



**HAL**  
open science

## Les types de données syntaxiques du système F

Samir Farkh, Karim Nour

► **To cite this version:**

Samir Farkh, Karim Nour. Les types de données syntaxiques du système F. Informatique Théorique et Applications, 2001, 35, pp.207-221. hal-00381595

**HAL Id: hal-00381595**

**<https://hal.science/hal-00381595>**

Submitted on 6 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LES TYPES DE DONNÉES SYNTAXIQUES DU SYSTÈME $\mathcal{F}$

## SYNTACTICAL DATA TYPES OF SYSTEM $\mathcal{F}$

par Samir FARKH et Karim NOUR<sup>1</sup>

Résumé. - *Nous présentons dans ce papier une définition purement syntaxique des types entrées et des types sorties du système  $\mathcal{F}$ . Nous définissons les types de données syntaxiques comme étant des types entrées et sorties. Nous démontrons que les types à quantificateurs positifs sont des types de données syntaxiques et qu'un type entrée est un type sortie. Nous imposons des restrictions sur la règle d'élimination des quantificateurs pour démontrer qu'un type sortie est un type entrée.*

Abstract. - *We give in this paper a purely syntactical definition of input and output types of system  $\mathcal{F}$ . We define the syntactical data types as input and output types. We show that any type with positive quantifiers is a syntactical data type and that an input type is an output type. We give some restrictions on the  $\forall$ -elimination rule in order to prove that an output type is an input type.*

**Mathematics Subject Classification :** 03B40, 68Q60

**Keywords :** input type - output type - data type - system  $\mathcal{F}$ .

### Introduction

Le système de typage  $\mathcal{F}$  a été introduit par J.-Y. Girard (voir [3]). Ce système est basé sur le calcul propositionnel intuitionniste du second ordre, et donc donne la possibilité de quantifier sur les types. En plus du théorème de normalisation forte qui assure la terminaison des programmes, le système  $\mathcal{F}$  permet d'une part, d'écrire des programmes pour toutes les fonctions dont la terminaison est démontrable dans l'arithmétique de Peano du second ordre, et d'autre part, de définir tous les types de données courants : booléens, entiers, listes d'objet, etc.

Nous avons essayé de trouver une définition syntaxique à un type de données dans le système  $\mathcal{F}$ . Nous l'avons défini comme étant un type **entrée** et **sortie**.

- **Type entrée :** Il faut qu'une machine soit capable de tester si les entrées sont bien typées, c'est à dire que le problème de typage d'un type entrée soit décidable. On définit donc un type entrée comme étant un type dont toutes les démonstrations se font dans une restriction décidable (notée  $\mathcal{F}_0$ ) du système  $\mathcal{F}$ .

---

<sup>1</sup>LAMA - Équipe de Logique, Université de Savoie - 73376 Le Bourget du Lac cedex - Email knour@univ-savoie.fr

- **Type sortie** : Si  $E, S$  sont deux types du système  $\mathcal{F}$ , et  $t$  un  $\lambda$ -terme clos tel que  $\vdash_{\mathcal{F}} t : E \rightarrow S$ , alors  $t$  peut être vu comme un programme qui à un élément de  $\Lambda(E)$  (l'ensemble des  $\lambda$ -termes de type  $E$ ) associe un élément de  $\Lambda(S)$ . Pour nous, la sortie doit dépendre de l'entrée. Les seuls programmes (fonctions) qui ne tiennent pas compte de leurs arguments (entrées) sont les fonctions constantes (i.e les  $\lambda$ -termes de la forme  $\lambda xt$  où  $t$  est un terme clos). En formalisant les types qui vérifient cette propriété, nous avons obtenu la définition suivante : un type *sortie* est un type clos  $S$  tel que si  $\vdash \lambda xt : \forall X (X \rightarrow S)$  ( $t$  est un  $\lambda$ -terme normal), alors  $x$  est non libre dans  $t$ .

Nous avons remarqué que les types de données ainsi définis contiennent les types à quantificateurs positifs. Ensuite, nous avons montré qu'un type entrée est un type sortie. Ce résultat nous a conduit à regarder la réciproque. Nous l'avons démontré dans des cas particuliers, où on impose des restrictions sur la règle d'élimination des quantificateurs du second ordre. Le cas général, qui reste une conjecture, est démontré lorsqu'on se restreint aux termes du  $\lambda I$ -calcul (voir [9]). Enfin nous avons obtenu un résultat sur les opérateurs de mise en mémoire de J.-L. Krivine (voir [6]). Nous avons montré que si  $D$  est un type de données syntaxique, alors un  $\lambda$ -terme de type  $D^* \rightarrow \neg\neg D$  ( $D^*$  est la traduction de Gödel de  $D$ ) est un opérateur de mise en mémoire pour  $D$ . Le fait que  $D$  est un type sortie est nécessaire pour avoir ce résultat.

## 1 Notations et définitions

On désignera par  $\Lambda$  l'ensemble des termes du  $\lambda$ -calcul pur, dits aussi  **$\lambda$ -termes**. Étant donnés des  $\lambda$ -termes  $t, u, u_1, \dots, u_n$ , l'application de  $t$  à  $u$  sera notée  $(t)u$ , et  $\dots((t)u_1)\dots u_n$  sera noté  $(t)u_1\dots u_n$ . Si  $t$  est un  $\lambda$ -terme, on désigne par  $Fv(t)$  l'ensemble de ses variables libres. On note par  $\rightarrow_{\beta}$  la  $\beta$ -réduction. Un  $\lambda$ -terme  $t$  soit possède un **redex de tête faible** [i.e.  $t = (\lambda xu)vv_1\dots v_m$ , le redex de tête faible est  $(\lambda xu)v$ ], soit est en **forme normale de tête faible** [i.e.  $t = (x)v_1\dots v_m$  ou  $t = \lambda xv$ ]. La notation  $u \succ_f v$  signifie que  $v$  est obtenu à partir de  $u$  par **réduction de tête faible**.

Les **types** du système  $\mathcal{F}$  sont les formules construites à l'aide d'un ensemble dénombrable de variables propositionnelles  $X, Y, \dots$ , et deux connecteurs  $\rightarrow$  et  $\forall$ . Étant donnés un  $\lambda$ -terme  $t$ , un type  $A$ , et un contexte  $\Gamma = \{x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n\}$ , on définit au moyen des règles suivantes la notion "t est typable de type  $A$  dans le contexte  $\Gamma$ ". Cette notion est notée  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ .

- (ax)  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} x_i : A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).
- ( $\rightarrow_i$ ) Si  $\Gamma, x : B \vdash_{\mathcal{F}} t : C$ , alors  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \lambda xt : B \rightarrow C$ .
- ( $\rightarrow_e$ ) Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} u : B \rightarrow C$ , et  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} v : B$ , alors  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} (u)v : C$ .
- ( $\forall_i$ ) Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ , et  $X$  ne figure pas dans  $\Gamma$ , alors  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : \forall X A$ .

- $(\forall_e)$  Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : \forall X A$ , alors, pour tout type  $C$ ,  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A[C/X]$ .

Le système  $\mathcal{F}$  possède les propriétés suivantes (voir [4]) :

**Proposition 1.1** (i) Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ , et  $t \rightarrow_{\beta} t'$ , alors  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t' : A$ .  
(ii) Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ , alors  $t$  est fortement normalisable.

**Proposition 1.2** (i) Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ , alors pour tout type  $G$ ,  $\Gamma[G/X] \vdash_{\mathcal{F}} t : A[G/X]$ .  
(ii) Si  $\Gamma, x : B \vdash_{\mathcal{F}} u : A$  et  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} v : B$ , alors  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} u[v/x] : A$ .

On ne considère dans ce papier que des types “propres” (c’est à dire les variables sur lesquelles on quantifie figurent dans le type).

Dans la suite, on note par  $\forall \mathbf{X} A$  la formule  $\forall X_1 \dots \forall X_n A$  ( $n \geq 0$ ).

