



**HAL**  
open science

## An example of a non adequate numeral system

Karim Nour

► **To cite this version:**

Karim Nour. An example of a non adequate numeral system. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 1996, 323, pp.439-442. hal-00381045

**HAL Id: hal-00381045**

**<https://hal.science/hal-00381045>**

Submitted on 5 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# An example of a non adequate numeral system

Karim NOUR

**Abstract** *A numeral system is defined by three closed  $\lambda$ -terms : a normal  $\lambda$ -term  $d_0$  for Zero, a  $\lambda$ -term  $S_d$  for Successor, and a  $\lambda$ -term for Zero Test, such that the  $\lambda$ -terms  $(S_d^i d_0)$  are normalizable and have different normal forms. A numeral system is said adequate iff it has a closed  $\lambda$ -term for Predecessor. This Note gives a simple example of a non adequate numeral system.*

## Un exemple d'un système numérique non adéquat

**Résumé** *Un système numérique est défini par la donnée de trois  $\lambda$ -termes clos: un  $\lambda$ -terme normal  $d_0$  pour Zéro, un  $\lambda$ -terme  $S_d$  pour le Successeur, et un  $\lambda$ -terme pour le Test à Zéro, tels que les  $\lambda$ -termes  $(S_d^i d_0)$  sont normalisables et possèdent des formes normales différentes. Un système numérique est dit adéquat ssi il possède un  $\lambda$ -terme clos pour le Prédécesseur. Dans cette Note nous présentons un exemple simple d'un système numérique non adéquat.*

## Version Française Abrégée

Un *système numérique* est une suite  $\mathbf{d} = d_0, d_1, \dots, d_n, \dots$  de  $\lambda$ -termes normaux clos différents pour laquelle il existe des  $\lambda$ -termes clos  $S_d$  et  $Z_d$  tels que :

$$\begin{aligned} (S_d d_n) &\simeq_{\beta} d_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ &\text{et} \\ (Z_d d_0) &\simeq_{\beta} \lambda x \lambda y x \\ (Z_d d_{n+1}) &\simeq_{\beta} \lambda x \lambda y y \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Les  $\lambda$ -termes  $S_d$  et  $Z_d$  sont appelés *Successeur* et *Test à Zéro* pour  $\mathbf{d}$ .

Chaque système numérique peut être naturellement considéré comme un codage des entiers en  $\lambda$ -calcul et donc nous pouvons représenter les fonctions numériques totales de la manière suivante:

Une fonction numérique totale  $\phi : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$  est dite  *$\lambda$ -définissable* dans un système numérique  $\mathbf{d}$  si et seulement si :

$$\exists F_\phi \forall n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N} (F_\phi d_{n_1} \dots d_{n_p}) \simeq_\beta d_{\phi(n_1, \dots, n_p)}$$

La différence entre la définition d'un système numérique que nous proposons ici et celle donnée par H. Barendregt dans [1] est le fait que nous exigeons que les  $d_i$  soient normaux et différents. En effet ces dernières conditions permettent avec des stratégies de réduction fixées une fois pour toute (par exemple la stratégie de la réduction gauche qui consiste à réduire toujours dans un  $\lambda$ -terme le redex le plus à gauche) la valeur exacte d'une fonction calculée sur des arguments.

Un système numérique  $\mathbf{d}$  est dit *adéquat* si et seulement s'il existe un  $\lambda$ -terme clos  $P_d$  tel que :

$$(P_d d_{n+1}) \simeq_\beta d_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Le  $\lambda$ -terme  $P_d$  est appelé *Prédécesseur* pour  $\mathbf{d}$ .

H. Barendregt a démontré dans [1] que :

*Un système numérique  $\mathbf{d}$  est adéquat si et seulement si toutes les fonctions récursives totales sont  $\lambda$ -définissables dans  $\mathbf{d}$ .*

Une question se pose : **Peut on trouver un système numérique non adéquat ?**

Nous présentons dans cette Note un exemple d'un système numérique non adéquat.

Le système numérique non adéquat que nous proposons est le suivant :

$$d_0 = \lambda x(x \ \lambda x \lambda y x \ \lambda x x)$$

et

$$d_{n+1} = \lambda x(x \ \lambda x \lambda y y \ \lambda x_1 \dots \lambda x_n \lambda x x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La démonstration de non adéquation s'inspire des techniques développées par J-L Krivine dans [3] pour démontrer son théorème de mise en mémoire.

---

## 1 Notations and definitions

The notations are standard (see [1] and [2]).

- The  $\beta$ -equivalence relation is denoted by  $M \simeq_\beta N$ .
- We denote by  $T$  (for True) the  $\lambda$ -term  $\lambda x \lambda y x$  and by  $F$  (for False) the  $\lambda$ -term  $\lambda x \lambda y y$ .
- The notation  $\sigma(M)$  represents the result of the simultaneous substitution  $\sigma$  to the free variables of  $M$  after a suitable renaming of the bounded variables of  $M$ .
- The pair  $\langle M, N \rangle$  denotes the  $\lambda$ -term  $\lambda x (x M N)$ .
- Let us recall that a  $\lambda$ -term  $M$  either has a *head redex* [i.e.  $M = \lambda x_1 \dots \lambda x_n (\lambda x U V V_1 \dots V_m)$ , the head redex being  $(\lambda x U V)$ ], or is in *head normal form* [i.e.  $M = \lambda x_1 \dots \lambda x_n (x V_1 \dots V_m)$ ].
- The notation  $M \succ N$  means that  $N$  is obtained from  $M$  by some head reductions and we denote by  $h(M, N)$  the length of the head reduction between  $M$  and  $N$ .
- A  $\lambda$ -term is said *solvable* iff its head reduction terminates.

