



**HAL**  
open science

# Un Résultat de Complétude pour les Types $\forall^+$ du Système F

Karim Nour, Samir Farkh

► **To cite this version:**

Karim Nour, Samir Farkh. Un Résultat de Complétude pour les Types  $\forall^+$  du Système F. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 1998, 326, pp.275-279. hal-00381215

**HAL Id: hal-00381215**

**<https://hal.science/hal-00381215>**

Submitted on 5 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un Résultat de Complétude pour les Types $\forall^+$ du Système $\mathcal{F}$

Samir FARKH et Karim NOUR

LAMA - Equipe de Logique - Université de Savoie - 73376 Le Bourget du Lac.  
E-mail sfarkh, knour@univ-savoie.fr

**Résumé.** Nous présentons dans cette note un résultat de complétude pour les types à quantificateurs positifs du système  $\mathcal{F}$  de J.-Y. Girard. Ce résultat généralise un théorème de R. Labib-Sami (voir [3]).

## A Completeness Result for the $\forall^+$ Types of System $\mathcal{F}$

**Abstract.** We present in this note a completeness result for the types with positive quantifiers of the J.-Y. Girard type system  $\mathcal{F}$ . This result generalizes a theorem of R. Labib-Sami (see [3]).

**Abridged English Version.** The  $\mathcal{F}$  type system have been introduced by J.-Y. Girard (see [1]). This system is based on the second order intuitionistic propositional calculus, and thus it gives the possibility to quantify on types. In addition to strong normalisation theorem which certifies the termination of programs, the system  $\mathcal{F}$  has two more properties :

It allows to write programs for all the fonctions whose termination can be proved in the Peano's second order arithmetics.

- It allows to define all the usual data types : booleans, integers, lists, etc.

The semantics of the system  $\mathcal{F}$  proposed by J.-Y. Girard and J.-L. Krivine (see [1] and [2]) consists in associating to each type  $A$  a set of  $\lambda$ -terms  $|A|$ , in order to obtain the following result: if a  $\lambda$ -term  $t$  is of type  $A$ , then it belongs to the set  $|A|$ . This result is known as the adequation lemma, and it allows to prove the strong normalisation of system  $\mathcal{F}$  and the unicity of data representation.

The converse of the adequation lemma (a completeness result) is not true. The difficulty comes from the interpretation of second order quantifier. R. Labib-Sami proved a completeness result for the types with positive quantifiers and for a semantic based on the sets stable by the  $\beta\eta$ -equivalence (see [3]). In this

note we prove a refined result by indicating that weak-head-expansion suffices. Hence, it presents a generalisation of R. Labib-Sami's result. In the end of this note, we deduce some consequences among which the fact that for each type with positive quantifiers  $A$ , the set  $|A|$  is stable by  $\beta$ -equivalence.

## 1 Notations et définitions

On désignera par  $\Lambda$  l'ensemble des termes du  $\lambda$ -calcul pur, dits aussi  $\lambda$ -termes. Étant donnés des  $\lambda$ -termes  $t, u, u_1, \dots, u_n$ , l'application de  $t$  à  $u$  sera notée  $(t)u$ , et  $(\dots((t)u_1)\dots)u_n$  sera noté  $(t)u_1\dots u_n$ . Si  $t$  est un  $\lambda$ -terme, on désigne par  $Fv(t)$  l'ensemble de ses variables libres. On note par  $\rightarrow_\beta$  la  $\beta$ -réduction, et par  $\simeq_\beta$  la  $\beta$ -équivalence. Un  $\lambda$ -terme  $t$  soit possède un redex de tête faible [i.e.  $t = (\lambda x u) v v_1 \dots v_m$ , le redex de tête faible est  $(\lambda x u)v$ ], soit est en forme normale de tête faible [i.e.  $t = (x)v_1 \dots v_m$  ou  $t = \lambda x v$ ]. La notation  $u \succ_f v$  signifie que  $v$  est obtenu à partir de  $u$  par réduction de tête faible.

Nous utilisons comme système de typage le système  $\mathcal{F}$  de J.-Y. Girard. Les types de ce système sont les formules construites à l'aide d'un ensemble dénombrable de variables propositionnelles  $X, Y, \dots$ , et deux connecteurs  $\rightarrow$  et  $\forall$ . Étant donné un  $\lambda$ -terme  $t$ , un type  $A$ , et un contexte  $\Gamma = \{x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n\}$ , on définit au moyen des règles suivantes la notion "t est typable de type  $A$  dans le contexte  $\Gamma$ ". Cette notion est notée  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ .

