HAL
open science

Les noeuds de Lorenz

Pierre Dehornoy

To cite this version:

Pierre Dehornoy. Les noeuds de Lorenz. L'Enseignement Mathématique , 2011, 57, pp.211-280. hal-00375709v2

HAL Id: hal-00375709

https://hal.science/hal-00375709v2

Submitted on 6 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les nœuds de Lorenz

par Pierre Dehornoy [1])

Résumé. Cet article est un exposé de synthèse sur les nœuds de Lorenz. Nous décrivons la construction initiale, démontrons de façon précise un certain nombre de propriétés classiques, en particulier le fait que la clôture d'une tresse positive est un nœud fibré, et explicitons la correspondance de Ghys entre nœuds modulaires et nœuds de Lorenz. Par ailleurs, nous montrons deux propriétés nouvelles, à savoir que, suivant la correspondance de Ghys, les images des orbites triviales forment un sous-groupe du groupe des classes, et, d'autre part, que l'image réciproque d'un élément du groupe des classes et de son inverse sont des orbites isotopes.

Abstract. This article is a survey on Lorenz knots. We describe the original construction, prove several classical properties, in particular the fact that the closure of a positive braid is a fibered knot, and describe Ghys'correspondance between modular knots and Lorenz knots. We also prove two new properties, namely that following Ghys' correspondance, the images of trivial orbits of the Lorenz flow form a subgroup of the class group, and that the reverse images of an element in the class group and of its inverse are isotopic orbits.

Les nœuds de Lorenz sont les nœuds qui peuvent être réalisés comme orbites périodiques du flot géométrique de Lorenz. Tous les nœuds ne sont pas des nœuds de Lorenz : par exemple, le nœud trivial et le nœud de trèfle en sont, mais pas le nœud de huit ; plus généralement, on ne compte que vingt nœuds de Lorenz parmi les nœuds ayant au plus seize croisements. Pourtant, la famille des nœuds de Lorenz est vaste, puisque tous les nœuds toriques et tous les nœuds algébriques sont des nœuds de Lorenz. Introduits par J. Birman et R. Williams en 1983, ces nœuds ont fait l'objet de travaux assez nombreux, car ils possèdent de riches propriétés et de multiples facettes. On sait depuis les travaux de R. Ghrist qu'il existe un flot non singulier dans $\mathbf{R}^3$ tel que tout nœud est réalisé comme orbite périodique dudit flot ; mais le résultat ne fournit en général aucun contrôle des nœuds ainsi engendrés. A l'opposé, la combinatoire spécifique du flot de Lorenz, qui s'exprime par des liens avec les mots de Lyndon et les diagrammes de Young, donne accès pour les nœuds de Lorenz à des paramètres topologiques comme le genre ou l'indice de tresse qui sont difficiles à calculer dans le cas général. De la sorte, la famille des nœuds de Lorenz apparaît comme une étape naturelle dans une étude des nœuds partant des plus simples et allant progressivement vers davantage de complexité : plus riche que celle des nœuds toriques ou celle des nœuds algébriques, la famille de nœuds de Lorenz est néanmoins

[1]) Unité de mathématiques pures et appliquées, École normale supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France, pierre.dehornoy@umpa.ens-lyon.fr

assez petite pour qu'une description effective des propriétés de ses éléments soit possible. Récemment, l'intérêt porté à ces nœuds a été renforcé par la découverte par É. Ghys d'une correspondance naturelle entre les nœuds de Lorenz et les nœuds dits modulaires, qui apparaissent comme orbites périodiques du flot géodésique sur la surface modulaire, un certain orbifold lié à l'arithmétique des corps quadratiques et à la géométrie hyperbolique.

Ce que nous faisons dans ce texte, c'est principalement de passer en revue les propriétés des nœuds de Lorenz connues à ce jour. La plupart des démonstrations sont seulement esquissées, à l'exception de quelques-unes qui, dans la littérature, apparaissent de façon schématique ou dans un contexte différent, et que nous présentons ici de façon détaillée. Par ailleurs, nous établissons deux résultats nouveaux dans la lignée de la correspondance de Ghys, à savoir, d'une part, que, pour tout ordre d'un anneau d'entiers quadratiques, les classes d'idéaux dont l'image par la correspondance de Ghys est un nœud trivial forment un sous-groupe du groupe des classes de la forme $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$ dont la multiplication peut être décrite de façon explicite, et, d'autre part, que deux éléments inverses l'un de l'autre dans le groupe des classes ont pour image le même nœud par la correspondance de Ghys.

Le plan de l'article est le suivant. Dans une première partie, on effectue un bref rappel historique sur l'origine des nœuds de Lorenz. Puis on introduit les nœuds de Lorenz à partir du patron de Lorenz, qui est une surface branchée de $\mathbf{R}^3$ liée à la dynamique d'un certain système différentiel chaotique. Un intermède est alors dédié à le théorie des surfaces branchées. On déduit ensuite un codage des nœuds de Lorenz à l'aide des mots de Lyndon, qui sont des mots particuliers sur un alphabet à deux lettres. Ce codage permet d'énumérer systématiquement tous les nœuds de Lorenz, et il est à la base de toute l'étude ultérieure. Notre exposition ici est basée sur l'article original de J. Birman et R. Williams [5], à l'exception de la section 1.3, et des sections 1.6 et 1.7 où nous développons une nouvelle variante moins redondante du codage initial à l'aide de diagrammes de Young.

La deuxième partie est consacrée à l'étendue de la famille des nœuds de Lorenz et à leurs principales propriétés topologiques. On montre que tout nœud de Lorenz est premier. On y explique que tous les nœuds toriques et tous les nœuds algébriques sont des nœuds de Lorenz, le cas des nœuds algébriques se déduisant d'une étude plus générale des nœuds de Lorenz qui sont des nœuds satellites. On montre ensuite que tout nœud de Lorenz est un nœud fibré, et on en déduit une formule pour le genre des nœuds de Lorenz, ainsi qu'un critère permettant d'exclure certain nœuds de la liste des nœuds de Lorenz. Les résultats de cette partie apparaissent principalement dans les articles [5], [17], et [52]. Pour ce qui est du caractère fibré, il est déduit dans [5] de résultats généraux de Stallings [46]. Il peut également être déduit de travaux de K. Murasugi [38] et D. Gabai [19, 20] sur les fibrations. Dans le cas de nœuds qui sont clôtures de tresses positives, l'argument est spécialement simple et visuel. Comme il semble n'avoir jamais été rédigé, tout au moins de façon concise, nous le détaillons ici.

Dans la troisième partie, nous poursuivons l'étude topologique des nœuds de Lorenz. On introduit la famille des tresses de Birman-Williams, qui fournit une nouvelle façon d'exprimer un nœud de Lorenz comme clôture d'une tresse positive, et on en déduit une détermination explicite de l'indice de tresse d'un nœud de Lorenz comme nombre de brins d'une tresse de Birman–Williams associée. Le résultat original est dû à J. Franks, H. Morton et R. Williams [18]. Nous proposons ici une version complète de

la démonstration basée sur l'introduction d'une variante du polynôme HOMFLY.

La quatrième partie est consacrée à la correspondance de Ghys entre les nœuds de Lorenz et les orbites périodiques du flot géodésique sur la surface modulaire, lesquelles sont intimement liées à des objets très usuels de la théorie des nombres depuis Gauss, à savoir les classes de conjugaison de matrices dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, les classes de formes quadratiques à coefficients entiers et les classes d'idéaux dans des corps quadratiques. Pour expliquer ce lien entre topologie et arithmétique, nous partons de la correspondance naturelle entre les classes d'idéaux dans certains corps quadratiques et les classes de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, qu'on peut caractériser en termes de mots de Lyndon. On en déduit le lien entre les nœuds modulaires et les nœuds de Lorenz qui constitue la correspondance de Ghys. Notre exposition dans cette partie est basée sur [9] et [24]. Par ailleurs, c'est là que nous établissons les deux résultats nouveaux mentionnés plus haut concernant les orbites représentant l'élément neutre du groupe des classes (théorème 4.19) et les orbites représentant des éléments inverses l'un de l'autre (proposition 4.20).

Enfin, dans une brève cinquième partie, nous mentionnons quelques questions ouvertes mettant en jeu les nœuds de Lorenz. L'une des plus fascinantes concerne la possibilité de définir directement sur les nœuds de Lorenz une multiplication qui serait la contrepartie de celle des classes d'idéaux d'un ordre d'un corps quadratique.

Remerciements. Je remercie vivement Étienne Ghys pour m'avoir inité aux nœuds de Lorenz, m'avoir guidé pendant ce travail, et pour de passionnantes conversations. Je remercie également Hugh Morton pour avoir partagé son expérience sur les nœuds de Lorenz et répondu à plusieurs de mes questions. Je remercie Maxime Bourrigan et les deux referees d'une version précédente pour de nombreuses remarques, ayant en particulier permis de lever certaines imprécisions.

1. DESCRIPTION COMBINATOIRE DES NŒUDS DE LORENZ

Cette première partie introduit les nœuds de Lorenz et leur codage par des mots de Lyndon et des diagrammes de Young. Dans la section 1.1, nous rappelons le contexte du système différentiel chaotique de Lorenz, puis, dans la section 1.2, nous introduisons le patron de Lorenz qui permet de modéliser géométriquement le comportement des solutions du système de Lorenz. La section 1.3 est un intermède introduisant la théorie des patrons qui a été dérivée de l'étude des nœuds de Lorenz. La section 1.4 est consacrée au codage des orbites périodiques du flot de Lorenz, donc des nœuds de Lorenz, à l'aide de mots de Lyndon. Dans la section 1.5, nous montrons que tout nœud de Lorenz est clôture d'une tresse de permutation particulière. Dans la section 1.6, nous montrons comment réduire la redondance du codage en introduisant les mots de Lyndon dits minimaux, puis, dans la section 1.7, nous passons au langage des diagrammes de Young.

1.1 Le système de Lorenz, Guckenheimer et Williams

En 1963, le météorologiste E. N. Lorenz a exhibé un système dynamique aux propriétés remarquables [32]. Issu d'un modèle simplifié de convection atmosphérique, il est décrit par les équations différentielles

$$\dot{x} = -10x + 10y, \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -8/3z + xy, \tag{1.1}$$

où r est un paramètre réel proche de 24. Ce système induit un flot déterministe sur $\mathbf{R}^3$: le passé et le futur d'un point de $\mathbf{R}^3$ sont déterminés par sa seule position. Par contre, (1.1) est un système chaotique, au sens où une petite perturbation du point de départ change l'allure globale de l'orbite qui en est issue. Bien avant Lorenz, l'existence de systèmes chaotiques avait été observée par H. Poincaré dans le cadre du problème des trois corps [40] et par J. Hadamard pour le flot géodésique sur des surfaces à courbure négative [29]. Pourtant, l'exemple de Lorenz, peut-être à cause de son origine météorologique, ou peut-être à cause de la simplicité des équations qui le décrivent, a suscité un grand engouement, se trouvant même à l'origine du populaire « effet papillon » [33].

Quand on effectue des simulations numériques des équations de Lorenz (1.1), on observe le phénomène suivant : l'orbite issue de presque tout point semble plonger très vite vers une surface branchée, puis, une fois au voisinage de celle-ci, l'orbite décrit une suite de tours autour de deux points critiques, dans un ordre apparemment aléatoire (figure 1.1). Ayant observé ce phénomème, J. Guckenheimer a suggéré un modèle géométrique simple pour décrire les orbites de ce système [27], à savoir une surface de $\mathbf{R}^3$ munie d'un semi-flot imitant la dynamique observée numériquement et le long de laquelle s'enroulent les orbites. Ce modèle de Guckenheimer a ensuite été étudié et enrichi dans des travaux communs avec R. Williams [28, 51], où il est notamment établi que le modèle est *persistant*, c'est-à-dire qu'une perturbation de classe C^0 du champ de vecteurs mène à un système du même type que celui de Lorenz. La corrélation entre les modèles de Lorenz et de Guckenheimer, et en particulier le fait que les orbites de Lorenz s'accumulent effectivement le long du patron étudié par Guckenheimer et Williams, n'a en fait jamais été complètement prouvée. En 1999, W. Tucker [49, 50] a montré que les orbites du flot de Lorenz s'accumulent le long d'un patron, qui est du type de celui prédit par Lorenz. Cependant, rien ne garantit que ce patron contienne autant d'orbites que celui de Guckenheimer-Williams. Ce dernier est donc une sorte de sur-patron du flot de Lorenz, c'est-à-dire qu'il décrit toutes les orbites du flot de Lorenz, et peut-être un peu plus[2]).

Le flot géométrique de Guckenheimer et Williams contient une infinité dénombrable d'orbites périodiques. Au début des années 1980, J. Birman et R. Williams ont initié l'étude de ces dernières du point de vue de la théorie des nœuds [5]. Cette approche suit l'idée, attribuée à Poincaré, d'étudier un système dynamique *via* ses orbites périodiques. De ce point de vue, il est trop tôt pour décider si cette tâche a été réalisée. Par contre, nous allons voir que les nœuds de Lorenz sont une famille riche du point de vue de la théorie des nœuds.

---

[2]) Avec le vocabulaire de la définition 1.3, il n'est pas garanti que toutes les suites en L et R apparaissent comme codes d'orbites du flot de Lorenz, voir aussi la remarque 1.9

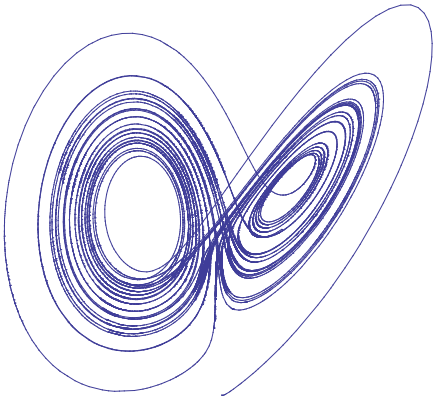


FIGURE 1.1

Une simulation numérique des équations de Lorenz (1.1). Partant d'un point générique, le flot s'accumule sur une surface et tourne autour de deux points critiques.

1.2 LE PATRON DE LORENZ

Dans la suite de cet article, nous délaissons les systèmes différentiels et repartons du modèle géométrique suggéré par Lorenz, Guckenheimer et Williams. On rappelle qu'étant donné un champ de vecteurs X sur une surface S, on appelle *flot* de X l'application Φ de $\mathbf{R} \times S$ dans S dont la dérivée en $t = 0$ coïncide avec X et qui, pour tout point P de S, vérifie

$$\Phi(t_1 + t_2, P) = \Phi(t_1, \Phi(t_2, P)),$$

c'est-à-dire que $\Phi(t, P)$ décrit l'orbite partant de P le long du champ X, lorsqu'une telle application existe. Un *semi-flot* est une application semblable, mais définie seulement sur $\mathbf{R}_+ \times S$.

DÉFINITION 1.1. (Voir figure 1.2.) (i) Le *patron de Lorenz* est la surface branchée de $\mathbf{R}^3$ obtenue comme suit. On part de quatre bandes rectangulaires ouvertes $B_1, \ldots, B_4$, munies chacune d'un champ de vecteurs parallèle à deux côtés opposés. Ces bandes sont déformées et recollées le long de trois axes A, A_1 et A_2 comme montré sur la figure. La surface branchée obtenue est munie du champ de vecteurs obtenu en recollant les champs des quatre bandes.

(ii) On appelle *semi-flot de Lorenz* le semi-flot engendré par le champ de vecteurs du patron de Lorenz. L'axe A est identifié au segment $]0, 1[$ de sorte que l'abscisse du point M où la surface se sépare soit $1/2$, et que l'application de premier retour sur l'axe A en suivant le flot, qu'on note pr, soit identifiée à la fonction $t \mapsto 2t \mod 1$.

Par construction, le patron de Lorenz est une surface ouverte, branchée le long de A. Le champ de vecteurs est défini en tout point, sauf au point M où la surface se sépare. Par conséquent, le semi-flot

est défini sur toute la surface privée des préorbites du point M. En particulier, il n'est pas défini pour les points de A dont l'abscisse est de la forme $m/2^n$ pour m et n entiers. En suivant le semi-flot à partir d'un point P de A différent de M, on recoupe A après un temps fini. Par contre, le passé n'est pas défini : le long de A, chaque point a deux préorbites, on a donc bien affaire à un semi-flot. Néanmoins, par habitude autant que par commodité, nous utilisons ici l'appellation *flot*.

Dans la suite, on s'intéresse aux orbites du flot de Lorenz, et particulièrement aux orbites *périodiques*. Considérons par exemple l'orbite issue du point A d'abscisse $1/7$. En suivant le semi-flot, elle fait le tour de la boucle gauche du patron, passe par le point $2/7$, suit la boucle gauche, arrive au point $4/7$, suit la boucle droite, et, enfin, revient au point $1/7$. On a donc une orbite périodique qui coupe trois fois l'axe du patron. Sur la figure 1.2 sont représentées les orbites passant par les points d'abscisses $1/7$ et $3/7$. On verra que le flot de Lorenz contient une infinité d'orbites périodiques. On appelle *période* d'une telle orbite le nombre d'intersections de celle-ci avec l'axe du patron. Ce qui nous intéresse ici est le fait que de telles orbites périodiques peuvent former des nœuds non triviaux.

DÉFINITION 1.2. Un *nœud* est une classe d'isotopie de plongement du cercle $\mathbf{S}^1$ orienté dans l'espace $\mathbf{R}^3$ orienté. Un *entrelacs* est une classe d'isotopie de plongements de plusieurs cercles dans l'espace [3]).

Un nœud K est appelé *nœud de Lorenz* s'il existe une orbite périodique γ du flot de Lorenz sur le patron de Lorenz représentant K, c'est-à-dire dont K est la classe d'isotopie.

À partir d'un nœud K, on obtient naturellement le nœud *opposé* $\tilde{K}$ en renversant l'orientation de $\mathbf{S}^1$, et deux nœuds *miroirs* par symétrie de K et $\tilde{K}$ par rapport à un plan. En général, ces quatre nœuds ne sont pas isotopes. Cependant, nous verrons que tout nœud de Lorenz est isotope à son opposé (proposition 4.20). Par contre, leurs images-miroir ne sont pas des nœuds de Lorenz (corollaire 2.28), en particulier, elles ne leurs sont pas isotopes.

1.3 INTERMÈDE : LA THÉORIE DES PATRONS ET LE PATRON UNIVERSEL DE GHRIST

Après l'introduction du patron géométrique de Lorenz par Guckenheimer, et l'étude de ses orbites périodiques initiée par Birman et Williams, une *théorie des patrons* (*templates* en anglais) a été lancée, en tant que branche de la théorie des nœuds, en particulier par R. Ghrist, Ph. Holmes et M. Sullivan [23]. Le but est de relier des propriétés des orbites périodiques d'un patron à la seule forme du patron et à son plongement dans $\mathbf{R}^3$. Par exemple, un analogue du théorème d'Alexander selon lequel tout entrelacs peut être réalisé comme clôture d'une tresse existe pour les patrons, ainsi que des analogues des mouvements de Reidemeister.

Notons que la classe d'isotopie d'une orbite périodique du flot géométrique de Lorenz dépend du plongement du patron dans $\mathbf{R}^3$. On obtient une infinité de plongements différents en ajoutant un nombre

[3]) On troque parfois l'espace ambiant $\mathbf{R}^3$ contre son compactifié d'Alexandroff, la sphère $\mathbf{S}^3$. Ce sera notamment le cas dans les sections 2 et 4 de ce survol. Ceci ne change pas les classes d'isotopies considérées.

