HAL open science

Un théorème sur les actions de groupes de dimension infinie

Jacques Fejoz, Mauricio Garay

To cite this version:

Jacques Fejoz, Mauricio Garay. Un théorème sur les actions de groupes de dimension infinie. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 2010, 348 (7-8), pp.477-482. hal-00375856v2

HAL Id: hal-00375856

https://hal.science/hal-00375856v2

Submitted on 16 Apr 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UN THÉORÈME SUR LES ACTIONS DE GROUPES DE DIMENSION INFINIE

JACQUES FÉJOZ AND MAURICIO GARAY

Résumé. L'objet de cette note est de donner, dans un cadre analytique, un critère infinitésimal pour qu'un espace vectoriel soit localement homogène sous l'action d'un groupe. Notre approche diffère de celles qui recourent à un théorème d'inversion locale (e.g. [3, 5] ou [4, Théorème 4.2.5]), par l'usage crucial de la structure de groupe sous-jacente. Ceci permet, en particulier, de remplacer l'estimation pour l'inverse de l'action de l'algèbre de Lie en un plan tangent arbitraire, par une estimation sur les vecteurs tangents en l'origine. Notre démonstration est basée sur la méthode itérative utilisée par Kolmogorov et Arnold dans leur démonstration du théorème des tores invariants [2, 1]. Le théorème de cette note sera utilisé dans des travaux ultérieurs.

A theorem on infinite dimensional group actions.
Abstract. We give an infinitesimal criterion, in the analytic setting, for a vector space to be locally homogeneous under some group action. Our approach differs from those which resort to an inverse function theorem (e.g. [3, 4, 5] or [4, Théorème 4.2.5]), because we use the underlying group structure in an essential way. In particular, this allows to replace the estimate of the inverse map of the Lie algebra action at an arbitrary tangent plane, by an estimate of the vectors tangent at the origin. Our proof relies on the iterative method used by Kolmogorov and Arnold in their proof of the invariant tori theorem [2, 1]. The theorem of this note will be used in subsequent works.

1. Un *espace vectoriel* E est dit *échelonné* s'il est réunion des éléménts d'une famille décroissante de sous-espaces de Banach (E_s), $s \in]0,1[$, telle que les inclusions $E_{s+\sigma} \subset E_s$, $\sigma > 0$, soient de norme au plus 1. Nous noterons B_s^E la boule unité de E_s centrée en l'origine et B_E l'union de ces boules.
Une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ entre deux espaces vectoriels échelonnés est *k-bornée* si :

$$N(u) := \sup_{s<s+\sigma,\ x\in E_{s+\sigma}} \sigma^k \frac{|u(x)|_s}{|x|_{s+\sigma}} < +\infty.$$

De même, une *variété topologique* X est dite *échelonnée* si elle est munie d'une famille croissante de variétés différentielles banachiques $X_s \subset X$ modelées sur les éléments d'un espace vectoriel échelonné E.

2. Supposons qu'un ensemble $G = \bigcup_s G_s$ soit muni à la fois d'une structure de groupe et de variété échelonnée . La variété G_s n'étant pas nécéssairement un groupe, les conditions de compatibilité sont plus subtiles que dans le cas des groupes de Lie.
Par analogie avec la dimension finie, notons

$$\exp : 2B^{\mathfrak{g}} \to G, \quad \xi \mapsto e^{\xi}, \quad 0 \mapsto 1$$

Le premier auteur a bénéficié d'un financement de l'ANR (Project BLANC07-3_187245, Hamilton-Jacobi and Weak KAM Theory).

un paramétrage local de G par un homéomorphisme commutant aux inclusions des échelles. Nous notons log l'inverse à gauche de cette application. Nous dirons que la structure de variété échelonnée (G_s) fait de G un *groupe échelonné* s'il existe $\kappa > 0$ tel que la loi interne induise des applications :

$$B^{\mathfrak{g}}_{s+\sigma} \times \sigma B^{\mathfrak{g}}_s \to \exp\left((1+\sigma)B^{\mathfrak{g}}_s\right) \subset G_s, \quad (\xi,\eta) \mapsto e^{\xi}e^{\eta}$$

vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} |\log\left(e^{\xi}\, e^{\eta}\right)|_s & \leq & |\xi|_{s+\sigma} + |\eta|_s \\ |\log e^{\xi}e^{\eta} - \xi - \eta|_s & \leq & \kappa\sigma^{-1}|\xi|_{s+2\sigma}|\eta|_s. \end{cases}$$

pour tous $\xi \in B^{\mathfrak{g}}_{s+2\sigma}$, $\eta \in \sigma B^{\mathfrak{g}}_s$.