- (1)  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} x_i : A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).
- (2) Si  $\Gamma, x : B \vdash_{\mathcal{F}} t : C$ , alors  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \lambda x t : B \rightarrow C$ .
- (3) Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} u : B \rightarrow C$ , et  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} v : B$ , alors  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} (u)v : C$ .
- (4) Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ , et  $X$  ne figure pas dans  $\Gamma$ , alors  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : \forall X A$ .
- (5) Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : \forall X A$ , alors, pour tout type  $C$ ,  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A[C/X]$ .

Il est facile de voir que : Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A$  et  $\Gamma \subseteq \Gamma'$ , alors  $\Gamma' \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ . Et si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ , alors  $\Gamma' \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ , où  $\Gamma'$  est la restriction de  $\Gamma$  aux déclarations contenant les variables libres de  $t$ .

Le système  $\mathcal{F}$  possède les propriétés suivantes (voir [2]):

- Théorème 1** (i) Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ , et  $t \rightarrow_\beta t'$ , alors  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t' : A$ .  
(ii) Si  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t : A$ , alors  $t$  est fortement normalisable.

Une partie  $G$  de  $\Lambda$  est dite saturée si, quels que soient les termes  $t$  et  $u$ , on a :  $(u \in G \text{ et } t \succ_f u) \Rightarrow t \in G$ . Il est clair que l'intersection d'un ensemble de parties saturées de  $\Lambda$  est saturée. Étant données deux parties  $G$  et  $G'$  de  $\Lambda$ , on définit une partie de  $\Lambda$ , notée  $G \rightarrow G'$ , en posant :  $u \in (G \rightarrow G') \Leftrightarrow (u)t \in G'$  quel que soit  $t \in G$ . Si  $G'$  est saturée, alors  $G \rightarrow G'$  est saturée pour toute partie  $G \subset \Lambda$ . Une interprétation  $I$  est, par définition, une application  $X \rightarrow |X|_I$  de l'ensemble des variables de type dans l'ensemble des parties saturées de  $\Lambda$ .  $X$  étant une variable de type, et  $G$  une partie saturée de  $\Lambda$ , on définit une interprétation  $J = I[X \leftarrow G]$  en posant  $|X|_J = G$ , et  $|Y|_J = |Y|_I$  pour toute variable  $Y \neq X$ . Pour chaque type  $A$ , sa valeur  $|A|_I$  dans l'interprétation  $I$  est une partie saturée définie comme suit, par induction sur  $A$  :

- Si  $A$  est une variable de type,  $|A|_I$  est déjà définie ;
- $|A \rightarrow B|_I = |A|_I \rightarrow |B|_I$  ;
- $|\forall X A|_I = \cap\{|A|_{I[X \leftarrow G]}$  pour toute partie saturée  $G\}$ .

Il est facile de vérifier que : si  $A, F$  sont deux types,  $X$  une variable, et  $I$  une interprétation, alors  $|A[F/X]|_I = |A|_{I[X \leftarrow |F|_I]}$ .

Pour tout type  $A$ , on note  $|A| = \cap\{|A|_I ; I \text{ interprétation}\}$ .

**Théorème 2** [lemme d'adéquation] *Soient  $A$  un type, et  $t$  un  $\lambda$ -terme clos. Si  $\vdash_{\mathcal{F}} t : A$ , alors  $t \in |A|$ .*

## 2 Le résultat de complétude

On définit de la façon suivante les types à quantificateurs positifs (resp. à quantificateurs négatifs), notés en abrégé  $\forall^+$  (resp.  $\forall^-$ ) :

- Une variable propositionnelle  $X$  est  $\forall^+$  et  $\forall^-$  ;
- Si  $A$  est  $\forall^+$  (resp.  $\forall^-$ ) et  $B$  est  $\forall^-$  (resp.  $\forall^+$ ), alors  $B \rightarrow A$  est  $\forall^+$  (resp.  $\forall^-$ ) ;
- Si  $A$  est  $\forall^+$  et  $X$  est libre dans  $A$ , alors  $\forall X A$  est  $\forall^+$ .

On se propose de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 3** *Soient  $A$  un type  $\forall^+$  du système  $\mathcal{F}$ , et  $t$  un  $\lambda$ -terme, alors :*

$t \in |A| \Leftrightarrow (t \rightarrow_\beta t' \text{ et } \vdash_{\mathcal{F}} t' : A)$ .

