



HAL
open science

La Valeur d'un Entier Classique en $\lambda\mu$ -Calcul

Karim Nour

► **To cite this version:**

Karim Nour. La Valeur d'un Entier Classique en $\lambda\mu$ -Calcul. *Archive for Mathematical Logic*, 1997, 36, pp.461-473. hal-00381047

HAL Id: hal-00381047

<https://hal.science/hal-00381047v1>

Submitted on 5 May 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La Valeur d'un Entier Classique en $\lambda\mu$ -Calcul

Karim Nour ¹

Laboratoire de mathématiques, équipe de logique,
Université de Chambéry, 73376 Le Bourget-du-Lac Cedex, France ²

Abstract. In this paper, we present three methods to give the value of a classical integer in $\lambda\mu$ -calculus. The first method is an external method and gives the value and the false part of a normal classical integer. The second method uses a new reduction rule and gives as result the corresponding Church integer. The third method is the M. Parigot's method which uses the J.L. Krivine's storage operators.

Mathematics Subject Classification: 03B40, 68Q60.

Keywords: $\lambda\mu$ -calculus, Classical integer, Church integer, Storage operators.

1 Introduction

Considérons le λ -calcul muni d'un système de typage basé sur la logique intuitionniste du second ordre : le système $AF2$ de J.L. Krivine. Ce système est une simple extension du système F de J.Y. Girard, capable d'exprimer les spécifications exactes des programmes, ce qui permet d'obtenir un programme calculant une fonction en écrivant une démonstration de sa totalité.

Comment programme-t-on les fonctions sur les entiers naturels en $AF2$?

- Il faut d'abord exprimer par une formule le type des entiers naturels : pour ceci on introduit la formule $N[x] = \forall X\{X(0), \forall y(X(y) \rightarrow X(sy)) \rightarrow X(x)\}$. Cette formule signifie que x est un entier si et seulement si x appartient au plus petit ensemble contenant zéro et stable par le successeur. La représentation de l'entier n en λ -calcul est obtenue en démontrant l'énoncé $N[s^n(0)]$. L'élément clé qui fait fonctionner les choses est l'unicité de la représentation des entiers. En effet, on démontre facilement que les entiers de Church sont les seuls λ -termes normaux clos de type $N[s^n(0)]$.
- Il faut ensuite exprimer les spécifications du programme par un système d'équations définissant la fonction à calculer.
- Il faut finalement démontrer le théorème énonçant la totalité de la fonction : si f est une fonction définie de \mathbb{N}^r dans \mathbb{N} , on obtient un programme pour f en démontrant la formule $\forall x_1 \dots \forall x_r \{N[x_1], \dots, N[x_r] \rightarrow N[f(x_1, \dots, x_r)]\}$.

Pour capturer le contenu algorithmique des preuves classiques, M. Parigot a introduit le $\lambda\mu$ -calcul équipé d'un système de typage basé sur la logique classique du second ordre. Il a démontré que ce calcul possède de très bonnes propriétés : propriété de Church-Rosser - conservation de type - normalisation forte - ... Mais la méthode détaillée ci dessus pour programmer des fonctions

¹ Je remercie M. Parigot pour son aide qui m'a permis de réaliser ce travail.

²e-mail nour@univ-savoie.fr

ne marche pas bien dans ce système. Ceci provient du fait qu'en logique classique on perd la propriété de l'unicité de la représentation des entiers. De plus il est difficile a priori de connaître la valeur d'un entier classique.

Nous posons les questions suivantes :

- Peut-on caractériser les entiers classiques ?
- Peut-on connaître la valeur d'un entier classique ?

M. Parigot a donné des réponses positives à ces questions. En effet, il a trouvé un algorithme qui teste si un $\lambda\mu$ -terme normal est un entier classique ou pas, et dans le cas positif il trouve sa valeur.

Si nous voulons construire des programmes par des preuves, nous n'avons pas besoin de vérifier si un $\lambda\mu$ -terme normal est un entier ou pas. En effet ceci est assuré par le typage. Ce qui nous intéresse le plus, c'est de trouver la valeur d'un entier classique.

Dans ce papier, nous présentons trois méthodes pour trouver la valeur d'un entier classique.

- La première méthode est une méthode externe au $\lambda\mu$ -calcul et donne, en plus de la valeur, la partie fautive d'un entier classique normal. En utilisant cette méthode, on peut associer à chaque $\lambda\mu$ -terme clos de type N (le type des entiers du système de typage F) une valeur fictive.
- La deuxième méthode utilise une nouvelle règle de réduction (la règle de nettoyage). En ajoutant cette règle au $\lambda\mu$ -calcul on obtient un calcul qui possède des mauvaises propriétés (on perd la propriété de Church-Rosser et la conservation de type). Cette méthode donne comme résultat l'entier de Church correspondant.
- La troisième méthode est celle de M. Parigot qui utilise les opérateurs de mise en mémoire de J.L. Krivine. Nous présentons ici des opérateurs de mise en mémoire qui donnent la valeur fictive d'un $\lambda\mu$ -terme de type N et nous montrons que ce n'est pas toujours le cas pour les autres opérateurs.

