



**HAL**  
open science

## Influence d'une contamination initiale sur une dynamique spatiale non itérative

Cécile Hardouin

► **To cite this version:**

Cécile Hardouin. Influence d'une contamination initiale sur une dynamique spatiale non itérative. Journal de la Societe Française de Statistique, 2008, 149 (4), pp.107-129. hal-00382105

**HAL Id: hal-00382105**

**<https://hal.science/hal-00382105>**

Submitted on 7 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Influence d'une contamination initiale sur une dynamique spatiale non itérative

Cécile Hardouin

SAMOS-MATISSE, Centre d'Economie de la Sorbonne (CES UMR 8174),  
Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

## Résumé

$n$  consommateurs répartis sur un réseau spatial  $S$  choisissent tour à tour entre deux standards  $A$  et  $B$  suivant des règles locales. Un unique balayage du réseau est effectué, c'est-à-dire que la dynamique est non itérative. Dans ce cas, et contrairement aux dynamiques itératives ergodiques, les caractéristiques de la configuration spatiale finale du réseau dépendent de la configuration initiale et ne peuvent pas être évaluées mathématiquement. Nous en faisons l'étude empirique par simulation, pour un certain nombre de règles d'adoption bien spécifiées. L'objectif central de ce travail est de voir quel est l'effet d'une contamination initiale, ou effet de dumping, sur le standard  $A$  au taux  $\tau$  sur la répartition spatiale finale. On évaluera en particulier de manière empirique la fréquence finale du standard  $A$ , la corrélation spatiale, ainsi que des mesures d'aggrégation et de connexité.

Pour chacun de ces indicateurs, on constate que l'effet du dumping est d'autant plus important que le taux de contamination initial est faible.

*Mots clés* : Adoption de standards, dynamique spatiale non itérative, effet de dumping, systèmes coopératifs.

## Abstract

This paper explores the diffusion of technological innovations, under a simple and real framework :  $n$  agents spread on a spatial network  $S$ , choosing between two competitive technologies  $A$  and  $B$ . The choice is unique, made individually, one by one, according to a sequential assignment rule. We consider various rules, but depending on the local context. In the case of iterative dynamics, it is possible to characterize the probability distribution of limits configurations. We consider here a non iterative dynamics with a unique scan of  $S$ . Therefore, we don't know the final configuration, since there is no asymptotics in space nor in time. We propose to study empirically this situation, in the case of an initial occurrence of standards  $A$  at a given rate  $\tau$ . In particular, we will study the behaviour of the final frequency of standards  $A$ , spatial correlation, and we give some connectedness and clustering indexes. For each index, we see that if the initial rate of contamination  $\tau$  is lower, the dumping effect becomes more important.

*Key words* : Standards adoption, spatial non iterative dynamics, cooperative systems, dumping.

## 1 Introduction

L'étude de la diffusion d'un processus technologique, de la dynamique de formation d'une opinion ou d'un choix collectif d'individus placés sur un ensemble de sites  $S$  constitue un élément important de l'économie spatiale. De nombreux travaux empiriques ou théoriques traitent du comportement des agents économiques dans le processus d'adoption de standards. Nous entendons par standard aussi bien un produit, qu'un nouveau service ou une nouvelle technologie. Diverses modélisations ont été proposées : chaîne de Markov, automate cellulaire, champs de Gibbs, modèle d'apprentissage (réseaux neuronaux), jeux évolutionnistes, algorithmes génétiques... (Cf. par exemple [7] pour les automates cellulaires, [23] pour les systèmes multi-agents, [11] pour les modèles de champs de type Ising, [27] pour une approche avec percolation, ou [17] pour des modèles de graphes sans échelle). Ces modèles prennent en compte divers principes ; on peut envisager que l'agent fera son choix en fonction de deux types d'information : l'information "publique", disponible pour tous, et son information "privée" (préférence a priori, éventuellement basée sur ses décisions antérieures) ; on peut varier sa tendance à imiter ou non le comportement des autres agents (cf. par exemple [20]), ou encore la présence éventuelle de "super-agents". Bikhchandani ([5], [6]) a introduit le concept de "cascades informationnelles", dans le cas où les individus entrent sur le marché un par un, observent leurs prédécesseurs et prennent une unique décision ; celle-ci est basée sur le choix des prédécesseurs et ne tient pas compte de l'information privée. L'ordre d'entrée est exogène et est connu de tous. Le cadre de

ces travaux est en fait celui du renouvellement de standards ; ils supposent que les agents, déjà équipés, prennent la décision de renouveler leur matériel ; il s'agit alors d'une dynamique de technologies, itérative et ergodique. Notre démarche est similaire sur le principe d'une action unique et irréversible de chaque agent, mais dans l'hypothèse d'une dynamique non itérative. Cela concerne la modélisation du marché de premier équipement. On peut aussi considérer que, si les agents renouvellent leur matériel, ils ne changent pas de standard. Notre étude est aussi adaptée au cadre de la concurrence entre deux standards incompatibles ; la prise en compte de la compatibilité dans le temps des modèles successifs de produits, et de celle entre les composants complémentaires (magnétoscopes, lecteurs DVD..) assimile la situation à une forme de marché de premier équipement ([25]).

Nous situons notre étude dans un cadre binaire, où deux standards, dénommés simplement A et B, sont possibles ; on peut penser au cas de deux technologies médicales différentes, de deux technologies coexistantes et incompatibles, comme par exemple Beta-max (Sony) et VHS (JVC) ; rappelons que Sony a lancé Betamax en 1975, JVC proposant VHS un an plus tard en 1976 ; cependant, en 1987, VHS est devenu le principal standard avec une part de marché de 95% ; les économistes expliquent ce phénomène par celui des "externalités" de réseau, on parlera plus simplement de l'influence des voisins sur le choix d'un agent.

Nous étudions ici diverses procédures de choix, dans lesquelles l'influence des autres agents intervient de façon plus ou moins prononcée. Plus précisément, nous nous restreignons ici à l'étude de modèles de choix de type champs de Gibbs-Markov.

Soit  $S$  un ensemble spatial sur lequel  $n$  agents opèrent un choix entre 2 standards A ou B. Pour fixer les idées, on prendra pour  $S$  le tore bidimensionnel  $S = \{1, 2, \dots, N\}^2$ , à  $n = N^2$  sites, muni de la relation de voisinage aux quatre plus proches voisins (encore appelée voisinage de Von Neumann) :  $i = (i_1, i_2)$  et  $j = (j_1, j_2)$  sont voisins si  $|i_1 - j_1| + |i_2 - j_2| \equiv 1$  (modulo  $N$ ). Si  $A$  est une partie de  $S$ , on note  $\partial A = \{i \in S, i \notin A \text{ et } \exists j \in A \text{ t.q. } i \text{ et } j \text{ sont voisins}\}$  le voisinage de  $A$ , et  $\partial i = \partial\{i\}$  les voisins de  $i$ . D'autres ensembles  $S$  mais aussi d'autres relations de voisinage peuvent être envisagés : fondamentalement, cela ne changera pas la nature qualitative des résultats que nous allons présenter. Mais nous considérons que l'ensemble des voisins est fixe et identique pour chaque agent. En terme d'adoption de standards, les voisins d'un agent désignent les autres agents avec lesquels il entretient des relations, relatives à la technologie en cause.

Pour toutes les dynamiques étudiées ici, les individus choisissent tour à tour un standard selon une règle d'affectation *séquentielle*. Lorsque ce choix dépend du contexte local, on dit qu'il y a coordination spatiale ; la dépendance spatiale sera positive s'il y a coopération entre les agents (comportement d'imitation) et négative s'il y a compétition (comportement de différenciation). Un *balayage* de  $S$  correspond à une suite de visites de l'ensemble des sites de  $S$ .

On parle de dynamique itérative lorsque l'on répète indéfiniment les balayages. Dans ce cas et pour une règle séquentielle, on est en présence d'une dynamique d'échantillonneur de Gibbs et on sait alors caractériser la loi de probabilité des configurations limites.

Lorsque les choix sont effectués de façon synchrone (tous les agents de  $S$  opèrent leur choix simultanément), la dynamique est encore ergodique, mais la distribution limite est difficile à expliciter analytiquement. Mais, dans ces deux cas, on obtient la caractérisation de la loi limite de manière théorique (cf. [16] et [14] pour une description plus complète de ces modèles itératifs).

Le cadre que nous allons étudier ici est différent : c’est celui d’une *dynamique non itérative où un seul balayage de  $S$*  est effectué. Dans ce cas, on ne sait pas caractériser la loi de la configuration finale, l’asymptotique n’existant ni en temps ni en espace ( $S$  est fini par hypothèse). De plus cette configuration finale dépend de la configuration initiale. C’est cette loi que nous allons étudier empiriquement par simulation dans la situation où la configuration initiale est une contamination par le standard A à un taux donné  $\tau$ .