Pour la preuve, nous avons besoin de deux lemmes (lemme 1 et lemme 2).

**Lemme 1** *Soient  $I$  une interprétation, et  $t'$  un  $\lambda$ -terme normal. Si  $\Gamma = x_1 : B_1, \dots, x_n : B_n \vdash_{\mathcal{F}} t' : A$ ,  $t \simeq_\beta t'$ , et  $u_i \in |B_i|_I$  ( $1 \leq i \leq n$ ), alors  $t[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in |A|_I$ .*

**Preuve :** Par induction sur le typage. On considère la dernière règle utilisée.

- Si c'est la règle (1), alors  $t' = x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) et  $B_i = A$ . Comme  $t \simeq_\beta x_i$ , alors  $t \succ_f x_i$ , et  $t[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \succ_f u_i$ . Or  $u_i \in |B_i|_I$ , donc  $t[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in |B_i|_I$ , car  $|B_i|_I$  est une partie saturée.
- Si c'est la règle (2), alors  $t' = \lambda x u'$ ,  $A = B \rightarrow C$  et  $\Gamma, x : B \vdash_{\mathcal{F}} u' : A$ . Comme  $t \simeq_\beta \lambda x u'$ , alors  $t \succ_f \lambda x u$  avec  $u \simeq_\beta u'$ , et  $t[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \succ_f \lambda x u[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n]$ . Donc, d'après l'hypothèse d'induction,  $u[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n, v/x] \in |C|_I$  pour tout  $v \in |B|_I$ . D'autre part  $(\lambda x u[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n])v \succ_f u[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n, v/x]$ , donc  $\lambda x u[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in |B \rightarrow C|_I$ , par conséquent  $t[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in |A|_I$ .
- Si c'est la règle (3), comme  $t'$  est normal, alors  $t' = (u)v$ ,  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} u : B \rightarrow A$  et  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} v : B$ , avec  $u = (x_r)v'_1 \dots v'_{m-1}$  et  $v = v'_m$ . Or  $t \simeq_\beta (x_r)v'_1 \dots v'_m$ , donc  $t \succ_f (x_r)v_1 \dots v_m$ , avec  $v_i \simeq_\beta v'_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ), d'où, d'après l'hypothèse d'induction,  $(u_r)v_1[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \dots v_{m-1}[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in |B \rightarrow A|_I$ , et  $v_m[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in |B|_I$ . Par conséquent  $(u_r)v_1[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \dots v_{m-1}[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n]v_m[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in |A|_I$ , et donc  $t[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in |A|_I$ .
- Si c'est la règle (4), alors  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t' : B$  et  $A = \forall X B$  avec  $X$  ne figure pas dans  $\Gamma$ . Soit  $G$  une partie saturée et  $J = I[X \leftarrow G]$ . Par hypothèse d'induction,  $t[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in |B|_J$ , et donc  $t[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in |A|_I$ .
- Si c'est la règle (5), alors  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} t' : \forall X B$  et  $A = B[C/X]$ . Par hypothèse d'induction,  $t[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in |\forall X B|_I$ , d'où  $t[u_1/x_1, \dots, u_n/x_n] \in |B|_{I[X \leftarrow |C|_I]} = |A|_I$ . ♠

Soient  $\Omega = \{x_i/i \in \mathbf{N}\}$  une énumération d'un ensemble infini de variables du  $\lambda$ -calcul, et  $\{A_i/i \in \mathbf{N}\}$  une énumération des types  $\forall^-$  du système  $\mathcal{F}$ ,

où chaque type  $\forall^-$  se répète une infinité de fois. On définit alors l'ensemble  $\Gamma^- = \{x_i : A_i/i \in \mathbf{N}\}$ . Soit  $u$  un  $\lambda$ -terme, tel que  $Fv(u) \subseteq \Omega$ , on définit le contexte  $\Gamma_u^-$  comme étant la restriction de  $\Gamma^-$  aux déclarations contenant les variables de  $Fv(u)$ . La notation  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}} u : B$  exprime que  $\Gamma_u^- \vdash_{\mathcal{F}} u : B$ . On pose  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}}^+ u : A$  ssi il existe un  $\lambda$ -terme  $u'$ , tel que  $u \rightarrow_{\beta} u'$  et  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}} u' : A$ . On définit ensuite une interprétation  $\mathcal{I}$  en posant  $|X|_{\mathcal{I}} = \{\tau \in \Lambda : \Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}}^+ \tau : X\}$  pour toute variable de type  $X$ . Les parties  $|X|_{\mathcal{I}}$  sont évidemment saturées.