3. Une *action de groupe échelonné* $G = \bigcup G_s$ sur un espace vectoriel échelonné $E = \bigcup E_s$ est une action du groupe G sur E qui induit des applications de classe C^1 :

$$(\sigma B^{\mathfrak{g}}_s) \times E_{s+\sigma} \to E_s, \quad (\xi, x) \mapsto e^{\xi}\, x.$$

Une telle action induit une action infinitésimale de $\mathfrak{g}$:

$$\xi : E_{s+\sigma} \to E_s, \quad \xi\, x := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(e^{t\xi}\, x\right)$$

pour tout $\xi \in \mathfrak{g}_s$. Nous dirons que l'action vérifie *une condition* (A_c), $c \geq 1$, si :

$$(A_c) \quad \left|\left(e^{\xi}\right)^{-1}\, (\xi\, 0_E)\right|_s \leq c\,\sigma^{-1}|\xi|^2_{s+2\sigma},, \text{ pour tout } \xi \in B^{\mathfrak{g}}_{s+2\sigma}$$

où 0_E désigne l'origine dans E.

4. L'exemple que nous avons en tête est le suivant. Soit U_s un système fondamental de voisinages d'un compact $K \subset \mathbb{C}^n$. Notons E_s l'espace des fonctions holomorphes sur U_s et continues sur l'adhérence de U_s. Le groupe $\widehat{G}$ des transformations biholomorphes qui laissent K invariant peut être muni d'une structure de groupe échelonné qui satisfait une condition (A_c) et qui définit une action échelonné sur $E = \bigcup E_s$. La structure de groupe échelonné est donnée par la paramétrisation $e^{\xi} := \mathrm{id} + \xi$ et l'action par $gx = (a+x) \circ g^{-1} - a$ avec $g = e^{\xi}$.
Dans des travaux ultérieurs, nous considèrerons le cas où $n = 2d + l$, K est de la forme $L \times \{0\}$ où $L \subset \mathbb{C}^{2d}$ est la partie réelle d'une variété lagrangienne complexe analytique, l'espace $\mathbb{C}^l$ est un espace de paramètres et $G \subset \widehat{G}$ est le groupe des automorphismes de Poisson de $\mathbb{C}^{2d} \times \mathbb{C}^l$ au voisinage de K.

Théorème. *Soit $G = \bigcup_s G_s$ un groupe échelonné agissant sur un espace vectoriel échelonné $E = \bigcup_s E_s$. Supposons d'une part que l'action vérifie une condition (A_c), et que d'autre part l'application linéaire $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow E$, $\xi \mapsto \xi\, 0_E$ possède un inverse à droite j qui soit k-borné. L'espace E est alors localement G-homogène, plus précisément :*

$$\varepsilon\, B^E_s \subset \exp\left(B^{\mathfrak{g}}_{s-\delta}\right)\, 0_E, \quad \varepsilon = \frac{\delta^{2k+2}}{4^{3k+4}cN(j)^2},$$

pour tout $\delta \in]0, s[$ tel que $\delta \leq 4N(j)^{1/(k+1)}$.

5. L'hypothèse sur j et la condition (A_c) permettent de définir une application

$$\phi : \bigcup_{s,\sigma} \left(\sigma B^{\mathfrak{g}}_{s+2\sigma}\right) \to \mathfrak{g}, \quad \xi \mapsto j\, \left(e^{\xi}\right)^{-1}\, \xi\, 0_E$$

et montrent que l'on a :

$$|\phi(\xi)|_s \leq cN(j)\sigma^{-k-1}|\xi|^2_{s+2\sigma}$$

pour tout $\xi \in \sigma B^{\mathfrak{g}}_{s+2\sigma}$. Fixons $s < 1$ et $\delta < s$ avec $\delta < 4N(j)^{1/(k+1)}$. Soit $x \in \varepsilon B^E_s$, $\varepsilon > 0$, nous allons montrer que si ε est choisit suffisamment petit alors les images successives de $j(x)$ par ϕ, soit

$$\xi_n := \phi^n(j(x)),$$

sont bien définies pour tout $n \geq 0$ et tendent vers 0 dans $B^{\mathfrak{g}}_{s-\delta}$. Nous montrerons ensuite que la suite $(e^{\xi_0} ... e^{\xi_n})_{n\geq 0}$ tend vers un élément g dans $\exp(B^{\mathfrak{g}}_{s-\delta})$. La suite définie par :

$$x_0 = x, \quad x_{n+1} = \left(e^{\xi_n}\right)^{-1} x_n,$$

tend alors vers 0_E dans $E_{(s-\delta)/2}$ de sorte que $x = g\, 0_E$.