Nous précisons le cadre de travail et les règles de choix en section 2. Nous présentons dans la section 3 les résultats des simulations ; nous définissons quelques caractéristiques importantes des configurations spatiales résultantes et regardons leur comportement ; la première chose est de regarder la fréquence finale du standard A et quelques corrélations spatiales ; nous nous intéressons ensuite à la mesure de l’agrégation spatiale ; à cet effet, nous donnons un indicateur d’agrégation et trois paramètres mesurant la connexité. Ces caractéristiques dégagent à la fois l’influence de la règle d’affectation et celle du taux de contamination initiale sur la répartition spatiale finale des deux standards. Pour chaque indicateur, nous mesurons ses propriétés liées à l’agrégation spatiale en comparant sa valeur avec celle obtenue pour un champ aléatoire comportant le même nombre final de standards A, mais répartis uniformément. Les indicateurs proposés peuvent être utiles pour construire des tests (de permutation) d’indépendance spatiale.

La section 4 complète cette étude en présentant une sélection représentative d’images de configuration finales, en indiquant chaque fois leurs caractéristiques.

Le dernier paragraphe établit des résultats analytiques sur la loi du nombre de sites voisins occupés sous l’hypothèse qu’il n’y a ni coopération, ni compétition spatiale.

## 2 Dynamique non itérative et contamination initiale

Le modèle étudié est le suivant :  $S$  est le tore bidimensionnel, les agents choisissent de façon séquentielle entre A ou B ; on note  $y_i \in E = \{-1, +1, 0\}$  l’état du site  $i$ , où  $+1$  désigne le choix de A,  $-1$  celui de B et  $0$  le fait que le choix n’a pas encore été fait.

On veut étudier l’effet d’une *contamination initiale* (ou *dumping*) sur la configuration finale. Parler de contamination initiale au taux  $\tau$  ( $\tau \in [0, 1]$ ) signifie que  $[n\tau]$  agents ont préalablement choisi A ( $[r]$  désignant la partie entière du réel  $r$ ) : la configuration initiale est alors constituée par  $[n\tau]$  sites d’affectation  $+1$  répartis au hasard dans  $S$ , les autres sites étant “non occupés”. L’idée est que un seul standard est présent sur le marché, avant l’arrivée d’une seconde technologie concurrente. Par exemple Betamax sorti un an avant VHS, l’utilisation progressive de logiciels open source, ou plus récemment le

blu-ray versus HD-DVD... Lorsque le taux de contamination initiale  $\tau$  est bas, on peut penser qu'un groupe de "consommateurs" avertis va adopter ce nouveau standard de façon individuelle, non concertée. On choisit alors de manière aléatoire la répartition initiale de sites A. Ce choix peut sembler moins légitime lorsque le taux initial devient élevé, on peut alors suggérer une répartition déjà organisée. Cependant, nous verrons dans l'étude que l'influence de cette contamination initiale est d'autant plus importante que son taux est bas. C'est pourquoi nous choisissons de garder l'hypothèse d'une répartition initiale aléatoire, pour toute valeur de  $\tau$ . Notons ici que le contexte de choix de standard est important ; en épidémiologie par exemple, on retiendrait plutôt un choix arbitraire d'états initiaux regroupés.

L'initialisation accomplie, on visite les sites qui n'ont pas encore fait leur choix, un par un et dans un ordre aléatoire, le nouveau site visité devenant occupé par A ou par B selon une règle d'affectation locale. Cette règle est commune à tous les agents et tient compte des éventuels choix antérieurs des quatre plus proches voisins de l'agent considéré. Dans ce contexte non itératif et non ergodique, on sait que la configuration finale dépend de la configuration initiale, c'est-à-dire du taux de contamination  $\tau$ .

Nous considérerons les trois règles d'affectation suivantes.

1. *Le choix majoritaire fort* : l'agent choisit le standard qui est majoritaire parmi ses quatre voisins. En cas d'égalité, ou lorsque l'ensemble des sites voisins est non occupé, il choisit A (resp. B) avec la probabilité  $\pi$  (resp.  $1-\pi$ ).
2. *Le choix majoritaire faible* : si le nombre de sites voisins occupés est inférieur ou égal à deux, l'agent choisit A (resp. B) avec la probabilité  $\pi$  (resp.  $1-\pi$ ). A partir de trois voisins occupés, l'agent suit la règle de choix majoritaire.
3. *Le choix probabiliste de type Ising* : si les 4 sites voisins de  $i$  sont non occupés, l'agent choisit A (resp. B) avec la probabilité  $\pi$  (resp.  $1-\pi$ ). Dans le cas contraire, notant  $y_{\partial i}$  la configuration des quatre plus proches voisins de  $i$ , il choisit A avec la probabilité

$$\pi_i(A|y_{\partial i}) = \frac{\exp \left\{ \beta \sum_{j \in \partial i} y_j \right\}}{\exp \left\{ \beta \sum_{j \in \partial i} y_j \right\} + \exp \left\{ -\beta \sum_{j \in \partial i} y_j \right\}} = 1 - \pi_i(B|y_{\partial i})$$

$\beta$  est un paramètre de coordination spatiale (invariant pour tous les agents) : il y a coopération si  $\beta > 0$ , tandis que  $\beta < 0$  exprime la compétition. Lorsque  $\beta \rightarrow +\infty$ , la règle d'Ising s'identifie à la règle d'affectation majoritaire forte.

Pour simplifier la présentation, et dans l'idée de ne pas favoriser un standard au détriment de l'autre, on fixe la probabilité  $\pi$  intervenant dans les règles ci-dessus égale à  $1/2$ , ce qui correspond à un choix équiprobable entre A et B.

Les paramètres du modèle sont donc : le taux  $\tau$  de contamination initiale, la règle d'affectation et le paramètre de coordination spatiale  $\beta$  dans le cas du modèle d'Ising. Pour ce dernier, nous avons retenu les valeurs  $\beta = 0.5$  qui correspond à une faible coordination spatiale, puis  $\beta = 1$  qui correspond à un début de formation en amas, et enfin  $\beta = 3$  où la formation d'agrégats (clusters) est plus prononcée.

Notre étude expérimentale est la suivante. Nous partons d'un taux de contamination initiale  $\tau$  de 2% puis nous faisons varier  $\tau$  de 5% jusqu'à 95% par pas de 0.05, et terminons par un taux de 99%. Pour chaque valeur de  $\tau$ , et pour chacun des trois modèles d'affectation, nous réalisons 400 simulations sur le tore carré de côté  $N = 64$  ( $n = 4096$ ). Sur la base de ces simulations, nous présentons ci-après quelques paramètres évaluant le caractère des configurations spatiales résultantes : la fréquence finale du standard A, les corrélations spatiales, et des mesures d'agrégation spatiale.

### 3 Etude empirique de la configuration finale

Le premier facteur à étudier est la fréquence finale du standard A. Nous décrivons également la configuration finale à l'aide d'autres paramètres statistiques : la corrélation spatiale, des mesures d'agrégation et des indicateurs de connexité. Pour ces caractéristiques, nous comparerons la configuration (C) issue de l'une des règles d'affectation à celle ( $C_0$ ) de la distribution spatiale aléatoire uniforme avec le même nombre final de standards A. Ces comparaisons entre (C) et ( $C_0$ ) permettent de mesurer la différenciation spatiale entre une règle et la répartition aléatoire uniforme correspondante. Pour un taux donné final de standards A, le champ (C) résulte d'une dynamique en un pas dépendant du choix local des agents, tandis que le champ ( $C_0$ ) ne tient pas compte du choix des agents, les sites A étant distribués aléatoirement suivant la loi uniforme.

#### 3.1 La fréquence finale du standard A

Pour chaque valeur  $\tau$  du taux de contamination initiale, et pour chaque règle d'affectation, nous disposons d'un échantillon de 400 fréquences finales de standards A. Nous traçons l'histogramme de ces 400 valeurs et calculons leur moyenne et leur écart-type. La fréquence finale de standards A est estimée par la moyenne et notée  $\hat{\pi}_A(\tau)$ .

La figure 1 montre, pour cinq règles d'affectation (majoritaire faible, majoritaire forte, trois règles d'Ising pour trois valeurs de  $\beta$ ), l'évolution  $\tau \mapsto \hat{\pi}_A(\tau)$  de la fréquence empirique finale de standards A en fonction du taux de contamination initial. La croissance de la courbe en  $\tau$  est d'autant plus importante que la règle force la coopération locale. Ceci est conforme à l'intuition : croissance plus forte pour  $\beta$  plus élevé dans le cas de la règle d'Ising, et plus forte pour la règle d'affectation majoritaire forte que pour la majoritaire faible.

