre existe ) .

#### Proposition IV.1

Soit  $t$  un terme et  $F \in \text{FGRed}(t)$ . Alors  $t$  est  $F$  fortement normalisable.

#### Définition

On définit la hauteur  $\text{ht}(a)$  d'un type par :

- si  $a$  est atomique :  $ht(a) = 0$

- si  $a = b \rightarrow c$  ou  $a = b \cdot c$  :  $ht(a) = \max(ht(b), ht(c)) + 1$

Soit  $t$  un terme typé et  $R = (a \ b)$  un radical généralisé de  $t$  alors  $ht(R) = ht(\alpha)$  où  $\alpha$  est le type de  $a$ .

### Lemme IV.2

Si  $t \rightarrow^R t'$  et  $S \in \text{GRed}(t')$  est créé par  $R$  alors  $ht(S) < ht(R)$ .

*preuve* : immédiat  $\rightarrow$

### Définitions

1) Soient  $t$  un terme,  $\mathbf{a}$  une suite de termes,  $G \in \text{FGRed}(t)$ ,  $\mathbf{A} \in \text{FGRed}(\mathbf{a})$  et  $n$  un entier, on note  $\text{Subst}(t, n, G, [\langle x_1, a_1, A_1 \rangle, \dots])$  la fonction  $F \in \text{FGRed}(t[\mathbf{a}/\mathbf{x}])$  définie par  $F = G \approx \mathbf{A} \approx \{(R, n) / R \in \text{GRed}(t[\mathbf{a}/\mathbf{x}]) - \text{GRed}(t) - \approx \text{GRed}(\mathbf{a})\}$

2) Si  $F \in \text{FGRed}(t)$  et  $u$  est obtenu à partir de sous termes de  $t$ , on parlera encore - pour éviter d'alourdir les notations - de  $F$  développement de  $u$  au lieu de  $F'$  développement où  $F' = F \leftrightarrow (\text{GRed}(u) \in N)$

### Lemme IV.3

Soit  $t$  un terme et  $F \in \text{FGRed}(t)$ ; si  $t \rightarrow_F t'$  il existe  $F' \in \text{FGRed}(t')$  tel que pour tout  $t'' : t' \rightarrow_{F'} t''$  ssi  $t \rightarrow t' \rightarrow t''$  est un  $F$  développement. On note  $F' = \text{Res}(F, t \rightarrow_F t')$

*preuve* : immédiat  $\rightarrow$

### Lemme IV.4

Soit  $t$  un terme et  $F \in \text{FGRed}(t)$ ; si  $t \rightarrow_F t'$  alors  $t \rightarrow_{st, F} t'$ .

*preuve* : Elle est identique à celle du théorème 1.

On montre d'abord l'analogie du lemme I.1, i.e que si  $F \in \text{FGRed}(u)$ ,  $\mathbf{A} \in \text{FGRed}(\mathbf{a})$ ,  $u \rightarrow_{st, F} u'$  et  $\mathbf{a} \rightarrow_{st, \mathbf{A}} \mathbf{a}'$  alors  $\lambda x u \rightarrow_{st, F} \lambda x u'$ ,  $(u \ \mathbf{a}) \rightarrow_{st, F \approx \mathbf{A}} (u' \ \mathbf{a}')$  et  $u[\mathbf{a}/\mathbf{x}] \rightarrow_{st, F \approx \mathbf{A}} u'[\mathbf{a}'/\mathbf{x}]$

. On montre ensuite l'analogie du lemme I.2, i.e que si  $F \in \text{FGRed}(t)$  et  $t \rightarrow_{st} t_1 \rightarrow^R t_2$  est un  $F$  développement de  $t$  alors  $t \rightarrow_{st, F} t_2$ . On vérifie simultanément que si  $t \rightarrow_{st, F} t_1$  est la standardisation de  $t \rightarrow_F t_1$  alors  $\text{Res}(F, t \rightarrow_F t_1) = \text{Res}(F, t \rightarrow_{st, F} t_1)$ . Pour le dernier cas étudié dans cette preuve on applique l'hypothèse de récurrence à  $(a[b/x] \ c) \rightarrow_{st} t_1 \rightarrow^R t_2$  et  $F' = \text{Res}(F, t \rightarrow_F (a[b/x] \ c))$ .  $\rightarrow$

### Lemme IV.5

Soient  $t$  un terme,  $\mathbf{a}$  une suite de termes,  $G \in \text{FGRed}(t)$ ,  $\mathbf{A} \in \text{FGRed}(\mathbf{a})$  et  $n$  un entier. Si  $t$  (resp  $\mathbf{a}$ ) est  $G$  (resp  $\mathbf{A}$ ) fortement normalisable alors  $t[\mathbf{a}/\mathbf{x}]$  est  $\text{Subst}(t, n, G, [\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A} \rangle])$  fortement normalisable.