Soit donc (s_n) la suite décroissant vers $s - \delta$ définie par :

$$s_0 = s, \quad s_{n+1} = s_n - 2\sigma_n \text{ avec } \sigma_n = 2^{-(n+2)}\delta,$$

et posons :

$$\varepsilon = \frac{c\,\delta}{16\sigma_0} \prod_{m\geq 0} (cN(j)\sigma_m^{-k-1})^{-2^{-m}}.$$

Nous vérifierons, par la suite, que cette valeur de ε coïncide avec celle de l'énoncé.

Remarquons tout d'abord l'on a $\left(2^{-4}\delta\right)^{2^n} \leq \sigma_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Pour $n = 0$ c'est évident et une récurrence sur n donne

$$(2^{-4}\delta)^{2^n} = \left((2^{-4}\delta)^{2^{n-1}}\right)^2 \leq (\sigma_n)^2 = 2^{-2(n+2)}\delta \leq \sigma_{n+1}.$$

Supposons construits les termes $\xi_0, \ldots, \xi_N$ de la suite. Le lemme suivant montre que ξ_N appartient au domaine de définition de ϕ et que l'on peut par conséquent construire la suite (ξ_n) de proche en proche.

Lemme 1. *Pour tout $0 \leq n \leq N$, on a l'inégalité :*

$$|\xi_n|_{s_{n+1}} \leq \left(2^{-4}\delta\right)^{2^n}.$$

Démonstration. Nous allons montrer, par récurrence sur n, l'estimation :

$$|\xi_n|_{s_{n+1}} \leq (2^{-4}\delta\,\mu_n)^{2^n} \text{ avec } \mu_n := \prod_{m\geq n+1} (cN(j)\sigma_m^{-k-1})^{-2^{-m}}.$$

Cette estimation est plus précise que celle du lemme car, d'après l'hypothèse sur δ, on a $cN(j)\sigma_m^{-k-1} \geq 1$ pour tout m, donc $\mu_n \leq 1$. Pour $n = 0$, l'hypothèse sur j appliquée à $\xi_0 = j(x)$ montre que l'on a :

$$|\xi_0|_{s_1} \leq N(j)\sigma_0^{-k}|x|_{s_1+\sigma_0} \leq N(j)\sigma_0^{-k}|x|_{s_0} \leq N(j)\sigma_0^{-k}\varepsilon = 2^{-4}\delta\,\mu_0.$$

Supposons maintenant que $|\xi_{n-1}|_{s_n} \leq (2^{-4}\delta\,\mu_{n-1})^{2^{n-1}}$.
L'hypothèse sur j et la conditionne (A_c) donnent alors l'estimation :

$$|\xi_n|_{s_{n+1}} = |\phi(\xi_{n-1})|_{s_{n+1}} \leq cN(j)\sigma_n^{-k-1}|\xi_{n-1}|^2_{s_n}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$|\xi_n|_{s_{n+1}} \leq cN(j)\sigma_n^{-k-1}\left(2^{-4}\delta\mu_{n-1}\right)^{2^n} = \left(2^{-4}\delta\,\mu_n\right)^{2^n},$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

6. Nous allons montrer que la suite définie par :

$$\gamma_0 := \xi_0, \quad \gamma_{n+1} := \log\left(e^{\gamma_n}\, e^{\xi_{n+1}}\right)$$

peut être construite de proche en proche et qu'elle converge dans la boule $B^{\mathfrak{g}}_{s-\delta}$.

Supposons construits les termes $\gamma_0, \dots, \gamma_N$ de la suite. Comme le groupe G est échelonné, la loi interne induit une application

$$B^{\mathfrak{g}}_{s_{n+1}} \times \sigma_{n+1} B^{\mathfrak{g}}_{s_{n+2}} \to B^{\mathfrak{g}}_{s_{n+2}}, \quad (\gamma, \xi) \mapsto \log e^{\gamma}\, e^{\xi}.$$

Le lemme suivant montre que la suite (γ_n) peut-être construite de proche en proche dans la boule $B^{\mathfrak{g}}_{s-\delta}$.