Ainsi, pour la règle d'affectation majoritaire forte avec un "dumping" initial de 20%, le

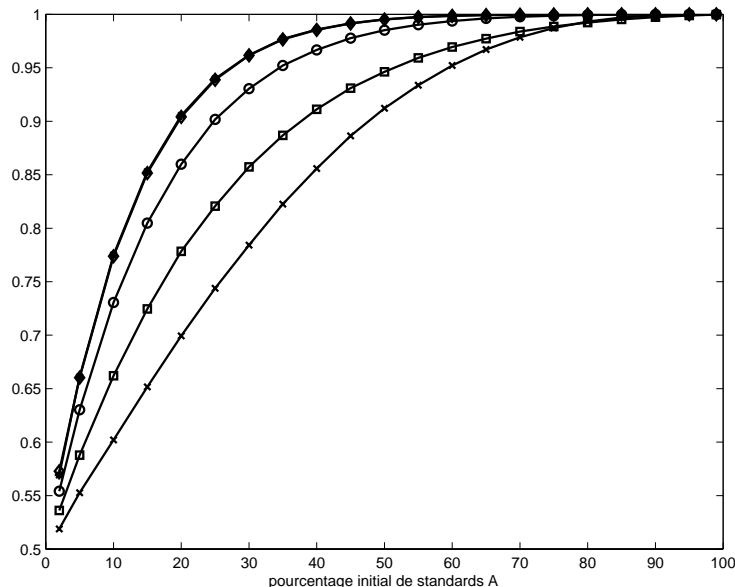


FIG. 1 – Fréquence finale de standards A suivant la règle d'affectation : x : faible ;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ;  $\diamond$  : Ising  $\beta = 3$  et forte (confondues).

standard A sera présent à 90% dans la configuration finale ; en comparaison, si les 80% des sites initialement non affectés s'étaient répartis équitablement entre A et B, la proportion finale de A aurait été de  $\frac{80}{2}\%+20\%=60\%$ , soit une différence entre les deux situations de 30%. On voit donc qu'un dumping amplifie le biais initial en renforçant le choix de A tout au cours du processus d'adoption. Dans le cas d'un taux de dumping de 10%, la différence serait de 23% (78%-55%, où 78% = taux final de A après dumping et 55% =  $10\%+\frac{90}{2}\%$ ). Ainsi, l'effet différentiel du dumping est plus important pour des petites valeurs du taux.

Ces graphiques permettent aussi de situer les deux règles majoritaires par rapport à une affectation du type Ising : les courbes obtenues pour  $\beta = 3$  et la règle forte coïncident, tandis que la croissance pour la règle faible est moins rapide que celle pour l'Ising avec  $\beta = 0.5$ .

Disposant d'un 400-échantillon de la fréquence finale de A, nous obtenons les distributions empiriques du taux final  $\hat{\pi}_A(\tau)$  de standards A en fonction de  $\tau$  et de la règle d'affectation choisie. Nous représentons à la Figure 2 les distributions obtenues pour un taux initial de contamination de 10%. Lorsque  $\tau$  est petit, on observe un comportement de type gaussien dans tous les cas. A partir d'un seuil  $\tau_c$  variant selon la règle d'affectation, le test de conformité du khi-deux de niveau 5% rejette l'hypothèse gaussienne. De fait, pour  $\tau > \tau_c$ , la proportion finale de standard A devient très proche de 1, avec une dispersion quasi nulle. Ce seuil  $\tau_c$  vaut approximativement 40% pour la règle forte et celle d'Ising avec  $\beta = 3$ , et 50% avec l'Ising pour  $\beta = 1$ . Ces seuils s'observent graphiquement



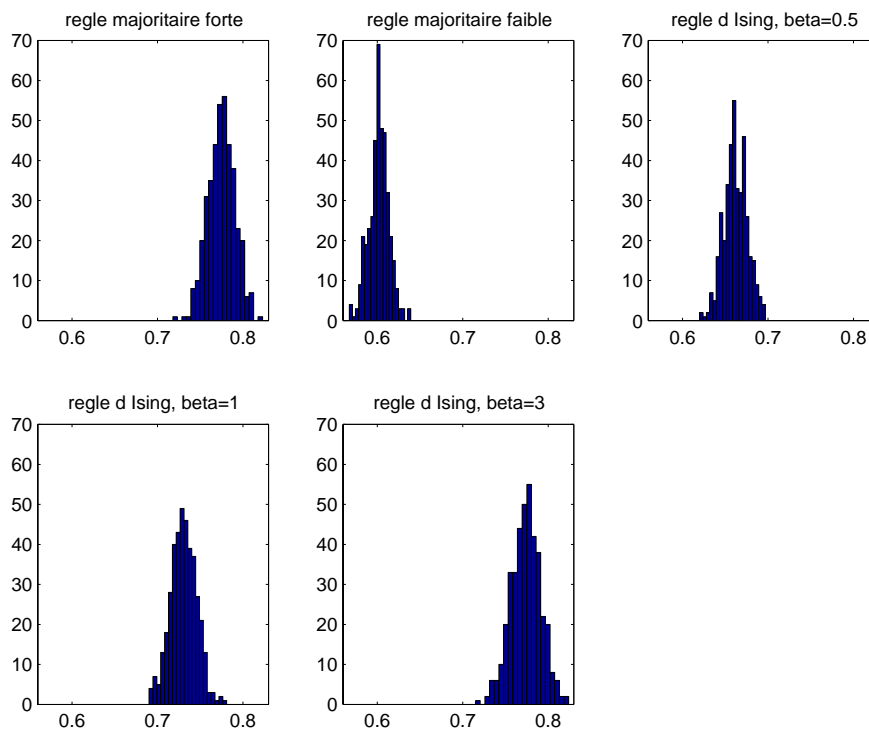


FIG. 2 – Histogrammes des fréquences finales de standards A obtenus avec un taux initial de contamination  $\tau = 10\%$  pour 5 règles d’affectation.

en prenant, sur la Figure 1, les abscisses des intersections de l’horizontale  $y = 0.97$  avec chacune des courbes  $\tau \mapsto \hat{\pi}_A(\tau)$  (97% étant la valeur approchée pour laquelle on observe une saturation des courbes  $\hat{\pi}_A$  pour toutes les règles).

### 3.2 Corrélations spatiales

La corrélation spatiale est le deuxième indicateur pertinent pour décrire la configuration spatiale. Lorsque le choix d’un standard en un site dépend des choix déjà réalisés dans le voisinage, il va apparaître une corrélation entre les standards en des sites voisins, positive s’il y a imitation et négative s’il y a recherche de différenciation. Si le modèle de choix progressif s’explique aisément, là aussi l’expression analytique de la corrélation est impossible du fait de la complexité de la combinatoire géométrique du processus de balayage. Par contre, on obtient facilement ses caractéristiques par la méthode de Monte Carlo. Nous calculons ainsi la corrélation à distance 1 (basée sur les 4 plus proches voisins), à distance 2 et à distance  $\sqrt{2}$  (les 4 voisins diagonaux), notées respectivement  $\rho_1$ ,  $\rho_{\sqrt{2}}$ , et  $\rho_2$ , et enfin celle basée sur les 8 plus proches voisins, que l’on notera  $\rho_{8v}$ , et ce

pour chaque règle d'affectation.

### 3.2.1 Evolution de la corrélation à distance 1 en fonction de $\tau$

Nous représentons Figure 3 l'évolution de  $\rho_1 = \frac{(2n)^{-1} \sum_{i=1, n} y_i y_{\partial i} - \bar{y}^2}{1 - \bar{y}^2}$  en fonction de  $\tau$  pour les différentes règles d'affectation. Par convention, nous posons  $\rho_1 = 0$  lorsque le champ est constant et de variance nulle.

Quelle que soit la règle, la corrélation est positive et décroît vers zéro lorsque  $\tau$  augmente. On constate une hiérarchie entre les différentes règles ; pour un taux de dumping inférieur à 50%, la corrélation spatiale est plus importante pour les règles qui forcent davantage le choix du standard A ; par exemple, pour  $\tau = 2\%$ , la corrélation spatiale pour la règle majoritaire forte vaut presque le double (0.575) de celle calculée pour la règle faible (0.305). Entre les deux, on a les valeurs de  $\rho_1$  pour l'affectation Ising  $\beta = 0.5$  (0.377) et pour  $\beta = 1$  (0.506). La courbe de corrélation pour  $\beta = 3$  se superpose à celle obtenue pour la règle majoritaire forte. La décroissance vers zéro est ensuite d'autant plus rapide que la règle est "forte" ; la corrélation atteint zéro dès que  $\tau = 75\%$  pour la règle majoritaire forte (et le cas Ising  $\beta = 3$ ) alors qu'il faut attendre une contamination plus importante dans les autres cas ( $\tau = 0.95$  pour la règle faible). On constate que les courbes ont une intersection commune : la corrélation pour les différentes règles est quasiment la même lorsque le taux initial de contamination est de 50%.

### 3.2.2 Comparaison à la distribution aléatoire uniforme ( $C_0$ )

Une autre façon d'appréhender l'effet spatial d'une contamination initiale et d'une dynamique de choix locaux sur la configuration finale pour une règle donnée, est de comparer cette configuration (C) avec celle qui résulte d'une répartition aléatoire uniforme ( $C_0$ ) pour un même nombre final de standards A. Le champ ( $C_0$ ) est d'allure et de caractéristiques distinctes de (C). Les examens suivants soulignent cette différence.