2 $\lambda\mu$ -calcul

Dans ce paragraphe, nous présentons la déduction naturelle classique du second ordre ainsi que son interprétation calculatoire, le $\lambda\mu$ -calcul. Nous utilisons un système de déduction naturelle avec plusieurs conclusions. Le $\lambda\mu$ -calcul est une simple extension du λ -calcul qui donne exactement le contenu algorithmique des preuves écrites dans ce système.

2.1 Le $\lambda\mu$ -calcul pur

Le $\lambda\mu$ -calcul possède deux alphabets distincts de variables : un ensemble de λ -variables x, y, z, \dots , et un ensemble de μ -variables $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

Les termes sont définis de la manière inductive suivante :

- Si x est une λ -variable, alors x est un terme ;

- Si x est une λ -variable et u est un terme, alors $\lambda x u$ est un terme ;
- Si u et v sont des termes, alors $(u)v$ est un terme;
- Si t est un terme et α, β sont des μ -variables, alors $\mu\alpha[\beta]t$ est un terme.

Les termes du λ -calcul sont obtenus seulement par les trois premières clauses.

Un terme nommé est une expression de la forme $[\alpha]t$ où t est un terme et α est une μ -variable. Dans ce cas on dit que le terme t est nommé par α . On considère parfois les termes nommés comme des termes. Pour simplifier, on suppose que l'ensemble des variables libres et l'ensemble des variables liées d'un terme sont toujours distincts, et qu'une variable liée est liée une seule fois.

Les termes du $\lambda\mu$ -calcul sont appelés $\lambda\mu$ -termes, et les termes du λ -calcul, λ -termes.

La réduction en $\lambda\mu$ -calcul est induite par deux notions différentes de réductions :

Les règles de calcul :

$$(C_1) (\lambda x u)v \rightarrow u[v/x] \text{ (la } \beta\text{-réduction)}$$

$$(C_2) (\mu\alpha u)v \rightarrow \mu\alpha u[v/*\alpha] \text{ (la } \mu\text{-réduction)}$$

où $u[v/*\alpha]$ est obtenu à partir de u en remplaçant inductivement chaque sous terme de la forme $[\alpha]w$ par $[\alpha](w)v$.

Les règles de simplification :

$$(S_1) [\alpha]\mu\beta u \rightarrow u[\alpha/\beta]$$

$$(S_2) \mu\alpha[\alpha]u \rightarrow u, \text{ si } \alpha \text{ n'a pas d'occurrences libres dans } u$$

$$(S_3) \mu\alpha u \rightarrow \lambda x \mu\alpha u[x/*\alpha], \text{ si } u \text{ contient un sous terme de la forme } [\alpha]\lambda y w.$$

Il est clair que les règles de simplifications sont fortement normalisables, en effet, les règles $(S_i)_{1 \leq i \leq 3}$ ne créent pas de nouveaux rédex ou diminuent strictement la longueur d'un $\lambda\mu$ -terme.

Théorème 2.1 (Théorème de Church-Rosser) *En $\lambda\mu$ -calcul, la réduction est confluente (c'est à dire si $u \rightarrow u_1$ et $u \rightarrow u_2$, alors il existe v tel que $u_1 \rightarrow v$ et $u_2 \rightarrow v$).*

Preuve Voir [4]. \square

L'ensemble des $\lambda\mu$ -termes en formes normales de tête H est défini de la manière inductive suivante :

- Si $u \in H$, alors $\lambda x u \in H$;
- Si $u \in H$, et $(u)v$ n'est pas un rédex, alors $(u)v \in H$;
- Si $u \in H$, et $\mu\alpha[\beta]u$ n'est pas un rédex, alors $\mu\alpha[\beta]u \in H$.

Une réduction de tête, est une suite de réductions t_1, \dots, t_n telle que pour tout $1 \leq i \leq n-1$, t_{i+1} est obtenu en réduisant le rédex le plus à gauche de t_i et t_i n'est pas en forme normale de tête. Si u est obtenu à partir de t par une réduction de tête, on note $t \succ u$. Si $t \succ u$, on note $h(t, u)$ la longueur de la réduction de tête entre t et u . L'équivalence de tête est notée : $u \sim v$ ssi il existe w tel que $u \succ w$ et $v \succ w$.

Il est facile de prouver le lemme suivant (ce lemme peut être prouvé par induction, comme dans le cas du λ -calcul (voir [2])).

Lemme 2.1 *Si $u \succ v$, alors :*

- 1) $u[\bar{p}/\bar{x}, \bar{q}/\bar{\alpha}] \succ v[\bar{p}/\bar{x}, \bar{q}/\bar{\alpha}]$ et $h(u[\bar{p}/\bar{x}, \bar{q}/\bar{\alpha}], v[\bar{p}/\bar{x}, \bar{q}/\bar{\alpha}]) = h(u, v)$.
- 2) Pour tout \bar{w} , il existe w tel que $(u)\bar{w} \succ w$, $(v)\bar{w} \succ w$, et $h((u)\bar{w}, w) = h((v)\bar{w}, w) + h(u, v)$.

Remarque. Le lemme 2.1 montre que pour effectuer la réduction de tête de $u[\bar{p}/\bar{x}, \bar{q}/\bar{\alpha}]$ (resp. $(u)\bar{w}$), il est équivalent (même résultat, et même nombre de pas) d'effectuer un certain nombre de pas dans la réduction de tête de u pour obtenir v , puis de faire la réduction de tête de $v[\bar{p}/\bar{x}, \bar{q}/\bar{\alpha}]$ (resp. $(v)\bar{w}$).