Lemme 2. *Pour tout $n \leq N$, on a l'inégalité $|\gamma_n|_{s_{n+1}} \leq 1$.*

Démonstration. Nous allons montrer, par récurrence sur n, l'estimation $|\gamma_n|_{s_{n+1}} \leq g_n$, avec

$$g_0 := 2^{-4}, \quad g_n := \left(1 + 2^{-2^{n+1}}\right) g_{n-1} + 2^{-2^{n+1}}.$$

Cette estimation est plus précise que celle du lemme parce que (g_n) est majorée par 1. En effet, une récurrence sur n montre que l'on a :

$$1 + g_n = \prod_{1 \leq m \leq n} \left(1 + 2^{-2^{m+1}}\right),$$

et par conséquent :

$$\log(1 + g_n) \leq 2^{-4} + \sum_{m \geq 1} 2^{-2^{m+1}} \leq 2^{-4} + \sum_{m \geq 1} 2^{-4^m} = \frac{1}{16} + \frac{1}{28} < \log 2.$$

Puisque $\gamma_0 = \xi_0$, l'estimation voulue est vraie au rang $n = 0$ d'après le lemme 1. Supposons la propriété satisfaite au rang $n - 1$. Commme G est échelonné, on a :

$$|\gamma_n|_{s_{n+1}} \leq |\xi_n|_{s_{n+1}} + \sigma_n^{-1} |\xi_n|_{s_{n+1}} |\gamma_{n-1}|_{s_n} + |\gamma_{n-1}|_{s_n}.$$

Dans le membre de droite, d'après le lemme 1 et l'hypothèse de récurrence, les trois termes peuvent être majorés respectivement par $2^{-2^{n+1}}$, $2^{-2^{n+1}} g_{n-1}$ et g_{n-1}, et nous obtenons donc :

$$|\gamma_n|_{s_{n+1}} \leq \left(1 + 2^{-2^{n+1}}\right) g_{n-1} + 2^{-2^{n+1}} = g_n,$$

ce qui démontre le lemme. □

Lemme 3. *La suite (γ_n) converge dans la boule $B^{\mathfrak{g}}_{s-\delta}$.*

Démonstration. En substituant $\log\left(e^{\gamma_{n-1}}\, e^{\xi_n}\right)$ à γ_n puis en appliquant l'inégalité triangulaire, nous obtenons :

$$|\gamma_n - \gamma_{n-1}|_{s_{n+1}} \leq |\xi_n|_{s_{n+1}} + |\log e^{\gamma_{n-1}}\, e^{\xi_n} - \gamma_{n-1} - \xi_n|_{s_{n+1}}.$$

En utilisant le fait que G est échelonné, le membre de droite se simplifie :

$$|\gamma_n - \gamma_{n-1}|_{s_{n+1}} \leq |\xi_n|_{s_{n+1}} + \kappa \sigma_n^{-1} |\gamma_{n-1}|_{s_n} |\xi_n|_{s_{n+1}},$$

et par conséquent, en utilisant le lemme 1, il vient :

$$|\gamma_n - \gamma_{n-1}|_{s-\delta} \leq |\gamma_n - \gamma_{n-1}|_{s_{n+1}} \leq 2^{-2^{n+2}} + \kappa 2^{-2^{n+1}} \leq (1 + \kappa) 2^{-2^{n+1}},$$

d'où la convergence souhaitée. □

Il ne nous reste plus qu'à calculer ε. En substituant $2^{-(n+2)}\delta$ à σ_n dans la définition de ε on obtient :

$$\varepsilon = \frac{c}{4} \prod_{m \geq 0} \left(\frac{\delta^{k+1}}{cN(j)2^{(k+1)(m+2)}} \right)^{2^{-m}},$$

soit

$$\log \varepsilon = \log \frac{c}{4} + \left(\sum_{m \geq 0} 2^{-m} \right) \log \frac{\delta^{k+1}}{cN(j)4^{k+1}} - \left(\sum_{m \geq 0} m 2^{-m} \right) \log 2^{k+1}$$

ce qui donne bien la valeur annoncé car $\sum_{m \geq 0} 2^{-m} = \sum_{m \geq 0} m 2^{-m} = 2$. Le théorème est démontré.

Références

[1] V. I. Arnold, *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Uspehi Mat. Nauk **18** (1963), no. 6 (114), 91–192.

[2] A. N. Kolmogorov, *On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **98** (1954), 527–530.

[3] J. Moser, *A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations. I*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **20** (1966), 265–315.

[4] F. Sergeraert, *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **5** (1972), 599–660.

[5] E. Zehnder, *Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems. II*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), no. 1, 49–111.

E-mail address: `fejoz@math.jussieu.fr`

E-mail address: `garay91@gmail.com`