Une partie  $G$  de  $\Lambda$  est dite **saturée** si, quels que soient les  $\lambda$ -termes  $t$  et  $u$ , on a :  $(u \in G \text{ et } t \succ_f u) \Rightarrow t \in G$ . Il est clair que l’intersection d’un ensemble de parties saturées de  $\Lambda$  est saturée. Étant données deux parties  $G$  et  $G'$  de  $\Lambda$ , on définit une partie de  $\Lambda$ , notée  $G \rightarrow G'$ , en posant :  $u \in (G \rightarrow G') \Leftrightarrow (u)t \in G'$  quel que soit  $t \in G$ . Si  $G'$  est saturée, alors  $G \rightarrow G'$  est saturée pour toute partie  $G \subset \Lambda$ . Une **interprétation**  $I$  est, par définition, une application  $X \rightarrow |X|_I$  de l’ensemble des variables de type dans l’ensemble des parties saturées de  $\Lambda$ .  $X$  étant une variable de type, et  $G$  une partie saturée de  $\Lambda$ , on définit une interprétation  $J = I[X \leftarrow G]$  en posant  $|X|_J = G$ , et  $|Y|_J = |Y|_I$  pour toute variable  $Y \neq X$ . Pour chaque type  $A$ , sa valeur  $|A|_I$  dans l’interprétation  $I$  est une partie saturée définie comme suit, par induction sur  $A$  :

- si  $A$  est une variable de type,  $|A|_I$  est déjà définie ;
- $|A \rightarrow B|_I = |A|_I \rightarrow |B|_I$  ;
- $|\forall X A|_I = \cap \{|A|_{I[X \leftarrow G]}$  pour toute partie saturée  $G\}$ .

Pour tout type  $A$ , on note  $|A| = \cap \{|A|_I ; I \text{ interprétation}\}$ .

Le résultat suivant est connu sous le nom du lemme d’adéquation (voir [5]).

**Théorème 1.3** Soient  $A$  un type et  $t$  un  $\lambda$ -terme clos. Si  $\vdash_{\mathcal{F}} t : A$ , alors  $t \in |A|$ .

Les types à **quantificateurs positifs** (resp. à **quantificateurs négatifs**), notés en abrégé  $\forall^+$  (resp.  $\forall^-$ ), sont définis de la manière suivante :

- une variable propositionnelle  $X$  est  $\forall^+$  et  $\forall^-$
- si  $A$  est  $\forall^+$  (resp.  $\forall^-$ ) et  $B$  est  $\forall^-$  (resp.  $\forall^+$ ), alors  $B \rightarrow A$  est  $\forall^+$  (resp.  $\forall^-$ )
- si  $A$  est  $\forall^+$  et  $X$  est libre dans  $A$ , alors  $\forall X A$  est  $\forall^+$

Le résultat suivant constitue une sorte de réciproque du théorème 1.3 (voir [2]).

**Théorème 1.4** Soient  $A$  un type  $\forall^+$  du système  $\mathcal{F}$ , et  $t$  un  $\lambda$ -terme, alors  $t \in |A|$  ssi il existe un  $\lambda$ -terme clos  $t'$  tel que  $t \rightarrow_\beta t'$  et  $\vdash_{\mathcal{F}} t' : A$ .

Le système de typage **simple**  $\mathcal{S}$  est la restriction du système  $\mathcal{F}$  aux types qui ne contiennent pas de quantificateurs. Ce système possède donc trois règles de typage :  $(ax)$ ,  $(\rightarrow_i)$  et  $(\rightarrow_e)$ . Si  $t$  est un  $\lambda$ -terme,  $A$  un type, et  $\Gamma = \{x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n\}$  un contexte, alors on écrit  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} t : A$  ssi  $t$  est typable dans le système  $\mathcal{S}$  de type  $A$  à partir de  $\Gamma$ .

## 2 Types de données syntaxiques

### 2.1 Types sorties

**Définition :** Un type clos  $S$  est un **type sortie** ssi pour tout  $\lambda$ -terme normal  $t$ , si  $\vdash_{\mathcal{F}} \lambda x t : \forall X (X \rightarrow S)$ , alors  $x \notin Fv(t)$ .

Cela veut dire que les fonctions (programmes) à valeurs dans un type sortie  $S$  indépendamment du type de leurs arguments (entrées) sont les fonctions constantes.

Soit  $O$  une constante de type. La définition d'un type sortie est équivalente à la suivante :

**Définition :** Un type clos  $S$  (ne contenant pas la constante  $O$ ) est un type sortie ssi pour tout  $\lambda$ -terme normal  $t$ , si  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t : S$ , alors  $\alpha \notin Fv(t)$ .

**Exemples :**

- (1) Les types  $Id = \forall X (X \rightarrow X)$  (type de l'identité),  $B = \forall X \{X \rightarrow (X \rightarrow X)\}$  (type des booléens), et  $N = \forall X \{X \rightarrow [(X \rightarrow X) \rightarrow X]\}$  (type des entiers) sont des types sorties.

On va faire la preuve pour le type  $B$ . Soit  $t$  un  $\lambda$ -terme normal tel que  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t : B$ , donc  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t : O' \rightarrow (O' \rightarrow O')$ , où  $O'$  est une constante de type différente de  $O$ .  $t$  est donc une abstraction, soit  $t = \lambda x u$ , d'où  $\alpha : O, x : O' \vdash_{\mathcal{F}} u : O' \rightarrow O'$ .  $u$  s'écrit nécessairement  $\lambda y v$ , avec  $\alpha : O, x : O', y : O' \vdash_{\mathcal{F}} v : O'$ , donc  $v = x$  ou  $v = y$ , ce qui fait que  $t = \lambda x \lambda y x = \mathbf{1}$  ou  $t = \lambda x \lambda y y = \mathbf{0}$ .

- (2) Le type  $D = \forall X \{\forall Y (Y \rightarrow X) \rightarrow X\}$  n'est pas un type sortie. En effet, posons  $t = \lambda x(x)\alpha$ ;  $t$  est un  $\lambda$ -terme normal non clos. D'autre part on a  $\alpha : O, x : \forall Y (Y \rightarrow X) \vdash_{\mathcal{F}} x : \forall Y (Y \rightarrow X)$ , donc  $\alpha : O, x : \forall Y (Y \rightarrow X) \vdash_{\mathcal{F}} x : O \rightarrow X$ . D'où  $\alpha : O, x : \forall Y (Y \rightarrow X) \vdash_{\mathcal{F}} (x)\alpha : X$ , et donc  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t = \lambda x(x)\alpha : D$ .

- (3) Le type  $N \rightarrow N$  (type des fonctions d'entiers dans les entiers) n'est pas un type sortie. En effet, il suffit de trouver un  $\lambda$ -terme  $t_\alpha$  normal non

clos tel que  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t_\alpha : N \rightarrow N$ . On a,  $\Gamma = x : X, \alpha : O, n : N, z : X \rightarrow X \vdash_{\mathcal{F}} n : N$ , donc  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} n : (O \rightarrow X) \rightarrow [((O \rightarrow X) \rightarrow (O \rightarrow X)) \rightarrow (O \rightarrow X)]$ , par suite  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} (n)\lambda yx : [((O \rightarrow X) \rightarrow (O \rightarrow X)) \rightarrow (O \rightarrow X)]$ . Par conséquent  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} (((n)\lambda yx)\lambda xx)\alpha : X$ , et donc  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} \lambda n\lambda x\lambda z(((n)\lambda yx)\lambda xx)\alpha : N \rightarrow N$ .

- (4) Soit  $S$  un type du système  $\mathcal{F}$ . Si l'ensemble des  $\lambda$ -termes normaux de type  $S$  est fini, alors  $S$  est un type sortie. En effet, si  $S$  n'est pas un type sortie, alors il existe un  $\lambda$ -terme normal  $t$  contenant  $\alpha$  tel que  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t : S$ . D'où, d'après la proposition 1.2,  $\alpha : O[E/O] \vdash_{\mathcal{F}} t : S$  pour tout type  $E$ . Donc si  $u$  est un  $\lambda$ -terme clos tel que  $\vdash_{\mathcal{F}} u : E$ , alors, d'après la proposition 1.2,  $\vdash_{\mathcal{F}} t[u/\alpha] : S$ . Or  $\alpha$  ne peut pas être en position d'application, car  $\alpha$  est de type atomique. Donc, comme  $t$  est normal, alors  $t[u/\alpha]$  est normal. On obtient donc un nombre infini de  $\lambda$ -termes normaux de type  $S$ .
- (5) Si  $E \rightarrow F$  est un type sortie, alors  $F$  est un type sortie. En effet, soit  $t$  un  $\lambda$ -terme normal tel que  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t : F$ , alors  $\alpha : O, y : E \vdash_{\mathcal{F}} t : F$ , en choisissant une variable  $y$  non libre dans  $t$ . Donc  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} \lambda yt : E \rightarrow F$ . Comme  $E \rightarrow F$  est un type sortie, alors  $\alpha \notin Fv(\lambda yt)$ , et donc  $\alpha \notin Fv(t)$ .