Comparons les corrélations spatiales des champs (C) et ( $C_0$ ). Les figures 3 et 4 donnent l'évolution de  $\rho_1$  en fonction de  $\tau$  pour les deux champs (C) et ( $C_0$ ), et ceci pour les différentes règles d'affectation dont est issu (C). Le comportement de  $\rho_1$  pour ( $C_0$ ) est fondamentalement différent de celui pour (C) : quelles que soient la règle d'affectation et la valeur de  $\tau$ , la corrélation est quasi nulle (l'échelle des ordonnées est en  $10^{-3}$ ), et évolue de façon erratique dans un petit intervalle autour de zéro (elle peut être négative). Il est donc clair que la corrélation spatiale constitue un bon critère de différenciation des champs issus d'une procédure de balayage avec règle d'adoption locale, une corrélation positive supérieure à 0.002 correspondant à un champ de type (C). Cette corrélation s'observe pour tout taux de contamination initiale compris entre 2% et  $\tau_{\max}\%$ , la valeur de  $\tau_{\max}$  variant avec la règle d'affectation, mais étant supérieure dans tous les cas à 75%. Une corrélation supérieure à 0.5 par exemple, convient à un champ issu d'une règle d'affectation majoritaire forte ou de type Ising avec  $\beta$  élevé ( $> 1$ ) et un taux  $\tau$  faible

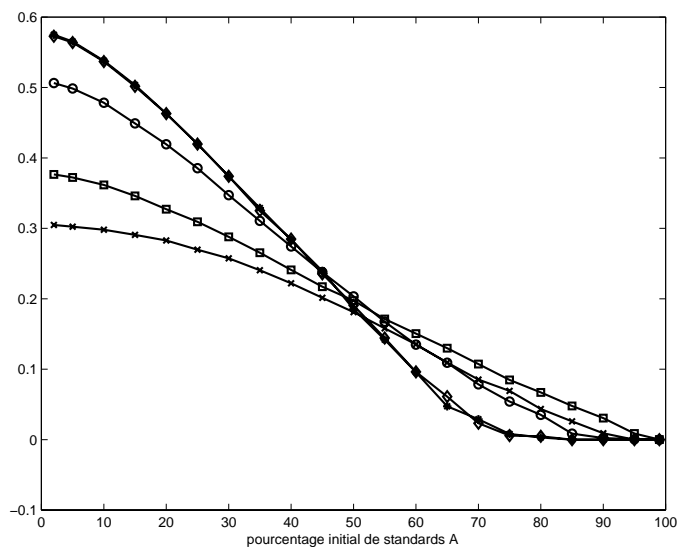


FIG. 3 – Corrélation à distance 1 suivant les règles d’affectation (courbes Ising  $\beta = 3$  et forte quasi confondues) : x : faible ;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ;  $\diamond$  : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte.

( $\leq 15\%$ ). L’effet du dumping se ressent d’autant plus que le taux initial de contamination est faible.

### 3.2.3 Les autres corrélations

L’étude des courbes d’évolution des corrélations à distance 2,  $\sqrt{2}$  et celle basée sur les 8 plus proches voisins pour les cinq règles d’affectation en fonction de  $\tau$  (champs (C)) montre un comportement analogue à celui observé précédemment, c’est-à-dire que les corrélations sont positives et décroissent vers zéro. La corrélation dépend essentiellement du dumping initial ; plus le taux est petit, plus son impact sur la corrélation est important.

La comparaison des différentes corrélations pour une même règle, quelle que soit celle-ci, présente un ordre entre les corrélations, la corrélation diminuant avec la distance, c’est-à-dire  $\rho_1 \geq \rho_{8v} \geq \rho_{\sqrt{2}} \geq \rho_2$ .

## 3.3 Mesures d’agrégation spatiale

Lorsque nous regardons des réalisations de champs (C) et les comparons à celles de champs ( $C_0$ ), une différence essentielle est la formation d’agrégats ou *clusters* pour les champs (C) (cf. les exemples de la section 4). Nous proposons plusieurs indicateurs pour évaluer cette différenciation spatiale. Les indicateurs d’agrégation ou de connexité proposés ici sont classiques ; on trouve des variantes dans la littérature, basées sur des comptages

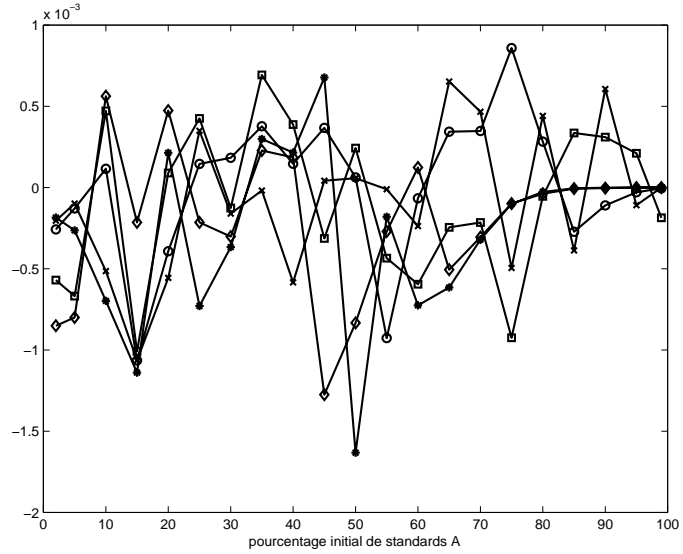


FIG. 4 – Corrélation à distance 1 pour les champs ( $C_0$ ) correspondant aux champs ( $C$ ) : x : faible ;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ;  $\diamond$  : Ising  $\beta = 3$  ; \* : forte

de nœuds ou d'arêtes, ou basés sur des classes de distances entre sites. La définition varie souvent selon le contexte de l'étude. Par exemple, le coefficient de "clusterisation" donné dans Manka et al. ([18]) est local ; il mesure en chaque site  $i$  le rapport entre le nombre de nœuds connectés au site  $i$  et le nombre de liens entre ces nœuds ; ailleurs, Thébaud et al. comptent le nombre de paires de plantes malades, situées à une distance inférieure ou égale à un certain seuil donné. Nous donnons ici des indicateurs similaires, appropriés à notre contexte.

### 3.3.1 Un indicateur d'agrégation

Nous définissons l'*indicateur d'agrégation*  $IA$  comme étant le nombre d'arêtes joignant des sites voisins de même standard A, nombre rapporté au nombre total de sites au standard A. Ainsi,

$$IA = \frac{\sum_{i \in S} x_i x_{\partial i}}{2 \sum_{i \in S} x_i},$$

où  $x_i = \frac{y_i + 1}{2}$  vaut 1 si le site  $i$  a été affecté par A et 0 sinon.

Les figures 5 et 6 montrent l'évolution de l'indicateur  $IA$  en fonction du taux de contamination initiale  $\tau$ , pour les différentes règles d'affectation, et pour les deux types de champs. On observe une augmentation progressive de un peu plus de 1 jusqu'à 2 pour les différentes règles, et pour les champs ( $C$ ) et ( $C_0$ ). La rapidité de la croissance est fonction de la règle choisie : la plus lente dans le cas de la règle majoritaire faible, la plus forte pour

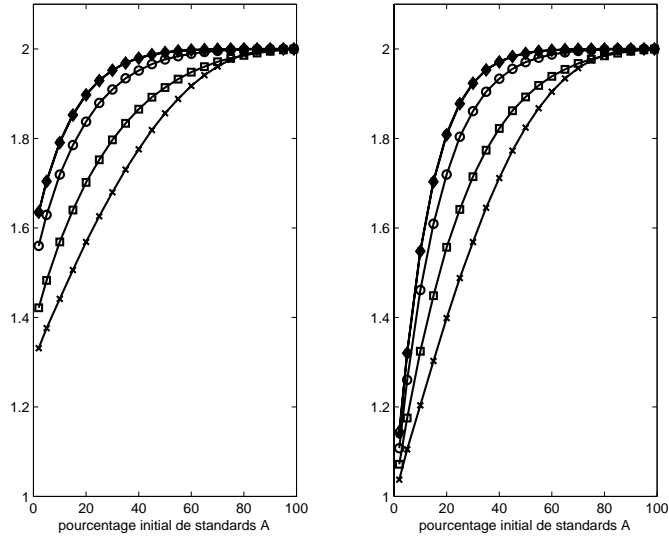


FIG. 5 – Indicateur absolu d’agrégation pour les champs (C) (à gauche) et ( $C_0$ ) (à droite) suivant la règle d’affectation : x : faible;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$ ; o : Ising  $\beta = 1$ ;  $\diamond$  : Ising  $\beta = 3$  et forte (confondues).

les cas règle d’Ising avec  $\beta = 3$  et règle majoritaire forte. Lorsque le taux de contamination initiale est élevé, dans tous les cas supérieur à 50%, les graphes de l’indicateur absolu d’agrégation sont quasiment identiques pour les champs (C) et ( $C_0$ ); par contre, si  $\tau$  est petit, les valeurs de l’indicateur  $IA(C)$  calculé sur le champ (C) sont nettement supérieures à celles obtenues pour le champ ( $C_0$ ) correspondant. Nous représentons figure 6 l’évolution de  $IA$  pour les deux types de champ et dans le cas de la règle d’Ising avec  $\beta = 1$ , le comportement étant analogue pour les autres règles. Nous observons que plus le taux  $\tau$  est petit, plus la différence entre les valeurs des indicateurs pour les deux champs est importante. Le taux seuil à partir duquel la différence des indicateurs est inférieure à 0.1 (en valeur absolue) varie avec la règle d’affectation choisie. Plus la règle renforce le choix du standard A et moins cette valeur seuil du taux initial séparant  $IA(C)$  et  $IA(C_0)$  est élevée. Par exemple, elle est de  $\tau = 20\%$  pour l’affectation majoritaire forte et de 30% pour la règle d’Ising avec  $\beta = 0.5$  (et 25% dans le cas intermédiaire Ising  $\beta = 1$  représenté).