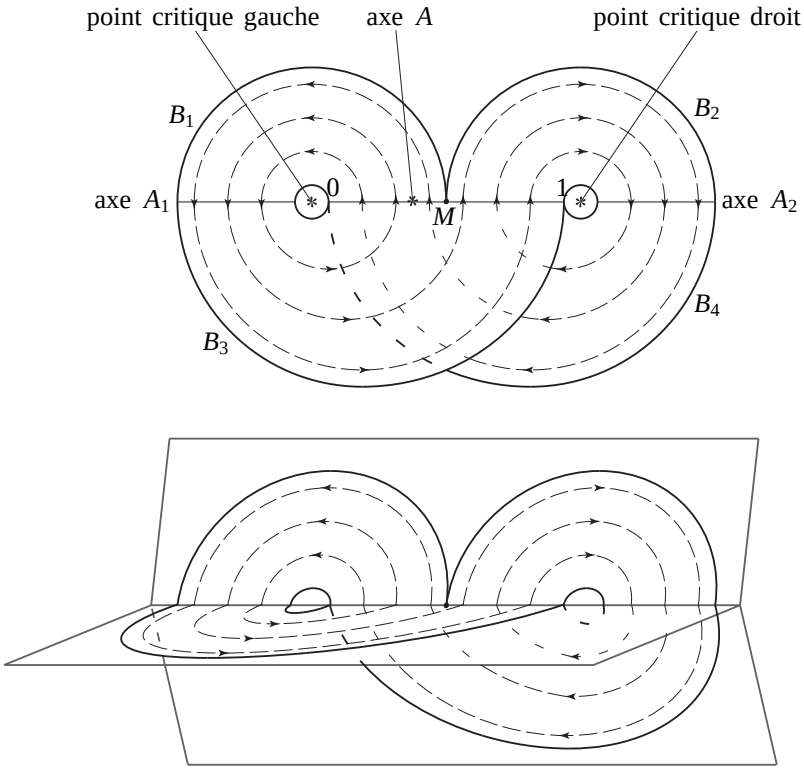


FIGURE 1.2

Le patron de Lorenz. Le dessin du haut représente le patron projeté sur un plan horizontal. Les segments A, A_1 et A_2 sont les axes de recollement des bandes $B_1, \ldots, B_4$, le segment A étant l'axe de branchement du patron. Le flot de Lorenz est figuré en pointillés. L'abscisse du point M est $1/2$, la surface s'y sépare et le flot n'y est pas défini. Le dessin du bas montre le patron sous la forme d'un livre à trois pages.

arbitraire de tours sur chacune des deux branches du patron. Plus précisément, on associe à chaque couple d'entiers relatifs (p, q) un patron $L(p, q)$ obtenu à partir du patron de Lorenz en rajoutant p demi-tours sur la branche gauche, et q demi-tours sur la branche droite, comme sur la figure 1.3.[4]) Les nœuds associés à des orbites périodiques du flot défini sur ces attracteurs de Lorenz généralisés dépendent fortement des entiers p et q. Cependant, à l'aide d'arguments visuels de déformations et de découpages simillaires à ceux de la figure 3.1, M. Sullivan montre que pour tout n entier, tout entrelacs réalisé par une collection finie d'orbites périodiques de $L(0, n)$ l'est également par une collection d'orbites de $L(0, n-2)$ [47]. Ainsi, rajouter des tours négatifs sur une des deux branches du patron

[4]) Si p ou q est impair, on obtient ainsi un patron non orientable.

de Lorenz ne peut qu'enrichir la famille des nœuds réalisés.

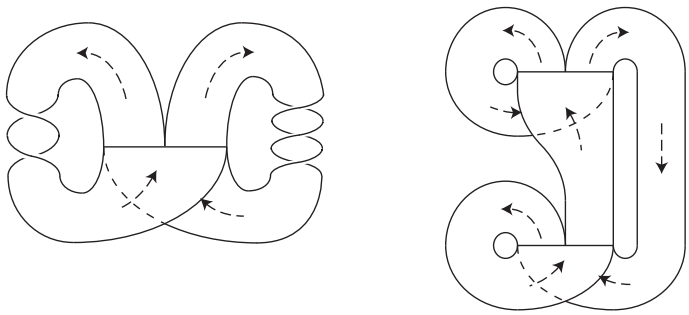


FIGURE 1.3
À gauche, un patron de Lorenz généralisé $L(-2,3)$. À droite, le patron universel de Ghrist.

En 1996, Ghrist [22] a exhibé un patron *universel* U, au sens où tout entrelacs est réalisé par un ensemble d'orbites périodiques de U. En fait, on retrouve U comme *sous-patron* de $L(0,-1)$ et de $L(0,-2)$, impliquant que les patrons $L(0,-n)$ sont universels pour tout entier n strictement positif. Signalons que si tout nœud est réalisé par une orbite périodique de U, il n'est pas facile, pour un nœud donné, de prédire la longueur minimale d'une telle orbite. Les bornes données par la démonstration de Ghrist sont exponentielles, et ne permettent par exemple pas de savoir si le nœud de huit est réalisé par une orbite périodique de U coupant moins de 11.358.338 fois un des axes de U ![5])

Dans cet article, et plus généralement quand on parle de nœuds de Lorenz, on ne s'intéresse qu'au plongement $L(0,0)$ du patron de Lorenz montré sur la figure 1.2 qui, lui, n'est pas universel.

1.4 CODAGE DES ORBITES

On cherche maintenant à décrire l'ensemble des orbites périodiques du flot de Lorenz. Pour cela, on associe à toute orbite du flot de Lorenz un mot sur un alphabet à deux lettres. Restreinte aux orbites périodiques et aux mots dits de Lyndon[6]) , la correspondance ainsi définie est bijective.

DÉFINITION 1.3. Soit γ une orbite du flot de Lorenz. En suivant γ à partir d'un point P de l'axe A et en notant L chaque fois que γ coupe l'axe A après avoir fait un tour de l'attracteur gauche du patron, et R chaque fois que γ coupe l'axe A après un tour de l'attracteur droit, on associe à γ un mot infini en les lettres L et R, appelé *code* de γ et noté $\mathrm{c}(\gamma,P)$.

[5]) Il semblerait qu'une recherche informatique exhaustive exhibe un nœud de huit coupant seulement 25 fois l'un des axes du patron, voir la thèse de Vadim Meleshuk [35].

[6]) Les mots de Lyndon apparaissent dans un tout autre contexte comme codes d'une base de l'algèbre de Lie libre [3, 7, 34]. Cependant, [41] rappelle qu'ils énumèrent naturellement les classes de formes quadratiques et les classes de conjugaison du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$. Comme nous allons montrer dans la section 4 que les nœuds de Lorenz, à travers leur correspondance avec les nœuds dits modulaires, admettent une énumération simillaire, nous utilisons dès maintenant l'appellation *mot de Lyndon*.

Une orbite γ est périodique de période n si et seulement si le code de γ est lui-même *périodique de période* n, au sens où il existe un (unique) mot w de longueur n tel que $\mathrm{c}(\gamma, P)$ est le mot infini $wwww...$ On dit alors que w est un *code réduit* de γ *relativement à* P, et on le note $\mathrm{cr}(\gamma, P)$.

Le code d'une orbite γ dépend du choix du point de départ P : par exemple, si on part du point de premier retour $\mathrm{pr}(P)$, le code associé $\mathrm{c}(\gamma, \mathrm{pr}(P))$ est le mot obtenu à partir de $\mathrm{c}(\gamma, P)$ en effaçant la première lettre. Pour associer à chaque orbite périodique du flot de Lorenz un code réduit indépendant du point de départ, on fixe un ordre lexicographique sur les mots en L et R et on choisit comme représentant distingué celui des divers codes réduits de l'orbite, qui est le plus petit vis-à-vis de cet ordre. Ceci revient à attribuer un rang aux lettres successives d'un code, correspondant à l'ordre selon lequel on rencontre les points d'intersection de l'orbite avec l'axe du patron de Lorenz quand on le parcourt de gauche à droite.

DÉFINITION 1.4. Soit w un mot de longueur n sur l'alphabet $\{L, R\}$. On appelle *décalé* de w le mot obtenu en déplaçant la première lettre de w en queue de mot. On le note $\text{déc}(w)$. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on déclare que i est *avant* j dans l'*ordre de Lyndon* associé à w si $\text{déc}^{i-1}(w)$ précède $\text{déc}^{j-1}(w)$ dans l'ordre lexicographique étendant $L < R$. On note alors $i <_w j$.

Par exemple, si w est le mot $LLRLR$, on a $1 <_w 4$ car le mot $\text{déc}^3(LLRLR)$ est $LRLLR$, qui est plus grand lexicographement que $LLRLR$. On trouverait de même $1 <_w 4 <_w 2 <_w 5 <_w 3$.

LEMME 1.5. *Soit γ une orbite périodique de période n du flot de Lorenz issue d'un point P de l'axe A. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, le point $\mathrm{pr}^{i-1}(P)$ est à gauche du point $\mathrm{pr}^{j-1}(P)$ sur l'axe A si et seulement si on a $i <_{\mathrm{cr}(\gamma,P)} j$.*

Démonstration. Notons w le mot $\mathrm{cr}(\gamma, P)$ et x l'abscisse du point P. Par construction, pr est l'application $t \mapsto 2t \mod 1$; comme l'orbite γ est périodique, elle ne passe jamais par le point M d'abcisse $1/2$, donc x admet un développement en base 2 unique. De plus, la position de $\mathrm{pr}^{i-1}(P)$ dans la moitié gauche ou droite de l'axe A détermine le i-ième chiffre du développement dyadique de x, le cas ambigü étant justement exclu. Par conséquent, si on remplace les L par des 0 et les R par des 1 dans w, l'abscisse de $\mathrm{pr}^{i-1}(P)$ est $\overline{0, w_i w_i w_i \ldots}$, où w_i désigne le mot $\text{déc}^{i-1}(w)$. Or l'ordre canonique sur les réels correspond à l'ordre lexicographique étendant $0 < 1$ sur le développement dyadique, donc $\mathrm{pr}^{i-1}(P)$ est à gauche de $\mathrm{pr}^{j-1}(P)$ si et seulement si w_i précède w_j dans l'ordre lexicographique.

REMARQUE 1.6. Soit P un point d'intersection de γ avec A et x son abscisse. Alors la condition $\mathrm{pr}^n(P) = P$ se reformule en $2^n x = x \mod 1$, soit $x = m/(2^n - 1)$ pour un certain m entier. Les abscisses

des points d'intersection de γ avec A sont alors les rationnels $2^i m/(2^n-1) \bmod 1$. Inversement, on vérifie que l'orbite issue tout point d'abscisse de cette forme est périodique[7]).

DÉFINITION 1.7. Un mot w de longueur n sur l'alphabet $\{L,R\}$ est dit *de Lyndon* si w est *primitif*, c'est-à-dire s'il n'est pas de la forme u^k avec $k \geqslant 2$, et si w précède lexicographiquement déc$^i(w)$ pour tout $1 \leqslant i < n$.

Par exemple, les mots $L, R, LR, LLR, LRR, LLLR, LLRR, LRRR, LLRLR$ sont des mots de Lyndon. Par contre LRL n'est pas de Lyndon puisque sont décalé LLR le précède lexicographiquement. Comme tout mot primitif admet un unique décalé qui soit de Lyndon, on déduit que le nombre ℓ_n de mots de Lyndon de longeur n vérifie $\ell_n = \frac{1}{n}\left(2^n - \sum_{k|n} k\ell_k\right)$, d'où $\ell_n \sim 2^n/n$.

PROPOSITION 1.8 ([5]). *Pour chaque orbite périodique γ de période n du flot de Lorenz, il existe un et un seul mot de Lyndon de longueur n codant γ, et, inversement, tout mot de Lyndon de longueur n est code réduit d'une orbite périodique de période n du flot de Lorenz.*

Démonstration. Soit γ une orbite périodique de période n et P l'intersection de γ avec l'axe A la plus proche du point critique de gauche. Alors le code réduit $\mathrm{cr}(\gamma,P)$ est un mot de Lyndon. En effet, si $\mathrm{cr}(\gamma,P)$ est de la forme u^k, alors le point $\mathrm{pr}^{|u|}(P)$ est confondu avec P, donc on a $k=1$, et par conséquent le mot $\mathrm{cr}(\gamma,P)$ est primitif. D'autre part, d'après le lemme 1.5, les codes réduits associés à d'autres points d'intersection de γ avec A sont après $\mathrm{cr}(\gamma,P)$ dans l'ordre lexicographique.

L'application ainsi construite est injective, car l'application pr de premier retour sur A est dilatante, donc les orbites issues de deux points distincts de A ne peuvent coïncider sur un nombre infini de tours consécutifs autour de l'attracteur, et donc leurs codes non plus. Elle est surjective, puisque pour tout mot infini w sur l'alphabet $\{L,R\}$ non ultimement constant, et en particulier pour tout mot périodique de période au moins 2, w est le code de l'orbite issue du point d'abscisse $\overline{0,w}$, où on a remplacé les lettres L par des 0 et les R par des 1.

Désormais, on appelle *code de Lyndon* d'une orbite périodique l'unique mot de Lyndon qui la code. Par exemple, le code de Lyndon de l'orbite issue du point d'abscisse $1/7$ est le mot de Lyndon LLR. De même, celui de l'orbite issue de $5/31$ est le mot de Lyndon $LLRLR$.

REMARQUE 1.9. L'hypothèse que l'application pr est identifiée à $t \mapsto 2t \bmod 1$ est cruciale. Si, par exemple, les deux bandes B_1 et B_2 du patron de Lorenz de la figure 1.2 sont collées, non avec les parties $]0,1/2[$ et $]1/2,1[$ de l'axe A, mais avec les parties $]0,k_0[$ et $]k_1,1[$, avec $k_0 < 1/2 < k_1$, alors tous les mots possibles sur l'alphabet $\{L,R\}$ ne sont pas réalisables comme suite des tours d'une

[7]) Si k est impair, d'après le théoème d'Euler, k divise $2^{\varphi(k)}-1$, donc tout nombre rationnel à dénominateur impair est de la forme $\frac{m}{2^n-1}$.

orbite du système de Lorenz modifié. On a alors un système L_{k_0,k_1} dont l'ensemble des orbites est un sous-ensemble de celui qu'on vient de décrire. Les nœuds de Lorenz correspondent au cas le plus général, où tous les mots sont réalisés par une orbite [8]).

1.5 TRESSES DE LORENZ

D'après un théorème célèbre d'Alexander [1], tout nœud est clôture d'une tresse [9]). Pour toute orbite périodique γ du flot de Lorenz, on décrit maintenant une tresse particulière dont la clôture est γ.

On rappelle qu'à toute tresse b à n brins on associe une permutation π de $\{1,\ldots,n\}$ en appelant $\pi(k)$ la position finale du brin initialement en position k. Chaque permutation π est associée à une infinité de tresses. Par contre, il en existe une et une seule dont tous les croisements sont orientés positivement [10]), c'est-à-dire que le brin venant d'en haut à droite passe au-dessus de celui venant de gauche, et telle que deux brins quelconques se croisent au plus une fois. Cette tresse est appelée *tresse de permutation associée à* π.

THÉORÈME 1.10 ([5], voir figure 1.4). *Soit γ une orbite périodique du flot de Lorenz coupant n fois l'axe A et coupant p fois la partie $]0,1/2[$ de cet axe. Alors γ est la clôture d'une (unique) tresse de permutation à n brins. La permutation π associée est un cycle, et elle vérifie*

$$1<\pi(1)<\pi(2)<\ldots<\pi(p)=n>\pi(n)>\pi(n-1)>\ldots>\pi(p+1)=1. \tag{1.2}$$

Réciproquement, toute tresse de permutation telle qu'il existe une permutation π qui est un cycle et qui vérifie (1.2) *se referme en un nœud de Lorenz.*

Dans le contexte ci-dessus, la tresse de permutation associée à γ est appelée la *tresse de Lorenz* de γ, et la permutation π est appelée la *permutation de Lorenz* de γ.

Esquisse de la démonstration. Il s'agit de décrire en termes de tresses la partie centrale du patron de Lorenz tel qu'il est représenté sur la figure 1.2. On obtient une tresse de la forme de celle de la figure 1.4. Comme l'application pr est croissante sur $]0,1/2[$, deux brins quelconques parmi les p premiers ne se coupent pas et on a $1<\pi(1)<\pi(2)<\ldots<\pi(p)$. Comme pr est aussi croissante sur $]1/2,1[$, deux brins parmi les $n-p$ derniers ne se coupent pas non plus et on a $\pi(p+1)<\pi(p+2)<\ldots<\pi(n)<n$.

---

[8]) Guckenheimer et Williams montrent dans [28] que, si le flot géométrique de Lorenz n'est pas *structurellement stable*, au sens où une petite perturbation du champ de vecteur le définissant ne le transforme pas en un champ conjugué, ce flot est néanmoins *persistant*, au sens où une petite perturbation l'envoie sur un champ définissant un flot de type L_{k_0,k_1}.

[9]) voir [6] pour une introduction à la théorie des tresses

[10]) Il existe deux conventions d'orientation des croisements pour les nœuds et pour les tresses, l'une utilisée majoritairement par les théoriciens des nœuds (voir par exemple [26, p. 4]), l'autre par les dynamiciens (voir [23, p. 6]). Nous adoptons la convention des noueurs et décrétons que les croisements de la figure 1.4 où tous les brins sont orientés de haut en bas sont positifs. Cette convention implique par exemple que si un entrelacs se projette de sorte que les croisements entre ses composantes sont positifs, alors chaque composante coupe positivement une surface bordée par une autre composante. La convention des dynamiciens, qui est opposée, implique que si on part de courbes planaires de la forme $(t,x_i(t))$ et qu'on les relève dans l'espace en $(t,x_i(t),x_i'(t))$, alors les projections horizontales se coupent positivement.

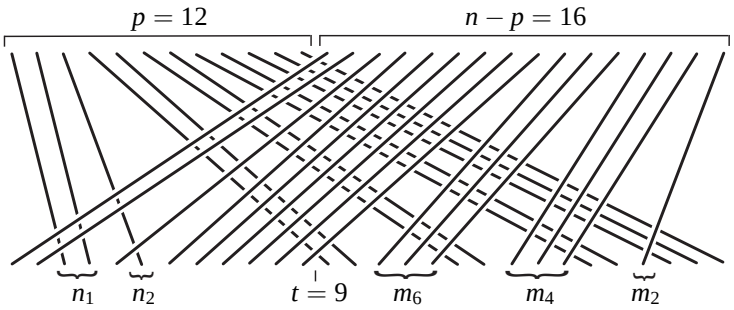


FIGURE 1.4

Un exemple de tresse de Lorenz. Les p premiers brins vont vers la droite et les $n-p$ derniers vont vers la gauche en passant par-dessus les premiers. Le pas t (définition 3.1) est le nombre de brins du premier groupe qui finissent dans le second groupe. L'indice n_i (définition 1.14) est le nombre de brins du premier groupe qui passent par-dessous $i+1$ brins du second groupe, l'indice m_j est le nombre de brins du second groupe qui passent par-dessus $j+1$ brins du premier groupe.

Qu'un brin du premier groupe passe sous un brin du deuxième découle du plongement du patron montré sur la figure 1.2. On a alors bien une tresse de permutation vérifiant (1.2). Comme on s'intéresse à un nœud et non à un entrelacs, la permutation a un unique cycle.

Réciproquement, une tresse b de permutation, associée à une permutation π_b vérifiant (1.2) et n'ayant qu'un cycle, détermine un mot de Lyndon w_b à n lettres comme suit : la i-ème lettre de w_b est un L si on a $\pi^{i-1}(1) \leqslant p$ et un R sinon. On vérifie alors que la clôture de b est le nœud de Lorenz admettant w_b pour code de Lyndon.

EXEMPLE 1.11. La tresse de Lorenz associée à l'orbite issue du point d'abscisse $1/7$ est la tresse $\sigma_2\sigma_1$ dont la clôture est un nœud trivial, et la permutation de Lorenz associée est le cycle (123). En revanche, la tresse de Lorenz associée au point $5/31$ est $\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_4\sigma_3\sigma_2$ dont la clôture est un nœud de trèfle, la permutation de Lorenz associée est le cycle (13524).

1.6 STABILISATION

La proposition 1.8 fournit une énumération de toutes les orbites périodiques de l'attracteur de Lorenz. Cependant, des orbites différentes peuvent être isotopes, c'est-à-dire représenter le même nœud,

et donc plusieurs mots de Lyndon peuvent coder le même nœud de Lorenz. Pour réduire la redondance du codage, on introduit maintenant la notion de stabilisation d'une orbite et du mot de Lyndon associé.

Une *transformation de Markov* à droite sur une tresse b à n brins consiste à ajouter un $n+1$-ième brin et un croisement $\sigma_n^{\pm 1}$ (voir figure 1.5). Elle ne change pas la classe d'isotopie de la clôture de la tresse. On remarque que, si b est une tresse de Lorenz à n brins, alors $b\sigma_n$ est encore une tresse de Lorenz, cette fois-ci à $n+1$ brins. On peut de même introduire une transformation de Markov à gauche : si on note $\tilde{b}$ la tresse b où tous les indices des générateurs σ_i ont été augmentés de 1, alors la tresse $\tilde{b}\sigma_1$ est une tresse à $n+1$ brins dont la clôture est la même que celle de b. Comme dans le cas de la transformation à droite, si b est de Lorenz, alors $\tilde{b}\sigma_1$ est aussi de Lorenz. En termes d'orbites sur le patron de Lorenz, les transformations de Markov reviennent à ajouter une petite boucle faisant le tour d'un des deux points critiques de l'attracteur de Lorenz à la partie de l'orbite passant le plus près de celui-ci. La période est alors augmentée de un[11]).

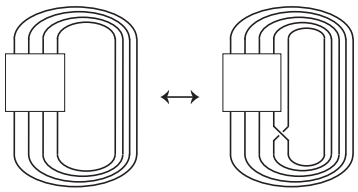


FIGURE 1.5

Une transformation de Markov : la tresse b de B_n est remplacée par la tresse $b\sigma_n^{\pm 1}$ de B_{n+1}.

Il est alors facile de traduire l'invariance des nœuds par transformations de Markov en termes de mots de Lyndon.