**Définition :** Soit  $K$  un variable ou une constante de type. On dit qu'un type  $A$  se termine par  $K$  ssi  $A$  est obtenu par les règles suivantes :

- $K$  se termine par  $K$  ;
- si  $A$  se termine par  $K$ , alors  $B \rightarrow A$  se termine par  $K$ , pour tout type  $B$  ;
- si  $A$  se termine par  $K$ , alors  $\forall X A$  se termine par  $K$ , pour toute variable de type  $X \neq K$ .

Un type  $A$  qui se termine par  $K$  s'écrit alors :  $A = \forall X_0(B_1 \rightarrow \forall X_1(B_2 \rightarrow \forall X_2(\dots(B_r \rightarrow \forall X_r(B_{r+1} \rightarrow K)\dots)))$ .

On se propose de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 2.1.1** *Un type clos  $S$  est un type sortie ssi pour tout  $\lambda$ -terme normal  $t$  et pour tous types  $A_1, \dots, A_r$  qui se terminent par  $O$ , si  $x_1 : A_1, \dots, x_r : A_r \vdash_{\mathcal{F}} t : S$ , alors  $x_i \notin Fv(t)$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ .*

On a besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.1.2** *Soient  $t$  un  $\lambda$ -terme normal,  $v$  un  $\lambda$ -terme, et  $\alpha, x$  deux variables tels que  $x \in Fv(t)$ . Si  $t[\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha / x] \rightarrow_{\beta} v$ , alors  $\alpha \in Fv(v)$ .*

**Preuve :** Par induction sur  $t$ .

- Si  $t = x$ , alors  $t[\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha / x] = \lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha = v$ . Donc  $\alpha \in Fv(v)$ .
- Si  $t = (x)u_1 \dots u_m$ ,  $u_i$  normal,  $1 \leq i \leq m$ , alors  $t[\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha / x] = (\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha)u_1 \dots u_m$ .
- Si  $m = n$ , alors  $t[\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha / x] \rightarrow_{\beta} \alpha$ .
- Si  $m > n$ , alors  $t[\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha / x] \rightarrow_{\beta} (\alpha)u_{n+1} \dots u_m$ .

- Si  $m < n$ , alors  $t[\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha / x] \rightarrow_\beta \lambda x_{m+1} \dots \lambda x_n \alpha$ .  
 Dans les trois cas on a bien  $\alpha \in Fv(v)$ .  
 - Si  $t = (y)u_1 \dots u_m$ ,  $u_i$  normal, et  $y$  une variable différent de  $x$ . Comme  $x \in Fv(t)$ , alors il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$  tel que  $x \in Fv(u_i)$ . Donc  $t[\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha / x] = (y)u'_1 \dots u'_i[\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha / x] \dots u'_m \rightarrow_\beta (y)u'_1 \dots v' \dots u'_m$ , avec  $u'_i[\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha / x] \rightarrow_\beta v'$ . D'où, d'après l'hypothèse d'induction,  $\alpha \in Fv(v')$ , et par conséquent  $\alpha \in Fv(v)$ .  
 - Si  $t = \lambda zu$ , alors  $\lambda zu[\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha / x] \rightarrow_\beta v$ , donc  $v = \lambda zw$ , où  $u[\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha / x] \rightarrow_\beta w$ . Or  $x \in Fv(t)$ , donc  $x \in Fv(u)$ , et d'après l'hypothèse d'induction,  $\alpha \in Fv(w)$ , d'où  $\alpha \in Fv(v)$ . ♠

On a donc immédiatement :

**Corollaire 2.1.3** *Soient  $t$  un  $\lambda$ -terme normal,  $v$  un  $\lambda$ -terme clos, et  $\alpha, x$  deux variables. Si  $t[\lambda x_1 \dots \lambda x_n \alpha / x] \rightarrow_\beta v$ , alors  $x \notin Fv(t)$ .*

Plus généralement, on a le résultat suivant :

**Lemme 2.1.4** *Soient  $t$  un  $\lambda$ -terme normal, et  $v$  un  $\lambda$ -terme clos. Si  $t[\lambda y_{11} \dots \lambda y_{1n_1} \alpha / x_1, \dots, \lambda y_{r1} \dots \lambda y_{rn_r} \alpha / x_r] \rightarrow_\beta v$ , alors  $x_i \notin Fv(t)$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ .*

On peut alors déduire la preuve du théorème 2.1.1.

**Preuve du théorème 2.1.1 :** La condition suffisante est évidente. Supposons que  $x_1 : A_1, \dots, x_r : A_r \vdash_{\mathcal{F}} t : S$ , avec  $S$  un type sortie et  $t$  un  $\lambda$ -terme normal. Comme  $A_i$  se termine par  $O$ , alors  $A_i$  s'écrit :

$A_i = \forall X_1 (B_1 \rightarrow \forall X_2 (B_2 \rightarrow \forall X_3 (\dots (B_{n_i-2} \rightarrow \forall X_{n_i-1} (B_{n_i-1} \rightarrow O) \dots)))$ ,  
 donc  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} \lambda y_{i1} \dots \lambda y_{in_i} \alpha : A_i$ .

D'où,  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t[\lambda y_{11} \dots \lambda y_{1n_1} \alpha / x_1, \dots, \lambda y_{r1} \dots \lambda y_{rn_r} \alpha / x_r] : S$ , d'après la proposition 1.2. Par conséquent,  $t[\lambda y_{11} \dots \lambda y_{1n_1} \alpha / x_1, \dots, \lambda y_{r1} \dots \lambda y_{rn_r} \alpha / x_r] \rightarrow_\beta v$ , avec  $v$  un  $\lambda$ -terme clos. D'où, d'après le lemme 2.1.4,  $x_i \notin Fv(t)$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ . ♠

**Définition :** Si  $A$  et  $B$  sont deux types du système  $\mathcal{F}$ , alors le type  $A \wedge B = \forall X \{(A \rightarrow (B \rightarrow X)) \rightarrow X\}$  est dit **type produit** de  $A$  et  $B$ , le type  $A \vee B = \forall X \{(A \rightarrow X) \rightarrow ((B \rightarrow X) \rightarrow X)\}$  est dit **type somme disjointe** de  $A$  et  $B$ , et le type  $LA = \forall X \{X \rightarrow [(A \rightarrow (X \rightarrow X)) \rightarrow X]\}$  est dit **type liste d'objet de  $A$** .

**Corollaire 2.1.5** *Si  $A$  et  $B$  sont des types sorties, alors  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ , et  $LA$  sont des types sorties.*

**Preuve :** Faisons la preuve pour  $A \wedge B$ . Soit  $t$  un  $\lambda$ -terme normal tel que  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t : A \wedge B$ , donc  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t : (A, B \rightarrow O) \rightarrow O$ , d'où  $t = \lambda xu$ , avec  $\alpha : O, x : (A, B \rightarrow O) \vdash_{\mathcal{F}} u : O$ . Comme  $O$  est une constante de type, on obtient  $u = (x)ab$ , avec  $\alpha : O, x : (A, B \rightarrow O) \vdash_{\mathcal{F}} a : A$  et  $\alpha : O, x : (A, B \rightarrow O) \vdash_{\mathcal{F}} b :$

$B$ . Or  $A$  et  $B$  sont des types sorties, d'où d'après le théorème 2.1.1,  $a$  et  $b$  sont des  $\lambda$ -termes clos, et donc  $t$  est clos. ♠

On va démontrer que tout type  $\forall^+$  du système  $\mathcal{F}$  est un type sortie. On a besoin du lemme suivant démontré dans [7].