Ainsi, l’indicateur d’agrégation  $IA$  est un bon indicateur de l’organisation spatiale des champs issus d’une procédure de choix local si le taux initial de contamination est peu élevé. On retrouve que l’effet différentiel d’un dumping initial est d’autant plus performant que le taux de dumping est bas.

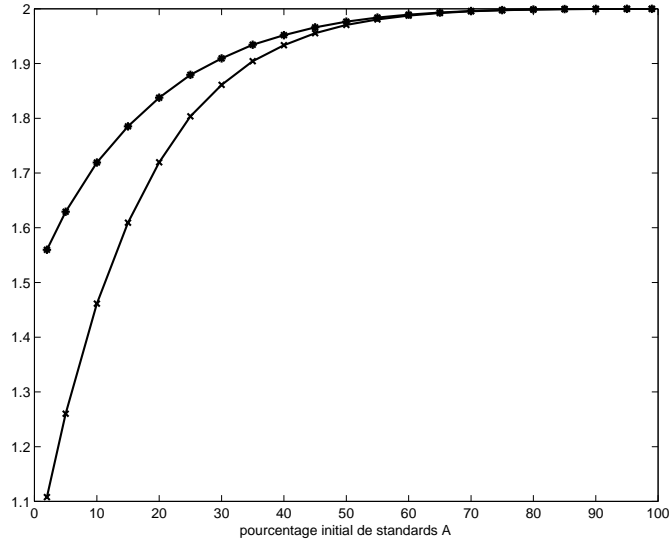


FIG. 6 – Indicateur absolu d’agrégation pour les champs (C) et (C<sub>0</sub>) et avec la règle d’Ising  $\beta = 1$ . (C) : \* ; (C<sub>0</sub>) : x.

### 3.3.2 Indicateurs de connectivité

Une caractéristique topologique des situations d’agrégats est la mesure de connectivité des standards A (cf. les exemples section 4). Nos simulations montrent toutes le même phénomène ; pour les champs (C), il apparait une organisation des standards A en clusters, ceux-ci devenant moins nombreux mais plus importants en taille lorsque  $\tau$  augmente ; par contre, pour les champs (C<sub>0</sub>) associés, le nombre de composantes connexes, de plus petite taille, augmente. Nous calculons trois indicateurs de connectivité pour les champs (C) et pour les champs (C<sub>0</sub>) correspondants : *ncc* le nombre de composantes connexes de sites A, *mcc* la taille moyenne de ces composantes, et *maxcc* la taille de la plus grande composante connexe.

Les figures 7 et 8 donnent l’évolution de *ncc* pour les différentes règles en fonction de  $\tau$ , et ce pour les champs (C) et (C<sub>0</sub>) ; on constate sans surprise que ce nombre décroît lorsque  $\tau$  augmente ; on retrouve encore la même hiérarchie dans les règles d’affectation : le nombre de composantes connexes est plus important pour la règle majoritaire faible que pour l’affectation de type Ising avec  $\beta$  successivement égal à 0.5, 1, puis 3, ce dernier cas coïncidant avec la règle majoritaire forte. Le plus intéressant est la comparaison des deux types de champs (C) et (C<sub>0</sub>) lorsque le taux de contamination initiale est faible ; si les courbes de l’évolution de *ncc* semblent similaires dans les deux figures ci-dessous, l’échelle des ordonnées différencie nettement les champs de type (C) et (C<sub>0</sub>) lorsque  $\tau$  est petit, pour chaque règle d’affectation, le nombre de composantes connexes est bien plus important dans le cas du champ (C<sub>0</sub>) à dispersion aléatoire, ce qui correspond à ce qu’on

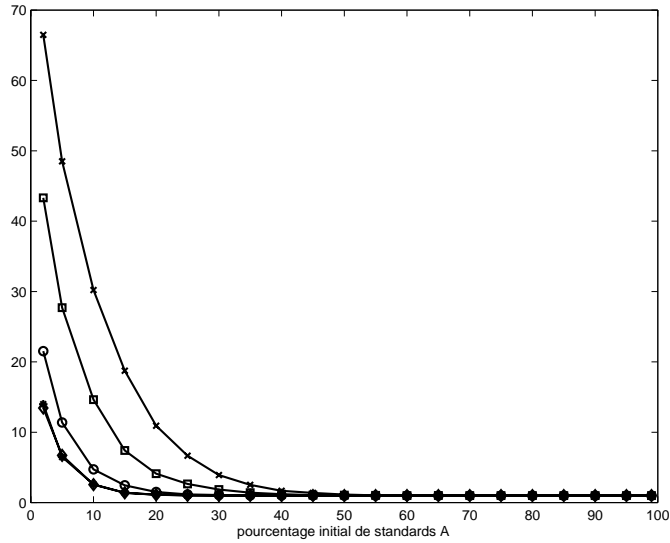


FIG. 7 – Nombre moyen de composantes connexes pour les champs ( $C$ ) suivant la règle d’affectation : x : faible;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$ ; o : Ising  $\beta = 1$ ;  $\diamond^*$  : Ising  $\beta = 3$  et forte (distinctes pour les plus petites valeurs de  $\tau$ )

attendait. A partir d’une certaine valeur du taux initial, variable selon la règle de choix du standard mais n’excédant pas 30%, le nombre de composantes connexes devient identique pour les deux champs.

On s’intéresse maintenant à la taille moyenne des composantes connexes;  $mcc$  est la moyenne des tailles des  $ncc$  composantes connexes déterminées préalablement (la taille de chaque composante étant le nombre de sites présents dans la composante). L’étude de l’évolution de  $mcc$  en fonction du taux initial de contamination (non représentée ici), pour chaque règle d’affectation et pour les champs ( $C$ ) issus de ces règles d’affectation et les champs ( $C_0$ ) correspondants, montre que les tailles moyennes des composantes connexes augmentent avec  $\tau$ , avec toujours la même vitesse de progression relative pour les différentes règles d’affectation. Plus intéressant, cet indicateur différencie les champs ( $C$ ) des champs ( $C_0$ ) pour un taux de contamination initiale petit, inférieur à une certaine valeur seuil différant avec la règle d’affectation; par exemple, dans le cas de la règle d’Ising pour  $\beta = 1$ , représenté Figure 9, on peut différencier les deux types de champs pour  $\tau \in [0.02; 0.25]$ ; ceci s’observe bien sur le zoom (en insert) : les ordonnées des points d’abscisse  $\tau = 2\%$  valent respectivement 114 et 13.8 pour les champs ( $C$ ) et ( $C_0$ ), c’est-à-dire que  $mcc(C_0)$  vaut plus de 8 fois  $mcc(C)$ . Ce rapport va ensuite diminuer progressivement, jusqu’à ce que les tailles moyennes des composantes connexes deviennent identiques pour les deux configurations. Il en va de même pour les autres règles. Il en résulte d’une part que  $mcc$  constitue encore un bon critère pour différencier les deux

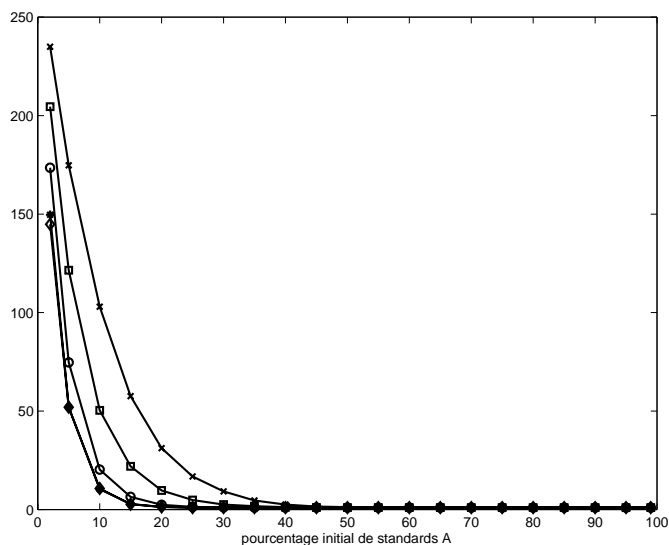


FIG. 8 – Nombre moyen de composantes connexes pour les champs ( $C_0$ ) associés aux champs (C) : x : faible ;  $\square$  : Ising  $\beta = 0.5$  ; o : Ising  $\beta = 1$  ;  $\diamond*$  : Ising  $\beta = 3$  et forte (distinctes pour la plus petite valeur de  $\tau$ )

types de configurations pour un faible taux de contamination, d’autre part que l’effet de dumping se ressent davantage pour un taux de contamination initiale bas.