**Lemme 2** (i) Si  $S$  est un type  $\forall^+$ , et  $\tau \in |S|_{\mathcal{I}}$ , alors  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}}^+ \tau : S$ .  
(ii) Si  $S$  est un type  $\forall^-$ , et  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}}^+ \tau : S$ , alors  $\tau \in |S|_{\mathcal{I}}$ .

**Preuve :** Par induction simultanée sur les types  $\forall^+$  et  $\forall^-$ .

Preuve de (i)

- Si  $S$  est une variable, alors le résultat découle immédiatement de la définition de  $\mathcal{I}$ .
- Si  $S = \forall XB$ , où  $B$  est  $\forall^+$ , alors soit  $\tau \in |\forall XB|_{\mathcal{I}}$ , et soit  $Y$  une variable propositionnelle qui ne figure pas dans  $\Gamma^-$  et  $B$ . Donc  $\tau \in |B|_{\mathcal{I}[X \leftarrow |Y|_{\mathcal{I}}]} = |B[Y/X]|_{\mathcal{I}}$ , d'où par hypothèse d'induction  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}}^+ \tau : B[Y/X]$ , donc  $\tau \rightarrow_{\beta} \tau'$  et  $\Gamma_{\tau'}^- \vdash_{\mathcal{F}} \tau' : B[Y/X]$ . Comme  $Fv(\tau') \subseteq Fv(\tau)$ , alors par le choix de  $Y$ , on déduit que  $\Gamma_{\tau'}^- \vdash_{\mathcal{F}} \tau' : \forall Y B[Y/X] = \forall XB$ , et donc  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}}^+ \tau : S$ .
- Si  $S = B \rightarrow C$ , où  $B$  est  $\forall^-$  et  $C$  est  $\forall^+$ , alors soit  $\tau \in |B \rightarrow C|_{\mathcal{I}}$  et soit  $y$  une variable du  $\lambda$ -calcul telle que  $y : B$  appartient à  $\Gamma^-$ . On a  $y : B \vdash_{\mathcal{F}} y : B$ , donc d'après (ii)  $y \in |B|_{\mathcal{I}}$ , par suite  $(\tau)y \in |C|_{\mathcal{I}}$ , et donc, d'après l'hypothèse d'induction,  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}}^+ (\tau)y : C$ . D'où  $(\tau)y \rightarrow_{\beta} \tau'$ , et  $\Gamma_{\tau'}^- \vdash_{\mathcal{F}} \tau' : C$ . Il en résulte que  $(\tau)y$  est normalisable, et donc  $\tau$  est normalisable. La forme normale de  $\tau$  est  $(x)\tau_1 \dots \tau_n$  ( $n \geq 0$ ) ou  $\lambda x \theta$ .

**Cas 1:** Si  $\tau \rightarrow_{\beta} (x)\tau_1 \dots \tau_n$ , avec  $n \geq 0$ , alors  $(\tau)y \rightarrow_{\beta} (x)\tau_1 \dots \tau_n y$ . Comme  $\Gamma_{\tau'}^- \vdash_{\mathcal{F}} \tau' : C$ , on aura  $\Gamma_{\tau'}^- \vdash_{\mathcal{F}} (x)\tau_1 \dots \tau_n y : C$ . Or  $Fv((x)\tau_1 \dots \tau_n y) \subseteq Fv(\tau')$ , donc  $\Gamma_{(x)\tau_1 \dots \tau_n y}^- \vdash_{\mathcal{F}} (x)\tau_1 \dots \tau_n y : C$ . Donc  $x$  est déclarée de type  $E$  dans le contexte  $\Gamma_{(x)\tau_1 \dots \tau_n y}^-$ . Comme  $E$  est  $\forall^-$ , alors  $E = C_1 \rightarrow (\dots \rightarrow (C_n \rightarrow (F \rightarrow G) \dots))$ ,  $\Gamma_{(x)\tau_1 \dots \tau_n y}^- \vdash_{\mathcal{F}} \tau_i : C_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) et  $\Gamma_{(x)\tau_1 \dots \tau_n y}^- \vdash_{\mathcal{F}} y : F$ . Or  $y$  est déclarée de type  $B$ , qui est  $\forall^-$ , dans le contexte  $\Gamma_{(x)\tau_1 \dots \tau_n y}^-$ ,