PROPOSITION 1.12. *Soit w un mot de Lyndon, w_L le mot obtenu en ajoutant une lettre L en tête de w et w_R le mot obtenu en insérant une lettre R après la i-ème lettre de w, où i est maximal pour l'ordre de Lyndon $<_w$. Alors les orbites périodiques du flot de Lorenz ayant w, w_L, et w_R pour codes de Lyndon respectifs sont isotopes.*

Démonstration. Soit γ, γ_L et γ_R les orbites ayant pour codes de Lyndon les mots w, w_L et w_R. Alors, par définition du code, ajouter un L en tête de w revient à ajouter une boucle faisant le tour de point critique gauche à l'orbite γ, soit, en termes de la tresse de Lorenz, à effectuer une transformation de Markov à gauche. Donc γ_L est isotope à γ.

De même, si i est maximal pour l'ordre de Lyndon associé à w, ajouter un R après la i-ème lettre de w revient à effectuer une transformation de Markov, à droite cette fois, car, d'après le lemme 1.5,

[11]) En termes de permutations de Lorenz, une transformation de Markov à droite correspond à modifier le motif $n \mapsto i$ en $n \mapsto n+1 \mapsto i$, et une transformation de Markov à gauche à augmenter d'une unité tous les indices supérieurs à 1 et à remplacer le motif $1 \mapsto i+1$ en tête par $1 \mapsto 2 \mapsto i+1$.

la i-ème lettre de w correspond à l'intersection de γ avec l'axe A située au plus près de l'attracteur droit. Donc γ_R est isotope à γ.

Avec les notations de la proposition 1.12, on dira que γ_L est obtenue par *stabilisation* à gauche à partir de γ, et que γ_R est obtenue par *stabilisation* à droite. De même, on dira que w_L est obtenu par *stabilisation* à gauche à partir de w, et que w_R est obtenu par *stabilisation* à droite.

Par exemple, les mots $LLLRLR, LLLLRLR, LLRRLR$, et $LLLLRRRLR$ sont tous obtenus par stabilisation à partir du mot $LLRLR$. Les orbites associées sont donc toutes isotopes (en l'occurrence, elles représentent toutes des nœuds de trèfle).

Comme on peut stabiliser indéfiniment un mot de Lyndon sans changer le nœud correspondant, nous déduisons :

COROLLAIRE 1.13. *Tout nœud de Lorenz apparaît comme classe d'isotopie d'une infinité d'orbites périodiques du flot de Lorenz.*

1.7 DIAGRAMMES DE YOUNG

Lorsqu'on le représente comme sur la figure 1.4, le diagramme d'une tresse de Lorenz évoque un diagramme de Young. On peut rendre cette correspondance formelle et, alors, les transformations de Markov correspondent à une opération simple sur les diagrammes associés.

On définit une correspondance entre tresses de Lorenz et diagrammes de Young comme suit. Soit b une tresse de Lorenz. Dans le diagramme en segments de b, on efface des fragments des brins de façon à ne garder que les portions qui se trouvent entre deux croisements, voir figure 1.6. En tournant et déformant la figure pour donner à chaque segment une orientation horizontale ou verticale, on obtient un diagramme de Young, éventuellement complété par deux segments, l'un vers la droite sur l'axe horizontal, l'autre vers le haut sur l'axe vertical.

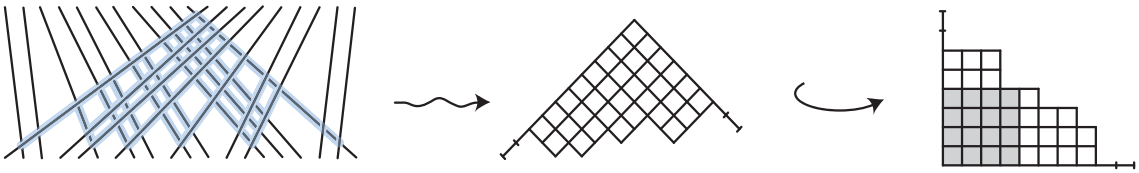


FIGURE 1.6

À une tresse de Lorenz on associe un diagramme de Young, augmenté ici de deux segments à gauche et à droite, en ne gardant que la partie épaissie de la tresse de Lorenz. Le pas t (définition 3.1) est égal à la longueur du côté du carré grisé, plus 1. Pour tout $i > 0$, il y a alors n_i colonnes de hauteur i et m_i lignes de largeur i.

DÉFINITION 1.14. Soit γ une orbite périodique de Lorenz, b la tresse de Lorenz à n brins associée, π la permutation de Lorenz et p le nombre de brins de b allant vers la droite, c'est-à-dire l'unique p vérifiant $\pi(p) = n$. Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, on définit

$$n_i = \operatorname{card}\{j \mid \pi(j) - j = i + 1 \text{ et } \pi(j) < \pi^2(j)\} \tag{1.3}$$

$$m_i = \operatorname{card}\{j \mid j - \pi(j) = i + 1 \text{ et } \pi(j) > \pi^2(j)\}. \tag{1.4}$$

Le *diagramme de Young augmenté associé à* b est le diagramme de Young ayant un mât gauche de hauteur n_0, une base horizontale de longueur m_0, et n_i colonnes de hauteur i.[12])

Les entiers n_i (*resp.* m_i) correspondent au nombre de brins du premier (*resp.* second) groupe passant par-dessous (*resp.* par-dessus) $i+1$ brins de l'autre groupe (voir figure 1.4).

Par exemple, le diagramme de Young complété associé à l'orbite de code de Lyndon *LLR* est un segment horizontal d'une unité de long. Le diagramme de Young associé au code de Lyndon *LLLRLR* est un diagramme à deux cases avec un segment additionnel $\square\square_$.

PROPOSITION 1.15. *La correspondance ci-dessus établit une bijection entre les tresses de Lorenz et les diagrammes de Young augmentés.*

Démonstration. Partons d'un diagramme de Young augmenté de largeur $p-1$ et de hauteur $q-1$. On oriente le diagramme convenablement, on prolonge les segments, et on fait de chaque intersection un croisement de tresse positif. La tresse ainsi obtenue est une tresse de permutation dont ni les p brins de gauche, ni les q brins de droite ne se coupent entre eux. D'après la réciproque dans le théorème 1.10, c'est une tresse de Lorenz. Il est clair que la correspondance ainsi définie est la réciproque de celle décrite dans le chapeau de cette section.

PROPOSITION 1.16. *Tout nœud de Lorenz peut être obtenu comme clôture d'une tresse de Lorenz associée à un diagramme de Young standard (c'est-à-dire non augmenté).*

Démonstration. Soit K un nœud de Lorenz, et b une tresse de Lorenz dont la clôture est K. D'après la proposition 1.15, la tresse b correspond à un diagramme T, *a priori* augmenté. Vue la description de la correspondance entre tresses de Lorenz et diagrammes de Young, supprimer un segment additionnel horizontal dans un diagramme complété revient à effectuer une déstabilisation gauche sur la tresse associée, tandis que supprimer un segment vertical revient à effectuer une déstabilisation droite. Partant du diagramme T, on arrive en un nombre fini d'étapes du type précédent à un diagramme standard. Par construction, celui-ci est associé au nœud initial K.

Par exemple, le nœud de trèfle est associé au tableau $\square\square$. Zérologiquement, le nœud trivial est associé au tableau n'ayant aucune case.

[12]) On dit que le diagramme est *augmenté* en raison du mât et de la base non standards qu'on lui a ajoutés.

REMARQUE 1.17. En termes de mot de Lyndon, un diagramme de Young non augmenté correspond à un mot w qui est *minimal* au sens où, quand on ôte à w la première lettre L, alors le mot w' obtenu n'est pas un mot de Lyndon et, quand on ôte à w la lettre R dont la position i est maximale dans l'ordre de Lyndon $<_w$, alors i n'est pas maximal dans $<_{w'}$. On déduit alors directement de la proposition 1.16 que tout nœud de Lorenz peut être représenté par une tresse de Lorenz codée par un mot de Lyndon minimal.

Par exemple, le mot de Lyndon $LLLRLR$ n'est pas minimal, puisque, si on lui ôte le premier L, on obtient le mot $LLRLR$, qui est un mot de Lyndon. De même, le mot de Lyndon $LLRRLR$ n'est pas minimal. En effet, l'entier maximal dans l'ordre de Lyndon associé est 3 et, quand on ôte la lettre R en position 3, on obtient $LLRLR$, et 3 reste maximal dans l'ordre de Lyndon associé à ce dernier mot. Par contre, $LLRLR$ est minimal, puisque, d'une part, $LRLR = (LR)^2$ n'est pas un mot de Lyndon et, d'autre part, l'entier maximal dans l'ordre de Lyndon associé à $LLRLR$ est 3, alors que l'entier maximal dans l'ordre de Lyndon associé à $LLLR$ est 4.

À ce point, on a donc une application qui associe à tout diagramme de Young un nœud de Lorenz, et tout nœud de Lorenz est représenté par au moins un diagramme de Young (standard, c'est-à-dire non augmenté). La question de la redondance du codage ainsi obtenu se repose naturellement :

QUESTION 1. *Un nœud de Lorenz donné peut-il être représenté par plusieurs diagrammes standards ? par une infinité de diagrammes standards ?*

Il est facile de voir que la réponse à la première question est positive : le nœud de trèfle est représenté par chacun des deux diagrammes de Young $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$ et $\square\square$, correspondant aux deux mots de Lyndon minimaux $LLRLR$ et $LRLRR$. Ce fait est un cas particulier d'un résultat plus général. On appelle *transposé* d'un diagramme le diagramme obtenu par symétrie autour de la première diagonale, c'est-à-dire en échangeant lignes horizontales et verticales.

PROPOSITION 1.18. *Les orbites de Lorenz associées à un diagramme de Young et à son transposé sont isotopes.*

Démonstration. Le patron de Lorenz est invariant par la rotation autour d'une droite passant par le milieu M de l'axe et échangeant les deux points critiques. Une orbite codée par un diagramme de Young est alors envoyée sur l'orbite codée par le diagramme transposé.

Par contre, on établira une réponse négative à la seconde question avec le corollaire 2.25 : un nœud de Lorenz ne peut être représenté que par un nombre fini de diagrammes de Young non augmentés.

2. PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DES NŒUDS DE LORENZ

Dans cette partie, nous étudions l'étendue de la famille des nœuds de Lorenz, ainsi que leurs principales propriétés topologiques. Dans une brève section 2.1, nous observons que tout nœud de Lorenz est premier. Dans la section 2.2, nous montrons que tout nœud torique est un nœud de Lorenz, et que tout nœud satellite d'un nœud de Lorenz est de Lorenz, d'où il résulte que tout nœud algébrique est de Lorenz. Puis, dans la section 2.3, nous montrons que tout nœud de Lorenz est fibré. Enfin, dans la section 2.4, nous en déduisons les genres des nœuds de Lorenz, avec une application au codage par les diagrammes de Young.

Pour la suite de l'article et pour plus de commodités, nous identifions la sphère $\mathbf{S}^3$ avec $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$, et plongeons tous les nœuds considérés dans $\mathbf{S}^3$.

2.1 PRIMALITÉ

DÉFINITION 2.1. Un nœud K est dit *premier* s'il n'est pas somme connexe de deux nœuds non triviaux.

Autrement dit, un nœud K est premier si, pour toute sphère S de dimension 2 coupant K en deux points, l'une des deux boules ainsi délimitées contient une corde non nouée de K.

THÉORÈME 2.2 ([52]). *Tout nœud de Lorenz est premier.*

Schéma de la démonstration. Soit K un nœud de Lorenz et S une sphère coupant K en deux points. Le fait que K soit une orbite périodique sur le patron de Lorenz donne des contraintes sur la position de S dans $\mathbf{S}^3$ et en particulier sur l'intersection de S avec le patron de Lorenz, lesquelles se trouvent être suffisamment fortes pour montrer que l'une des deux cordes délimitées par S est non nouée.

2.2 NŒUDS TORIQUES, SATELLITES ET ALGÉBRIQUES

DÉFINITION 2.3 (voir figure 2.1). Soit p et q deux entiers relatifs premiers entre eux. Un nœud est dit *torique de type* (p,q) s'il peut être tracé sur la surface d'un tore orienté plongé de manière standard dans $\mathbf{S}^3$, de sorte qu'il coupe p fois chaque méridien (orienté) du tore, et q fois chaque parallèle (orienté). On le note $T(p,q)$ [13]).

PROPOSITION 2.4 ([5]). *Tout nœud torique de type* (p,q) *avec* p *et* q *positifs est un nœud de Lorenz.*

[13]) À l'aide d'une isotopie de $\mathbf{S}^3$ échangeant les faces externes et internes du tore, on montre que les nœuds $T(p,q)$ et $T(-p,-q)$ sont isotopes. Par contre, les nœuds $T(p,q)$ et $T(p,-q)$ ne sont jamais isotopes.

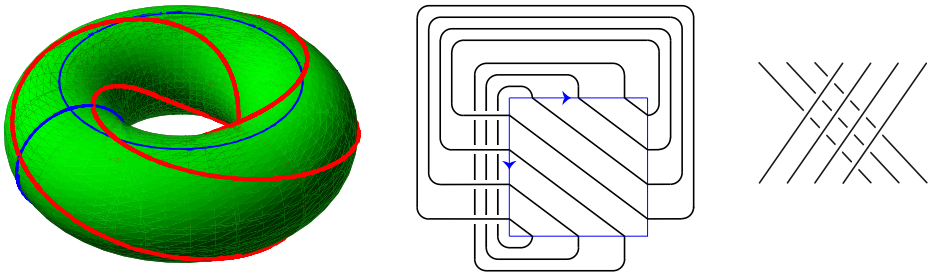


FIGURE 2.1

À gauche, le nœud $T(4,3)$ dessiné à la surface d'un tore. Au centre, la surface du tore est découpée le long d'un parallèle et d'un méridien, puis dépliée, faisant apparaître un diagramme avec 12 croisements. À droite, une tresse positive dont la clôture redonne le même diagramme. .

Démonstration. Par construction, le nœud $T(p,q)$ est clôture d'une tresse où p brins passent parallèllement par-dessus q autres brins (voir figure 2.1). D'après le théorème 1.10, une telle tresse est une tresse de Lorenz.

Le nœud torique $T(p,-q)$ est l'image-miroir de $T(p,q)$. Il est également obtenu comme clôture d'une tresse où p brins venant de gauche passent parallèllement par-dessous q autres venant de droite. Par contre, ce n'est pas un nœud de Lorenz, l'orentation des croisements n'étant pas la bonne.

DÉFINITION 2.5 (voir 2.3). Soit K_c un nœud dans $\mathbf{S}^3$ et K_i un nœud dans $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$ non isotope à $\mathbf{S}^1 \times \{0\}$. Étant donnés un voisinnage tubulaire N_c de K_c et une identification f de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$ avec N_c, le *nœud satellite* de K_i sur K_c associé à f est le nœud $f(K_i)$. Si K_i est un nœud torique, on dit aussi que le nœud obtenu est un *câblage* de K_c.

REMARQUE 2.6. L'identification f est importante, puisque le satellite est déterminé à la fois par K_c, K_i et par la classe d'isotopie de f, c'est-à-dire par le choix d'un parallèle sur le tore $f(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1)$, soit encore par le nombre d'enlacement entre $K_c = f(\mathbf{S}^1 \times \{0\})$ et $f(\mathbf{S}^1 \times \{1/2\})$.

La notion de satellite généralise celle de somme connexe : s'il existe x dans $\mathbf{S}^1$ et un disque dans $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1$ isotope à $\mathbf{D}^2 \times \{x\}$ coupé une fois exactement par K_i, alors tout satellite de K_i sur K_c est la somme connexe de ces deux nœuds.

PROPOSITION 2.7 ([5]). *Si K_c est un nœud de Lorenz et $T(p,q)$ un nœud torique, avec $p,q>0$, plongé naturellement dans un tore plein, alors le satellite de $T(p,q)$ sur K_c associé à la trivialisation donnée par le patron de Lorenz est encore un nœud de Lorenz.*

La démonstration est esquissée sur la figure 2.3.

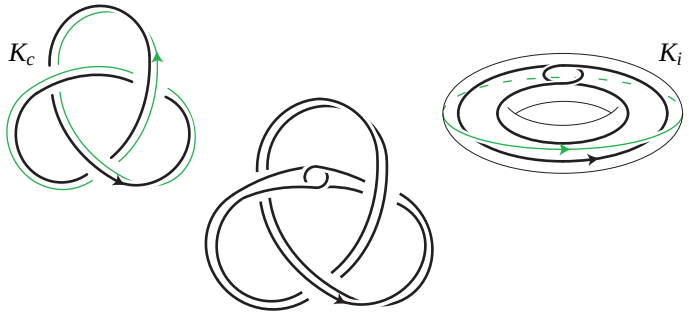


FIGURE 2.2

Exemple de construction d'un nœud satellite. Le nœud K_c est un nœud de trèfle (en haut à gauche), un choix de parallèle est également figuré. Le nœud K_i est un nœud trivial dans $\mathbf{S}^3$, mais pas dans le tore solide (en haut à droite) dont on a également marqué un parallèle. Le satellite (au centre) est obtenu en envoyant le tore sur un voisinnage tubulaire de K_c et en identifiant les deux parallèles marqués.

Étant donnée une courbe algébrique complexe H à singularités isolées dans $\mathbf{C}^2$, identifié avec $\mathbf{R}^4$, et un point P sur H, l'intersection $K_{H,\varepsilon}$ entre H et la sphère réelle de rayon ε centrée en P est un entrelacs, avec éventuellement des points singuliers. Dans [36], J. Milnor montre que, pour ε assez petit, l'entrelacs $K_{H,\varepsilon}$ n'a pas de points singuliers, et par conséquent sa classe d'isotopie est indépendante du rayon ε. Si P est un point régulier de la courbe, alors l'entrelacs en question est le nœud trivial. Par contre, si P est un point singulier irréductible, c'est un nœud, et il n'est jamais trivial.

DÉFINITION 2.8 ([36]). Un nœud K est dit *algébrique* s'il est la classe d'isotopie de l'intersection d'une courbe algébrique de $\mathbf{C}^2$, identifié avec $\mathbf{R}^4$, avec une sphère centrée sur un point de la surface et de rayon suffisamment petit.

EXEMPLE 2.9. Considérons le polynôme $P(x,y) = y^3 - x^2$. Pour tout ε, l'intersection K_ε du lieu d'annulation de P et de la sphère de rayon ε est définie par $x^2 = y^3$ et $|x|^2 + |y|^2 = \varepsilon$. Étant donné un point (λ, μ) du nœud K_ε, ce dernier est alors paramétré par $t \mapsto (\lambda e^{2i\pi t/2}, \mu e^{2i\pi t/3})$. Il s'agit d'un nœud de trèfle.

PROPOSITION 2.10 ([5]). *Tout nœud algébrique est un nœud de Lorenz.*

Schéma de la démonstration. Il est démontré dans [15] et [36] que tout nœud algébrique peut être obtenu par câblages successifs à partir d'un nœud torique. La proposition 2.7 assure alors qu'à chaque étape de câblage, le nœud obtenu est de Lorenz.

La réciproque de la proposition 2.10 est fausse. Par exemple, le nœud associé au mot de Lyndon $LRLR^3LR^3$ n'est pas algébrique, puisque par exemple son polynôme d'Alexander a des racines de

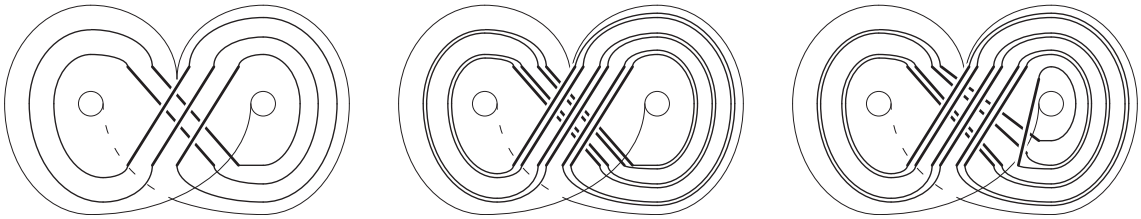


FIGURE 2.3

Construction d'un nœud satellite d'un nœud de Lorenz. On part d'un nœud de Lorenz K_c plongé dans le patron de Lorenz, ici à gauche. On épaissit les brins de K_c en p brins parallèles, ici au milieu avec $p = 2$. Au voisinage d'un quelconque des deux points critiques du patron, ici celui de droite, on fait passer le brin le plus proche du point critique par-dessous ses $p - 1$ brins voisins. Cette opération peut être répétée un nombre q premier avec p quelconque de fois, ici $q = 1$. D'après la réciproque dans le théorème 1.10, la tresse obtenue est de Lorenz, et donc on obtient un nœud de Lorenz, à droite. Ce nœud est le satellite de $T(p, q)$ sur K_c associé à la trivialisation donnée par le patron de Lorenz.

module différent de 1, au contraire de tous les nœuds algébriques. Le résultat suivant, dû à M. El Rifai, est une réciproque partielle de la proposition 2.7.