Pour terminer, nous présentons les résultats obtenus avec la taille  $maxcc$  de la plus grande composante connexe. Les commentaires précédents sur  $mcc$  s’appliquent à nouveau ici ; la taille de la plus grande composante augmente avec le pourcentage initial de standards A, mais la croissance de  $maxcc$  est encore plus rapide que celle de  $mcc$ . Les évolutions de ce paramètre sont semblables pour les champs de type (C) et ( $C_0$ ) dès que le taux initial dépasse un certain seuil, par exemple 10% dans le cas de la règle d’Ising avec  $\beta = 1$  (cf. figure 10). Ce dernier paramètre de connexité ne paraît pas constituer un bon critère pour différencier les deux types de champs ; il ne montre clairement l’effet d’un dumping que pour les plus petites valeurs du taux initial de contamination. Ceci renforce encore l’idée que cet effet différentiel est plus important pour une contamination faible que pour une contamination élevée.

## 4 Exemples de configurations finales

Nous représentons ici les deux champs (C) et ( $C_0$ ) obtenus pour des règles d’affectation différentes et pour le même taux initial de dumping de 5%. Nous montrons les deux cas “extrêmes” de règles, les affectations majoritaires forte et faible, ainsi que les cas



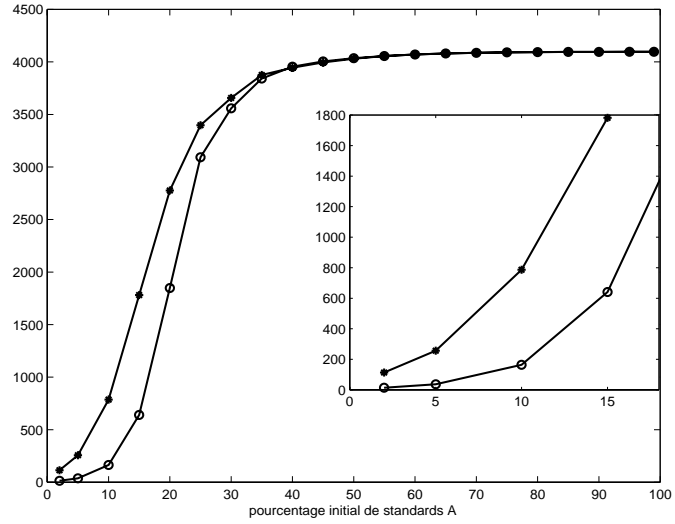


FIG. 9 – Taille moyenne des composantes connexes pour la règle d’Ising avec  $\beta = 1$  pour les champs  $(C)$  et  $(C_0)$  correspondants.  $(C) : *$  ;  $(C_0) : \circ$

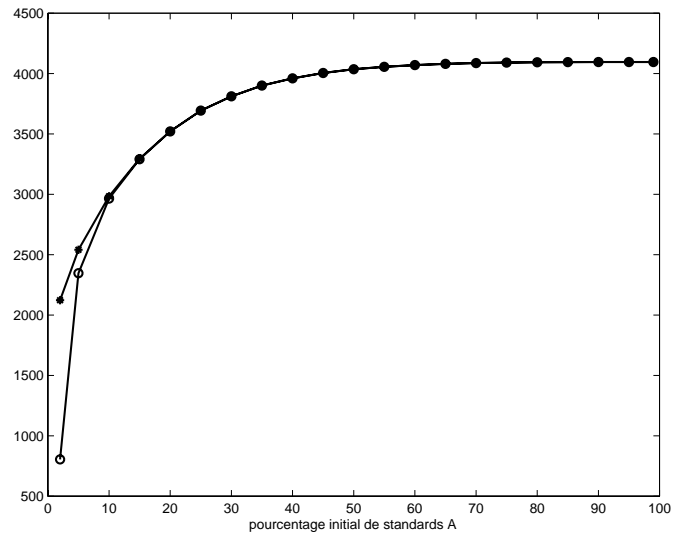


FIG. 10 – Taille de la plus grande composante connexe pour le champ  $(C)$  et le champ  $(C_0)$  correspondant dans le cas de la règle d’Ising avec  $\beta = 1$ .  $(C) : *$  ;  $(C_0) : \circ$

“intermédiaires” de la règle d’Ising avec  $\beta = 1$  et  $\beta = 0.5$ . Le cas de la règle Ising  $\beta = 3$  n’est pas représenté ici, il s’apparente au cas de la règle majoritaire forte.

A chaque choix est associée la “paire d’images”  $(C, C_0)$  simulée. On indique la fréquence finale de standards  $A$  ainsi que les différentes caractéristiques données dans la section précédente ( $\rho_1$ ,  $IA$ ,  $ncc$ ,  $mcc$ ,  $maxcc$ ). D’autres caractéristiques, souvent topologiques, différencient la configuration spatiale associée à une règle de la configuration spatiale aléatoire uniforme de même taux.

Pour chaque figure, le champ  $(C)$  issu de la procédure d’affectation est à gauche, le champ  $(C_0)$  à droite, les pixels noirs représentant les sites où le standard  $A$  a été choisi.

On remarque sans peine la différence visuelle entre deux champs issus des deux procédures quelle que soit la règle, bien que le taux initial de contamination soit faible ; ces exemples illustrent encore l’influence importante de ce taux sur l’évolution de la répartition.

### Règle d’affectation majoritaire forte, taux initial $\tau = 0.05$

Fréquence finale de standards  $A$  : 63.67%



$\rho_1=0.5778$ ,  $IA = 1.6933$ ,  
 $ncc = 9$ ,  $mcc = 289.78$ ,  
 $maxcc = 2531$

$\rho_1=-0.0016$ ,  $IA = 1.2722$ ,  
 $ncc = 48$ ,  $mcc = 54.33$ ,  
 $maxcc = 2483$

La fréquence finale de  $A$  pour chaque configuration est de 64%. Les répartitions  $(C)$  et  $(C_0)$  se différencient par leur corrélation spatiale, par le nombre et la taille moyenne de leurs composantes connexes, et par leur indice d’agrégation  $IA$ . Par contre, la taille de la plus grande composante connexe n’est pas un bon indicateur. D’autres indicateurs topologiques sont fortement discriminants, comme, par exemple, la forme d’une composante connexe, compacte pour  $(C)$ , filiforme pour  $(C_0)$ .

### Règle d’affectation Ising avec $\beta = 1$ , taux initial $\tau = 0.05$

Fréquence finale de standards  $A$  : 63.04%



$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.4829, IA = 1.6177, \\ ncc &= 9, mcc = 286.89, \\ maxcc &= 2553 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \rho_1 &= -0.0033, IA = 1.2583, \\ ncc &= 61, mcc = 42.33, \\ maxcc &= 2465 \end{aligned}$$

La fréquence finale de standards A est un peu moins élevée que dans le cas précédent. On retrouve ici les mêmes caractéristiques que pour la règle majoritaire forte : à nouveau, la corrélation spatiale, l'indicateur absolu d'agrégation, le nombre et la taille moyenne des composantes connexes différencient bien les deux configurations (C) et (C<sub>0</sub>).

**Règle d'affectation Ising avec  $\beta = 0.5$ , taux initial  $\tau = 0.05$**

Fréquence finale de standards A : 57.79%



$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.3730, IA = 1.4706, \\ ncc &= 29, mcc = 81.62, \\ maxcc &= 2245 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \rho_1 &= -0.0084, IA = 1.1487, \\ ncc &= 112, mcc = 21.13, \\ maxcc &= 1954 \end{aligned}$$

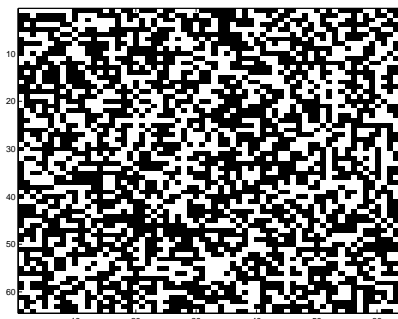
La fréquence finale de standards A diminue avec  $\beta$ , mais on observe toujours une organisation regroupée des standards A dans le cas du champ (C). On observe une différence plus importante de la valeur du paramètre  $maxcc$  pour les champs (C) et (C<sub>0</sub>).