**Lemme 2.1.6** *Soient  $t$  un  $\lambda$ -terme normal,  $A_1, \dots, A_n$  des types  $\forall^-$ ,  $S$  un type  $\forall^+$ ,  $O$  une constante de type qui ne figure pas dans  $A_1, \dots, A_n, S$ , et  $B_1, \dots, B_m$  des types qui se terminent par  $O$ . Si  $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n, y_1 : B_1, \dots, y_m : B_m \vdash_{\mathcal{F}} t : S$ , alors  $y_i \notin Fv(t)$ , pour tout  $1 \leq i \leq m$ .*

**Théorème 2.1.7** *Si  $S$  est un type  $\forall^+$ , alors  $S$  est un type sortie.*

**Preuve :** Il suffit d'appliquer le lemme 2.1.6, avec  $n = 0, m = 1$  et  $B_1 = O$ . ♠

**Remarque :** La réciproque du théorème 2.1.7 n'est pas en général vraie. En effet, considérons le type  $S = \forall X \{ \forall Y (Y \rightarrow X) \rightarrow Id \}$ .  $S$  n'est pas  $\forall^+$ , d'autre part si  $t$  est un  $\lambda$ -terme normal tel que  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t : S$ , alors  $t = \lambda x u$ , avec  $\alpha : O, x : \forall Y (Y \rightarrow O) \vdash_{\mathcal{F}} u : Id$ . Comme  $Id$  est un type sortie,  $\alpha \notin Fv(u)$ , d'où  $\alpha \notin Fv(t)$ , et par conséquent  $S$  est un type sortie.

**Définition<sup>2</sup>:** Un type clos  $A$  du système  $\mathcal{F}$  est un **type de données** ssi  $|A| \neq \emptyset$  et tout terme  $t \in |A|$  se réduit par  $\beta$ -réduction à un terme clos.

**Exemples :** J.-L. Krivine a montré dans [4] que les types  $Id, B$  et  $N$  sont des types de données.

**Théorème 2.1.8** *Si  $A$  est un type de données, alors  $A$  est un type sortie.*

**Preuve :** Soit  $t$  un  $\lambda$ -terme normal tel que  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ . On définit une interprétation  $\mathcal{I}$  en posant  $|O|_{\mathcal{I}} = \{ \tau \in \Lambda : \tau \succ_f \alpha \}$ . On a  $\alpha \in |O|_{\mathcal{I}}$ , donc, d'après le lemme d'adéquation,  $t \in |A|_{\mathcal{I}} = |A|$ . Comme  $A$  est un type de données, alors  $t$  est un terme clos, ce qui fait que  $A$  est sortie. ♠

**Théorème 2.1.9** *Si  $A$  est un type clos,  $\forall^+$  et démontrable, alors  $A$  est un type de données.*

**Preuve :** Comme  $A$  est démontrable, alors il existe un  $\lambda$ -terme clos  $t$ , tel que  $\vdash_{\mathcal{F}} t : A$ . D'où d'après le lemme d'adéquation  $t \in |A|$ , et donc  $|A| \neq \emptyset$ . Soit donc  $t \in |A|$ . Comme  $A$  est un type  $\forall^+$ , alors d'après le théorème 1.4, il existe un  $\lambda$ -terme clos  $t'$  tel que  $t \rightarrow_{\beta} t'$  et  $\vdash_{\mathcal{F}} t' : A$ . Par conséquent  $A$  est un type de données. ♠

**Remarque :** Il existe des types de données qui ne sont pas  $\forall^+$ . Considérons

<sup>2</sup>Cette définition est due à J.-L. Krivine (voir [4])



par exemple le type  $S = \forall X \{ \forall Y (Y \rightarrow X) \rightarrow Id \}$ . Il est clair que  $S$  n'est pas  $\forall^+$ . De plus  $S$  est un type de données. En effet, si  $\vdash_{\mathcal{F}} t : S$ , alors  $\vdash_{\mathcal{F}} t : \forall Y (Y \rightarrow X) \rightarrow Id$ , et donc  $t = \lambda x u$ , avec  $x : \forall Y (Y \rightarrow X) \vdash_{\mathcal{F}} u : Id$ . D'où  $u = \lambda y v$ , avec  $x : \forall Y (Y \rightarrow X), y : Z \vdash_{\mathcal{F}} v : Z$ ,  $Z$  étant une variable de type. Par conséquent  $v = y$  et  $t = \lambda x \lambda y y$ .

D'autre part, soit  $t \in |S|$ ;  $x$  étant une variable du  $\lambda$ -calcul qui n'est pas libre dans  $t$ , on définit une interprétation  $\mathcal{I}$  en posant  $|X|_{\mathcal{I}} = \{ \tau \in \Lambda ; \text{il existe } G \text{ une partie saturée et } u \in G \text{ tels que } \tau \rightarrow_{\beta} (x)u \}$ .  $|X|_{\mathcal{I}}$  est évidemment une partie saturée. On a  $t \in |\forall Y (Y \rightarrow X) \rightarrow Id|_{\mathcal{I}}$ . Or  $x \in |(Y \rightarrow X)|_{\mathcal{I}} = |Y \leftarrow G|$  pour toute partie saturée  $G$  de  $\Lambda$ , car si  $v \in G$ , alors  $(x)v \in |X|_{\mathcal{I}}$ , par définition de  $\mathcal{I}$ . Donc  $(t)x \in |Id| = \{ \tau \in \Lambda ; \tau \rightarrow_{\beta} \lambda y y \}$ , d'où  $(t)x \rightarrow_{\beta} \lambda y y$ , et par conséquent  $(t)x$  est normalisable et donc  $t$  est normalisable. Soit  $t'$  sa forme normale, alors deux cas peuvent se présenter :

- Si  $t'$  commence par  $\lambda$ , on écrit  $t' = \lambda x u$ , donc  $(t)x \rightarrow_{\beta} (t')x \rightarrow_{\beta} u$ , d'où  $u = \lambda y y$ . On a donc  $t \rightarrow_{\beta} t' = \lambda x \lambda y y$ .
- Sinon  $t' = (f)u_1 \dots u_n$ , donc  $(t)x \rightarrow_{\beta} (t')x = (f)u_1 \dots u_n x$ . D'où  $(f)u_1 \dots u_n x = \lambda y y$ , ce qui est impossible.

On vient donc de démontrer que  $t \in |S|$  ssi  $t \rightarrow_{\beta} \lambda x \lambda y y$  et  $\vdash_{\mathcal{F}} \lambda x \lambda y y : S$ .

## 2.2 Types entrées

**Définition :** On définit le système  $\mathcal{F}_0$  comme étant le système  $\mathcal{F}$  sans la règle de typage  $(\forall_e)$ .

**Théorème 2.2.1** *Le problème de typabilité d'un  $\lambda$ -terme normal dans le système  $\mathcal{F}_0$  est décidable.*

**Preuve :** Ceci provient des équivalences suivantes :

- (i)  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}_0} x : A$  ssi  $x : A \in \Gamma$ .
- (ii)  $\Gamma, x : B \vdash_{\mathcal{F}_0} (x)t_1 \dots t_n : A$  ssi  $B = B_1, \dots, B_n \rightarrow A$  et  $\Gamma, x : B \vdash_{\mathcal{F}_0} t_i : B_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).
- (iii)  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}_0} \lambda x t : A$  ssi  $A = \forall \mathbf{X} (B \rightarrow C)$  et  $\Gamma, x : B \vdash_{\mathcal{F}_0} t : C$ . ♠

Le résultat suivant est démontré dans [7] :

**Théorème 2.2.2** *Soient  $A$  un type  $\forall^+$  du système  $\mathcal{F}$ , et  $t$  un  $\lambda$ -terme normal clos. Si  $\vdash_{\mathcal{F}} t : A$ , alors  $\vdash_{\mathcal{F}_0} t : A$ .*

**Définition :** Un type clos  $E$  du système  $\mathcal{F}$  est dit **entrée** s'il vérifie la propriété suivante : si  $t$  est un  $\lambda$ -terme normal tel que  $\vdash_{\mathcal{F}} t : E$ , alors  $\vdash_{\mathcal{F}_0} t : E$ .

Cela veut dire qu'un type entrée est un type dont toutes les démonstrations se font dans le système  $\mathcal{F}_0$ . D'après le théorème 2.2.2, on a le résultat suivant :

**Théorème 2.2.3** *Si  $A$  est un type  $\forall^+$ , alors  $A$  est un type entrée.*

**Exemples :** D'après le théorème 2.2.3, les types  $Id = \forall X(X \rightarrow X)$  et  $B = \forall X\{X \rightarrow (X \rightarrow X)\}$  sont des types entrées. Par contre le type  $D = \forall X\{\forall Y(Y \rightarrow X) \rightarrow X\}$  ne l'est pas, puisque  $\vdash_{\mathcal{F}} \lambda x(x)\lambda yy : D$  et  $\not\vdash_{\mathcal{F}_0} \lambda x(x)\lambda yy : D$ .