THÉORÈME 2.11 ([17]). *Tout nœud de Lorenz qui est un satellite d'un nœud de Lorenz est satellite selon le schéma de la proposition 2.7, c'est-à-dire un câblage sur un nœud de Lorenz.*

Schéma de la démonstration. L'idée de base est la même que pour démontrer la primalité : si K est un nœud de Lorenz qui est un satellite, alors il existe un tore T plongé de manière nouée dans $\mathbf{S}^3$, contenant K en son intérieur mais ne contenant pas de boule contenant K. Encore une fois, le fait que K soit une orbite périodique du flot de Lorenz donne suffisamment de contraintes sur T et sur son intersection avec le patron de Lorenz pour montrer qu'il est un voisinage tubulaire d'un nœud de Lorenz, et qu'en son intérieur le nœud K ne fait que tourner comme un nœud torique.

Ce dernier résultat est spécialement intéressant, puisqu'il détermine quels nœuds de Lorenz sont algébriques, et, lorsque c'est le cas, comment ils apparaissent comme orbites périodiques du flot de Lorenz.

2.3 CARACTÈRE FIBRÉ

Le théorème 1.10 énonce une propriété capitale des nœuds de Lorenz, à savoir qu'ils peuvent être réalisés comme clôtures de tresses positives. Une conséquence notable est le fait qu'ils sont fibrés. D'une part, ceci permet calculer le genre des nœuds de Lorenz (proposition 2.23), et, d'autre part, cela corrobore l'intuition que les nœuds de Lorenz sont des nœuds simples : la structure du complémentaire d'un nœud fibré est bien mieux comprise que celle d'un nœud quelconque.

DÉFINITION 2.12. Soit K un entrelacs orienté dans $\mathbf{S}^3$. On appelle *surface de Seifert* pour K une surface orientée de $\mathbf{S}^3$ dont le bord orienté est K. On appelle *genre* de K le genre minimal d'une surface de Seifert pour K.

Notons qu'un nœud est trivial si et seulement si il borde un disque dans $\mathbf{S}^3$, donc si et et seulement si son genre est nul.

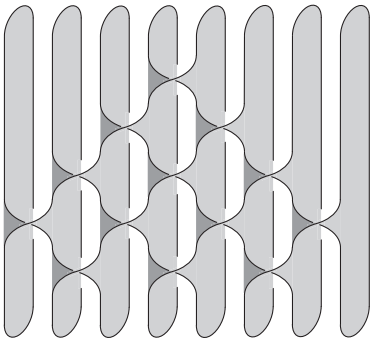


FIGURE 2.4
Une surface de Seifert pour le nœud de Lorenz de code *LLRLRRLR*. La même construction fournit une surface de Seifert, dite *standard*, pour toute clôture de tresse. D'après la proposition 2.22, cette surface est de genre minimal dans le cas des tresses positives.

DÉFINITION 2.13. Un nœud K dans $\mathbf{S}^3$ est dit *fibré* si son complémentaire *fibre* sur le cercle $\mathbf{S}^1$, c'est-à-dire s'il existe une surface de Seifert Σ_K pour K et un difféomorphisme h de Σ_K préservant le bord tels que le complémentaire de K dans $\mathbf{S}^3$ est isomorphe à $\Sigma_K \times [-\pi, \pi]/_{(h(x),-\pi)\sim(x,\pi)}$.

On remarque que, via l'isomorphisme de la définition 2.13, la projection θ sur le deuxième facteur définit une fonction de $\mathbf{S}^3 \smallsetminus K$ sur $\mathbf{S}^1 = [-\pi, \pi]/_{-\pi\sim\pi}$ qui possède les propriétés suivantes[14] :

(i) θ est lisse et sans point critique ;

(ii) sur un voisinage tubulaire $N(K)$ du nœud homéomorphe à un tore plein $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$, la fonction θ s'identifie à la fonction argument sur le facteur $\mathbf{D}^2$.

Le nœud trivial est un exemple de nœud fibré. On part d'un cercle en métal que l'on trempe dans du savon liquide ; quand on ressort le cercle, le savon forme un disque bordé par le nœud en métal, lequel est topologiquement trivial. En soufflant sur la pellicule de savon pour la gonfler jusqu'à son éclatement, on définit une fibration sur l'intervalle $[0, \pi[$. En refaisant la même opération en soufflant de l'autre côté, on définit une fibration sur $]-\pi, 0]$.

[14]) On dit alors que couple (K, θ) est un *livre ouvert* dont K est la *reliure* et les fibres $\theta^{-1}(t)$ sont les *pages*.

Regardons $\mathbf{S}^3$ comme la sphère unité de $\mathbf{C}^2$, c'est-à-dire comme l'ensemble des couples (z_1, z_2) de nombres complexes vérifiant $|z_1|^2+|z_2|^2 = 1$. Pour tout λ dans $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$, l'ensemble $\{(z_1, z_2) \mid z_1 = \lambda z_2\}$ est un nœud trivial dans $\mathbf{S}^3$. Un entrelacs constitué par une union quelconque de tels nœuds triviaux est un entrelacs dit *de Hopf* : deux composantes distinctes ont un nombre d'enlacement égal à $+1$. Par exemple, l'ensemble $\{(z_1, z_2) \in \mathbf{S}^3 \mid z_1 = \pm z_2\}$ est un entrelacs de Hopf à deux composantes.

PROPOSITION 2.14 ([36]). *Tout entrelacs de Hopf est fibré.*

Démonstration. Soit H_n un entrelacs de Hopf à n composantes. Par définition, il existe des nombres complexes $k_1, \dots, k_n$ différents de 1 tels que H_n est l'intersection dans $\mathbf{R}^4$ de $\mathbf{S}^3$ et du lieu d'annulation du polynôme

$$P_n(z_1, z_2) = \prod_{k=1}^{n}(z_1 - k_i z_2).$$

Pour tout θ dans $[-\pi, \pi]$, l'ensemble $\{(z_1, z_2) \in \mathbf{S}^3 \mid \arg(P_n(z_1, z_2)) = \theta\}$ est une surface dont le bord est H_n. L'argument du polynôme P est alors une fibration de $\mathbf{S}^3 \smallsetminus H_n$ sur $\mathbf{S}^1$.

La démonstration précédente peut être adaptée pour montrer que tout entrelacs algébrique est fibré [36]. Le résultat principal de cette section est une généralisation qui implique en particulier que les nœuds de Lorenz sont fibrés.

THÉORÈME 2.15 ([5, 46]). *Tout entrelacs qui est clôture d'une tresse positive est fibré.*

L'idée de la démonstration que nous présentons est de construire de proche en proche une fibration pour chaque tresse positive en ajoutant un à un les croisements. Comme l'entrelacs de Hopf à deux composantes est fibré, on l'utilise comme brique élémentaire. D'autre part, on peut recoller certaines fibrations dans $\mathbf{S}^3$ si elles sont non triviales sur des ensembles suffisamment disjoints. La notion de somme de Murasugi formalise cette idée, et on va l'utiliser comme ciment de la construction.

DÉFINITION 2.16. (voir figure 2.5) Soit Σ_1 et Σ_2 deux surfaces orientées plongées dans $\mathbf{S}^3$ de bords respectifs K_1 et K_2. Soit Π une sphère (que l'on voit comme un plan horizontal dans $\mathbf{R}^3\cup\{\infty\}$) séparant $\mathbf{S}^3$ en deux boules ouvertes B_1 et B_2. On suppose que

(i) Σ_1 est incluse dans l'adhérence de B_1 et Σ_2 dans l'adhérence de B_2 ;

(ii) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est un $2n$-gone P contenu dans Π ;

(iii) K_1 et K_2 sont deux entrelacs se coupant uniquement aux sommets $x_1, \dots, x_{2n}$ de P.

On définit alors la *somme de Murasugi* $\Sigma_1 \#_P \Sigma_2$ *des surfaces* Σ_1 *et* Σ_2 *le long de* P comme leur réunion $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Par extension, on définit la *somme de Murasugi* $K_1 \#_P K_2$ *des nœuds* K_1 *et* K_2 *le long de* P comme le nœud $K_1 \cup K_2 \smallsetminus \bigcup]x_i, x_{i+1}[$ [15]).

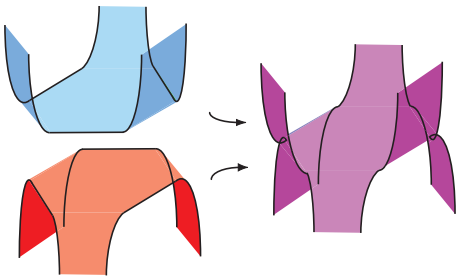


FIGURE 2.5
La somme de Murasugi de deux surfaces à bord.

La somme de Murasugi généralise la somme connexe, qui correspond au cas $n = 1$ dans la définition. Elle généralise également le plombage, qui correspond au cas $n = 2$. La somme de Murasugi est une opération géométrique naturelle pour les surfaces (et pour les entrelacs qu'elles bordent), à savoir qu'elle conserve plusieurs propriétés importantes [19, 20], comme par exemple le fait d'être une surface incompressible, le fait d'être une surface de Seifert de genre minimal, ou encore le fait d'être un entrelacs fibré, comme nous allons le voir.

L'idée fondamentale pour montrer que la somme de Murasugi de deux entrelacs fibrés est fibrée consiste à déformer préalablement les fibrations associées pour qu'elle soient non triviales sur des ensembles disjoints, d'où la définition suivante.

DÉFINITION 2.17. Soit K un entrelacs fibré, $\theta : \mathbf{S}^3 \smallsetminus K \mapsto \mathbf{S}^1$ définissant la fibration associée et Π une sphère divisant $\mathbf{S}^3$ en deux boules B_1 et B_2. Soit $N(K)$ un voisinnage tubulaire de K. On dit que la fibration θ est *tangente inférieurement* (resp. *supérieurement*) à Π si

(i) il existe un polygone P de sommets $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ sur Π tel que K rencontre Π le long des côtés $[x_1x_2], [x_3x_4], \dots, [x_{2n-1}x_{2n}]$ (*resp.* $[x_2x_3], \dots, [x_2nx_1]$) de P et K ne rencontre pas B_2 (*resp.* B_1) ;

(ii) $N(K) \cap \Pi$ consiste en un ε-voisinage des côtés $[x_1x_2], \dots, [x_{2n-1}x_{2n}]$ de P (*resp.* $[x_2x_3], \dots$) ;

(iii) à l'extérieur du ε-voisinage $N(\partial P)$ du bord du polygone P dans Π, la fonction θ vaut 0 à l'intérieur de P et π à l'extérieur ;

[15]) Plus généralement, on définit la somme de Murasugi de surfaces $\Sigma_i, i = 1, 2$ le long de deux polygones P_i dont un côté sur deux est dans le bord $\partial\Sigma_i$ comme la classe d'isotopie dans $\mathbf{S}^3$ de la somme de deux surfaces $\widehat{P}_i$ isotopes à P_i et vérifiant les critères (i), (ii) et (iii), le résultat ne dépendant alors pas du choix des $\widehat{P}_i$ dans leur classe d'isotopie. On la note $\Sigma_1 \#_{P_1 \sim P_2} \Sigma_2$

(*iv*) à l'intérieur de $N(\partial P) \setminus N(K)$, la fonction θ prend ses valeurs dans l'intervalle $]0,\pi[$ (*resp.* $]-\pi,0[$).

Si on voit une fibration comme le déplacement continu d'une fibre qui remplit tout le complémentaire d'un nœud, alors une fibration est tangente supérieurement à un plan si, sous ce plan, la fibre se déplace comme la bulle de savon décrite pour la fibration du nœud trivial. Le résultat suivant assure qu'étant donné un entrelacs fibré et un polygône P inclus dans une fibre, on peut supposer la fibration tangente à une petite sphère épaississant P.

LEMME 2.18. *Soit K un entrelacs fibré et $\theta : \mathbf{S}^3 \setminus K \to \mathbf{S}^1$ la fibration associée. Soit P un polygone à $2n$ côtés inclus dans une fibre $\theta^{-1}(t)$, et rencontrant K le long ses côtés $[x_1x_2],\dots,[x_{2n-1}x_{2n}]$ (*resp.* $[x_2x_3],\dots,[x_{2n}x_1]$). Alors il existe une sphère Π dans $\mathbf{S}^3$ contenant P, rencontrant K uniquement le long des arcs $[x_1x_2],\dots,[x_{2n-1}x_{2n}]$ (*resp.* $[x_2x_3],\dots,[x_{2n}x_1]$), et telle que K soit contenu dans une seule des deux boules fermées délimitées par Π. De plus, on peut reparamétrer θ de sorte que θ soit tangente inférieurement (*resp.* supérieurement) à Π.*

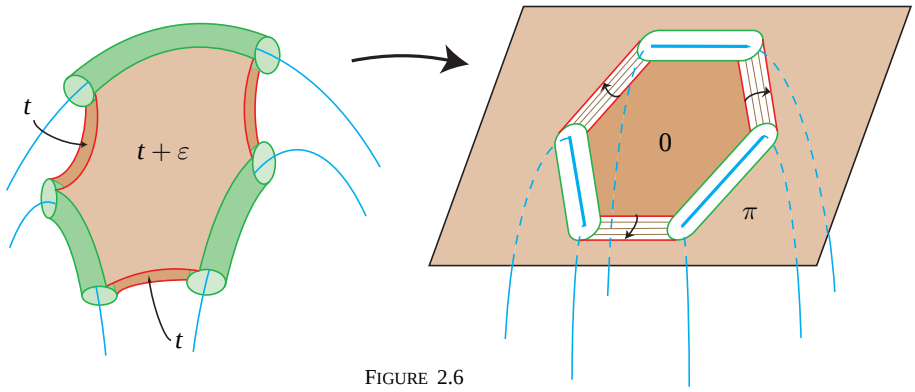


FIGURE 2.6
Déformation de la fibration pour obtenir une fibration triviale dans le demi-plan supérieur.

Démonstration. (voir figure 2.6) Comme P est contractile, au voisinnage de celui-ci, la fibration θ est isomorphe à la projection sur le second facteur $P \times [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \to [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$. Soit B_2 l'image réciproque de $P \times [0, t+\varepsilon]$ et Π son bord. La sphère Π consiste alors en deux copies de P, l'une dans la fibre $\theta^{-1}(t)$ et l'autre dans une fibre $\theta^{-1}(t+\varepsilon)$, et un anneau $\partial P \times]0,\varepsilon[$, comme sur la partie gauche de la figure 2.6.

Composons θ à gauche par un difféomorphisme du cercle envoyant l'intervalle $[t, t+\varepsilon]$ sur $[0,\pi]$. Si on pense au paramètre de la fibration comme à un temps, cela revient à ralentir le temps pour passer un temps π dans la (petite) boule B_2. La fibration obtenue est tangente inférieurement à Π. En effet,

si on zoome sur B_2 pour lui faire remplir tout le demi-espace supérieur, la fibration est alors semblable à celle qui est représentée sur la partie droite de la figure 2.6, laquelle est tangente inférieurement au plan horizontal.

Ces préliminaires nous permettent de montrer le résultat-clé suivant.

THÉORÈME 2.19 ([19]). *Soit K_1 et K_2 deux entrelacs fibrés dans $\mathbf{S}^3$ admettant pour fibres respectives deux surfaces Σ_1 et Σ_2. Soit P_1 (resp. P_2) un polygone à $2n$ côtés sur Σ_1 (resp. Σ_2) dont les côtés pairs (resp. impairs) sont inclus dans le bord K_1 (resp. K_2) de Σ_1 (resp. Σ_2). Alors la somme de Murasugi $K_1 \#_{P_1 \sim P_2} K_2$ est fibrée de fibre $\Sigma_1 \#_{P_1 \sim P_2} \Sigma_2$.*

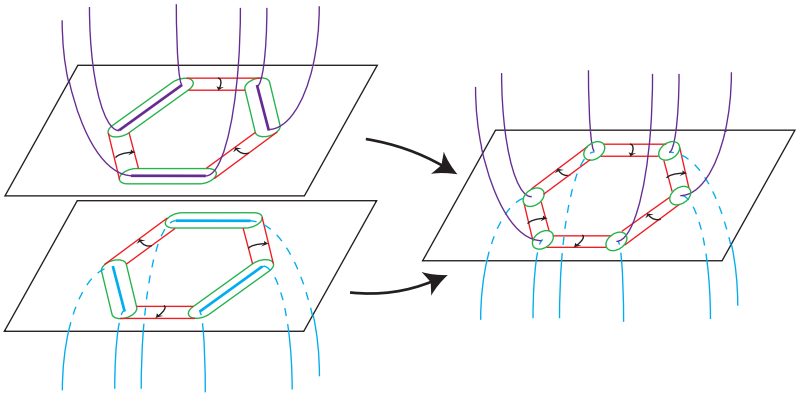


FIGURE 2.7
Le collage de deux fibrations pour obtenir une fibration de la somme de Murasugi de deux nœuds.

Démonstration. (voir figure 2.7) Soit Π le plan horizontal dans $\mathbf{R}^3$. Pour $i = 1, 2$, soit θ_i une fibration associée à K_i avec Σ_i pour fibre. D'après le lemme 2.18, on peut déformer K_1 et θ_1 de sorte que θ_1 soit tangente inférieurement à Π, et de même on peut déformer K_2 et θ_2 de sorte que θ_2 soit tangente supérieurement à Π. La somme de Murasugi $K_1 \#_{P_1 \sim P_2} K_2$ est alors obtenue en recollant le demi-espace inférieur associé à K_1 et le demi-espace supérieur associé à K_2, et en supprimant les arcs formant le bord du polygône $P = x_1 \dots x_{2n}$ dans Π.

On définit une nouvelle fonction θ, dont nous montrerons par la suite qu'elle induit une fibration. Sur le demi-espace inférieur, θ coïncide avec θ_1, sauf sur un voisinage tubulaire des arcs $[x_1, x_2], \dots, [x_{2n-1} x_{2n}]$ (où θ_1 est supposée du type fonction-argument). De même, sur le demi-espace supérieur, θ coïncide avec θ_2, sauf sur un voisinage tubulaire des arcs $[x_2, x_3], \dots, [x_{2n} x_1]$.

Au voisinage des arcs $[x_1, x_2], [x_3, x_4], \ldots, [x_{2n-1}x_{2n}]$, la fonction θ est définie sur le demi-espace supérieur, et varie de π à 2π quand on se déplace de l'extérieur vers l'intérieur du polygône. Elle est également définie sur le demi-espace inférieur jusqu'à la frontière d'un voisinage tubulaire de ces arcs, et varie également de π à 2π quand on se déplace de l'extérieur vers l'intérieur sur cette frontière. Il reste donc à prolonger θ sur n cylindres disjoints, sachant que, sur le bord de ces cylindres, θ varie de π à 2π comme indiqué sur la gauche de la figure 2.8. On le fait à l'aide de la fonction hauteur indiquée à droite de la figure 2.8. De même, on prolonge θ avec des valeurs dans l'intervalle $[0, \pi]$ dans le demi-plan supérieur au voisinage des arcs $[x_2, x_3], \ldots, [x_{2n}x_1]$.

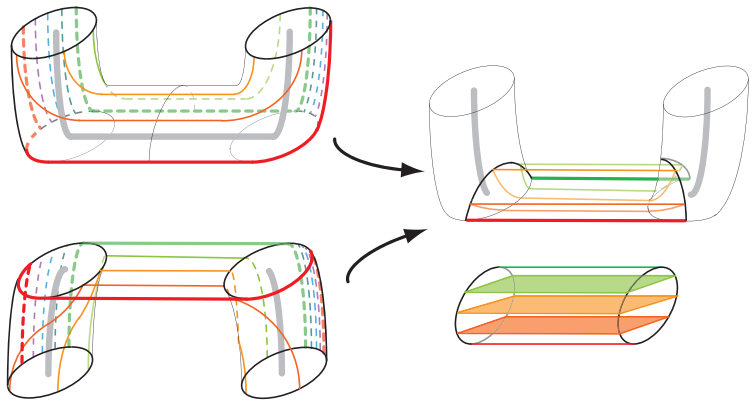


FIGURE 2.8

Complétion de la fibration d'un somme de Murasugi à partir de la réunion des fibrations associées à chacun des demi-espaces. À gauche, la fibration au voisinage d'un arc de type $]x_i, x_{i+1}[$ pour chacun des deux nœuds K_1 (en bas) et K_2 (en haut). Les arcs représentent les niveaux de la fonction θ, et plus précisément l'intersection des fibres avec un voisinage tubulaire de K_1 et K_2 respectivement, sur la partie du bas, on a également ajouté les niveaux de θ dans le plan Π de recollement. En haut à droite, la partie sur laquelle il faut définir de nouvelles valeurs pour la fonction θ, qui est un cylindre. Les conditions au bord sont alors fixées. En bas à droite, un feuilletage d'un cylindre remplissant ces contraintes de bord.

La fonction θ est alors définie sur tout $\mathbf{S}^3 \setminus N(K_1 \# K_2)$, et à valeurs dans $\mathbf{S}^1$.