**Règle d'affectation majoritaire faible, taux initial  $\tau = 0.05$**

Fréquence finale de standards A : 54.86%



$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.2823, \quad IA = 1.3520, \\ ncc &= 59, \quad mcc = 38.08, \\ maxcc &= 2132 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.0053, \quad IA = 1.1019, \\ ncc &= 185, \quad mcc = 12.15, \\ maxcc &= 268 \end{aligned}$$

Le taux final de standards A a baissé, et l'organisation en clusters est moins prononcée. On constate ici que tous les paramètres différencient clairement les deux types de champ, y compris  $maxcc$ .

Nous avons également étudié les configurations de champs ( $C$ ) et ( $C_0$ ) pour les différentes règles et pour des taux de contamination initiale plus élevés. Le pourcentage final de standards A augmente avec le taux de contamination initiale. Lorsque cette fréquence finale de A devient élevée, disons à partir d'environ 75%, les indicateurs proposés vont petit à petit se différencier quant à leur utilité pour différencier les configurations finales résultant d'une procédure de choix et celles issues d'une répartition aléatoire. En effet, pour une fréquence finale de A importante, il apparaît naturellement que ces standards A occupent presque tout l'espace, et les réalisations de ( $C_0$ ) ne comportent bientôt plus que trois ou moins composantes connexes ; par conséquent, les indicateurs de connexité ne sont plus guère utiles pour discriminer les champs issus de procédures de choix ou ceux de répartition aléatoire. On observe que le premier indicateur touché est le nombre maximum de composantes connexes (identique pour ( $C$ ) et ( $C_0$ )), le nombre et la taille moyenne des composantes connexes restant discriminant. Mais les écarts de ces deux derniers indicateurs entre les situations ( $C$ ) et ( $C_0$ ) diminuent progressivement ; de même, les indicateurs d'agrégation auront des valeurs proches pour les champs ( $C$ ) et ( $C_0$ ). Le seul paramètre distinguant vraiment bien les deux configurations est la corrélation spatiale, jusqu'à un taux final de standards A d'environ 90%.

Cette évolution de la différenciation des paramètres s'observe à des degrés divers en fonction de la règle de choix. Par exemple, pour  $\tau = 20\%$ , et pour les règles forte et Ising avec  $\beta = 3$ , le seul indicateur différenciant les deux types de champs reste la corrélation spatiale, tandis que les autres paramètres présentés restent encore discriminants dans le cas de la règle faible.

## 5 Loi du nombre de voisins occupés du site visité à l'instant $k$

La règle d'affectation étant locale, le choix réalisé par l'agent en un site fixé dépend du nombre de voisins ayant déjà opéré leur choix. Nous déterminons la loi de ce nombre de voisins "occupés" à cet instant.

On considère le réseau  $S$  à  $n$  sites tel que chaque site a le même nombre  $\nu$  de voisins ; par exemple,  $S = \{1, 2, \dots, N\}^2$  est le tore 2-d avec la relation de voisinage aux quatre plus proches voisins. A l'instant  $k = 0$ ,  $n_\tau = [n\tau]$  sites sont occupés par le standard A ; puis à chaque instant, un site libre est visité puis occupé de façon aléatoire. Il y a donc  $n - n_\tau$  occupations successives. Pour un site arbitraire fixé,  $Y_k$  est le nombre de voisins de ce site occupés à l'instant  $k$ . On suppose que  $n_\tau < n$ ,  $n \gg 2\nu + 1$  ;  $Y_k$  est à valeurs dans  $\{\max(0, n_\tau + k - n + \nu), 1, \dots, \min(\nu, k - 1 + n_\tau)\}$ . A l'instant  $k$  d'occupation du site considéré, la configuration comporte, outre ce site,  $n_\tau + k - 1$  sites déjà occupés et  $n - k - n_\tau$  sites libres. On a donc

$$P(Y_k = l) = \frac{C_\nu^l C_{n-1-\nu}^{k-1+n_\tau-l}}{C_{n-1}^{k-1+n_\tau}}$$

La loi du nombre de voisins occupés à un instant donné  $k$  suit donc une loi hypergéométrique.

On peut compléter ce résultat par deux calculs simples des probabilités des événements suivants :

$A_k$  : "Le site  $j$  est occupé exactement à l'instant  $k$ "

$B_k$  : "Le site  $j$  est déjà occupé à l'instant  $k$ "

L'indice  $j$  n'apparaît pas dans ces probabilités puisque le chemin d'occupation est aléatoire ; ces probabilités ne dépendent donc que de  $n$  et de  $k$ .

$$P(A_k) = \begin{cases} (1 - \frac{n_\tau}{n})(1 - \frac{1}{n-n_\tau})(1 - \frac{1}{n-n_\tau-1}) \dots (1 - \frac{1}{n-n_\tau-k+2}) \frac{1}{n-n_\tau-k+1} = \frac{1}{n} & \text{si } k \geq 1 \\ \frac{n_\tau}{n} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

$$\text{On en déduit } P(B_k) = \frac{n_\tau + k - 1}{n}.$$

Déterminons alors la probabilité moyenne  $P_l$  du nombre de voisins occupés au cours du temps.

$$P_l = \frac{1}{n-n_\tau} \sum_{k=1}^{n-n_\tau} P(Y_k = l) = \frac{C_\nu^l (n-1-\nu)!}{(n-n_\tau) \cdot (n-1)!} \sum_{k=1}^{n-n_\tau} \prod_{s=1}^l (k + n_\tau - s) \prod_{u=0}^{\nu-l-1} (n - k - n_\tau - u)$$

Notons  $N_\tau = n - n_\tau = n(1 - \tau)$  le nombre de sites non initialisés.

$$P_l = \frac{C_\nu^l N_\tau^\nu}{(n-1)(n-2) \dots (n-\nu)} \cdot \frac{1}{N_\tau} \sum_{k=1}^{N_\tau} \prod_{s=1}^l \left( \frac{k}{N_\tau} + \frac{\tau}{1-\tau} - \frac{s}{N_\tau} \right) \prod_{u=0}^{\nu-l-1} \left( 1 - \frac{k}{N_\tau} - \frac{u}{N_\tau} \right)$$

$l$  et  $\nu - l$  étant fixes, on trouve lorsque le nombre de sites croît vers l'infini :

$$P_l \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_\nu^l (1 - \tau)^\nu \int_0^1 \left(x + \frac{\tau}{1 - \tau}\right)^l (1 - x)^{\nu - l} dx.$$

On obtient par intégrations successives

$$P_l \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu + 1} Z_{l, \nu, \tau} \text{ où } Z_{l, \nu, \tau} = \sum_{j=0}^l C_{\nu+1}^j \tau^j (1 - \tau)^{\nu - j}$$

Notons que cette formule est valable pour  $\tau = 0$ . Il est intéressant de savoir si  $Z_{l, \nu, \tau} > 1$  ou non pour regarder l'effet du dumping face à l'absence de contamination initiale. Pour alléger la présentation, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\nu$  est pair.

Si  $\tau \geq \frac{1}{2}$  et  $l \leq \frac{\nu}{2}$ , alors  $Z_{l, \nu, \tau} \leq 1$ . En effet, dans ce cas  $(1 - \tau)^\nu \left(\frac{\tau}{1 - \tau}\right)^j \leq [\tau(1 - \tau)]^{\nu/2} \leq (1/4)^{\nu/2}$  et donc  $Z_{l, \nu, \tau} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^l C_{\nu+1}^j \leq \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\nu/2} C_{\nu+1}^j \leq 1$  puisque  $\sum_{j=0}^{\nu/2} C_{\nu+1}^j = 2^\nu$ .<sup>1</sup>

Sinon,  $Z_{l, \nu, \tau}$  peut prendre des valeurs aussi bien inférieures<sup>2</sup> que supérieures à 1 (mais inférieures à  $\nu + 1$ ). La figure 11 montre le comportement de  $Z_{l, \nu, \tau}$  en fonction de  $l$  et  $\tau$  pour un nombre de voisins  $\nu$  fixé égal à 4; on observe un comportement analogue pour un réseau aux huit plus proches voisins (voisinage de Moore).