**Définition :** On dit qu'un type clos  $D$  du système  $\mathcal{F}$  est un **type de données syntaxique**, s'il est à la fois un type entrée et sortie.

D'après les théorèmes 2.1.7 et 2.2.3, on a :

**Théorème 2.2.4** *Si  $D$  est un type clos,  $\forall^+$  du système  $\mathcal{F}$ , alors  $D$  est un type de données syntaxique.*

On va montrer qu'un type entrée est un type sortie, et donc les types de données syntaxiques seront les types sorties. Dans la preuve on a besoin de trois lemmes.

On note par  $p_n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , le  $\lambda$ -terme  $\lambda x_1 \dots \lambda x_n \lambda x x$ . Le lemme suivant est facile à démontrer.

**Lemme 2.2.5** *Soit  $G$  un type du système  $\mathcal{S}$ . Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} p_n : G$ , alors  $G = C_1 \rightarrow (\dots \rightarrow (C_n \rightarrow D) \dots)$  et  $\Gamma, x_1 : C_1, \dots, x_n : C_n \vdash_{\mathcal{S}} \lambda x x : D$ .*

**Définition :** On définit la **longueur d'un type  $E$**  (qu'on note  $Lg(E)$ ) comme étant le nombre des  $\rightarrow$  dans  $E$ .

**Lemme 2.2.6** *Soient  $E$  un type du système  $\mathcal{S}$ ,  $A_1, \dots, A_m, G$  des sous-types de  $E$ ,  $t$  un  $\lambda$ -terme normal, et  $\alpha$  une variable libre de  $t$  qui n'est pas en position d'application. Si  $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_m : A_m \vdash_{\mathcal{S}} t[p_n/\alpha] : G$ , alors  $Lg(E) \geq n$ .*

**Preuve :** Par induction sur  $t$ .

- Si  $t = \alpha$ , alors  $t[p_n/\alpha] = p_n$ , par conséquent  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} p_n : G$ . D'où, d'après le lemme 2.2.5,  $G = C_1, \dots, C_n \rightarrow D$  et  $\Gamma, x_1 : C_1, \dots, x_n : C_n \vdash_{\mathcal{S}} \lambda x x : D$ , donc  $Lg(G) \geq n$ . Or  $G$  est un sous-type de  $E$ , donc  $Lg(E) \geq n$ .

- Si  $t = \lambda x u$ , alors  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \lambda x u[p_n/\alpha] : G$ . Donc  $G = C \rightarrow D$  et  $\Gamma, x : C \vdash_{\mathcal{S}} u[p_n/\alpha] : D$ , d'où, d'après l'hypothèse d'induction,  $Lg(E) \geq n$ .

- Si  $t = (x_i)v_1 \dots v_k$  ( $k \geq 1$ ), comme  $\alpha \in Fv(t)$ , alors il existe  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$  tel que  $\alpha \in Fv(v_j)$ . Donc  $t[p_n/\alpha] = (x_i)v'_1 \dots v'_j[p_n/\alpha] \dots v'_k$ , et  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} (x_i)v'_1 \dots v'_j[p_n/\alpha] \dots v'_k : G$ , d'où  $A_i = C'_1 \rightarrow (\dots \rightarrow (C_j \rightarrow \dots \rightarrow (C'_k \rightarrow G) \dots) \dots)$ , avec  $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} v_j[p_n/\alpha] : C_j$ . Donc  $C_j$  est un sous-type de  $E$ , et d'après l'hypothèse d'induction,  $Lg(E) \geq n$ .  $\spadesuit$

**Définition :** Soit  $A$  un type du système  $\mathcal{F}$ . On définit le type  $A^s$  par induction sur  $A$  :

- si  $A = X$ , alors  $A^s = X$  ;
- si  $A = B \rightarrow C$ , alors  $A^s = B^s \rightarrow C^s$  ;
- si  $A = \forall X B$ , alors  $A^s = B^s$ .

Soit  $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$ , on note  $\Gamma^s = x_1 : A_1^s, \dots, x_n : A_n^s$ . Alors on a le lemme suivant :

**Lemme 2.2.7** *Soient  $E$  un type du système  $\mathcal{F}$ , et  $t$  un  $\lambda$ -terme. Si  $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash_{\mathcal{F}_0} t : E$ , alors  $\Gamma^s \vdash_{\mathcal{S}} t : E^s$ .*

**Preuve :** Par induction sur le typage. ♠

**Théorème 2.2.8** *Si  $E$  est un type entrée du système  $\mathcal{F}$ , alors  $E$  est un type sortie.*

**Preuve :** Soit  $t$  un  $\lambda$ -terme normal tel que  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} t : E$ . Supposons que  $Lg(E) = r$ , et considérons le  $\lambda$ -terme  $p_n$ , avec  $n > r$ . Si  $\alpha \in Fv(t)$ , alors  $\alpha : X_1, \dots, X_n \rightarrow Id \vdash_{\mathcal{F}} t : E$ . Comme  $\vdash_{\mathcal{F}} p_n : X_1, \dots, X_n \rightarrow Id$ , alors, d'après la proposition 1.2,  $\vdash_{\mathcal{F}} t[p_n/\alpha] : E$ . Or  $\alpha$  ne peut pas être en position d'application, car  $\alpha$  est de type atomique, donc  $t[p_n/\alpha]$  est normal.  $E$  étant un type entrée, on obtient alors  $\vdash_{\mathcal{F}_0} t[p_n/\alpha] : E$ . Donc, d'après le lemme 2.2.7,  $\vdash_{\mathcal{S}} t[p_n/\alpha] : E^s$ , d'où, d'après le lemme 2.2.6,  $Lg(E) \geq n$ . Ce qui fait que  $r \geq n$ , contradiction. Par conséquent  $\alpha \notin Fv(t)$ , et donc  $E$  est un type sortie. ♠

**Théorème 2.2.9** *Si  $A$  et  $B$  sont des types entrées, alors  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ , et  $LA$  sont des types entrées.*

**Preuve :** Faisons la preuve pour  $A \wedge B$ . Soit  $t$  un  $\lambda$ -terme normal tel que  $\vdash_{\mathcal{F}} t : A \wedge B$ , donc  $t = \lambda x(x)ab$ , avec  $\alpha : O, x : (A, B \rightarrow O) \vdash_{\mathcal{F}} a : A$  et  $\alpha : O, x : (A, B \rightarrow O) \vdash_{\mathcal{F}} b : B$ . Or  $A$  et  $B$  sont des types entrées donc sorties. D'après le théorème 2.1.1, on a  $\vdash_{\mathcal{F}} a : A$  et  $\vdash_{\mathcal{F}} b : B$ , donc  $\vdash_{\mathcal{F}_0} a : A$  et  $\vdash_{\mathcal{F}_0} b : B$ . Par conséquent  $\vdash_{\mathcal{F}_0} t : A \wedge B$ . ♠

### 3 Sortie $\Rightarrow$ Entrée

Nous avons montré dans le paragraphe précédent qu'un type entrée est un type sortie. Ce résultat nous a conduit à regarder la réciproque. Nous allons la démontrer dans des cas particuliers, où on impose des restrictions sur la règle de typage ( $\forall_e$ ).

**Définition :** Si  $G$  est un type du système  $\mathcal{F}$ , alors on note par  $G^o$  le type  $O \rightarrow G \wedge O$ .