Pour vérifier que θ est une fibration, établissons que la fonction θ n'a pas de singularité. Comme les fonctions θ_1 et θ_2 sont tangentes au plan Π de recollement hors de $N(\partial P)$, et sans singularité, et comme θ coïncide partout hors de $N(P)$ avec l'une de ces deux fonctions, la fonction θ y est sans singularité. Au voisinnage des arcs $]x_i x_{i+1}[$, c'est-à-dire à l'intérieur de la différence symétrique $N(K_1)\Delta N(K_2)$, le prolongement de θ a été justement choisi pour ne pas faire apparaître de singularité.

Pour compléter la démonstration, il reste à vérifier que θ est bien un argument au voisinage des sommets $x_1, \ldots x-2n$ du polygone P. La figure 2.7 montre que la fonction θ y est bien de la forme désirée.

On applique maintenant aux tresses les résultats généraux qui précèdent.

LEMME 2.20. *Pour tout entier n strictement positif, la clôture de la tresse σ_1^n est un entrelacs fibré.*

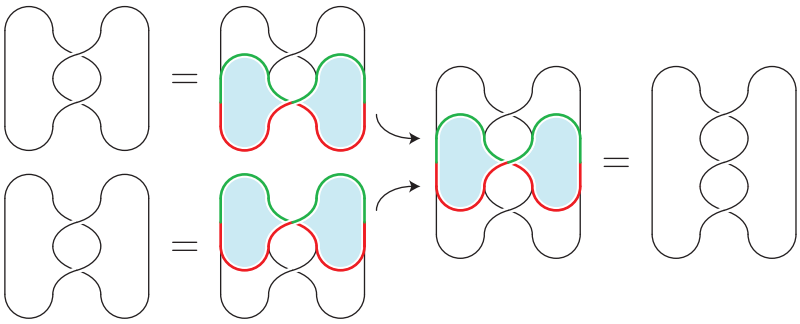


FIGURE 2.9
Construction itérative d'une surface de Seifert pour la clôture de σ_1^n.

Démonstration. Le cas $n = 1$ correspond au nœud trivial, tandis que le cas $n = 2$ correspond à l'entrelacs de Hopf à deux composantes. Sinon, on obtient la surface de Seifert standard Σ^n pour la clôture de σ_1^n en collant les surfaces standards Σ^{n-1} et Σ^2 le long du quadrilatère grisé sur la figure 2.9. Le lemme 2.19 assure alors qu'à chaque itération, l'entrelacs est fibré avec Σ^n pour fibre.

On est maintenant prêt pour démontrer que la clôture de toute tresse positive est un entrelacs fibré.

Démonstration du théorème 2.15. D'après le lemme 2.20, la clôture d'une tresse-colonne σ_i^n est un entrelacs fibré. La figure 2.10 montre comment juxtaposer une à une les surfaces standards associées à chaque colonne par somme de Murasugi, afin d'ainsi obtenir la surface standard associée à la clôture de n'importe quelle tresse positive. D'après le lemme 2.19, l'entrelacs obtenu est fibré, avec la surface standard pour fibre.

REMARQUE 2.21. On a utilisé la positivité de b de manière cruciale en affirmant que chaque colonne élémentaire est fibrée avec la surface standard pour fibre. En effet, si la tresse b a un croisement positif et un croisement négatif consécutifs dans une même colonne, celle-ci peut néanmoins être fibrée, mais la surface standard ne sera pas une fibre. Le théorème 2.19 ne s'applique alors plus dans la construction par récurrence, et donc la preuve s'effondre.

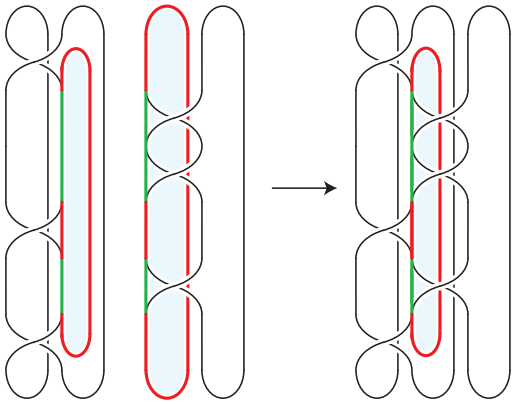


FIGURE 2.10
Collage de deux tresses l'une à côté de l'autre. En bleu, le polygone de collage.

Par contre, l'argument peut être étendu au cas d'une tresse *homogène*, définie comme une tresse possédant une décomposition dans laquelle, pour chaque i, l'un au plus des générateurs σ_i ou σ_i^{-1} apparaît. Ceci montre par exemple que le nœud de huit, clôture de la tresse $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$, est fibré.

2.4 GENRE

Dans la section précédente, on a montré qu'un nœud qui est clôture d'une tresse positive est fibré. La technique utilisée a également permis de construire une fibre pour la fibration associée. Dans cette section, nous utilisons ces informations pour calculer le genre des nœuds de Lorenz et en déduire un critère simple permettant de montrer qu'un nœud donné n'est pas un nœud de Lorenz.

PROPOSITION 2.22. *Soit b une tresse positive, K sa clôture et Σ la surface de Seifert standard. Alors Σ est une surface de Seifert de genre minimal pour K.*

Démonstration. Soit g le genre de la surface Σ. Reprenons les notations de la section précédente. On a vu que le nœud K admet une fibration définie par une fonction θ telle que $\Sigma = \theta^{-1}(0)$. Comme θ définit une fibration de $\mathbf{S}^3 \smallsetminus K$, le revêtement cyclique infini du complémentaire de K est isomorphe à $\theta^{-1}(0) \times \mathbf{R}$, et donc son groupe fondamental est un groupe libre de rang $2g$. De plus, le lacet horizontal $\partial\Sigma(0) \times \{0\}$ dans $\Sigma \times \mathbf{R}$ est le produit de g commutateurs dans $\pi_1(\mathbf{S}^3 \smallsetminus K)$, et pas moins.

Soit Σ' une surface de Seifert quelconque pour K de genre g'. En passant au revêtement universel, on plonge Σ' dans $\Sigma \times \mathbf{R}$, et en particulier son groupe fondamental $\pi_1(\Sigma')$ se plonge dans $\pi_1(\Sigma \times \mathbf{R})$. Le lacet $\partial\Sigma'$ est, dans $\pi_1(\Sigma')$, le produit de g' commutateurs. Or il est isotope dans $\Sigma \times \mathbf{R}$ au lacet $\partial\Sigma \times \{0\}$, qui est le produit de g commutateurs et pas moins. On en déduit l'inégalité $g \leqslant g'$, comme voulu.

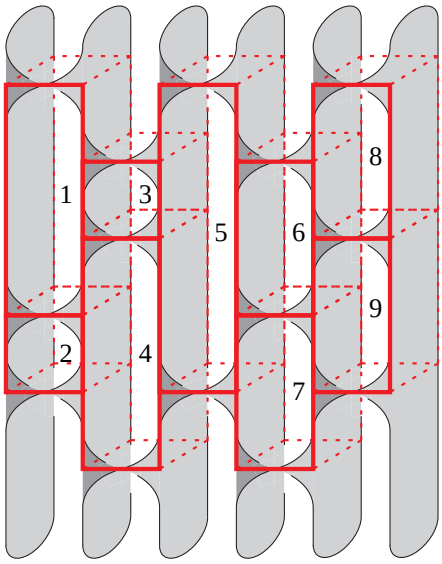


FIGURE 2.11

Construction itérative de la fibration associée à la clôture d'une tresse positive. Chaque brique correspond à un entrelacs de Hopf à deux composantes. En les empilant dans l'ordre prescrit, on s'assure que la somme de Murasugi fibre à chaque étape de la construction.

PROPOSITION 2.23. *Soit γ une orbite périodique de période n du flot de Lorenz, K le nœud associé et c le nombre de croisements de la tresse de Lorenz associée. Alors le genre g de K est donné par la formule $2g = n - c$.*

Démonstration. La fibre $\theta^{-1}(0)$ exhibée dans la preuve du théorème 2.15 est une surface de Seifert de genre minimal. Or, il s'agit de la surface de Seifert standard, qui par conséquent est de genre minimal. On vérifie facilement que sa caractéristique d'Euler est $1 + c - n$ et qu'elle n'a qu'une composante de bord ; par conséquent son genre est $(n - c)/2$.

On a vu dans la proposition 1.13 que tout nœud de Lorenz est réalisé par une infinité d'orbites du flot de Lorenz, et, par conséquent, est associé à une infinité de tresses de Lorenz. La proposition 2.23 implique que, pour toutes ces tresses, la quantité $n - c$, différence entre le nombre de brins et le nombre de croisements, prend la même valeur. La proposition 2.23 se reformule directement en termes de diagrammes de Young.

COROLLAIRE 2.24. *Le genre d'un nœud de Lorenz associé à un diagramme de Young est la moitié du nombre de cases de ce diagramme.*

Nous avons vu avec la proposition 1.18 que deux diagrammes de Young distincts peuvent coder le même nœud de Lorenz. Nous pouvons maintenant borner supérieurement le défaut d'injectivité de ce codage.

PROPOSITION 2.25. *Pour tout nœud de Lorenz K, il n'y a qu'un nombre fini de diagrammes de Young standards associés à K.*

Démonstration. Si K a pour genre g, tout diagramme de Young associé K a $2g$ cases en vertu du corollaire 2.24. Or il n'existe qu'un nombre fini de diagrammes de Young ayant $2g$ cases.

Ce résultat fournit un moyen de démontrer qu'un nœud donné n'est pas un nœud de Lorenz. Par exemple, le nœud de huit n'est pas un nœud de Lorenz, car son genre est 1, et les seuls diagrammes de Young à deux cases sont tous deux associés au nœud de trèfle.

PROPOSITION 2.26. *Parmi tous les nœuds admettant un représentant planaire ayant au plus seize croisements, exactement vingt sont des nœuds de Lorenz.*

Démonstration. Dans [12], nous avons déterminé les polynômes d'Alexander et de Jones de tous les nœuds de Lorenz de période au plus 21. Cette liste inclut en particulier tous les nœuds de Lorenz de genre au plus 9. Or elle ne compte que vingt nœuds ayant au plus seize croisements. Si on s'intéresse à la question de savoir quels nœuds ayant au plus seize croisements sont de Lorenz, cette liste est suffisante puisqu'un nœud ayant au plus $2g+1$ croisements est de genre au plus g. Par conséquent, les nœuds ayant au plus seize croisements sont de genre au plus 8, et donc ont été recensés dans la liste de [12].

Signalons une dernière propriété géométrique des nœuds de Lorenz.

PROPOSITION 2.27 ([5]). *La signature de tout nœud de Lorenz est strictement positive.*

Démonstration. Un théorème de L. Rudolph [43] affirme que la signature de la clôture de toute tresse positive est positive. Il s'applique aux tresses de Lorenz.

Comme la signature de l'image-miroir d'un nœud est l'opposé de la signature du nœud, on déduit :

COROLLAIRE 2.28. *Aucun nœud de Lorenz n'est isotope à son image-miroir.*

3. L'INDICE DE TRESSE

Nous poursuivons maintenant l'étude topologique des nœuds de Lorenz en déterminant de façon détaillée leur indice de tresse, c'est-à-dire le plus petit nombre de brins d'une tresse représentant ce nœud. Pour ce faire, nous introduisons dans la section 3.1 une nouvelle famille de tresses, dite de Birman-Williams, de sorte qu'une orbite de Lorenz donnée est clôture de la tresse de Birman-Williams associée. Le nombre de brins d'une tresse de Birman-Williams est, par définition, le pas de l'orbite de Lorenz associée, une donnée combinatoire qui se lit par exemple sur les mots de Lyndon. Nous montrons ensuite que cette tresse minimise le nombre de brins parmi les tresses ayant la même clôture. Pour ce faire, nous utilisons un résultat général sur l'indice de tresse d'un nœud qui est clôture d'une tresse positive, dû à J. Franks, H. Morton et R. Williams (théorème 3.5)[16]. Nous donnons une démonstration détaillée de ce résultat, à la fois pour son intérêt propre et pour offrir une version plus détaillée que celle de l'article original [18]. La section 3.2 rappelle la construction récursive du polynôme HOMFLY à partir des relations d'écheveau et introduit le formalisme des arbres de calcul positifs. Dans la section 3.3, nous introduisons une variante du polynôme HOMFLY qui est bien adaptée au cas des nœuds qui sont clôtures de tresses positives. Ceci nous mène dans la section 3.4 à la démonstration du théorème 3.5 et à son application au calcul de l'indice de tresse des nœuds de Lorenz. Enfin, dans la section 3.5, nous détaillons le lien entre entrelacs de Lorenz et T-entrelacs, une autre famille d'entrelacs admettant une description combinatoire simple.

3.1 TRESSE DE BIRMAN–WILLIAMS ET INDICE DE TRESSE

Dans le théorème 1.10, on a associé à toute orbite γ du flot de Lorenz une tresse privilégiée, dite tresse de Lorenz, dont la clôture représente le nœud K associé à γ. En déformant le patron comme sur la figure 3.1, on fait apparaître une autre tresse dont la clôture est K. Cette tresse, dite *de Birman–Williams*, est, comme la tresse de Lorenz, une tresse positive. Par contre, ce n'est pas une tresse de permutation. Elle fournit un représentant plus économe que la tresse de Lorenz dans la mesure où elle met en jeu moins de brins et moins de croisements.

Pour décrire les tresses de Birman–Williams, on définit d'abord le pas d'une orbite de Lorenz.

DÉFINITION 3.1. On appelle *pas* d'une orbite périodique du flot de Lorenz le nombre d'occurrences du mot LR dans le code de Lyndon de cette orbite.

En termes de tresses de Lorenz (voir la figure 1.4), le pas correspond au nombre de brins qui traversent de gauche à droite la ligne imaginaire séparant les p premiers brins des $n-p$ derniers. En termes de diagrammes de Young (voir la figure 1.6), le pas est le plus grand entier t tel qu'on puisse inscrire un carré $(t-1)\times(t-1)$ dans le diagramme de Young correspondant à l'orbite.

[16]) Le nom de H. Morton n'apparaît pas dans les auteurs de l'article [18], mais il y est mentionné que ce dernier est aussi l'auteur d'une démonstration du théorème 3.5.

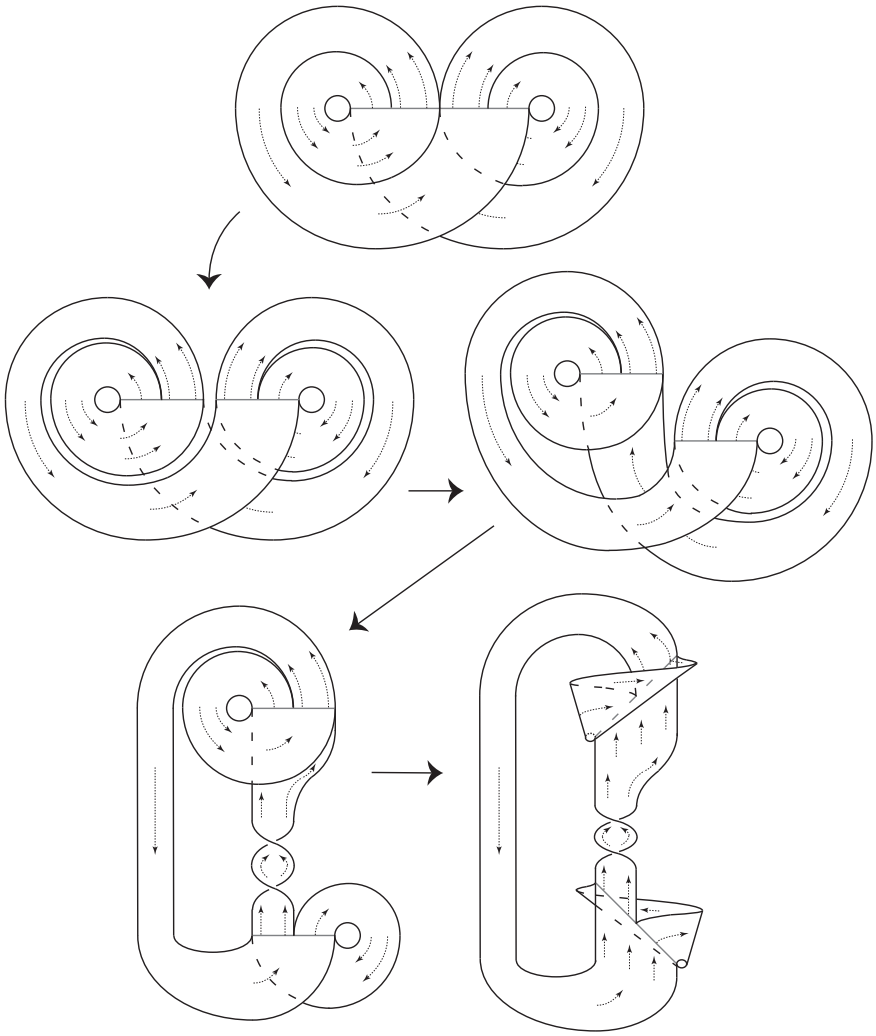


FIGURE 3.1

Le patron de Lorenz déformé de sorte que le flot soit ascendant sur la branche droite et descendant sur la branche gauche.

On rappelle que, pour t entier positif, Δ_t^2 désigne la tresse $(\sigma_1 \dots \sigma_{t-1})^t$ correspondant à un tour complet de t brins sur eux-mêmes. Par ailleurs, une tresse positive b est dite *multiple* de Δ_t^2 s'il existe une tresse positive b' vérifiant $b = \Delta_t^2 b'$.

THÉORÈME 3.2 ([5] et consulter l'erratum). *Soit γ une orbite périodique du flot de Lorenz de pas t, et n_i et m_i définis par les équations* (1.3) *et* (1.4)*. Soit K le nœud associé, et b la tresse à t brins*

$$\Delta_t^2 \prod_{i=1}^{t-1} (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i)^{n_i} \prod_{i=t-1}^{1} (\sigma_{t-1} \dots \sigma_i)^{m_{t-i}}. \tag{3.1}$$

Alors la clôture de la tresse b est un représentant de K.

Principe de la démonstration. On décrit l'image de la tresse de Lorenz de la figure 1.4, quand on la déforme selon le schéma indiqué sur la figure 3.1.

La tresse définie par la formule (3.1) est appelée *tresse de Birman-Williams* pour l'orbite γ.

EXEMPLE 3.3. Revenons à l'orbite partant du point $5/31$. Le mot de Lyndon associé est $LLRLR$, qui contient deux fois LR. Le pas vaut donc 2. La permutation de Lorenz est (13524), le seul indice non nul dans la tresse de Birman-Williams est alors n_1 qui vaut 1, et donc la tresse de Birman-Williams associée est σ_1^3, dont la clôture est bien un nœud de trèfle. Pour comparaison, la tresse de Lorenz correspondante est $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_3$.

Notre but dans la suite de cette partie est de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 3.4. *L'indice de tresse d'un nœud de Lorenz est égal au pas de toute orbite du flot de Lorenz le réalisant.*

Eu égard au théorème 3.2, le théorème 3.4 est un corollaire direct du résultat suivant, qui est celui que nous allons démontrer dans la suite.

THÉORÈME 3.5 ([18]). *Soit K un nœud qui est la clôture d'une tresse positive b à t brins multiple de Δ_t^2. Alors l'indice de tresse de K est égal à t.*

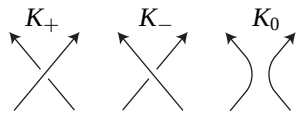
3.2 LE POLYNÔME HOMFLY ET LES ARBRES DE CALCUL

La démonstration du théorème 3.5 va faire appel au polynôme HOMFLY, aussi appelé HOMFLY-PT. Celui-ci est une extension à deux variables du polynôme de Jones, et, comme ce dernier, il admet une définition simple en termes de relations d'écheveau pour les diagrammes planaires.

Soit K un entrelacs orienté et $\mathcal{K}$ une projection planaire régulière de K, c'est-à-dire ne possédant qu'un nombre fini de points multiples et telle que ceux-ci soient tous des points doubles. Choisissons un point double M de $\mathcal{K}$. Définissons K_+ et K_- comme les entrelacs admettant $\mathcal{K}$ pour projection, sauf éventuellement au point M, où K_+ est projeté sur un croisement positif, et K_- sur un croisement négatif [17]). Définissons K_0 comme l'entrelacs orienté où le croisement en M a été supprimé (voir figure 3.2). Alors, par définition, les polynômes HOMFLY des trois entrelacs associés sont reliés par la relation

$$x\ P_{K_+} + x^{-1} P_{K_-} + y\ P_{K_0} = 0, \tag{3.2}$$

dite *relation d'écheveau*. Désignons par $\bigcirc$ le nœud trivial. En imposant $P_{\bigcirc} = 1$, le polynôme P_K est alors défini de manière unique pour tout nœud K. On montre que la relation d'écheveau impose $P_{\bigcirc^k} = \big(-(x+x^{-1})/y\big)^{k-1}$, où $\bigcirc^k$ désigne la réunion de k nœuds triviaux deux à deux non enlacés. Le polynôme de Jones correspond à la spécialisation $y = 1$. [18])



$$x\ P(K_+) + x^{-1} P(K_-) + y\ P(K_0) = 0$$

FIGURE 3.2

La relation d'écheveau définissant le polynôme HOMFLY.