donc on ne peut pas appliquer la règle de typage (5) à  $y : B \vdash_{\mathcal{F}} y : B$ . D'autre part, si on applique la règle de typage (4) à  $y : B \vdash_{\mathcal{F}} y : B$ ,  $F$  sera le type  $B$  devant lequel on a quantifié sur une variable qui n'est pas libre dans  $B$ , ce qui contredit le fait que  $F$  est  $\forall^+$ . D'où  $F = B$ . De la même façon, comme  $G$  est  $\forall^-$  et  $C$  est  $\forall^+$ , alors de  $\Gamma_{(x)\tau_1 \dots \tau_n y}^- \vdash_{\mathcal{F}} (x)\tau_1 \dots \tau_n y : C$  et  $\Gamma_{(x)\tau_1 \dots \tau_n y}^- \vdash_{\mathcal{F}} (x)\tau_1 \dots \tau_n y : G$ , on déduit que  $G = C$ . Par conséquent  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}} (x)\tau_1 \dots \tau_n : B \rightarrow C$ , et donc  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}}^+ \tau : S$ .

**Cas 2:** Si  $\tau \rightarrow_{\beta} \lambda x \theta$ , alors, comme l'ensemble  $\Gamma^-$  contient une infinité de déclarations pour chaque type  $\forall^-$ , soit  $y$  une variable déclarée de type  $B$  dans  $\Gamma^-$ , n'appartenant pas à  $Fv(\theta)$ . Alors  $(\tau)y \rightarrow_{\beta} (\lambda x \theta)y \rightarrow_{\beta} \theta[y/x]$ . On a  $\Gamma_{\tau'}^- \vdash_{\mathcal{F}} \tau' : C$ , donc  $\Gamma_{\tau'}^- \vdash_{\mathcal{F}} \theta[y/x] : C$ , et  $\Gamma_{\theta[y/x]}^- \vdash_{\mathcal{F}} \theta[y/x] : C$ , car  $Fv(\theta[y/x]) \subseteq Fv(\tau')$ . Donc  $\Gamma_{\lambda y \theta[y/x]}^- \vdash_{\mathcal{F}} \lambda y \theta[y/x] : B \rightarrow C$ . Comme  $y$  n'est pas libre dans  $\theta$ , alors  $\lambda y \theta[y/x] = \lambda x \theta$ , par conséquent  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}} \lambda x \theta : S$  et  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}}^+ \tau : S$ .

Preuve de (ii)

- Si  $S$  est une variable, alors le résultat découle immédiatement de la définition de  $\mathcal{I}$ .
- Si  $S = B \rightarrow C$ , où  $B$  est  $\forall^+$  et  $C$  est  $\forall^-$ , alors supposons que  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}}^+ \tau : B \rightarrow C$ , donc  $\tau \rightarrow_{\beta} \tau'$  et  $\Gamma_{\tau'}^- \vdash_{\mathcal{F}} \tau' : B \rightarrow C$ . Si  $u \in |B|_{\mathcal{I}}$ , alors d'après (i),  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}}^+ u : B$ , donc  $u \rightarrow_{\beta} u'$  et  $\Gamma_{u'}^- \vdash_{\mathcal{F}} u' : B$ . D'où  $\Gamma_{(\tau')u'}^- \vdash_{\mathcal{F}} (\tau')u' : C$ , et comme  $(\tau)u \rightarrow_{\beta} (\tau')u'$ , alors  $\Gamma^- \vdash_{\mathcal{F}}^+ (\tau)u : C$ . D'où, d'après l'hypothèse d'induction,  $(\tau)u \in |C|_{\mathcal{I}}$ . Par conséquent  $\tau \in |B \rightarrow C|_{\mathcal{I}}$ . ♠

### Preuve du théorème 3

$\Leftarrow$ ) D'après le lemme 1.