## 6 Conclusion

Cette étude met en évidence la différence entre les configurations spatiales résultant d'une règle d'affectation locale ou non. L'effet de dumping sur la configuration finale est important pour tous les taux de contamination initiale, avec un effet différentiel plus important pour les faibles taux. Ceci apparaît clairement sur le pourcentage final de standards A obtenu. Nous avons également présenté plusieurs indicateurs de différenciation des deux types de champs résultant de la procédure d'affectation locale et de celle à répartition aléatoire uniforme; là encore, les configurations spatiales se différencient fortement, malgré leur pourcentage final de standards A identique; parmi les caractéristiques étudiées, la corrélation spatiale discrimine fortement les deux situations; elle diffère et par

---


$$2^\nu = (1 + 1)^\nu = \sum_0^{\nu/2} C_\nu^j + \sum_{\nu/2+1}^{\nu} C_\nu^j. \text{ Or } \sum_{\nu/2+1}^{\nu} C_\nu^j = \sum_{k=0}^{\nu/2-1} C_\nu^k \text{ et } C_\nu^k = C_{\nu+1}^k - \frac{k}{\nu+1} C_{\nu+1}^k. \text{ D'où } 2^\nu =$$

$$\sum_0^{\nu/2} C_\nu^j + \sum_{k=0}^{\nu/2-1} C_{\nu+1}^k - \sum_{k=1}^{\nu/2-1} \frac{k}{\nu+1} C_{\nu+1}^k = \sum_0^{\nu/2} C_\nu^j + \sum_{k=0}^{\nu/2-1} C_{\nu+1}^k - \sum_{k=0}^{\nu/2-2} C_\nu^k = \sum_{k=0}^{\nu/2} C_{\nu+1}^k + R$$

avec  $R = C_\nu^{\nu/2-1} + C_\nu^{\nu/2} - C_{\nu+1}^{\nu/2} = 0$ .

$${}^2 Z_{l, \nu, \tau} \leq \sum_{j=0}^{\nu} C_{\nu+1}^j \tau^j (1 - \tau)^{\nu - j} \leq (1 - \tau)^{-1} \left[ \sum_{j=0}^{\nu+1} C_{\nu+1}^j \tau^j (1 - \tau)^{\nu+1 - j} - \tau^{\nu+1} \right]$$

$$\leq (1 - \tau)^{-1} (1 - \tau^{\nu+1}) \leq \nu + 1$$

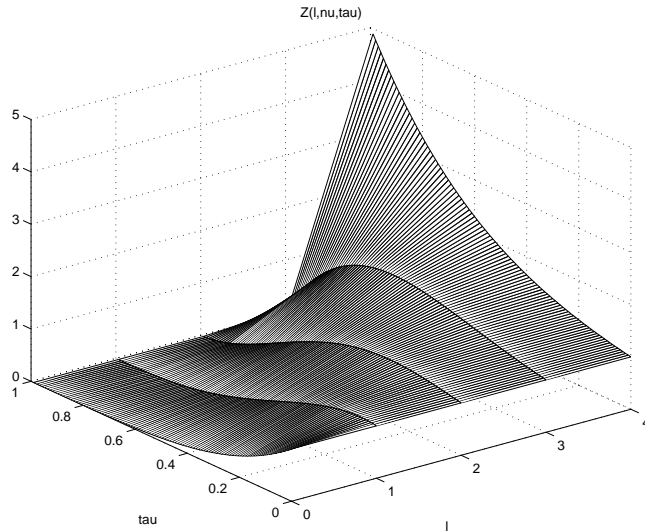


FIG. 11 – Evolution de  $Z_l, \nu, \tau$  en fonction de  $l$  et de  $\tau$  pour  $\nu = 4$

sa valeur et par son évolution lorsque le taux de contamination initiale varie, ceci pour tout taux de dumping.

Les indicateurs d'agrégation et de connexité sont utiles à la discrimination des deux types de champs pour les petites valeurs du taux de contamination initiale ; là encore, l'effet différentiel du dumping est plus important pour de petites valeurs de ce dumping ; l'indicateur d'agrégation comme ceux de connexité diffèrent essentiellement pour une faible contamination initiale. Pour des dumpings plus importants, on pourra continuer à utiliser ces indicateurs suivant la règle d'affectation en usage.

L'utilité de ces indicateurs peut être validée sur plusieurs points ; si l'on construit pour un indicateur donné sa loi empirique, on peut ensuite établir des tests de permutation basés sur ce paramètre pour tester l'indépendance spatiale ([26]) et répondre à la question : est-ce que l'image du champ observé provient d'une procédure d'affectation locale ou non ?

Cette étude peut être complétée sur divers points : changement de la géométrie du réseau, modification de la relation de voisinage, initialisation de la configuration avec les deux standards présents en proportions différentes. Une autre situation intéressante est l'introduction de l'information privée de l'agent dans la procédure, en considérant la règle d'Ising à double paramètre  $(\alpha, \beta)$ , où  $\alpha$  fait référence à l'agent lui-même et  $\beta$  contrôle toujours l'influence de ses voisins. Ces généralisations font l'objet d'une autre étude.

## Références

- [1] Arthur W.B., 1989, *Competing technologies, increasing returns, and lock-in by historical events*, The economic journal, 99, 116-131.
- [2] Banerjee A.V., 1992, *A simple model of herd behaviour*, The quarterly journal of economics, Vol. CVII.
- [3] Besag J., 1974, *Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems*, JRSS B, 36, 192-236.
- [4] J. Besag and P.A.P. Moran, 1975, *On the estimation and testing of spatial interaction for Gaussian lattice processes*, Biometrika, 62, 3, 555-562.
- [5] Bikhchandani S., Hirshleifer D., Welch I., 1992, *A theory of fads, fashion, custom, and cultural change as informational cascades*, Journal of political economy, Vol. 100 n°5, 992-1026.
- [6] Bikhchandani S., Hirshleifer D., Welch I., 1998, *Learning from the behaviour of others : conformity, fads, and informational cascades*, Journal of economic perspectives, Vol 12 n°3, 151-170.
- [7] Chopard B., Dupuis A., Masselot A., Luthi P., 2002, *Cellular automata and lattice Boltzmann techniques : an approach to model and simulate complex systems*, Adv. Complex systems, 5 Vol 2-3, 103-246.
- [8] A.D. Cliff and J.K. Ord, 1981, *Spatial autocorrelation (2nd ed)*, Pion, Londres.
- [9] Cox J.T., 1989, *Coalescing random walks and voter model consensus times on the torus  $\mathbf{Z}^d$* , Ann. Proba., Vol. 17, n°4, 1333-1366.
- [10] David P.A., Foray D., 1993, *Percolation structures, Markov random fields and the economics of EDI standard diffusion*, in Pogorel (ed.), Global telecommunications strategies and technological changes, North-Holland.
- [11] Galam S. 1997, *Rational group decision making : a random field ising model at  $T=0$* , Physica A, 238, 66-80.
- [12] Galam S., Chopard B., Masselot A., Droz M., 1998, *Competing species dynamics : qualitative advantage versus geography*, Eur. Phys. J., B4, 529-531.
- [13] Geman D. et Geman S., 1984, *Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images*, IEEE-PAMI, 6, 721-741.
- [14] Geman D., 1990, *Random fields and inverse problem in imaging*, Ecole de Saint Flour, Lect. Notes in Maths. n°1427, Springer.
- [15] Guyon X., 1995, *Random fields on a network : modeling, statistics and applications*, Springer.
- [16] Guyon X. et Hardouin C., 2001, *Standards adoption dynamics and tests for non spatial coordination*, Springer, Lecture Notes in Statistics 159, 39-56.



- [17] Malarz K., Antosiewicz W., Kapinska J., Kulakowski K., B.Tadic B., 2007, *Avalanches in complex spin networks*, Physica A, 373C, 785-795.
- [18] Manka A., Malarz K., Kulakowski K., 2007, *Clusterization, frustration, and collectivity in random networks*, International Journal of Modern Physics C, Vol. 18 no. 11, 1765–1773.
- [19] Marengo L. 1998, *Knowledge distribution and coordination in organisations*, in N. Lazaric and E. Lorenz (Eds), Trust and Economic Learning, Cheltenham, Edward Elgar, 227-246.
- [20] Orléan A., 1998, *Informational influences and the ambivalence of imitation*, in Lesourne and Orléan (Eds.), Advances in self organization and evolutionary economics, Economica, 39-56.
- [21] Lesourne J.,Orléan (Eds), 1998, *Advances in self organization and evolutionary economics*, Economica, Introduction 1-7.
- [22] Orléan A., 1998, *The evolution of imitation*, in The economics of networks : interaction and behaviours, Cohendet P., Llerena P., Stahn H. et G. Umbhauer (Eds.), Springer-Verlag, 325-339.
- [23] Phan D., Beugnard A., 2001, *Moduleco, a multi-agent modular framework, for the simulation of network effects and population dynamics in social sciences, market & organisations*, 8ème Rencontre Internationale ACSEG (Approches Connexionnistes en Sciences Economiques et de Gestion), Université de Rennes, IGR 22-23 novembre.
- [24] Paulré B., 1997, *Evolutionisme contemporain et auto-organisation*, Economie appliquée Tome L n°3, 121-150.
- [25] Steyer A., Zimmermann J-B., 1996, *Externalités de réseau et adoption d'un standard dans une structure résiliable*, Revue d'économie industrielle, n°76, 67-90.
- [26] Thébaud G., Peyrard N., Dallot S., Calonnec A, Labonne G., 2005, *Investigating disease spread between two assessment dates with permutation tests on a lattice*, Analytical and theoretical plant pathology, vol 95 no12, 1453-1461.
- [27] Weisbuch G., Stauffer D., 2000, *Hits and flops dynamics. Economic dynamics from the physics point of view*, Physica A. n°3 – 4, 563 – 576.