Le calcul effectif du polynôme HOMFLY d'un nœud peut s'effectuer en introduisant un arbre de calcul dont les bifurcations successives correspondent aux points doubles où la relation d'écheveau (3.2) est invoquée. Un choix arbitraire des points doubles peut mener à une boucle, par exemple si on choisit deux fois de suite le même point. Par contre, on va voir que, pour autant qu'on change de point d'application à chaque étape, le processus de calcul converge en un nombre fini d'étapes.

Comme nous considérons dans la suite des tresses qui ne possèdent pas toutes le même nombre de brins, il est commode de définir une *tresse marquée* comme un couple (b, n) où b est une tresse à au plus n brins, et une *tresse positive marquée* comme une tresse marquée (b, n) où b est une tresse positive à au plus n brins.

DÉFINITION 3.6. On dit que deux tresses marquées (b, n) et (b', n') sont reliées par une *transformation de Markov positive* si

– ou bien on a $n' = n$ et b' est conjuguée à b dans le groupe des tresses à n brins,
– ou bien on a $n' = n+1$ et $b' = b\sigma_n$,
– ou bien, symétriquement, on a $n = n'+1$ et $b = b'\sigma_n$.

[17]) Remarquons que K coïncide avec K_+ ou avec K_-

[18]) Une description plus précise du polynôme HOMFLY peut être trouvée par exemple dans [31, chapitre 15].

Remarquer que, si on note $c(b,n)$ la différence entre le nombre de croisements positifs dans (b,n) et le nombre de croisements négatifs, alors la quantité $c(b,n)-n$ est invariante par transformation de Markov positive. La propriété que nous utiliserons dans la suite est que, si deux tresses marquées sont reliées par une suite de transformations de Markov positives, alors leur clôtures sont isotopes.[19])

Afin de suivre le schéma de calcul suggéré par la relation d'écheveau (3.2), J. Conway a introduit pour les tresses marquées une relation qui en est la contrepartie.

DÉFINITION 3.7. Soit (b,n) une tresse marquée. On dit que deux tresses marquées (b_0,n) et (b_-,n) sont obtenues par *scindement de Conway* à partir de (b,n) s'il existe des tresses b_1,b_2 et vérifiant

$$b = b_1\sigma_i b_2, \quad b_0 = b_1 b_2, \quad \text{et} \quad b_- = b_1\sigma_i^{-1} b_2. \tag{3.3}$$

Si (b,n) est une tresse marquée, on note $P_{(b,n)}$ le polynôme HOMFLY de sa clôture. La relation d'écheveau (3.2) implique que, si (b_0,n) et (b_-,n) sont obtenues par scindement de Conway à partir de (b,n), alors on a

$$P_{(b,n)}(x,y) = -x^{-1}yP_{(b_0,n)}(x,y) - x^{-2}P_{(b_-,n)}(x,y). \tag{3.4}$$

On peut alors définir un arbre de calcul pour le polynôme P, qui mime en termes de tresses marquées le calcul du polynôme HOMFLY de la clôture.

DÉFINITION 3.8. Soit (b,n) une tresse marquée. Un *arbre de calcul positif pour* (b,n) est un arbre orienté, binaire, fini, dont chaque sommet est étiqueté par une tresse marquée, dont chaque arête est étiquetée par un monôme de $\mathbf{Z}[x,x^{-1},y,y^{-1}]$, et qui satisfait aux propriétés suivantes :

(i) La racine est étiquetée (b,n).

(ii) Si S est un sommet étiqueté (b_s,n_s) qui n'est pas une feuille, et si S_g et S_d sont ses fils, étiquetés respectivement (b_g,n_g) et (b_d,n_d), alors (b_g,n_g) et (b_d,n_d) s'obtiennent à partir de (b_s,n_s) en faisant d'abord une suite de transformations de Markov positives, puis un scindement de Conway.

(iii) Si, de plus, les arêtes reliant S à S_g et S_d sont étiquetées par les monômes p_g et p_d respectivement, alors on a $P_{(b_s,n_s)} = p_gP_{(b_g,n_g)} + p_dP_{(b_d,n_d)}$.

(iv) Si f est une feuille étiquetée (b_f,n_f), alors b_f est la tresse triviale à n_f brins.

S'il existe un arbre de calcul positif $\mathcal{A}$ pour une tresse marquée (b,n), il devrait être clair que cet arbre fournit une stratégie pour déterminer le polynôme HOMFLY de la clôture de (b,n), en itérant la relation d'écheveau (3.4). En effet, notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des feuilles de $\mathcal{A}$, et, pour une feuille f dans $\mathcal{F}$, notons p_f le produit des monômes rencontrés sur les arêtes de $\mathcal{A}$ le long du chemin allant de la racine à f. Alors, par construction, on a

[19]) Dans la section 1.6, on a mentionné les transformations de Markov générales, où on peut aussi passer de (b,n) a $(b\sigma_n^{-1},n+1)$. Rappelons que le théorème de Markov affirme que les clôtures de deux tresses marquées sont des entrelacs isotopes si et seulement si on peut passer de (b,n) à (b',n') par une suite finie de transformations de Markov (générales).

$$P_{(b,n)}(x,y) = \sum_{f\in\mathcal{F}} p_f \cdot \left(-\frac{x+x^{-1}}{y}\right)^{n_f-1}.$$

Par contre, il n'est pas évident *a priori* qu'un tel arbre de calcul existe pour toute tresse. Nous allons montrer maintenant que c'est bien le cas. À partir de maintenant, on ne travaille plus qu'avec des tresses positives [20]). Commençons par un résultat technique sur les transformations de Markov positives.

LEMME 3.9. *Soit (b,n) une tresse positive marquée. Alors, par une suite de transformations de Markov positives, on peut transformer (b,n) en (b',n'), où b' est soit la tresse triviale sur n' brins, soit une tresse positive qui est multiple de σ_i^2 pour au moins un entier i.*

Démonstration. Définissons le *poids* π d'un mot de tresse positif par $\pi(\sigma_i) = i$ et $\pi(w_1w_2) = \pi(w_1) + \pi(w_2)$. Nous allons prouver le résultat par récurrence sur le poids d'un mot de tresse w représentant b. Le seul mot de tresse de poids nul est le mot vide, correspondant à la tresse triviale, pour laquelle le résultat est vrai. Soit m le plus grand entier tel que σ_m apparaît dans le mot w.

Si σ_m n'apparaît qu'une fois dans w, alors w est de la forme $w_0\sigma_m w_4$, et donc b est conjuguée à la tresse décrite par le mot $w_4w_0\sigma_m$. Une transformation de Markov positive supprime alors le σ_m final. Comme $\pi(w_4w_0) = \pi(w) - m$, par hypothèse de récurrence, le résultat est vrai pour la tresse représentée par le mot w_4w_0, et donc pour la tresse b.

Sinon, on peut supposer que σ_m apparaît au moins deux fois dans w. Alors le mot w se décompose en $w_0\sigma_m w_2\sigma_m w_4$ de sorte que w_2 ne contienne aucun σ_m. Il y a alors trois cas possibles :

Premier cas : σ_{m-1} n'apparaît pas dans w_2. La tresse représentée par le mot $\sigma_m w_2\sigma_m$ est également représentée par $w_2\sigma_m^2$, et par conséquent b est conjuguée à la tresse représentée par $w_4w_0w_2\sigma_m^2$.

Deuxième cas : σ_{m-1} apparaît une fois exactement dans w_2. Alors w_2 se décompose en $w_1\sigma_{m-1}w_3$, et la tresse b, représentée par le mot $w_0\sigma_m w_1\sigma_{m-1}w_3\sigma_m w_4$, est également représentée par le mot $w_0w_1\sigma_m\sigma_{m-1}\sigma_m w_3w_4$, dont le poids est aussi $\pi(w)$. Mais, d'après la relation de tresse $\sigma_{m-1}\sigma_m\sigma_{m-1} = \sigma_m\sigma_{m-1}\sigma_m$, b est aussi représentée par le mot $w_0w_1\sigma_{m-1}\sigma_m\sigma_{m-1}w_3w_4$, dont le poids est $\pi(w) - 1$. L'hypothèse de récurrence s'applique alors.

Troisième cas : σ_{m-1} apparaît au moins deux fois dans w_2. Alors, w_2 se décompose sous la forme $w_1\sigma_{m-1}w_2'\sigma_{m-1}w_3$, avec w_2' ne contenant aucun σ_{m-1}. On réitère le processus à partir du mot w_2', à la recherche de la lettre σ_{m-2}. À chaque itération, soit on trouve un mot représentant la tresse b et contenant un facteur σ_i^2, soit le poids décroît, soit l'indice m du générateur recherché décroît. Cette dernière éventualité ne peut se produire une infinité de fois, par conséquent le processus s'achève.

Le résultat suivant justifie l'introduction des arbres de calcul positifs, puisqu'il donne un moyen de calculer le polynôme HOMFLY des tresses positives. On définit la longueur $\ell(b)$ d'une tresse positive b comme la longueur de n'importe quel mot de tresse positif représentant b.

[20]) Si on autorise également des scindements de Conway *négatifs*, c'est-à-dire où les rôles de σ_i et σ_i^{-1} sont échangés, les arbres de calculs existent en fait pour toute tresse marquée. La démonstration est un peu plus longue, mais repose sur les mêmes arguments [18].

THÉORÈME 3.10 ([18]). *Il existe un arbre de calcul positif pour toute tresse positive marquée.*

Démonstration. Soit (b,n) une tresse positive marquée. La preuve se fait par récurrence sur la longueur $\ell(b)$. Si b est de longueur nulle, alors la tresse b est triviale, et l'arbre n'ayant qu'un sommet étiqueté (b,n) convient.

Sinon, on utilise le lemme 3.9 : la tresse positive marquée (b,n) peut être convertie par une suite de transformations de Markov positives en (b',n'), où b' est soit la tresse triviale, soit de la forme $b''\sigma_i^2$ avec b'' positive. Dans le premier cas, la tresse b' est elle-même triviale et l'arbre n'ayant qu'un sommet étiqueté (b,n) convient. Dans le second cas, on utilise un scindement de Conway sur un des deux croisements σ_i, et les deux fils sont alors étiquetés $(b''\sigma_i,n')$ et (b'',n'). Par construction, les tresses positives $b''\sigma_i$ et b'' ont une longueur strictement inférieure à celle de b, donc, par hypothèse de récurrence, on peut compléter l'arbre de calcul sous les sommets étiquetés $(b''\sigma_i,n')$ et (b'',n'), et, de là, sous (b,n).

3.3 UNE VARIANTE DU POLYNÔME HOMFLY

Dans la démonstration du théorème 3.10, toutes les branches gauches de l'arbre construit sont étiquetées $-x^{-1}y$ et toutes les branches droites $-x^{-2}$. Introduisons alors une variante du polynôme HOMFLY qui se comporte bien vis-à-vis des tresses marquées et des arbres de calcul positifs.

PROPOSITION 3.11. (i) *Pour toute tresse positive marquée (b,n), il existe un polynôme $J_{(b,n)}(R,C,T)$ à coefficients entiers positifs vérifiant*

$$P_{(b,n)}(x,y) = J_{(b,n)}\left(-x^{-2}, -x^{-1}y, -\frac{x+x^{-1}}{y}\right). \tag{3.5}$$

(ii) *Si on donne à R, C et T les degrés 1, 2 et -1 respectivement, alors $J_{(b,n)}(R,C,T)$ est homogène de degré $\ell(b)-n+1$,*

(iii) *Le polynôme $J_{(b,n)}$ ne dépend que de la classe d'isotopie de la clôture de (b,n).*

(iv) *Si q est le nombre de composantes de la clôture de (b,n), alors on a $J_{(b,n)}(0,C,T) = C^pT^{q-1}$, où p est un entier.*

(v) *Le degré en T de $J_{(b,n)}(R,C,T)$ est strictement inférieur à l'indice de tresse de b.*

Démonstration. Nous reprenons les arbres de calcul positifs construits plus haut, mais en modifiant l'étiquetage des arêtes. Soit (b,n) une tresse positive marquée. Soit $\mathcal{A}$ un arbre de calcul positif pour (b,n), construit selon le procédé décrit dans la démonstration du théorème 3.10. Par construction, toutes les arêtes allant vers un fils gauche de $\mathcal{A}$ sont étiquetées $-x^{-1}y$ et toutes les arêtes allant vers un fils droit sont étiquetées $-x^{-2}$. Remplaçons ces étiquettes par C et R respectivement. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des feuilles de $\mathcal{A}$. Définissons alors $j_f(R,C)$ comme le monôme produit de toutes les étiquettes R et C rencontrées le long du chemin allant de la racine à f. Enfin, posons

$$J_{(b,n)}(R,C,T) = \sum_{f\in\mathcal{F}} j_f(R,C)\cdot T^{n_f-1}. \tag{3.6}$$

A priori, la valeur de $J_{(b,n)}$ dépend de l'arbre de calcul choisi. C'est seulement lorsque nous aurons démontré le point (iii) que nous en déduirons que $J_{(b,n)}$ ne dépend que de la clôture de (b,n).

Le point (i) se déduit immédiatement de la définition de J, puisque, pour le définir, on a repris les arbres de calcul positifs introduits pour calculer le polynôme HOMFLY, en remplaçant les $-x^{-2}$ par R, les $-x^{-1}y$ par C, et les $-\frac{x+x^{-1}}{y}$ par T. Or, pour toute feuille f dans $\mathcal{F}$, le nombre n_f de brins de l'étiquette est également le nombre de composantes de l'entrelacs (trivial) associé.

Démontrons le point (ii). Si on a une arête étiquetée C et reliant des sommets de $\mathcal{A}$ étiquetés respectivement (b_0,n_0) et (b_1,n_1), alors, par définition de l'arbre de calcul et des scindements de Conway, on a

$$\ell(b_1)-n_1=\ell(b_0)-n_0-2=\ell(b_0)-n_0-\deg(C).$$

De même, si on a une arête étiquetée R, on a

$$\ell(b_1)-n_1=\ell(b_0)-n_0-1=\ell(b_0)-n_0-\deg(R).$$

Par récurrence, si la racine de $\mathcal{A}$ est étiquetée (b,n) et si f est une feuille dont l'étiquette est une tresse triviale à n_f brins, on a

$$\ell(b)-n=\deg(j_f)-n_f=\deg\left(j_f\cdot T^{n_f-1}\right)-1.$$

Somme de monômes tous de même degré, $J_{(b,n)}(R,C,T)$ est donc homogène de degré $\ell(b)-n+1$.

Démontrons maintenant le point (iii). Revenons aux arbres de calcul positifs calculant le polynôme HOMFLY. On remarque que, si f est une feuille de $\mathcal{A}$, on a l'égalité $\deg(j_f)=\deg_x(p_f)$. Or, si (b,n) est l'étiquette de la racine de $\mathcal{A}$ et si f est une feuille, on a

$$\ell(b)-n=\deg(j_f)-n_f=\deg_x(p_f)-n_f.$$

Par conséquent, il existe un exposant $s(f)$ vérifiant $p_f(x,y)=\pm y^{s(f)}x^{n-\ell(b)-n_f}$, d'où

$$p_f(x,y)\cdot\left(-\frac{x+x^{-1}}{y}\right)^{n_f-1}=\pm y^{s(f)-n_f+1}x^{n-\ell(b)+1}(1+x^{-2})^{n_f-1}.$$

Posons $k=n-\ell(b)+1$. Par définition d'un arbre de calcul positif, on a alors

$$P_{(b,n)}(x,y)=x^k\sum_{f\in\mathcal{F}}\pm y^{s(f)-n_f-1}(1+x^{-2})^{n_f-1}.$$

Il existe par conséquent des entiers a_{ij} uniques vérifiant

$$P_{(b,n)}(x,y)=\sum_{i,j}a_{ij}x^{k-j}y^{i+j}((x+x^{-1})/y)^j=\sum_{i,j}(-1)^{\frac{i-k}{2}}a_{ij}(-x^{-2})^{-\frac{i+k}{2}}(-y/x)^{i+j}(-(x+x^{-1})/y)^j.$$

En substituant $C=-x^{-2}, R=-y/x$ et $T=-(x+x^{-1})/y$, on obtient

$$P_{(b,n)}(x,y)=\sum_{i,j}(-1)^{\frac{i-k}{2}}a_{ij}R^{i+j}C^{-\frac{i+k}{2}}T^j. \tag{3.7}$$

Appelons $\widetilde{J}(R,C,T)$ le polynôme du second membre de (3.7). Alors $\widetilde{J}$ est homogène de degré $-k$ si on donne à R,C et T les poids $1,2$ et -1 respectivement. Comme les a_{ij} ne dépendent que de $P_{(b,n)}$, le polynôme $\widetilde{J}$ est l'unique polynôme homogène se spécialisant en $P_{(b,n)}$ lorsqu'on substitue $-x^{-2}$ à C, $-y/x$ à R et $-(x+x^{-1})/y$ à T. Or $J_{(b,n)}$ a les mêmes propriétés, donc les polynômes $J_{(b,n)}$ et $\widetilde{J}$ coïncident. Par conséquent, $J_{(b,n)}$ ne dépend que du polynôme $P_{(b,n)}$, et donc *a fortiori* que de la clôture de (b,n).

Pour ce qui est de (iv), remarquons que la seule branche de l'arbre $\mathcal{A}$ ne comportant aucune étiquette R est la branche la plus à droite. Soit (b_0,n_0) l'étiquette d'un sommet de cette branche, et (b_1,n_1) l'étiquette de son fils droit. Alors, par construction de $\mathcal{A}$, il existe un entier i tel qu'on passe de b_0 à $b_1\sigma_i^2$ par des transformations de Markov positives. Ces transformations ne changent pas le nombre de composantes de la clôture, et, d'autre part, en supprimant un facteur σ_i^2 d'une tresse, on ne change pas non plus le nombre de composantes de sa clôture. Par conséquent, les clôtures de (b_0,n_0) et (b_1,n_1) ont le même nombre de composantes. De proche en proche, on en déduit que les nœuds associés à la racine et à la feuille la plus à droite de $\mathcal{A}$ ont le même nombre de composantes, d'où le point (iv).

Enfin, pour (v), on revient à la formule (3.6). Observons que l'exposant maximal de T dans $J_{(b,n)}$ est de la forme n_f-1 pour une certaine feuille f de $\mathcal{A}$. Or, le nombre maximal de composantes d'un entrelacs associé à une feuille est borné par le nombre de brins d'une tresse ayant cet entrelacs pour clôture. Donc, partant d'une tresse marquée à n brins, notre construction d'arbre de calcul positif ne fait pas apparaître de tresse à plus de n brins, d'où le point (v).

3.4 APPLICATION AU CALCUL DE L'INDICE

Les résultats précédents permettent de déterminer avec précision l'indice de tresse de la clôture de certaines tresses positives, en particulier des tresses de Birman-Williams.

PROPOSITION 3.12. *Supposons que (b,n) est une tresse positive marquée et que $\mathcal{A}$ est un arbre de calcul positif dont la racine est étiquetée par (b,n) et tous les sommets par des tresses positives. Alors, si $\mathcal{A}$ a un sommet étiqueté par une tresse dont la clôture est un entrelacs à n composantes, l'indice de tresse de la clôture de (b,n) est n.*

Démonstration. Soit (b_0,n) le sommet de $\mathcal{A}$ dont l'entrelacs associé a n composantes. D'après le point (iv) du théorème 3.11, le polynôme à coefficients positifs $J_{(b_0,n)}$ a au moins un monôme dont l'exposant de T est égal à $n-1$. Alors, en utilisant l'arbre de calcul $\mathcal{A}$, on déduit $J_{(b,n)}=P_1J_{(b_0,n)}+P_2$, où P_1 et P_2 sont des polynômes à coefficients positifs. Par conséquent, $J_{(b,n)}$ a au moins un terme dont le degré en T est au moins égal à $n-1$. D'après le point (v) de la proposition 3.11, l'indice de tresse de la clôture de (b,n) est au moins n. D'un autre côté, b est une tresse à n brins, donc l'indice de tresse de sa clôture est au plus n. De ces deux inégalités, on déduit que l'indice de tresse de la clôture de (b,n) est n exactement.

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème 3.5.