2.2 Le $\lambda\mu$ -calcul typé

Les types sont les formules du calcul des prédicats du second ordre.

Les connecteurs logiques utilisés sont \perp , \rightarrow et \forall .

Les langages contiennent des variables d'individus (ou du premier ordre) notées x, y, z, \dots , et des variables de relations (ou du second ordre) notées X, Y, Z, \dots .

Nous ne supposons pas que le langage contient un symbole de constante spécial pour l'égalité. Cependant, on définit la formule $u = v$ (où u, v sont des termes) par $\forall Y (Y(u) \rightarrow Y(v))$, où Y est une variable de relation unaire. Une telle formule est appelée équation. On note $\vdash_E u = v$, si $u = v$ est une conséquence de l'ensemble d'équations E .

La formule $F_1 \rightarrow (F_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (F_n \rightarrow G)\dots))$ est notée $F_1, F_2, \dots, F_n \rightarrow G$ et la formule $F \rightarrow \perp$ est notée $\neg F$.

Les preuves sont écrites dans un système de déduction naturelle avec plusieurs conclusions présentées avec des séquents :

- Les formules à gauche de \vdash sont étiquetées par des λ -variables ;
- Les formules à droite de \vdash sont étiquetées par des μ -variables, excepté d'une formule qui est étiquetée par un $\lambda\mu$ -terme ;
- Des formules distinctes ne possèdent pas la même étiquette.

Les parties gauches et droites d'un séquent sont considérées comme des ensembles, et donc la contraction des formules est donnée implicitement. Les affaiblissements sont inclus dans les règles (2) et (9).

Soient t un $\lambda\mu$ -terme, A un type, $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$, et $\Delta = \alpha_1 : B_1, \dots, \alpha_m : B_m$ deux contextes. On définit par les règles suivantes la notion "t est de type A dans Γ et Δ ", et on écrit $\Gamma \vdash t : A, \Delta$.

- (1) $\Gamma \vdash x_i : A_i, \Delta \quad 1 \leq i \leq n$

- (2) Si $\Gamma, x : A \vdash t : B, \Delta$, alors $\Gamma \vdash \lambda x t : A \rightarrow B, \Delta$
- (3) Si $\Gamma \vdash u : A \rightarrow B, \Delta$, et $\Gamma \vdash v : A, \Delta$, alors $\Gamma \vdash (u)v : B, \Delta$
- (4) Si $\Gamma \vdash t : A, \Delta$, alors $\Gamma \vdash t : \forall x A, \Delta$ (*)
- (5) Si $\Gamma \vdash t : \forall x A, \Delta$, alors $\Gamma \vdash t : A[u/x], \Delta$ (**)
- (6) Si $\Gamma \vdash t : A, \Delta$, alors $\Gamma \vdash t : \forall X A, \Delta$ (*)
- (7) Si $\Gamma \vdash t : \forall X A, \Delta$, alors $\Gamma \vdash t : A[G/X], \Delta$ (**)
- (8) Si $\Gamma \vdash t : A[u/x], \Delta$, alors $\Gamma \vdash t : A[v/x], \Delta$ (***)
- (9) Si $\Gamma \vdash t : A, \beta : B, \Delta$, alors :
 - $\Gamma \vdash \mu\beta[\alpha]t : B, \alpha : A, \Delta$ si $\alpha \neq \beta$
 - $\Gamma \vdash \mu\alpha[\alpha]t : B, \Delta$ si $\alpha = \beta$

Les règles précédentes font l'objet des restrictions suivantes :

- (*) Les variables x , et X n'ont pas d'occurrences libres dans Γ .
- (**) u est un terme et G est une formule du langage.
- (***) u et v sont des termes, tels que $u = v$ est une conséquence d'un ensemble d'équations.

Théorème 2.2 (Théorèmes de conservation de type et de normalisation forte) .

- 1) Le type est préservé durant une réduction (c'est à dire si $\Gamma \vdash u : A, \Delta$, et $u \rightarrow v$, alors $\Gamma \vdash v : A, \Delta$).
- 2) Les $\lambda\mu$ -termes typables sont fortement normalisables (c'est à dire si $\Gamma \vdash t : A, \Delta$, alors toute réduction qui commence par t est fini).

Preuve Voir [4] et [6]. \square

3 Les entiers

3.1 Les entiers intuitionnistes

Si on oublie la règle (9), on obtient le système de J.L. Krivine appelé $AF2$ (voir [1]). Dans ce système on utilise les λ -termes et on garde uniquement la notion de la β -réduction.

Dans le système de typage $AF2$, chaque type de données peut être défini par une formule. Par exemple le type des entiers est la formule : $N[x] = \forall X \{X(0), \forall y (X(y) \rightarrow X(sy)) \rightarrow X(x)\}$ où X est une variable de relation unaire, 0 est un symbole de constante pour le zéro, et s est un symbole de fonction unaire pour le successeur.

Le λ -terme $\underline{0} = \lambda x \lambda f x$ est de type $N[0]$ et représente "zéro".