The following results are well known :

- If  $M$  is  $\beta$ -equivalent to a head normal form then  $M$  is solvable.
- If  $M \succ N$ , then, for any substitution  $\sigma$ ,  $\sigma(M) \succ \sigma(N)$ , and  $h(\sigma(M), \sigma(N)) = h(M, N)$ .  
In particular, if for some substitution  $\sigma$ ,  $\sigma(M)$  is solvable, then  $M$  is solvable.

## 2 Numeral systems

- A *numeral system* is a sequence  $\mathbf{d} = d_0, d_1, \dots, d_n, \dots$  consisting of different closed normal  $\lambda$ -terms such that for some closed  $\lambda$ -terms  $S_d$  and  $Z_d$  :

$$\begin{aligned}
 (S_d d_n) &\simeq_\beta d_{n+1} \text{ for all } n \in \mathbb{N} \\
 &\text{and} \\
 (Z_d d_0) &\simeq_\beta T \\
 (Z_d d_{n+1}) &\simeq_\beta F \text{ for all } n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

The  $\lambda$ -terms  $S_d$  and  $Z_d$  are called *Successor* and *Zero Test* for  $\mathbf{d}$ .

Each numeral system can be naturally considered as a coding of integers in  $\lambda$ -calculus and then we can represent total numeric functions as follows:

- A total numeric function  $\phi : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$  is  $\lambda$ -definable with respect to a numeral system  $\mathbf{d}$  iff

$$\exists F_\phi \forall n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N} (F_\phi d_{n_1} \dots d_{n_p}) \simeq_\beta d_{\phi(n_1, \dots, n_p)}$$

- A numeral system  $\mathbf{d}$  is called *adequate* iff there is a closed  $\lambda$ -term  $P_d$  such that

$$(P_d d_{n+1}) \simeq_\beta d_n \text{ for all } n \in \mathbb{N}.$$

The  $\lambda$ -term  $P_d$  is called *Predecessor* for  $\mathbf{d}$ .

H. Barendregt has shown in [1] that :

*A numeral system  $\mathbf{d}$  is adequate iff all total recursive functions are  $\lambda$ -definable with respect to  $\mathbf{d}$ .*

A question arises : **Can we find a non adequate numeral system ?**

### 3 An example of a non adequate numeral systems

**Theorem** *There is a non adequate numeral system.*

**Proof** For every  $n \in \mathbb{N}$ , let  $p_n = \lambda x_1 \dots \lambda x_n \lambda x x$ .

Let  $d_0 = \langle T, p_0 \rangle$  and for every  $n \geq 1$ ,  $d_n = \langle F, p_n \rangle$ .

It is easy to check that the  $\lambda$ -terms  $S_d = \lambda n \langle F, \lambda x n \rangle$  and  $Z_d = \lambda n (n T)$  are  $\lambda$ -terms for Successor and Zero Test for  $\mathbf{d}$ .

Let  $\nu, x, y$  be different variables.

If  $\mathbf{d}$  possesses a closed  $\lambda$ -term  $P_d$  for Predecessor, then the  $\lambda$ -term

$Q_d = \lambda n ((P_d \langle F, n \rangle) T)$  satisfies the following :

$$(Q_d p_{n+1} x y) \simeq_\beta \begin{cases} x & \text{if } n = 0 \\ y & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

then

$$(Q_d p_{n+1} x y) \succ \begin{cases} x & \text{if } n = 0 \\ y & \text{if } n \geq 1 \end{cases}.$$

Therefore  $(Q_d \nu x y)$  is solvable and its head normal form does not begin by  $\lambda$ .

We have three cases to see :

- $(Q_d \nu x y) \succ (x u_1 \dots u_k)$ , then  $(Q_d p_2 x y) \not\simeq y$ .
- $(Q_d \nu x y) \succ (y u_1 \dots u_k)$ , then  $(Q_d p_1 x y) \not\simeq x$ .

- $(Q_d \nu x y) \succ (\nu u_1 \dots u_k)$ , then  $(Q_d p_{k+2} x y) \not\succeq y$ .

Each case is impossible. Therefore  $\mathbf{d}$  is a non adequate numeral system.  $\square$

**Acknowledgement.** We wish to thank Mariangiola Dezani for helpful discussions.

## References

- [1] H. Barendregt *The lambda calculus, its syntax and semantics*. **North Holland, 1984**
- [2] J-L. Krivine *Lambda calcul, types et modèles*. **Masson, 1990**
- [3] J-L. Krivine *Opérateurs de mise en mémoire et traduction de Gödel*. **Archive. Math. Logic 30. (241-267), 1990**
- [4] K. Nour *A conjecture on numeral systems*. **Submitted to Studia Logica**

LAMA - ÉQUIPE DE LOGIQUE  
UNIVERSITÉ DE CHAMBÉRY  
73376 LE BOURGET DU LAC

*E-mail:* nour@univ-savoie.fr