Démonstration du théorème 3.5. D'après la proposition 3.12, il suffit de montrer que, pour toute tresse positive b à au plus t brins, il existe un arbre de calcul positif pour $(\Delta_t^2 b, t)$ contenant un sommet étiqueté (Δ_t^2, t). On procède par récurrence sur la longueur de b. Pour $b = 1$, le résultat est trivial. Supposons $b = \sigma_i b'$. On sait, voir par exemple [21], qu'il existe une tresse positive Δ' vérifiant $\Delta_t^2 = \Delta' \sigma_i$. On a alors $\Delta_t^2 b = \Delta' \sigma_i^2 b'$. Il existe donc un scindement de Conway de la tresse positive marquée (b, t) en les tresses positives marquées $(\Delta' \sigma_i b', t)$, c'est-à-dire $(\Delta_t^2 b', t)$, et $(\Delta' b', t)$. Comme la longueur de b' est strictement inférieure à celle de b, l'hypothèse de récurrence garantit qu'il existe un arbre de calcul positif $\mathcal{A}'$ pour $(\Delta_t^2 b', t)$ contenant un sommet étiqueté (Δ_t^2, t). Comme $\Delta' b'$ est une tresse positive, on peut compléter $\mathcal{A}'$ en un arbre de calcul positif pour $(\Delta_t^2 b, t)$, lequel contient un sommet étiqueté (Δ_t^2, t) puisqu'il inclut $\mathcal{A}'$.

3.5 Nœuds de Lorenz et T-entrelacs

Le théorème 3.2 fournit, pour tout nœud de Lorenz, une tresse ayant un nombre de brins minimal. Cependant, il existe différentes orbites du flot de Lorenz qui sont isotopes, mais fournissent des tresses de Birman-Williams différentes. Ainsi, la représentation n'est pas injective. Réduire la redondance de ce codage, ou trouver des mouvements passant d'une tresse de Birman-Williams à une autre décrivant le même nœud de Lorenz est donc un objectif intéressant.

Récemment, J. Birman et I. Kofman [4] ont montré que les nœuds de Lorenz, et plus généralement les entrelacs de Lorenz généralisés (pour lesquels on autorise différentes composantes à suivre des trajectoires parallèles sur le patron de Lorenz), admettent une autre description combinatoire.

Définition 3.13. Soit $2 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_k$ et $s_1, \ldots, s_k > 0$ des entiers. On définit le *T-entrelacs* $T((r_1, s_1), \ldots, (r_k, s_k))$ comme la clôture de la tresse

$$(\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{r_1 - 1})^{s_1} (\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{r_2 - 1})^{s_2} \ldots (\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{r_k - 1})^{s_k}.$$

La famille des T-entrelacs généralise celle des entrelacs algébriques, puisque le T-entrelacs $T((r_1, s_1), \ldots, (r_k, s_k))$ est algébrique si et seulement si $r_1 | r_2 | \ldots | r_k$ et $s_i \geqslant r_i$ pour tout i. Le résultat suivant affirme qu'on passe des entrelacs algébriques à ceux de Lorenz justement en levant ces conditions.

Théorème 3.14 ([4]). *La famille des entrelacs de Lorenz généralisés et celle des T-entrelacs coïncident.*

La démonstration se base sur des manipulations algébriques dans le groupe des tresses à partir de la tresse de Birman-Williams permettant de la transformer en une T-tresse. Elle donne également des formules pour les paramètres r_i et s_i en fonction des paramètres n_i et m_i définis en (1.3) et (1.4). Bien que ce théorème permette de réduire encore la redondance du codage des nœuds de Lorenz,

il ne permet pas de résoudre directement le problème d'isotopie, puisque, par exemple, la symétrie du patron de Lorenz montre que les entrelacs $T((r_1, s_1), (r_2, s_2))$ et $T((s_2, r_2 - r_1), (s_1 + s_2, r_1))$ sont toujours isotopes.

4. NŒUDS DE LORENZ, NŒUDS MODULAIRES ET THÉORIE DES NOMBRES

Cette partie est consacrée au lien entre nœuds de Lorenz et nœuds modulaires. On y explique l'origine arithmétique de ces derniers à partir des classes de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on décrit la correspondance de Ghys, et on établit les résultats nouveaux annoncés dans l'introduction. Dans la section 4.1, nous déterminons des représentants des classes de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. La section 4.2 est centrée sur la correspondance classique entre les classes de conjugaison précédentes et les classes d'idéaux dans un ordre d'un corps quadratique. Nous introduisons la surface modulaire et les nœuds modulaires dans les sections 4.3 et 4.4. C'est dans la section 4.5 que nous décrivons la correspondance de Ghys proprement dite. Puis, dans la section 4.6, nous rappelons la définition du groupe des classes. Enfin, c'est dans la section 4.7 que nous établissons les résultats sur les orbites triviales et inverses.

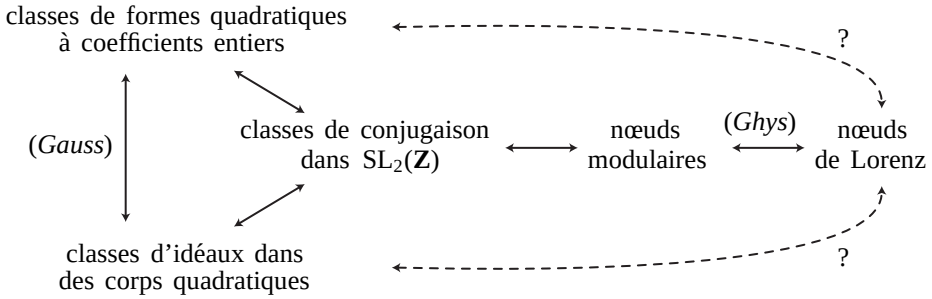


FIGURE 4.1

Liens entre les nœuds de Lorenz et la théorie des nombres. L'existence d'un lien direct entre les nœuds de Lorenz et les classes de formes quadratiques d'une part, et les classes d'idéaux d'autre part, reste hypothétique.

4.1 CLASSES DE CONJUGAISON DANS $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ SOUS L'ACTION DE $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$.

Nous commençons par un résultat préparatoire sur les éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$, à savoir la détermination des classes de conjugaison de matrices hyperboliques. On rappelle qu'une matrice est dite *hyperbolique* si la valeur absolue de sa trace est strictement plus grande que 2.

Dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$, les classes de conjugaison sont faciles à déterminer, puisque, à trace t fixée, il y a une classe de conjugaison si $|t| > 2$ et deux classes si $|t| \leqslant 2$ (les matrices de rotation $\mathrm{rot}(\theta)$ et $\mathrm{rot}(-\theta)$ ne sont pas conjuguées dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$).

PROPOSITION 4.1 (voir [30], chap. 3.5). *Dans* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$, *on note* a *la classe contenant les deux matrices* $\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* b *la classe contenant* $\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Alors le groupe* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ *est engendré par* a *et* b, *avec les relations* $a^2 = b^3 = 1$.

Appelons *mot réduit* un mot en les lettres a et b ne contenant aucun sous-mot a^2 ou b^3. La proposition 4.1 implique que tout élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ est représenté par un unique mot réduit[21]).

LEMME 4.2. *Tout élément de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ *qui n'est conjugué ni à* a, *ni à* b, *ni à* b^2, *est conjugué, dans* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$, *à un élément dont le représentant réduit commence par* b *et finit par* a.

Démonstration. Soit g dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$. Par conjugaison, on peut permuter cycliquement l'ordre des lettres du mot réduit associé. Si g a un représentant réduit contenant des lettres a et b, alors on peut en permuter les facteurs afin que b soit en tête, et a en queue. Sinon, les seuls mots réduits qui ne comportent pas à la fois des a et des b sont a, b et b^2.

Passons au groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, et posons $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On déduit du lemme 4.2 une caractérisation des classes de conjugaison hyperboliques de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

PROPOSITION 4.3. *Toute matrice hyperbolique de* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ *est conjuguée, dans* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, *à un produit de matrices* X *et* Y *contenant au moins un facteur* X *et au moins un facteur* Y, *et ce produit est unique à permutation circulaire des facteurs près.*

Démonstration. Soit M une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ de trace > 2. La classe de X dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ est ba et celle de Y est b^2a. Par conséquent, d'après le lemme 4.2, il existe un produit P de matrices X et Y tel que M est conjuguée à $\pm P$. Or les traces de M et P sont positives, donc M est conjuguée à P. D'autre part, pour tous m et n entiers, on a $tr(X^m) = tr(Y^n) = 2$. Or on a supposé $tr(M) > 2$. Donc P ne peut être ni de la forme X^m, ni de la forme Y^n, et il contient donc au moins un facteur X et au moins un facteur Y.

Si P' est obtenu à partir de P par permutation cyclique des lettres, alors P' est conjugué à P, et donc à M. Enfin, l'unicité de P découle de l'unicité du représentant réduit du lemme 4.2.

En rapprochant la proposition 4.3 de la proposition 1.8 affirmant que les orbites périodiques du flot de Lorenz sont représentées par les mots en deux lettres L et R, uniques à permutation cyclique des lettres près, on peut entrevoir un lien entre classes de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et nœuds de Lorenz. C'est ce lien qui sera explicité et approfondi dans la section 4.5. Dans un groupe, un élément g est dit *primitif* si l'égalité $g = h^k$ implique $k = \pm 1$. C'est une propriété invariante par conjugaison.

[21]) Autrement dit, le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ est isomorphe au produit libre $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} * \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

COROLLAIRE 4.4. *Les classes de conjugaison de matrices de* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ *hyperboliques et primitives sont indexées par les mots de Lyndon.*

EXEMPLE 4.5. Des tests rapides permettent de vérifier qu'il n'y a que trois mots de Lyndon associés à des classes de conjugaison de matrices de trace 10 et de déterminant 1, à savoir les mots X^8Y, X^4Y^2 et X^2YXY. D'après le résultat précedent, toute matrice primitive de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ de trace 10 est donc conjuguée à l'un de ces produits.

Considérons par exemple la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. L'algorithme d'Euclide appliqué à la première colonne de M permet de décomposer celle-ci en le produit $Y^{-2}X^3Y^{-2}$. Dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ la classe de ce produit est $(b^2a)^{-2}(ba)^3(b^2a)^{-2} = (ab)^2(ba)^3b(ab)^2 = ababab^2abab^2ab$. Une permutation cyclique des éléments de ce produit montre qu'il est conjugué à $(ba)^2(ba^2)(ba)(ba^2)$, qui est la classe du produit X^2YXY. On en déduit que la matrice M est conjuguée à X^2YXY. Le même procédé permet de déterminer le mot de Lyndon représentant la classe de conjugaison de n'importe quelle matrice primitive hyperbolique de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$.

Dans la suite, nous allons considérer des classes un peu plus grosses que les classes de conjugaison par des matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. On note $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbf{Z}$ de déterminant ± 1. On s'intéresse maintenant à la conjugaison par des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$.

PROPOSITION 4.6. *Toute matrice hyperbolique et de trace positive de* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ *est conjuguée, dans* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$*, à un produit de* X *et de* Y *contenant au moins un facteur* X *et au moins un facteur* Y*, et ce produit est unique à permutation circulaire des facteurs près et à interversion des caractères* X *et* Y *près.*

Démonstration. Comme $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe (d'indice 2) de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$, si deux matrices sont conjuguées via des matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, elles le sont via des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$. D'autre part, toute matrice de déterminant -1 est le produit d'une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ par la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc il suffit de connaître le résultat de l'action de la matrice T par conjugaison sur X et Y pour adapter la proposition 4.3. Or on a $TXT^{-1} = Y$ et $TYT^{-1} = X$, donc conjuguer par T revient à intervertir les lettres X et Y.

4.2 CLASSES D'IDÉAUX ET CLASSES DE CONJUGAISON

Nous allons maintenant établir une correspondance classique en théorie des nombres entre classes d'idéaux d'un ordre dans un corps quadratique et classes de conjugaison de déterminant non nul dans $\mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$. Les résultats s'étendent à des corps de degré supérieur et des matrices de taille supérieure. Cependant, ils s'énoncent plus facilement dans le cas de la taille 2 qui nous intéresse ici.

Un *corps quadratique* est un corps de la forme $\mathbf{Q}[\alpha]$ avec α nombre algébrique de degré 2. L'*anneau des entiers* $\mathcal{O}$ de $\mathbf{Q}[\alpha]$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{Q}[\alpha]$ admettant un polynôme minimal unitaire à coefficients entiers. Un *ordre* de $\mathcal{O}$ est un sous-anneau de $\mathcal{O}$ contenant l'élément 1 et non isomorphe à $\mathbf{Z}$. Un résultat classique affirme que $\mathcal{O}$ est un réseau de $\mathbf{Q}[\alpha]$, c'est-à-dire un $\mathbf{Z}$-module libre de rang 2 dans $\mathbf{Q}[\alpha]$. Un ordre est alors un sous-réseau de $\mathcal{O}$ contenant 1.

EXEMPLE 4.7. Dans le corps $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$, l'anneau des entiers est $\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$. Deux exemples d'ordres sont $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$, qui est d'indice 2, et $\mathbf{Z}[\frac{1+3\sqrt{5}}{2}]$, qui est d'indice 3.

Un *idéal* $\mathcal{I}$ d'un ordre o est un sous-groupe additif de o stable par multiplication par les éléments de o. Si $\{\omega_1, \omega_2\}$ est une $\mathbf{Z}$-base de o, alors tout idéal $\mathcal{I}$ de o admet une $\mathbf{Z}$-base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ où α_1 et α_2 sont deux éléments du réseau engendré par ω_1 et ω_2.

Un idéal $\mathcal{I}$ d'un ordre o est dit *principal* s'il existe un élément a dans $\mathcal{I}$ tel que $\mathcal{I}$ est exactement l'ensemble des multiples de a par des éléments de o. On note alors $\langle a \rangle$ cet idéal. Soit $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ deux idéaux de o. On dit que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$ sont dans la même *classe* s'il existe a, a' non nuls dans o vérifiant $\langle a \rangle \mathcal{I} = \langle a' \rangle \mathcal{I}'$. Il s'agit d'une relation d'équivalence entre idéaux. Par exemple, la classe de l'idéal $\langle 1 \rangle$ est l'ensemble des idéaux principaux de o. Le résultat principal de cette section est le suivant.

PROPOSITION 4.8 (voir [9]). *Soit t et d deux entiers vérifiant $t^2 > 4d > 0$. Soit $P(x)$ le polynôme $x^2 - tx + d$ et soit α une racine de P. Alors il existe une bijection entre les classes de conjugaison sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ de matrices A de $\mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ vérifiant $P(A) = 0$ d'une part, et les classes d'idéaux de l'ordre $\mathbf{Z}[\alpha]$ d'autre part.*

Démonstration. Soit A dans $\mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ vérifiant $P(A) = 0$. Alors A admet α et d/α pour valeurs propres et P pour polynôme caractéristique. Soit v un vecteur propre de A associé à la valeur propre α. Le vecteur v est unique à multiplication par un scalaire près et peut être choisi dans $\mathbf{Z}[\alpha]^2$. On le note alors $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Par définition, on a $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Par conséquent, pour tout polynôme Q à coefficients entiers, on a $Q(A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = Q(\alpha) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Donc $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ est une $\mathbf{Z}$-base d'un certain idéal $\mathcal{I}_v$ de $\mathbf{Z}[\alpha]$.

Si v' est un autre vecteur propre associé à la valeur propre α dont les coordonnées sont dans $\mathbf{Z}[\alpha]$, alors on a $v' = \lambda v$ pour un certain λ dans $\mathbf{Z}[\alpha]$, et donc l'idéal associé est $\langle \lambda \rangle \mathcal{I}_v$. La classe de $\mathcal{I}_v$ ne dépend donc que de A. On note cette classe $\Phi(A)$.

Si A' est conjuguée à A par une matrice M de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$, alors le vecteur $M^{-1}v$ est un vecteur propre associé à la valeur propre α de A'. Comme M est de déterminant ± 1, l'idéal $\mathcal{I}_{M^{-1}v}$ est égal à $\mathcal{I}_v$, mais la base associée est différente. La classe $\Phi(A)$ ne dépend donc que de la classe de conjugaison de A sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$. Donc Φ induit une application bien définie, également

notée Φ dans la suite, de l'ensemble des classes de conjugaison de matrices A vérifiant $P(A) = 0$ vers les classes d'idéaux de l'ordre $\mathbf{Z}[\alpha]$.

Dans l'autre direction, soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbf{Z}[\alpha]$ et $\{\beta_1, \beta_2\}$ une base de $\mathcal{I}$. Comme $\mathcal{I}$ est stable par multiplication par α, il existe une matrice B dans $\mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ vérifiant $B\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$. Par conséquent B admet α pour valeur propre et $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$ pour vecteur propre associé. Comme la trace de B est entière, l'autre valeur propre α' de B est égale à $n - \alpha$, pour un certain n dans $\mathbf{Z}$. On a alors

$$\det B = \alpha(n - \alpha) = n\alpha - \alpha^2 = n\alpha - (t\alpha - d).$$

Or $\det B$ est entier, ce qui entraîne $n - t = 0$, et donc α' est le conjugué de α. Par conséquent, la matrice B vérifie $P(B) = 0$.

Si on choisit une autre base $\{\beta'_1, \beta'_2\}$ de $\mathcal{I}$, alors il existe T dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ vérifiant $\begin{pmatrix}\beta'_1\\ \beta'_2\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$. La matrice associée est alors TBT^{-1}. La classe de conjugaison de B ne dépend donc que de $\mathcal{I}$. On note cette classe de conjugaison $\Psi(\mathcal{I})$.

Si on choisit un autre idéal $\mathcal{I}'$ dans la classe de $\mathcal{I}$, on vérifie également que la matrice associée à toute base de $\mathcal{I}'$ est dans $\Psi(\mathcal{I})$.

On a ainsi construit deux applications Φ et Ψ entre classes de conjugaison dans $\mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ et classes d'idéaux dans des corps quadratiques. La définition de Ψ montre immédiatement que Φ et Ψ sont inverses l'une de l'autre.

La question est maintenant de calculer effectivement la bijection Φ de la proposition 4.8, à savoir, à partir des matrices, de calculer des éléments des classes d'idéaux correspondants. Une notion adaptée à cette fin est la suivante.

DÉFINITION 4.9 (voir [9]). Soit o un ordre dans $\mathbf{Z}[\alpha]$ et $\mathcal{I}$ un idéal de o. Une matrice M dans $\mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ est dite *idéale* pour $\mathcal{I}$ s'il existe une base $\{\omega_1, \omega_2\}$ de o et une base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ de $\mathcal{I}$ telles que $M\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$.

PROPOSITION 4.10. *Soit $P(x) = x^2 - tx + d$ un polynôme unitaire irréductible et α une racine de P. Alors toute matrice A dans $\mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ vérifiant $P(A) = 0$ est de la forme $X_{\mathcal{I}} C_P X_{\mathcal{I}}^{-1}$, où $X_{\mathcal{I}}$ est une matrice idéale pour un idéal $\mathcal{I}$ appartenant à $\Phi(A)$ et où C_P est la matrice compagnon $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -d & t\end{pmatrix}$ du polynôme P. Réciproquement, toute matrice X dans $\mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ vérifiant $X^{-1}AX = C_P$ est la matrice idéale d'un idéal appartenant à $\Phi(A)$.*

Noter que la relation $A = X_{\mathcal{I}} C_P X_{\mathcal{I}}^{-1}$ n'implique pas que la matrice A est conjuguée à C_P dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$, car en général, la matrice $X_{\mathcal{I}}$ n'est pas de déterminant ± 1.

Démonstration. Par définition de α, on a $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ t\alpha - d \end{pmatrix}$, donc, par la démonstration de la proposition 4.8, la matrice C_P est la matrice de $\Psi\left(\langle 1 \rangle\right)$ associée à la base $\{1, \alpha\}$ de l'idéal $\langle 1 \rangle$.

Soit A une matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ annulant P. On lui a associé dans la démonstration de la proposition 4.8 une base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ d'un idéal $\mathcal{I}$ appartenant à $\Phi(A)$. Par définition, la matrice idéale $X_{\mathcal{I}}$ correspondante, relativement aux bases $\{1, \alpha\}$ de $\mathbf{Z}[\alpha]$ et $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ de $\mathcal{I}$, vérifie $X_{\mathcal{I}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. On a donc $X_{\mathcal{I}}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, d'où $C_P X_{\mathcal{I}}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = C_P \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, et donc

$$X_{\mathcal{I}} C_P X_{\mathcal{I}}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha X_{\mathcal{I}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a $A = X_{\mathcal{I}} C_P X_{\mathcal{I}}^{-1}$, comme annoncé.

Pour la réciproque, soit $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ une base de l'idéal correspondant à A. On a alors $A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Soit X vérifiant $X^{-1} A X = C$. On a donc $XCX^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, d'où $CX^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha X^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Comme α est une valeur propre simple de C, le vecteur $X^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ est propre, et donc il existe p, q dans $\mathbf{Q}(\alpha)$ vérifiant $X^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{p}{q} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, soit $X^{-1} \begin{pmatrix} q\alpha_1 \\ q\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ p\alpha \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} q\alpha_1 \\ q\alpha_2 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} p \\ p\alpha \end{pmatrix}$. Par conséquent, X est la matrice idéale de l'idéal $\langle q\alpha_1, q\alpha_2 \rangle$, lequel appartient à la classe $\Phi(A)$.