Le λ -terme $\underline{s} = \lambda n \lambda x \lambda f (f)((n)x)f$ est de type $\forall y (N[y] \rightarrow N[s(y)])$ et représente la fonction "successeur".

Un ensemble d'équations E est dit adéquat pour le type des entiers ssi :

- $\not\vdash_E s(a) = 0$;
- Si $\vdash_E s(a) = s(b)$, alors $\vdash_E a = b$.

Dans la suite, on suppose que tous les ensembles d'équations sont adéquats pour le type des entiers.

Théorème 3.1 (Unicité de la représentation des entiers) *Pour tout entier n , $\underline{n} = \lambda x \lambda f (f)^n x$ est l'unique λ -terme normal clos de type $N[s^n(0)]$.*

Preuve Voir [1]. \square

La trace propositionnelle $N = \forall X \{X, X \rightarrow X \rightarrow X\}$ de $N[x]$ définit aussi les entiers.

Théorème 3.2 *Un λ -terme normal clos est de type N ssi il est de la forme \underline{n} , pour un certain entier n .*

Preuve Voir [1]. \square

Théorème 3.3 (Théorème de programmation) *Soit F un λ -terme clos de type*

$$\forall x_1 \dots \forall x_r (N[x_1], \dots, N[x_r] \rightarrow N[f(x_1, \dots, x_r)])$$

modulo un ensemble d'équations E adéquat pour le type des entiers. Alors F est un programme pour f dans le sens suivant : pour tout n_1, \dots, n_r, m , $(F)\underline{n}_1 \dots \underline{n}_r \rightarrow \underline{m}$ ssi $\vdash_E f(s^{n_1}(0), \dots, s^{n_r}(0)) = s^m(0)$.

Preuve Voir [1]. \square

3.2 Les entiers classiques

En déduction naturelle classique l'unicité de la représentation des entiers ne reste pas vraie. En effet l'affaiblissement à droite crée des (fausses) copies des entiers, et la contraction droite permet de regrouper des copies différentes dans une seule.

Un entier classique est un $\lambda\mu$ -terme clos θ , tel que $\vdash \theta : N[s^n(0)]$ pour un certain entier n . On dit aussi que l'entier classique θ est de valeur n .

On va caractériser maintenant les entiers classiques.

4 L'algorithme de Parigot caractérisant les entiers classiques

Soient x et f deux variables fixes, et $N_{x,f}$ l'ensemble des $\lambda\mu$ -termes définis par :

- $x \in N_{x,f}$;
- $\mu\alpha[\beta]x \in N_{x,f}$;
- Si $u \in N_{x,f}$, alors $(f)u \in N_{x,f}$;
- Si $u \in N_{x,f}$, alors $\mu\alpha[\beta](f)u \in N_{x,f}$.

Théorème 4.1 *Les $\lambda\mu$ -termes normaux clos de type N sont exactement les $\lambda\mu$ -termes de la forme $\lambda x \lambda f u$ où $u \in N_{x,f}$ sans μ -variables libres.*

Preuve Voir [5]. \square

On définit, pour chaque $u \in N_{x,f}$, l'ensemble $rep(u)$, qui désigne intuitivement l'ensemble des entiers représentés par u :

- $rep(x) = \{0\}$;
- $rep((f)u) = \{n + 1 \text{ si } n \in rep(u)\}$;
- $rep(\mu\alpha[\beta]u) = \bigcap rep(v)$ pour chaque sous terme $[\alpha]v$ de $[\beta]u$.

Le théorème suivant caractérise les entiers classiques.

Théorème 4.2 *Les entiers classiques normaux de valeur n sont exactement les $\lambda\mu$ -termes de la forme $\lambda x \lambda f u$ où $u \in N_{x,f}$ sans μ -variables libres et tel que $rep(u) = \{n\}$.*

Preuve Voir [5]. \square

Exemples

- 1) Il est facile de vérifier que $\underline{0}$ est l'unique entier classique normal de valeur 0.
- 2) Il est également facile de vérifier que tout entier classique de valeur 1 est équivalent à un $\lambda\mu$ -terme de la forme :

$$\lambda x \lambda f \mu\alpha[\alpha](f)\mu\alpha_1[\alpha](f)\dots\mu\alpha_n[\alpha](f)\mu\beta[\alpha](f)\mu\beta_1[\alpha](f)\dots\mu\beta_{m-1}[\alpha](f)\mu\beta_m[\beta]x$$

où $n, m \geq 0$, et $\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_j$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ sont des μ -variables distinctes.

- 3) Soit $\theta = \lambda x \lambda f (f)\mu\alpha[\alpha](f)\mu\phi[\alpha](f)\mu\psi[\alpha](f)(f)\mu\beta[\phi](f)\mu\delta[\beta](f)\mu\gamma[\alpha](f)\mu\rho[\beta](f)x$.
 θ est-il un entier classique ? si oui quelle est sa valeur ?

Posons $u = (f)\mu\alpha[\alpha](f)\mu\phi[\alpha](f)\mu\psi[\alpha](f)(f)\mu\beta[\phi](f)\mu\delta[\beta](f)\mu\gamma[\alpha](f)\mu\rho[\beta](f)x$.

On vérifie que $rep(u) = \{4\}$, donc θ est un entier classique de valeur 4.