**Présentation globale de la preuve :**

Soit  $E$  un type sortie. On se propose de trouver des conditions pour que  $E$  soit un type entrée. Raisonnons par l'absurde, donc supposons que  $E$  n'est pas un type entrée, alors il existe un  $\lambda$ -terme normal  $T$  tel que  $\vdash_{\mathcal{F}} T : E$  et  $\not\vdash_{\mathcal{F}_0} T : E$ . Ce qui fait qu'au cours de typage de  $T$  on a utilisé au moins une fois la règle de typage ( $\forall_e$ ). C'est à dire, on avait dans le typage de  $T$ ,

$\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \delta : \forall X A$   
 $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \delta : A[G/X]$ ,  $\delta$  étant un sous-terme de  $T$ ,  $\Gamma$  un contexte et  $A, G$  deux types, avec  $X$  figure dans  $A$ . Pour aboutir à une contradiction, il suffit de trouver un terme normal  $T^o$  contenant  $\alpha$  tel que  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} T^o : E$ . On procède de la manière suivante: On reprend le typage de  $T$  et lorsqu'on arrive à  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \delta : \forall X A$ , on applique la règle  $(\forall_e)$ , en remplaçant cette fois  $X$  par  $G^o$ . C'est à dire, on obtient  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \delta : A[G^o/X]$ . Donc s'il existe un terme  $T'_A$  tel que  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} T'_A : A[G^o/X] \rightarrow A[G/X]$ , on aura  $\Gamma, \alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} (T'_A)\delta : A[G/X]$ . Puis on suivra les mêmes étapes que précédemment (dans le typage de  $T$ ) pour obtenir un terme.  $T^o$  est la forme normale du terme obtenu.

Le premier lemme à démontrer est donc l'existence d'un terme  $T'_A$  tel que  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} T'_A : A[G^o/X] \rightarrow A[G/X]$ .

**Définition :** Si  $F$  est un type, on définit deux  $\lambda$ -termes  $T_F$  et  $T'_F$  par induction sur  $F$  de la façon suivante :

- si  $X \notin Fv(F)$ , alors  $T_F = T'_F = \lambda x x$  ;
- si  $F = X$ , alors  $T_F = \lambda x \lambda \beta \lambda g(g)x\alpha$  et  $T'_F = \lambda x(x)\alpha \mathbf{1}$  ;
- si  $F = C \rightarrow D$ , alors  $T_F = \lambda x \lambda y(T_D)(x)(T'_C)y$  et  $T'_F = \lambda x \lambda y(T'_D)(x)(T_C)y$  ;
- si  $F = \forall Y B$ , alors  $T_F = \lambda x(T_B)x$  et  $T'_F = \lambda x(T'_B)x$ .

On a alors le lemme suivant :

**Lemme 3.1**  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} T_A : A[G/X] \rightarrow A[G^o/X]$  et  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} T'_A : A[G^o/X] \rightarrow A[G/X]$ .

**Preuve :** Par induction sur  $A$ .

- Si  $A = X$ , alors  $A[G/X] = G$  et  $A[G^o/X] = G^o$ . On a  $\alpha : O, x : G \vdash_{\mathcal{F}} \lambda g(g)x\alpha : G \wedge O$ , donc  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} \lambda x \lambda \beta \lambda g(g)x\alpha : G \rightarrow G^o$ . D'autre part,  $x : G^o, \alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} (x)\alpha : G \wedge O$ , donc  $x : G^o, \alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} (x)\alpha \mathbf{1} : G$ . D'où  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} \lambda x(x)\alpha \mathbf{1} : G^o \rightarrow G$ .
- Si  $A = B \rightarrow C$ , on a par hypothèse d'induction  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} T'_B : B[G^o/X] \rightarrow B[G/X]$ , donc  $\alpha : O, y : B[G^o/X] \vdash_{\mathcal{F}} (T'_B)y : B[G/X]$ . D'où  $\alpha : O, y : B[G^o/X], x : B[G/X] \rightarrow C[G/X] \vdash_{\mathcal{F}} (x)(T'_B)y : C[G/X]$ . Or par hypothèse d'induction,  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} T_C : C[G/X] \rightarrow C[G^o/X]$ , donc  $\alpha : O, y : B[G^o/X], x : B[G/X] \rightarrow C[G/X] \vdash_{\mathcal{F}} (T_C)(x)(T'_B)y : C[G^o/X]$ . Par conséquent  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} T_A = \lambda x \lambda y(T_C)(x)(T'_B)y : A[G/X] \rightarrow A[G^o/X]$ . La même démonstration se fait pour  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} T'_A = \lambda x \lambda y(T'_C)(x)(T_B)y : A[G^o/X] \rightarrow A[G/X]$ .
- Si  $A = \forall Y B$ , il faut démontrer que  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} \lambda x(T_B)x : A[G/X] \rightarrow A[G^o/X]$  et  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} \lambda x(T'_B)x : A[G^o/X] \rightarrow A[G/X]$ . On a  $x : \forall Y B[G/X] \vdash_{\mathcal{F}} x : B[G/X]$ . Comme par hypothèse d'induction,  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} T_B : B[G/X] \rightarrow B[G^o/X]$ , alors  $\alpha : O, x : \forall Y B[G/X] \vdash_{\mathcal{F}} (T_B)x : B[G^o/X]$ . D'où  $\alpha : O, x : \forall Y B[G/X] \vdash_{\mathcal{F}} (T_B)x : \forall Y B[G^o/X]$ , et donc  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} T_A = \lambda x(T_B)x : A[G/X] \rightarrow A[G^o/X]$ . La même démonstration se fait pour  $\alpha : O \vdash_{\mathcal{F}} T'_A = \lambda x(T'_B)x : A[G^o/X] \rightarrow A[G/X]$ .  $\spadesuit$

Notons que dans ce paragraphe, tous les  $\lambda$ -termes considérés sont typables et donc fortement normalisables.

**Définition :** On dit qu'un  $\lambda$ -terme est **simple** s'il est de la forme  $(x)u_1\dots u_n$ , avec  $x$  une variable et  $u_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) un  $\lambda$ -terme normal.

Dans le typage de  $T$ , on avait  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \delta : A[G/X]$ . On a le lemme suivant :

**Lemme 3.2** *On peut traiter seulement le cas où  $\delta$  est un  $\lambda$ -terme simple.*

**Preuve :** Il faut étudier trois cas.

– L'étape suivante dans le typage de  $T$  est l'application de  $\delta$  à un terme  $u$ . Comme le terme  $T$  est normal,  $\delta$  est un  $\lambda$ -terme simple.

– L'étape suivante dans le typage de  $T$  est l'application de la règle  $(\rightarrow_i)$ , donc  $\Gamma - \{y : B\} \vdash_{\mathcal{F}} \lambda y \delta : B \rightarrow A[G/X]$ , avec  $y : B \in \Gamma$ .

Parallèlement on a,  $\Gamma - \{y : B\} \vdash_{\mathcal{F}} \lambda y (T'_A) \delta : B \rightarrow A[G/X]$ . Alors si  $\alpha$  appartient à la forme normale de  $(T'_A) \delta$ , il appartient à la forme normale de  $\lambda y (T'_A) \delta$ . Comme le terme  $T$  est normal, ce cas ne pose pas de problème.

– L'étape suivante dans le typage de  $T$  est l'application d'un terme  $u$  à  $\delta$ , donc  $\Gamma' \vdash_{\mathcal{F}} u : A[G/X] \rightarrow B$  et  $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{F}} (u) \delta : B$ .

Parallèlement on a,  $\Gamma, \Gamma' \vdash_{\mathcal{F}} (u) (T'_A) \delta : B$ .  $u$  est un  $\lambda$ -terme simple, car le terme  $T$  est normal. Si  $\alpha$  appartient à la forme normale de  $(T'_A) \delta$ , alors il appartient à la forme normale de  $(u) (T'_A) \delta$ . Par conséquent ce cas ne pose pas de problème. ♠

Dans la suite on suppose donc que  $\delta$  est un  $\lambda$ -terme simple. Montrons que  $\alpha$  appartient à la forme normale de  $(T'_A) \delta$ .

**Lemme 3.3** (i) *Pour tout  $\lambda$ -terme simple  $\Delta$ ,  $\alpha$  est libre dans la forme normale de  $(T_A) \Delta$ .*

(ii) *Pour tout  $\lambda$ -terme simple  $\Delta$ ,  $\alpha$  est libre dans la forme normale de  $(T'_A) \Delta$ .*

**Preuve :** Par induction simultanée sur  $A$ .

**Preuve de (i) :**

– Si  $A = X$ , alors  $(T_X) \Delta \rightarrow_{\beta} \lambda \beta \lambda g(g) \Delta \alpha$ , et donc c'est bon.