$\Rightarrow$ ) Si  $t \in |A|$ , alors  $t \in |A|_{\mathcal{I}}$  pour toute interprétation  $\mathcal{I}$  associée à un ensemble  $\Gamma^-$ . Or on peut supposer que  $\Gamma^-$  ne contient pas de déclarations de variables libres de  $t$ , d'où, d'après le (i) du lemme 2 et le fait que  $Fv(t') \subseteq Fv(t)$ , on a  $t \rightarrow_{\beta} t'$  et  $\vdash_{\mathcal{F}} t' : A$ . ♠

**Corollaire 1** Soient  $A$  un type  $\forall^+$  du système  $\mathcal{F}$ , et  $t$  un  $\lambda$ -terme.

(i) Si  $t \in |A|$ , alors  $t$  est normalisable et  $\beta$ -équivalent à un terme clos.

(ii)  $|A|$  est stable par  $\beta$ -équivalence (i.e si  $t \in |A|$  et  $t \simeq_{\beta} t'$ , alors  $t' \in |A|$ ).

**Preuve :** La partie (i) est une conséquence directe du théorème 3 et la partie

(ii) se déduit du théorème 3 et du lemme 1. ♠

On considère le système de typage  $\mathcal{F}0$  qui n'est autre que le système  $\mathcal{F}$ , où on remplace la règle de typage (5) par la règle :  $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}0} t : \forall X A \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathcal{F}0} t : A[Y/X]$  où  $Y$  est une variable.

Il était démontré dans [4] que si  $A$  est un type  $\forall^+$  du système  $\mathcal{F}$ , et  $t$  est un  $\lambda$ -terme normal clos, alors  $\vdash_{\mathcal{F}} t : A \Rightarrow \vdash_{\mathcal{F}0} t : A$ . On a donc le théorème suivant :

**Théorème 4** *Soient  $A$  un type  $\forall^+$  du système  $\mathcal{F}$ , et  $t$  un  $\lambda$ -terme, alors :*  
 $t \in |A| \Leftrightarrow (t \rightarrow_{\beta} t' \text{ et } \vdash_{\mathcal{F}0} t' : A)$ .

**Remarques.** (1) Si on interprète les types par des ensembles  $\beta$ -saturés [un ensemble  $G$  est dit  $\beta$ -saturé si, quels que soient les termes  $t$  et  $u$ , on a :  $u \in G$  et  $t \rightarrow_{\beta} u \Rightarrow t \in G$ ], alors le lemme 2 reste vrai ainsi que le théorème 3. On peut donc déduire que les interprétations (saturée et  $\beta$ -saturée) d'un type  $\forall^+$  sont égales.

(2) Les types de données peuvent être définis dans le système  $\mathcal{F}$  par des types  $\forall^+$  clos. Par exemple : le type booléen est la formule :  $Bool = \forall X \{X \rightarrow (X \rightarrow X)\}$ , le type des entiers est la formule  $Ent = \forall X \{(X \rightarrow X) \rightarrow (X \rightarrow X)\}$ , et le type des listes d'éléments de type  $Ent$  est donnée par la formule  $LEnt = \forall X \{(Ent \rightarrow (X \rightarrow X)) \rightarrow (X \rightarrow X)\}$ . On peut donc déduire du théorème 4 que : pour tout type de données  $D$  du système  $\mathcal{F}$ ,  $|D| = \{t \in \Lambda, t \rightarrow_{\beta} t' \text{ et } \vdash_{\mathcal{F}} t' : D\}$ .

(3) Pour obtenir son résultat, R. Labib-Sami a autorisé la quantification sur une variable même si elle ne figure pas dans le type. Dans ce cas le théorème 3 n'est plus vrai. Par exemple si on prend le type  $A = \forall X \{(X \rightarrow \forall Y X) \rightarrow (X \rightarrow X)\}$ , alors on peut remarquer facilement que le terme  $I = \lambda x x \in |A|$  et  $\not\vdash_{\mathcal{F}} I : A$  (mais  $I \simeq_{\beta\eta} I' = \lambda x \lambda y (x)y$  et  $\vdash_{\mathcal{F}} I' : A$ ).

**Remerciement.** Nous remercions le rapporteur et C. Raffalli pour leurs remarques.

## References

- [1] J.-Y. Girard, Y. Lafont et P. Taylor. *Proofs and types*. Cambridge University Press, 1986.
- [2] J.-L. Krivine. *Lambda-calcul, types et modèles*. Masson, Paris 1990.
- [3] R. Labib-Sami. *Typers avec (ou sans) types auxiliaires*. Manuscrit, 1986.
- [4] K. Nour. *Opérateurs de mise en mémoire en lambda-calcul pur et typé*. Thèse de doctorat, Université de Savoie, 1993.