Remarquons que si nous savons à l'avance que θ est un entier classique, alors nous n'avons pas besoin de chercher $rep(u)$ pour tous les sous termes de u . Dans ce cas, il suffit de s'occuper des sous termes de θ qui représentent un seul entier.

5 Une méthode simple pour trouver la valeur d'un entier classique

On présente maintenant une méthode simple pour trouver la valeur d'un entier classique.

On définit, pour chaque $u \in N_{x,f}$, l'ensemble $val(u)$, qui désigne intuitivement l'ensemble des valeurs possibles de u :

- $val(x) = \{0\}$;
- $val((f)u) = \{n + 1 \text{ si } n \in val(u)\}$;

- $val(\mu\alpha[\beta]u) = \bigcup val(v)$ pour chaque sous terme $[\alpha]v$ de $[\beta]u$.

Soient $u \in N_{x,f}$ sans μ -variables libres et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les μ -variables de u qui vérifient :

- α_1 est la μ -variable, telle que $[\alpha_1](f)^{i_1}x$ est un sous terme de u
- α_j $2 \leq j \leq n$ est la μ -variable, telle que $[\alpha_j](f)^{i_j}\mu\alpha_{j-1}u_{j-1}$ est un sous terme de u
- $u = (f)^{i_{n+1}}\mu\alpha_n u_n$.

Schématisons cette dernière définition par le dessin suivant :

$$u = (f)^{i_{n+1}}\mu\alpha_n \dots [\alpha_3](f)^{i_3}\mu\alpha_2 \dots [\alpha_2](f)^{i_2}\mu\alpha_1 \dots \underbrace{[\alpha_1](f)^{i_1}x}_{u_1}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{u_2}$$

$$\underbrace{\hspace{25em}}_{u_n}$$

Soient $t_0 = x$ et $t_j = \mu\alpha_j u_j$ $1 \leq j \leq n$.

Lemme 5.1 *Pour tout $1 \leq j \leq n+1$ on a :*

1) $val(t_{j-1}) = \{ \sum_{1 \leq k \leq j} i_k \}$.

2) *Pour chaque sous terme t de u_j , tel que $t \neq (f)^r t_k$ $0 \leq k \leq j-1$, on a $val(t) = \emptyset$.*

En particulier $val(u) = \{ \sum_{1 \leq k \leq n+1} i_k \}$.

Preuve Par induction sur j .

- Pour $j = 1$: on a $val(t_0) = \{0\}$.

Soit t un sous terme de u_1 , tel que $t \neq (f)^r t_0$. Démontrons, par induction sur t , que $val(t) = \emptyset$.

- Si $t = (f)t'$, alors, par hypothèse d'induction, $val(t') = \emptyset$, et $val(t) = \emptyset$.

- Si $t = \mu\beta t'$, alors, il est clair que $\beta \neq \alpha_1$. Donc, par hypothèse d'induction, pour tout terme u nommé β , on a $val(u) = \emptyset$. Donc $val(t) = \emptyset$.

- Supposons la propriété vraie pour tout $1 \leq i \leq j-1$, et montrons la pour j .

Par définition, on a $val(t_j) = \bigcup val(t)$ pour chaque sous terme $[\alpha_j]t$ de u_j . Donc, par hypothèse d'induction, $val(t_j) = \{i_j + \sum_{1 \leq k \leq j-1} i_k\} \bigcup \emptyset = \{ \sum_{1 \leq k \leq j} i_k \}$.

Soit t un sous terme de u_j , tel que $t \neq (f)^r t_k$ $0 \leq k \leq j-1$. Démontrons, par induction sur t , que $val(t) = \emptyset$.

- Si $t = (f)t'$, alors, par hypothèse d'induction, $val(t') = \emptyset$, et $val(t) = \emptyset$.

- Si $t = \mu\beta t'$, alors, il est clair que $\beta \neq \alpha_i$ $1 \leq i \leq j-1$. Donc, par hypothèse d'induction, pour tout terme u nommé β , on a $val(u) = \emptyset$. Donc $val(t) = \emptyset$. \square

Remarque D'après le lemme 5.1, on peut associer à chaque $\lambda\mu$ -terme normal clos $\theta = \lambda x \lambda f u$ de type N l'entier $val(u)$. Cet entier représente la valeur "fictive" de θ .

Lemme 5.2 *Pour chaque $u \in N_{x,f}$, on a $rep(u) \subseteq val(u)$.*

Preuve Trivial, par définition de $rep(u)$ et $val(u)$. \square

Théorème 5.1 Si θ est un entier classique normal de valeur n , alors $\theta = \lambda x \lambda f u$ où $u \in N_{x,f}$ sans μ -variables libres et tel que $val(u) = \{n\}$.

Preuve D'après le théorème 4.2, $\theta = \lambda x \lambda f u$ où $u \in N_{x,f}$ sans μ -variables libres et tel que $rep(u) = \{n\}$. D'après le lemme 5.1, on a $val(u) = \{m\}$, et d'après le lemme 5.2, $rep(u) = \{n\} \subseteq \{m\} = val(u)$. Donc $val(u) = \{n\}$. \square

Conclusion Pour trouver la valeur d'un entier classique normal $\theta = \lambda x \lambda f u$, on parcourt le $\lambda\mu$ -terme u du droite à gauche pour chercher les μ -variables α_j $1 \leq j \leq n$ et les entiers i_j $1 \leq j \leq n+1$ définis avant le lemme 5.1. D'après le lemme 5.1 et le théorème 5.1, la valeur de l'entier θ est égale à $\sum_{1 \leq k \leq n+1} i_k$.