*preuve* : par récurrence sur  $(n, \text{Long}(G, t), \text{cxté}(t))$ . Raisonnons par l'absurde :

- si  $t = \lambda y u$  ou  $t = (y \ \mathbf{b})$  et  $y$  n'est pas dans  $\mathbf{x}$  le résultat est trivial.

- si  $t = (\lambda y \ \mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{d})$  : Si le radical  $(\lambda y \ \mathbf{b} \ \mathbf{c})$  n'est pas réduit le résultat est trivial, sinon - par le lemme IV.4 - on peut supposer qu'il est réduit en premier :  $t[\mathbf{a}/\mathbf{x}] \rightarrow (b[c/y] \ \mathbf{d}) [\mathbf{a}/\mathbf{x}] \rightarrow \dots$  et on conclut par l'hypothèse de récurrence car  $\text{Long}(\text{Res}(G, t \rightarrow (b[c/y] \ \mathbf{d})), (b[c/y] \ \mathbf{d})) < \text{Long}(G, t)$ .



- si  $t = (x \ b \ c)$  : le seul cas non trivial est celui où il existe un A développement de a aboutissant à  $\lambda y \ d$  et que le radical  $(\lambda y \ d \ b[a/x])$  est réduit. Par le lemme IV.4 on peut supposer que le début du développement est :  $t[a/x] \rightarrow^* (\lambda y \ d \ b[a/x] \ c[a/x]) \rightarrow (d[b[a/x]/y] \ c[a/x]) \rightarrow \dots$  ; la suite est un D développement de  $(z \ c)[a/x, d[b[a/x]/y]/z]$  où  $D = \text{Subst}((z \ c), n, G, [<x, a, A>, <z, d[b[a/x]/y], B>])$  où  $B = \text{Subst}(d, n-1, \text{Res}(A, a \rightarrow \lambda y \ d), [<y, b[a/x], C>])$  où  $C = \text{Subst}(b, n, G, [<x, a, A>])$ . L'hypothèse de récurrence permet de conclure successivement que  $b[a/x]$  est C fortement normalisable, que  $d[b[a/x]/y]$  est B fortement normalisable et enfin que  $(d[b[a/x]/y] \ c[a/x])$  est D fortement normalisable  $\rightarrow$

*preuve de la proposition IV.1:* par récurrence sur  $\text{ext}(t)$  ; on suppose qu'il existe un F développement infini de t .

- si  $t = \lambda x \ u$  ou  $t = (x \ a)$  le résultat est trivial .

- si  $t = (\lambda x \ a \ b \ c)$  , soit S le radical  $(\lambda x \ a \ b)$  :

- si aucun résidu de S n'est réduit, l'hypothèse de récurrence permet de conclure .

- sinon par le lemme IV.4 on peut supposer que S est réduit en premier :  $t \rightarrow (a[b/x] \ c) \rightarrow F \dots$  . Soit  $n = F((\lambda x \ a \ b))$ ; l'hypothèse de récurrence et le lemme IV.5 permettent de conclure  $\rightarrow$

### Remarque

On peut également étendre le théorème des développements finis de la manière suivante . Soient t un terme et  $F \notin \text{Red}(t)$  ; il n'existe pas de  $F^+$  développement infini de t où dans un  $F^+$  développement on s'autorise à réduire les radicaux S créés - au sens usuel du terme - par la réduction de radicaux R dans l'une des situations suivantes :

-  $R = (\lambda x \ \lambda y \ a \ b \ c)$  et  $S = (\lambda y \ a[b/x] \ c)$

-  $R = ((\lambda x \ x) (\lambda y \ a) \ b)$  et  $S = (\lambda y \ a \ b)$  .

### Références

[Bar] H Barendregt : The lambda calculus, its syntax and semantics  
North Holland 1984

[Kr] J L Krivine : Lambda Calcul, types et modèles  
Masson 1992

[Le] J J Lévy : Réductions correctes et optimales dans le lambda calcul ( thèse  
Université Paris 7, 1978 )

R David  
Laboratoire de Mathématiques  
Université de Chambéry  
73376 Le Bourget du Lac (France)  
email david@univ-savoie.fr  
tel (33) 79 75 87 17  
fax (33) 79 75 87 42