– Si  $A = B \rightarrow C$ , alors  $(T_A) \Delta \rightarrow_{\beta} \lambda y (T_C) (\Delta) (T'_B) y$ . Si  $X$  est libre dans  $C$ , alors, d'après l'hypothèse d'induction,  $\alpha$  est libre dans la forme normale de  $(T_C) (\Delta) (T'_B) y$ , donc  $\alpha$  est libre dans la forme normale de  $(T_A) \Delta$ . Si  $X$  n'est pas libre dans  $C$ , alors  $(T_A) \Delta \rightarrow_{\beta} \lambda y (\Delta) (T'_B) y$ , et  $X$  est libre dans  $B$ . Donc d'après (ii),  $\alpha$  est libre dans la forme normale de  $(T'_B) y$ , d'où  $\alpha$  est libre dans la forme normale de  $(T_A) \Delta$ .

– Si  $A = \forall Y B$ , alors  $(T_A) \Delta \rightarrow_{\beta} (T_B) \Delta$ , et donc par hypothèse d'induction, on a le résultat.

**Preuve de (ii) :**

– Si  $A = X$ , alors  $(T'_X) \Delta \rightarrow_{\beta} (\Delta) \alpha \mathbf{1}$ .

– Pour les autres cas, on reprend la même preuve que (i). ♠

Dans la suite on va donner des cas particuliers qui prouvent que  $E$  n'est pas un type sortie.

**Théorème 3.4** Soient  $t_1, \dots, t_r$  des  $\lambda$ -termes. Si  $A$  se termine par  $X$ , alors la forme normale de  $(T'_A)\delta t_1 \dots t_r$  contient  $\alpha$ .

**Preuve :** On a  $A = \forall \mathbf{X}_0(A_1 \rightarrow \forall \mathbf{X}_1(A_2 \rightarrow \dots \rightarrow \forall \mathbf{X}_{n-1}(A_n \rightarrow \forall \mathbf{X}_n X) \dots))$ .

Donc  $(T'_A)\delta \rightarrow_\beta (T'_{A_1 \rightarrow \forall \mathbf{X}_1(A_2 \rightarrow \dots \rightarrow \forall \mathbf{X}_{n-1}(A_n \rightarrow \forall \mathbf{X}_n X) \dots)})\delta \rightarrow_\beta$

$\lambda y_1 (T'_{\forall \mathbf{X}_1(A_2 \rightarrow \dots \rightarrow \forall \mathbf{X}_{n-1}(A_n \rightarrow \forall \mathbf{X}_n X) \dots)}) (\delta) (T_{A_1}) y_1 \rightarrow_\beta$

$\lambda y_1 (T'_{A_2 \rightarrow \dots \rightarrow \forall \mathbf{X}_{n-1}(A_n \rightarrow \forall \mathbf{X}_n X) \dots}) (\delta) (T_{A_1}) y_1 \rightarrow_\beta$

$\lambda y_1 \lambda y_2 (T'_{\forall \mathbf{X}_2(A_3 \rightarrow \dots \rightarrow \forall \mathbf{X}_{n-1}(A_n \rightarrow \forall \mathbf{X}_n X) \dots)}) (\delta) (T_{A_1}) y_1 (T_{A_2}) y_2 \rightarrow_\beta$

$\lambda y_1 \dots \lambda y_n (T'_X) (\delta) (T_{A_1}) y_1 \dots (T_{A_n}) y_n \mathbf{1} \rightarrow_\beta \lambda y_1 \dots \lambda y_n (\delta) (T_{A_1}) y_1 \dots (T_{A_n}) y_n \alpha \mathbf{1}$ .

Dans la réduction de  $(T'_A)\delta t_1 \dots t_r$ , trois cas peuvent se produire :

–  $r = n$ , donc  $(T'_A)\delta t_1 \dots t_r \rightarrow_\beta (\delta) (T_{A_1}) t_1 \dots (T_{A_n}) t_n \alpha \mathbf{1}$ .

–  $r < n$ , donc  $(T'_A)\delta t_1 \dots t_r \rightarrow_\beta \lambda y_{r+1} \dots \lambda y_n (\delta) (T_{A_1}) t_1 \dots (T_{A_n}) t_n \alpha \mathbf{1}$ .

–  $r > n$ , donc  $(T'_A)\delta t_1 \dots t_r \rightarrow_\beta (\delta) (T_{A_1}) t_1 \dots (T_{A_n}) t_n \alpha \mathbf{1} t_{n+1} \dots t_r$ .

On remarque que dans les trois cas, la forme normale de  $(T'_A)\delta t_1 \dots t_r$  contient  $\alpha$ . ♠

Supposons donc que  $A = \forall \mathbf{X}_0(A_1 \rightarrow \forall \mathbf{X}_1(A_2 \rightarrow \dots \rightarrow \forall \mathbf{X}_{n-1}(A_n \rightarrow \forall \mathbf{X}_n Y) \dots))$ , où  $Y$  est une variable différente de  $X$ . On a le lemme suivant :

**Lemme 3.5** Soient  $t_1, \dots, t_r$  des  $\lambda$ -termes. Si l'un des  $A_i$  est égal à  $X$ , alors la forme normale de  $(T'_A)\delta t_1 \dots t_r$  contient  $\alpha$ .

**Preuve :** On a  $(T'_A)\delta \rightarrow_\beta$

$\lambda y_1 \dots \lambda y_{n-1} (T'_{A_n \rightarrow \forall \mathbf{X}_n Y}) (\delta) (T_{A_1}) y_1 \dots (T_{A_i}) y_i \dots (T_{A_{n-1}}) y_{n-1} \rightarrow_\beta$

$\lambda y_1 \dots \lambda y_{n-1} \lambda y_n (T'_{\forall \mathbf{X}_n Y}) (\delta) (T_{A_1}) y_1 \dots (T_{A_{n-1}}) y_{n-1} (T_{A_n}) y_n \rightarrow_\beta$

$\lambda y_1 \dots \lambda y_{n-1} \lambda y_n (T'_Y) (\delta) (T_{A_1}) y_1 \dots (T_{A_{n-1}}) y_{n-1} (T_{A_n}) y_n \rightarrow_\beta$

$\lambda y_1 \dots \lambda y_n (\delta) (T_{A_1}) y_1 \dots (T_{A_n}) y_n$ .

Si  $A_i = X$ , alors  $(T_X) y_i \rightarrow_\beta \lambda \beta \lambda g (g) y_i \alpha$ .

Donc  $(T'_A)\delta \rightarrow_\beta \lambda y_1 \dots \lambda y_n (\delta) (T_{A_1}) y_1 \dots \lambda \beta \lambda g (g) y_i \alpha \dots (T_{A_n}) y_n$ .

Comme  $y_i$  reste en position d'argument, alors par le même raisonnement du théorème 3.4, on peut voir que la forme normale de  $(T'_A)\delta t_1 \dots t_r$  contient  $\alpha$ . ♠

Le lemme suivant est un raffinement du lemme 3.3.

**Lemme 3.6** Si  $A$  se termine par  $X$ , alors la forme normale de  $(T_A)(x)u_1 \dots u_n$  contient  $\alpha$  qui n'est pas un argument de  $x$ .

**Preuve :** Par induction sur  $A$ .

– Si  $A = X$ , alors  $(T_X)(x)u_1 \dots u_n \rightarrow_\beta \lambda \beta \lambda g ((g)(x)u_1 \dots u_n) \alpha$ . Donc c'est bon.

– Si  $A = B \rightarrow C$ , alors  $C$  se termine par  $X$ , et  $(T_A)(x)u_1 \dots u_n \rightarrow_\beta$

$\lambda y (T_C)(x)u_1 \dots u_n (T'_B) y$ . Par hypothèse d'induction sur  $C$ , on a le résultat.

– Si  $A = \forall Y B$ , alors  $B$  se termine par  $X$ , et  $(T_A)(x)u_1 \dots u_n \rightarrow_\beta (T_B)(x)u_1 \dots u_n$ .  
Donc, par hypothèse d'induction sur  $B$ , on a le résultat. ♠

**Théorème 3.7** Soient  $t_1, \dots, t_r$  des  $\lambda$ -termes. Si l'un des  $A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) se termine par  $X$ , alors la forme normale de  $(T'_A)\delta t_1 \dots t_r$  contient  $\alpha$ .