La vraie partie de l'entier de θ est le λ -terme $\lambda x \lambda f (f)^{i_{n+1}} (f)^{i_n} \dots (f)^{i_1} x$.

Exemple Reprenons le dernier exemple du paragraphe 4.

$$\theta = \lambda x \lambda f \overbrace{(f)}^4 \underbrace{\mu \alpha[\alpha](f) \mu \phi[\alpha](f) \mu \psi[\alpha]}_{\text{partie fausse}} \overbrace{(f)(f)}^3 \underbrace{\mu \beta[\phi](f) \mu \delta[\beta](f) \mu \gamma[\alpha](f) \mu \rho[\beta]}_{\text{partie fausse}} \overbrace{(f)x}^1.$$

On vérifie facilement que :

- $\alpha_1 = \beta$, et $\alpha_2 = \alpha$;
- $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, et $i_3 = 1$.

Donc la valeur de θ est égale à 4.

6 Une nouvelle règle de réduction pour trouver la valeur d'un entier classique

Nous ajoutons au $\lambda\mu$ -calcul une nouvelle règle de réduction (règle de nettoyage) :

$$(N) (u) \mu \alpha v \rightarrow \mu \alpha v [u/**\alpha]$$

où $v[u/**\alpha]$ est obtenu à partir du v en remplaçant inductivement chaque sous terme de la forme $[\alpha]w$ par $[\alpha](u)w$.

Nous appelons $\lambda\mu'$ -calcul ce nouveau calcul.

Le $\lambda\mu'$ -calcul possède des mauvaises propriétés :

- La réduction n'est pas confluente.
- Le type n'est pas préservé durant une réduction.

Par contre on ne sait pas, pour le moment, si en $\lambda\mu'$ -calcul le théorème de normalisation forte reste valable.

On note $u \hookrightarrow v$, si u se réduit à v en utilisant, à chaque étape la règle de nettoyage suivie par toutes les règles de simplifications possibles. Cette réduction est bien définie car les règles de simplifications sont fortement normalisables.

Un $\lambda\mu$ -terme est dit normal s'il est normal en $\lambda\mu$ -calcul (c.à.d. sans tenir compte de la règle de nettoyage).

Nous présentons maintenant comment utiliser la règle (N) pour trouver la valeur d'un entier classique.

Chaque $u \in N_{x,f}$ est de la forme

$$u = (f)^{j_{m+1}} \mu \beta_m [\gamma_m] (f)^{j_m} \dots \mu \beta_2 [\gamma_2] (f)^{j_2} \mu \beta_1 [\gamma_1] (f)^{j_1} x$$

On associe à u la liste des entiers $L(u) = (j_{m+1}, \dots, j_1)$, l'entier $l(u) = m$, et le couple $C(u) = (l(u), L(u))$. On ordonne $L(u)$ et $C(u)$ lexicographiquement.

Théorème 6.1 *Soit $u \in N_{x,f}$ sans μ -variables libres, tel que $l(u) \neq 0$. Alors il existe $v \in N_{x,f}$ sans μ -variables libres tel que $u \hookrightarrow v$, $C(u) > C(v)$ et $val(u) = val(v)$.*

Preuve Comme $l(u) \neq 0$, alors u contient un sous terme $u' = (f)^{j-1} (f) \mu \alpha [\beta] w$.
 $u' \hookrightarrow v' = (f)^{j-1} \mu \alpha [\beta] w [f/**\alpha]$, donc on distingue deux cas :

- Si $j > 1$, soit v le $\lambda\mu$ -terme obtenu en remplaçant dans u le sous terme u' par v' . Il est clair que $l(u) = l(v)$ et $L(u) > L(v)$, donc $C(u) > C(v)$.
- Si $j = 1$, on distingue deux sous cas :
 - Si $u = u'$, posons $v = v'$. Il est clair que $l(u) = l(v)$ et $L(u) > L(v)$, donc $C(u) > C(v)$.
 - Si $\mu\gamma[\delta]u'$ est un sous terme de u , soit v le $\lambda\mu$ -terme obtenu en remplaçant dans u le sous terme $\mu\gamma[\delta]u'$ par $\mu\gamma[\beta]v'[\delta/\alpha]$ si $\gamma \neq \beta$ et $v'[\delta/\alpha]$ si $\gamma = \beta$ ne figure pas dans $v'[\delta/\alpha]$. Il est clair que $u \hookrightarrow v$ et $l(u) > l(v)$, donc $C(u) > C(v)$.

Dans, tous ces cas, on remarque que $v \in N_{x,f}$ est sans μ -variables libres.

De plus, on a $val(u) = val(v)$, en effet, il faut distinguer deux cas :

- Si la μ -variable α est l'une des variables α_k (définies avant le lemme 5.1), alors dans v on a : $j = i_{k+1} - 1$ et le -1 est compensé par la présence de la variable f devant tous les crochets $[\alpha]$.
- Si la μ -variable α n'est pas l'une des variables α_k (définies avant le lemme 5.1), alors les entiers i_k restent les mêmes. \square

Remarque La preuve du théorème 6.1 montre que la réduction \hookrightarrow est fortement normalisable sur les éléments de l'ensemble $N_{x,f}$.

Corollaire 6.1 Si $u \in N_{x,f}$ sans μ -variables libres tel que $\text{val}(u) = n$, alors $u \hookrightarrow (f)^n(x)$.

Preuve D'après le théorème 6.1, $u \hookrightarrow \lambda x \lambda f v$ tel que $l(v) = 0$ et $\text{val}(v) = \{n\}$, donc $v = (f)^n x$.
□

Corollaire 6.2 ³ Si θ est un entier classique normal de valeur n , alors $\theta \hookrightarrow \underline{n}$.

Preuve D'après le théorème 4.2, chaque entier classique normal θ est de la forme $\theta = \lambda x \lambda f u$ où $u \in N_{x,f}$ sans μ -variables libres et $\text{val}(u) = \{n\}$. Donc, d'après le corollaire 6.1, $\theta \hookrightarrow \underline{n}$. □

Conclusion Pour trouver la valeur d'un entier classique normal θ , on réduit θ avec la nouvelle règle de réduction (\hookrightarrow). D'après le corollaire 6.2, $\theta \hookrightarrow \underline{n}$ où n est la valeur de θ .

Exemple Reprenons le dernier exemple du paragraphe 4.

$$\theta = \lambda x \lambda f (f) \mu \alpha [\alpha] (f) \mu \phi [\alpha] (f) \mu \psi [\alpha] (f) (f) \mu \beta [\phi] (f) \mu \delta [\beta] (f) \mu \gamma [\alpha] (f) \mu \rho [\beta] (f) x.$$

On vérifie facilement que $\theta \hookrightarrow \underline{4}$ (effectuer, par exemple, la réduction de la droite vers la gauche).

7 Les opérateurs de mise en mémoire pour trouver la valeur d'un entier classique

Un λ -terme clos T est dit opérateur de mise en mémoire pour les entiers ssi pour tout $n \geq 0$, il existe un λ -terme $\tau_n \simeq_\beta \underline{n}$, tel que pour tout $\theta_n \simeq_\beta \underline{n}$, il existe une substitution σ , telle que $(T)\theta_n f \succ (f)\sigma(\tau_n)$.

Exemples Posons :

$$T_1 = \lambda n ((n)\delta)G \text{ où } G = \lambda x \lambda y (x) \lambda z (y) (\underline{x})z \text{ et } \delta = \lambda f (f)\underline{0} ;$$

$$T_2 = \lambda n \lambda f (((n)f)F)\underline{0} \text{ où } F = \lambda x \lambda y (x) (\underline{x})y.$$

Il est facile de vérifier que :

pour tout $\theta_n \simeq_\beta \underline{n}$, $((T_1)\theta_n)f \succ (f)(\underline{x})^n \underline{0}$ et $((T_2)\theta_n)f \succ (f)(\underline{x})^n \underline{0}$ (voir [2] et [3]).

Donc T_1 et T_2 sont des opérateurs de mise en mémoire pour les entiers.

Soit $N^*[x] = \forall X \{ \neg X(0), \forall y (\neg X(y) \rightarrow \neg X(sy)) \rightarrow \neg X(x) \}$.

Il est facile de vérifier que $\vdash_{AF2} T_1, T_2 : \forall x \{ N^*[x] \rightarrow \neg \neg N[x] \}$ (voir [2] et [3]).

Théorème 7.1 Si $\vdash_{AF2} T : \forall x \{ N^*[x] \rightarrow \neg \neg N[x] \}$, alors T est un opérateur de mise en mémoire pour les entiers.

Preuve Voir [2]. □

Théorème 7.2 Soient $u \in N_{x,f}$ sans μ -variables libres, tel que $\text{val}(u) = \{n\}$, et $\theta = \lambda x \lambda f u$. Alors $((T_1)\theta)f \succ (f)(\underline{x})^n \underline{0}$.

Preuve La preuve de ce théorème est assez technique. Nous présentons seulement les grandes lignes de la démonstration.

Reprenons les notations du lemme 5.1, et notons

³Ce résultat a été cité dans un article de M. Parigot (voir [5])

- $\bar{\mu}$ la suite des μ -variables de u ;
- $\bar{\alpha}$ la suite des μ -variables $\alpha_1, \dots, \alpha_n$;
- $\bar{\beta}$ la suite des μ -variables $\bar{\mu}$ - $\bar{\alpha}$.

Soit $r_j = \sum_{j \leq k \leq n+1} i_k$ et $S_j = (\underline{s})^{r_j} \underline{0}$ $1 \leq j \leq n$. Notons $\bar{S} = S_1, \dots, S_n$.

On prouve par induction sur $n - j$ que :

Pour chaque $1 \leq j \leq n$, on a $((T_1)\theta)f \sim \mu\alpha[\alpha]\tau_j[\alpha/\bar{\mu}]$ où

$\tau_j = t_j[f/x, F/f, \bar{S}'/*\bar{\alpha}, \bar{S}'/*\bar{\beta}](\underline{s})^{r_j} \underline{0}$ et les éléments de \bar{S}' sont de la forme $(\underline{s})^{r_j} \underline{0}$.