**Preuve :** On a  $A = \forall \mathbf{X}_0(A_1 \rightarrow \forall \mathbf{X}_1(A_2 \rightarrow \dots \rightarrow \forall \mathbf{X}_{n-1}(A_n \rightarrow \forall \mathbf{X}_n Y) \dots))$ , avec  $Y$  une variable. Trois cas à examiner :

–  $A_i = X$ , et on a donc le résultat, d'après le lemme 3.5.

–  $A_i = C_i \rightarrow D_i$ , et donc  $D_i$  se termine par  $X$ . Par conséquent :

$(T'_A)\delta \rightarrow_\beta \lambda y_1 \dots \lambda y_n (\delta)(T_{A_1})y_1 \dots (T_{A_{i-1}})y_{i-1} (T_{C_i \rightarrow D_i})y_i \dots (T_{A_n})y_n \rightarrow_\beta$   
 $\lambda y_1 \dots \lambda y_n (\delta)(T_{A_1})y_1 \dots (T_{A_{i-1}})y_{i-1} \lambda z (T_{D_i})(y_i)(T'_{C_i})z \dots (T_{A_n})y_n$ .

Or d'après le lemme 3.6, la forme normale de  $(T_{D_i})(y_i)(T'_{C_i})z$  contient  $\alpha$  qui n'est pas un argument de  $y_i$ , donc la forme normale de  $(T'_A)\delta t_1 \dots t_r$  contient  $\alpha$ .

–  $A_i = \forall Z B_i$ , et donc  $B_i$  se termine par  $X$ . On a  $(T'_A)\delta \rightarrow_\beta$   
 $\lambda y_1 \dots \lambda y_n (\delta)(T_{A_1})y_1 \dots (T_{B_i})y_i \dots (T_{A_n})y_n$ . D'où, d'après l'hypothèse d'induction, la forme normale de  $(T'_A)\delta t_1 \dots t_r$  contient  $\alpha$ . ♠

**Définition :** On définit le système  $\mathcal{F}_F$  comme étant le système  $\mathcal{F}$  où on remplace la règle  $(\forall_e)$  par la règle :

$$(\forall_e)_F \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{F}_F} t : \forall X A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{F}_F} t : A[G/X]}$$

où  $A = \forall \mathbf{X}_0(A_1 \rightarrow \forall \mathbf{X}_1(A_2 \rightarrow \dots \rightarrow \forall \mathbf{X}_{n-1}(A_n \rightarrow \forall \mathbf{X}_n Y) \dots))$ , avec  $Y = X$  ou l'un des  $A_i$  se termine par  $X$ .

Alors on a le résultat suivant :

**Théorème 3.8**  $E$  est un type sortie dans le système  $\mathcal{F}_F$  ssi  $E$  est un type entrée.

## 4 Opérateurs de mise en mémoire

**Définition :** Soient  $D$  un type, et  $T$  un  $\lambda$ -terme clos. On dit que  $T$  est un **opérateur de mise en mémoire** (en abrégé **o.m.m.**) pour  $D$  ssi pour tout  $\lambda$ -terme  $t$  tel que  $\vdash_{\mathcal{F}} t : D$ , il existe deux  $\lambda$ -termes  $\tau, \tau'$ , avec  $\tau \simeq_\beta \tau'$  et  $\vdash_{\mathcal{F}} \tau' : D$ , tel que pour tout  $\lambda$ -terme  $\theta_t \simeq_\beta t$ , il existe une substitution  $\sigma$ , telle que  $(T)\theta_t f \succ_f (f)\sigma(\tau)$  où  $f$  est une nouvelle variable.

**Définition :** Soit  $\perp$  une constante de type particulière. Pour toute formule  $A$  de  $\mathcal{F}$ , on note par  $\neg A$  la formule  $A \rightarrow \perp$ , et par  $A^*$  la formule obtenue en remplaçant chaque formule atomique  $R$  de  $A$  par  $\neg R$  ( $A^*$  est dite la **traduction de Gödel de  $A$** ).

On a le résultat suivant (voir [8]) :

**Théorème 4.1** *Soit  $D$  un type  $\forall^+$  tel que  $\perp$  ne figure pas dans  $D$ . Si  $\vdash_{\mathcal{F}} T : D^* \rightarrow \neg\neg D$ , alors  $T$  est un o.m.m. pour  $D$ .*

Dans la preuve de ce théorème, on utilise deux propriétés essentielles qui sont valables pour les types de données syntaxiques: l'une vient du fait que  $D$  est un type entrée et l'autre est le théorème 2.1.1 pour les types sorties. D'où le résultat suivant :

**Théorème 4.2** *Soit  $D$  un type de données syntaxique tel que  $\perp$  ne figure pas dans  $D$ . Si  $\vdash_{\mathcal{F}} T : D^* \rightarrow \neg\neg D$ , alors  $T$  est un o.m.m. pour  $D$ .*

D'autre part on remarque que dans la preuve du théorème 4.2, on utilise le type  $D$  qui est à gauche de l'implication (dans l'énoncé) comme type entrée et le type à droite comme type sortie. D'où la définition et le résultat suivants :

**Définition :** On dit qu'un  $\lambda$ -terme clos  $T$  est un **o.m.m. pour le couple de types**  $(E, S)$  ssi pour tout  $\lambda$ -terme  $t$  vérifiant  $\vdash_{\mathcal{F}} t : E$ , il existe deux  $\lambda$ -termes  $\tau, \tau'$ , avec  $\tau \simeq_{\beta} \tau'$  et  $\vdash_{\mathcal{F}} \tau' : S$ , tel que pour tout  $\lambda$ -terme  $\theta_t \simeq_{\beta} t$ , il existe une substitution  $\sigma$ , telle que  $(T)\theta_t f \succ_f (f)\sigma(\tau)$  où  $f$  est une nouvelle variable.

**Théorème 4.3** *Soit  $E$  un type entrée et  $S$  un type sortie, tel que  $\perp$  ne figure pas dans  $S$ . Si  $\vdash_{\mathcal{F}} T : E^* \rightarrow \neg\neg S$ , alors  $T$  est un o.m.m. pour  $(E, S)$ .*

**Remarque :** La condition  $S$  sortie est nécessaire pour avoir le théorème 4.3. En effet, si  $S$  n'est pas sortie, alors il existe un  $\lambda$ -terme normal  $t$  contenant  $x$  tel que  $x : O \vdash_{\mathcal{F}} t : S$ . D'où  $x : E^* \vdash_{\mathcal{F}} t : S$ , car  $O \notin Fv(S)$ , et donc  $x : E^* \vdash_{\mathcal{F}} \lambda y(y)t : \neg\neg S$ . Ce qui fait que  $\vdash_{\mathcal{F}} T = \lambda x \lambda y(y)t : E^* \rightarrow \neg\neg S$ . D'autre part  $T$  n'est pas un o.m.m. pour  $(E, S)$ , car  $(T)\tau f \succ_f (f)t[\tau/x]$  pour tout  $\tau \simeq_{\beta} t$  et  $t[\tau/x]$  contient la variable  $x$ .

## REMERCIEMENTS

Nous remercions R. David pour ses conseils et ses remarques.

## References

- [1] S. Farkh, *Types de données en logique du second ordre*. Thèse de doctorat, Université de Savoie, France (1998).
- [2] S. Farkh et K. Nour, Résultats de complétudes pour les types  $\forall^+$  du système  $\mathcal{F}$ . *C. R. Acad. Sci. Paris* **326 - I** (1998) 275-279.
- [3] J.-Y. Girard, Y. Lafont and P. Taylor, *Proofs and Types*. Cambridge University Press (1986).



- [4] J.-L. Krivine. *Lambda-calcul, types et modèles*. Masson, Paris (1990).
- [5] J.-L. Krivine, Classical Logic, Storage Operators and Second Order Lambda-Calculs. *Annals of Pure and Applied Logic* **68** (1994) 53-78.
- [6] J.-L. Krivine, Opérateurs de mise en mémoire et traduction de Gödel. *Archive for Mathematical Logic* **30** (1990) 241-267.
- [7] K. Nour, *Opérateurs de mise en mémoire en lambda-calcul pur et typé*. Thèse de doctorat, Université de Savoie, France (1993).
- [8] K. Nour, Opérateurs de mise en mémoire et types  $\forall$ -positifs. *RAIRO - Inform. Théor. Appl.* **30** (1996) 261-293.
- [9] K. Nour, Les  $I$ -types du système  $\mathcal{F}$ . *RAIRO - Inform. Théor. Appl.* (to appear).