Donc en particulier, $((T_1)\theta)f \sim (f)(\underline{s})^{r_j} \underline{0}$. \square

Théorème 7.3 Soient $u \in N_{x,f}$ sans μ -variables libres, tel que $val(u) = \{n\}$, et $\theta = \lambda x \lambda f u$. Alors $((T_2)\theta)f \succ (f)(\underline{s})^n \underline{0}$.

Preuve Même preuve que celle du théorème 7.2. \square

Corollaire 7.1 Si θ est un entier classique normal de valeur n , alors $((T_i)\theta)f \succ (f)(\underline{s})^n \underline{0}$ [$i=1$ ou 2].

Preuve On utilise les théorèmes 7.2 et 7.3. \square

Conclusion Pour trouver la valeur d'un entier classique normal θ , on réduit $((T_i)\theta)\lambda x x$ [$i=1$ ou 2]. D'après le théorème 7.3, $((T_i)\theta)\lambda x x \succ (\lambda x x)(\underline{s})^n \underline{0} \rightarrow \underline{n}$ où n est la valeur de θ .

Exemple Reprenons le dernier exemple du paragraphe 4.

$\theta = \lambda x \lambda f (f) \mu \alpha [\alpha] (f) \mu \phi [\alpha] (f) \mu \psi [\alpha] (f) (f) \mu \beta [\phi] (f) \mu \delta [\beta] (f) \mu \gamma [\alpha] (f) \mu \rho [\beta] (f) x$.

On vérifie facilement que $((T_i)\theta)\lambda x x \rightarrow \underline{4}$ [$i=1$ ou 2].

Le corollaire 7.1 est un cas particulier du théorème suivant :

Théorème 7.4 Si $\vdash_{AF2} T: \forall x \{N^*[x] \rightarrow \neg \neg N[x]\}$, alors pour tout $n \geq 0$, il existe un λ -terme $\tau_n \simeq_\beta \underline{n}$, tel que pour tout entier classique normal θ de valeur n , il existe une substitution σ , telle que $((T)\theta)f \sim \mu\alpha[\alpha](f)\sigma(\tau_n)$.

Preuve Voir [5]. \square

Remarque Le théorème 7.2 ne reste pas vrai pour un opérateur de mise en mémoire quelconque. Par exemple :

- Soient $u = \mu\alpha[\alpha](f)\mu\beta[\alpha]x$ et $\theta = \lambda x \lambda f u$. On a $val(u) = \{0\}$ et $rep(u) = \emptyset$.

- Soit $T = \lambda n ((n) \lambda d \lambda g ((T_i)n) \lambda x (g) (\underline{s}) (p) x) \delta$ où

$\underline{p} = \lambda n ((n) \lambda c ((c) \underline{0}) \underline{0}) \lambda a \lambda c ((c) (\underline{s}) (a) \lambda x \lambda y y) (a) \lambda x \lambda y x) \lambda x \lambda y y) \lambda x \lambda y y$ est un λ -terme pour le "prédécesseur" $((\underline{p}) \underline{0}) \simeq_\beta \underline{0}$ et $((\underline{p}) \underline{n+1}) \simeq_\beta \underline{n}$.

On vérifie que :

- Pour tout $\theta_n \simeq_\beta \underline{n}$, $((T)\theta_n)f \succ \begin{cases} (f)\underline{0} & \text{si } n = 0 \\ (f)(\underline{s})(\underline{p})(\underline{s})^n\underline{0} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$

Donc T est un opérateur de mise en mémoire ⁴ pour pour les entiers.

- $\vdash_{AF2} T : \forall x \{N^*[x] \rightarrow \neg\neg N[x]\}$ (le typage nécessite l'introduction d'un système d'équations adéquat pour le type des entiers).

- Mais $((T)\theta)f \succ (f)(\underline{s})(\underline{p})\underline{0}$ et $(\underline{s})(\underline{p})\underline{0} \simeq_\beta \underline{1}$. \square

References

- [1] J.L. Krivine *Lambda-calcul, types et modèles*
Masson, Paris 1990
- [2] J.L. Krivine *Opérateurs de mise en mémoire et traduction de Gödel*
Archiv for Mathematical Logic 30, 1990, pp. 241-267
- [3] K. Nour *Opérateurs de mise en mémoire en lambda-calcul pur et typé*
Thèse de Doctorat, Université de Chambéry, 1993
- [4] M. Parigot *$\lambda\mu$ -calculus : an algorithm interpretation of classical natural deduction*
A. Voronkov, editor, Proceedings of the International Conference on Logic Programming and Automated Reasoning pp. 190-201. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 624, Springer Verlag, 1992.
- [5] M. Parigot *Classical proofs as programs*
G. Gottlob, A. Leitsch, and D. Mundini, editors, Proceedings of the third Kurt Gödel colloquium - KGC'93, pp. 263-276. Lectures Notes in Computer Science, 713, Springer Verlag, 1993.
- [6] M. Parigot *Strong normalization for second order classical natural deduction*
Proceedings of the eighth annual IEEE symposium on logic in computer science, pp. 39-46, 1993.

⁴Cet opérateur est donné par J.L. Krivine