La démonstration de la proposition 4.10 montre en particulier que la classe des idéaux principaux de $\mathbf{Z}[\alpha]$ correspond à la classe de matrices contenant la matrice compagnon C_P du polynôme caractéristique P de α. Dans le cas $P(x) = x^2 - tx + 1$, la classe des idéaux principaux correspond également à la classe de matrices engendrée par la matrice $X^{t-2}Y$, puisque $X^{t-2}Y$ est conjuguée à C_P par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, qui est dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$.

EXEMPLE 4.11. Revenons aux matrices de trace 10 et de déterminant 1. Le polynôme minimal correspondant est $P(x) = x^2 - 10x + 1$, dont les racines sont $5 + 2\sqrt{6}$ et $5 - 2\sqrt{6}$. Le corps quadratique associé est $\mathbf{Q}[\sqrt{6}]$, dont l'anneau des entiers est $\mathbf{Z}[\sqrt{6}]$; en revanche, nous nous intéressons ici à l'ordre $\mathbf{Z}[2\sqrt{6}]$ et à ses classes d'idéaux. Nous avons vu dans l'exemple 4.5 que toute matrice de

trace 10 et de déterminant 1 est conjuguée à l'un des trois produits X^8Y, X^4Y^2 ou X^2YXY, c'est-à-dire à l'une des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. Par la propriété 4.8, il y a donc trois classes d'idéaux dans l'ordre $\mathbf{Z}[2\sqrt{6}]$.

On vient de voir que la classe de la matrice $X^8Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ correspond à la classe des idéaux principaux, donc $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ correspondent aux deux classes d'idéaux non principaux. Comme les matrices conjuguant ces deux éléments à C_P sont $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et que la base de $\mathbf{Z}[2\sqrt{6}]$ associée à C_P est $\{1, \alpha\} = \{1, 5 + 2\sqrt{6}\}$, on en déduit au passage que les idéaux $\langle 2, 4 + 2\sqrt{6} \rangle$ et $\langle 3, 4 + 2\sqrt{6} \rangle$ sont représentants des deux classes d'idéaux non principaux de $\mathbf{Z}[2\sqrt{6}]$.

4.3 LA SURFACE MODULAIRE

Dans [24] et [25], É. Ghys démontre, et illustre visuellement, que les nœuds de Lorenz apparaissent comme orbites périodiques du flot modulaire défini sur la variété $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$. Afin d'expliquer ce résultat, nous allons d'abord donner plusieurs descriptions de la variété modulaire, et décrire le flot en termes de réseaux du plan.

Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ agit sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ par homographie :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \ z = \frac{az + b}{cz + d},$$

l'action étant transitive et fidèle. Un domaine fondamental $\mathcal{D}$ pour cette action est donné par

$$\{z \in \mathbf{C} \mid \Im z > 0, -1/2 \leqslant \Re z \leqslant 1/2, |z| \geqslant 1\}.$$

La restriction de l'action à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ est discrète, elle n'est pas libre car certains points, en fait les orbites des points i et j, ont des stabilisateurs non triviaux. Le quotient $\mathcal{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ est alors un orbifold, c'est-à-dire une surface avec deux points singuliers (correspondant aux orbites des points i et j) au voisinage desquels l'angle total n'est pas 2π mais respectivement $2\pi/2$ et $2\pi/3$. Cet orbifold, qui n'est donc pas une surface à proprement parler, est traditionnellement appelé *surface modulaire* et noté Σ_{mod} dans la suite. Il s'identifie naturellement à $\mathcal{D}$ modulo les recollements $-\frac{1}{2} + iy \sim \frac{1}{2} + iy$ pour $y \geqslant \sqrt{3}/2$ et $e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)} \sim e^{i(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$ pour $0 < \alpha \leqslant \pi/12$. Il hérite de la métrique hyperbolique de $\mathcal{H}$.

Comme le jacobien d'une homographie vaut toujours 1, l'action s'étend au fibré unitaire tangent $T^1\mathcal{H} \simeq \mathcal{H} \times \mathbf{S}^1$. Elle devient alors transitive et libre, par conséquent, les variétés $T^1\mathcal{H}$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ sont isomorphes. Comme l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ sur $T^1\mathcal{H}$ est discrète, les variétés quotients $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ et $T^1\mathcal{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}) = T^1\Sigma_{mod}$ sont isomorphes. Le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma_{mod}$ à la surface modulaire est alors une variété de dimension 3, naturellement munie d'une métrique riemannienne g. Il s'identifie de manière canonique à $\mathcal{D} \times \mathbf{S}^1$ modulo les recollements sur les bords

$(-\frac{1}{2}+iy,\theta) \sim (\frac{1}{2}+iy,\theta)$ d'une part, et $(e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)},\theta-\alpha) \sim (e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)},\pi+\theta+\alpha)$ d'autre part, qui se prolongent aux coins en $(i,\theta) \sim (i,\theta+\pi)$ et $(j,\theta) \sim (j,\theta+\frac{2\pi}{3})$.

Un réseau du plan est dit *de covolume* 1 s'il admet une maille d'aire 1. Un tel réseau est déterminé par les coordonnées des vecteurs d'une base, donc par une matrice A de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. De plus, changer la base (ordonnée) du réseau revient à multiplier à gauche A par un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. On obtient ainsi un isomorphisme h entre l'espace des réseaux de covolume 1 et la variété $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$. Ainsi, les trois variétés $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}), T^1\Sigma_{mod}$ et l'espace des réseaux de covolume 1 sont canoniquement isomorphes. Détaillons le lien entre les deux dernières (voir également la figure 4.2).

Soit Λ un réseau de covolume 1 dans le plan, identifié à $\mathbf{C}$. Nous allons lui associer un point $f(\Lambda)$ de $T^1\Sigma_{mod}$, c'est-à-dire un point de Σ_{mod} et un vecteur unitaire tangent en ce point. L'idée est de passer par un réseau semblable $\rho e^{i\theta}\Lambda$ ayant une base de la forme $\{1,z\}$, où z est un point de $\mathcal{D}$.

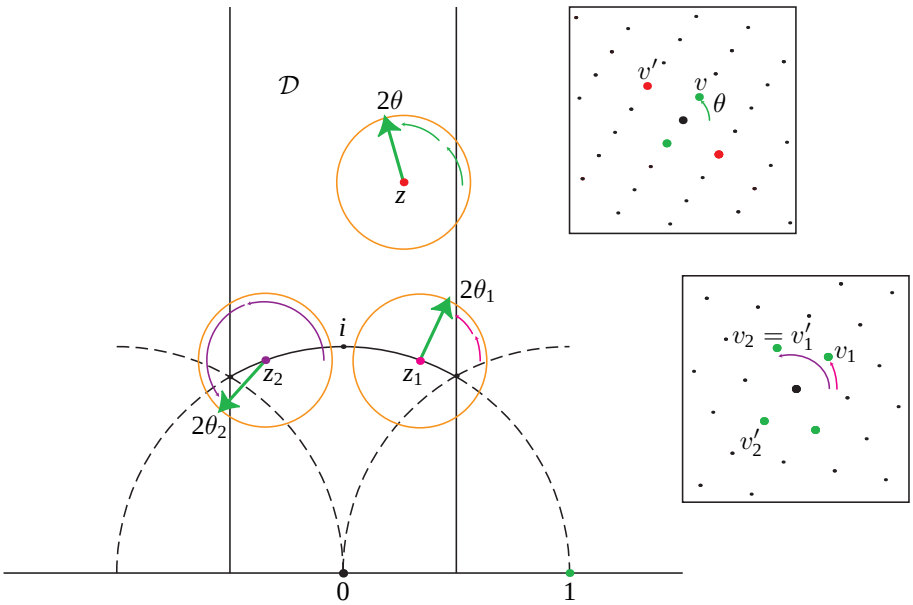


FIGURE 4.2

Comment associer un point de $T^1\Sigma_{mod}$ à un réseau de covolume 1. Les deux vecteurs tangents représentés en z_1 et z_2 correspondent au même réseau, représenté à droite, et sont donc identifiés.

Supposons d'abord que Λ n'a que deux plus courts vecteurs que nous nommons v et $-v$. Supposons ensuite que Λ n'a que deux plus courts vecteurs non colinéaires à v, nous les nommons v' et $-v'$ de sorte que la base (v,v') soit directe. Il existe une unique simillitude directe envoyant v en 1. On

désigne par z l'image de v' et par θ l'angle de la simillitude. Remarquons que, si θ dépend du choix de v que nous avons fait, ni z, ni 2θ n'en dépendent. Il se trouve que z est à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$, et on définit alors sans ambiguïté $f(\Lambda)$ par la formule $f(\Lambda) = (z, 2\theta)$.

Dans la construction précédente, s'il y a deux choix possibles pour v', alors ces options fournissent deux points z de $\mathcal{D}$ de la forme $-\frac{1}{2}+iy$ et $\frac{1}{2}+iy$, qui correspondent au même point de Σ_{mod}. Comme la simillitude ne dépend pas du choix de v', ces deux choix possibles de z dans $\mathcal{D}$ mènent au même angle θ, et donc au même point de $T^1\Sigma_{mod}$. On peut alors définir $f\Lambda)$ par la même formule sans ambiguïté.

S'il y a plus deux choix possibles pour v, alors soit Λ est à maille carrée, soit à maille triangulaire équilatérale, soit à maille triangulaire isocèle non équilatérale. Dans le dernier cas (illutré sur la figure 4.2), il y a quatre choix possibles pour v, menant à deux points z de $\mathcal{D}$ de la forme $e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$ et $e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$, qui correspondent encore au même point de Σ_{mod}. Les angles des simillitudes correspondantes diffèrent de $\frac{\pi}{2}+\alpha$, dont le double est exactement la différence dûe au recollement de $\mathcal{D}$. Par conséquent, on peut encore définir $f(\Lambda)$ sans ambiguïté.

De même , dans le cas d'une maille carrée, le point z associé est le point i, et les différents choix du plus court vecteur v sont compensés par l'identification $(i,\theta) \sim (i, \theta+\pi)$. Et dans le cas d'une maille triangulaire équilatérale, les différents choix possibles, à la fois pour v et pour v' sont compensés par les identifications $(j,\theta) \sim (j, \theta+\frac{2\pi}{3}) \sim (j+1, \theta)$. On a alors

PROPOSITION 4.12. *L'application f établit un isomorphime entre l'espace des réseaux de covolume* 1 *et le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma_{mod}$.*

4.4 FLOT MODULAIRE, NŒUDS MODULAIRES ET CLASSES DE CONJUGAISON

Soit Λ un réseau de $\mathbf{R}^2$ de covolume 1 et (b_1, b_2) une base de Λ. Pour tout t, les vecteurs $b_1^t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} b_1$ et $b_2^t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} b_2$ forment encore une base d'un réseau de covolume 1, lequel ne dépend que de Λ. On définit $\phi^t(\Lambda)$ comme le réseau engendré par les vecteurs b_1^t et b_2^t. Le flot ϕ est appelé *flot modulaire* sur l'espace des réseaux de covolume 1. Par la proposition 4.12, il induit un flot sur la variété $T^1\Sigma_{mod}$. Il se trouve que ce dernier est le flot géodésique associé à la métrique g sur $T^1\Sigma_{mod}$.

Si les vecteurs $b_1^{t_0}$ et $b_2^{t_0}$ appartiennent au réseau Λ et sont minimaux, alors on a $\phi^{t_0}(\Lambda) = \Lambda$ et l'application $t \mapsto \phi^t(\Lambda)$ restreinte à l'intervalle $[0, t_0]$ définit un lacet fermé dans $T^1\Sigma_{mod}$, et donc un nœud dans ce même espace. Le résultat suivant décrit les circonstances où un tel événement se produit et annonce la correspondance de Ghys.

PROPOSITION 4.13. *Les orbites périodiques du flot modulaire sont indexées par les classes de conjugaison de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$.

Schéma de la démonstration. Comme le flot modulaire coïncide avec le flot géodésique sur le quotient de $\mathcal{H}$ par $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$, une orbite modulaire périodique provient d'une géodésique λ de $\mathcal{H}$ qui est invariante sous l'action d'un certain élément hyperbolique A de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$. Quand on passe au quotient $\mathcal{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$, cette géodésique λ devient invariante sous l'action de toute la classe de conjugaison de A dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Réciproquement, les seuls éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ fixant λ sont les conjuguées des puissances de A. Une orbite modulaire périodique est donc naturellement associée à une classe de conjugaison dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, à savoir la classe de A dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, ou de sa plus petite racine si A n'est pas primitive. Or le corollaire 4.4 fournit une bijection entre les mots de Lyndon et les classes de conjugaison de matrices primitives hyperboliques.

COROLLAIRE 4.14. *Les orbites périodiques du flot modulaire sont indexées par les mots de Lyndon.*

On a maintenant obtenu de manière naturelle des nœuds sur le fibré unitaire tangent à la surface modulaire. Or celui-ci se trouve être isomorphe à la sphère $\mathbf{S}^3$ privée d'un nœud de trèfle, via aux coordonnées suivantes, introduites par Gauss, pour les réseaux de $\mathbf{R}^2$. Identifions $\mathbf{R}^2$ avec $\mathbf{C}$, et posons

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{z\in\Lambda\setminus\{0\}} z^{-4} \quad \text{et} \quad g_3(\Lambda) = 140 \sum_{z\in\Lambda\setminus\{0\}} z^{-6}.$$

Les sommes g_2 et g_3 convergent et il se trouve que l'application $\Lambda \mapsto (g_2(\Lambda), g_3(\Lambda))$ est injective, c'est-à-dire que le réseau Λ est entièrement déterminé par les valeurs des fonctions g_2 et g_3. De plus, la non-dégénérescence de Λ correspond à la condition $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Enfin, le fait que Λ est de covolume 1 impose une condition de renormalisation sur $g_2(\Lambda)$ et $g_3(\Lambda)$. Quitte à changer de renormalisation, on peut supposer

$$|g_2(\Lambda)|^2 + |g_3(\Lambda)|^2 = 1. \tag{4.1}$$

Cette dernière condition permet d'identifier l'image de (g_2, g_3) à une partie de la sphère $\mathbf{S}^3$, qui est le complémentaire d'un nœud de trèfle, noté , dans $\mathbf{S}^3$. On a ainsi un isomorphisme entre $\mathbf{S}^3 \setminus$ et la variété modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$, qui nous permet de plonger les nœuds modulaires de manière naturelle dans $\mathbf{S}^3$ [22]).

DÉFINITION 4.15. Un nœud est dit *modulaire* s'il peut être réalisé comme orbite périodique du flot modulaire sur l'espace des réseaux de covolume 1, plongé dans $\mathbf{S}^3$ via l'application (g_2, g_3).

4.5 NŒUDS MODULAIRES ET NŒUDS DE LORENZ

À ce point, nous avons introduits deux familles de nœuds, les nœuds de Lorenz et les nœuds modulaires, dont les éléments sont naturellement en bijection avec les mots de Lyndon. Le résultat de Ghys affirme que ces familles coïncident.

[22]) Consulter [39, 14, 11, p. 83] pour des preuves plus visuelles détaillant la topologie de $T^1\Sigma_{mod}$.

THÉORÈME 4.16 ([24, 25]). *Plongeons $T^1\Sigma_{mod}$ dans $\mathbf{S}^3$ à l'aide de l'application $(g_2, g_3) \circ f^{-1}$. Alors, pour tout mot de Lyndon w, le nœud modulaire et le nœud de Lorenz associés à w coïncident.*

Schéma de la démonstration. L'idée principale est de déformer continûment la métrique sur Σ_{mod} et $T^1\Sigma_{mod}$ pour amener tout le flot géodésique au voisinage du segment reliant les images des points i et j de $\mathcal{H}$. En contractant la direction stable du flot, les orbites viennent alors s'accumuler sur un patron, qui se trouve être le patron géométrique de Lorenz.

Pour plus de détails, nous renvoyons à [24], et à [25] où l'on trouvera des représentations animées très spectaculaires.

EXEMPLE 4.17. Revenons au cas des idéaux de $\mathbf{Z}[2\sqrt{6}]$. On a vu qu'il y a trois classes d'idéaux, dont trois représentants sont $\langle 1, 5+2\sqrt{6}\rangle$, $\langle 2, 4+2\sqrt{6}\rangle$ et $\langle 3, 4+2\sqrt{6}\rangle$. Les trois nœuds modulaires associés sont les nœuds correspondants aux mots X^8Y, X^4Y^2 et X^2YXY. Notre étude des nœuds de Lorenz et la correspondance de Ghys montrent que ceux-ci sont respectivement un nœud trivial, un nœud trivial, et un nœud de trèfle.

4.6 NŒUDS DE LORENZ ET CLASSES D'IDÉAUX

On a maintenant une application naturelle associant à une classe d'idéaux dans un ordre d'un corps quadratique une unique classe de mots en X et Y, définis à permutation circulaire des lettres et à échange des caractères X et Y près. Or on ne change pas un nœud de Lorenz en échangeant tous les caractères L et R dans le mot de Lyndon associé : cela correspond à une rotation autour de l'axe passant par le centre du patron et échangeant les deux points critiques, ou encore à une rotation de $180°$ de la tresse de Lorenz autour d'un axe vertical. On a donc une bijection entre classes d'idéaux dans certains corps quadratiques et nœuds de Lorenz, modulo symétrie du patron. La question est alors de savoir si l'existence de cette bijection a des conséquences intéressantes.

Celles-ci pourraient venir de la structure de groupe qui existe naturellement sur les classes d'idéaux dans un corps quadratique. Précisément, soit $\mathbf{Q}[\alpha]$ un corps quadratique, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers, o un ordre d'indice n dans $\mathcal{O}$, et $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ deux idéaux de o. Alors la classe de l'idéal $\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ dans leurs classes respectives. Par conséquent, l'opération de multiplication est bien définie sur les classes d'idéaux. On vérifie facilement que la classe des idéaux principaux est un élément neutre pour cette opération, donc l'ensemble des classes d'idéaux forme un monoïde. De plus, toute classe contenant au moins un idéal $\mathcal{I}$ dont la norme $N(\mathcal{I})$ est première avec l'indice n admet un inverse pour la multiplication, c'est-à-dire qu'il existe $\mathcal{I}'$ tel que $\mathcal{I}\mathcal{I}'$ est un idéal principal, voir [10, p. 122]. L'ensemble de ces classes est stable par produit, par conséquent l'ensemble des classes contenant au moins un idéal $\mathcal{I}$ dont la norme est première avec n forme un groupe, appelé *groupe des classes* de l'ordre o.

EXEMPLE 4.18. Revenons une dernière fois aux idéaux de $\mathbf{Z}[2\sqrt{6}]$. L'idéal $\langle 1, 5+2\sqrt{6}\rangle$ est principal, c'est donc un représentant de la classe des idéaux principaux. Pour ce qui est de $\langle 2, 4+2\sqrt{6}\rangle$, on vérifie facilement que tout élément de sa classe a une norme qui est multiple de 2. Or l'indice de $\mathbf{Z}[2\sqrt{6}]$ dans $\mathbf{Z}[\sqrt{6}]$ est 2, donc la classe de $\langle 2, 4+2\sqrt{6}\rangle$ n'appartient pas au groupe des classes de $\mathbf{Z}[2\sqrt{6}]$. De fait, on vérifie l'égalité $\langle 2, 4+2\sqrt{6}\rangle^2 = \langle 2\rangle \langle 2, 4+2\sqrt{6}\rangle$, donc, si cette classe était dans le groupe des classes, elle en serait l'élément neutre. Or cette position est déjà occupée par la classe des idéaux principaux. Quant à $\langle 3, 4+2\sqrt{6}\rangle$, sa norme est 3, qui est premier à 2, donc sa classe appartient au groupe des classes. Le groupe des classes de $\mathbf{Z}[2\sqrt{6}]$ est donc $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Notons que, dans la correspondance de Ghys, le nœud associé à l'élément neutre est le nœud trivial et le nœud associé à l'autre élément est le nœud de trèfle.

Pour un autre exemple, considérons les matrices de trace 22 et de déterminant 1. L'ordre associé est $\mathbf{Z}[2\sqrt{30}]$, qui compte six classes d'idéaux, correspondant aux matrices $X^{20}Y$, $X^{10}Y^2$, X^5Y^4, X^6YXY, X^4YX^2Y et $X^2YX^2Y^2$. Les nœuds associés sont le nœud trivial pour les trois premières classes, le nœud de trèfle pour les deux suivantes, et le nœud torique $T(5,2)$ pour la dernière. Le groupe des classes de $\mathbf{Z}[2\sqrt{30}]$ a quatre éléments, car les classes correspondant aux mots $X^{10}Y^2$ et X^4YX^2Y ne sont pas inversibles. Ce groupe est le groupe de Klein $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. Vis-à-vis de la correspondance de Ghys, l'élément neutre a pour nœud associé le nœud trivial, et les trois autres éléments du groupe sont associés respectivement au nœud trivial, au nœud de trèfle et au nœud $T(5,2)$.

4.7 DEUX RÉSULTATS NOUVEAUX

Comme on a associé à chaque classe d'idéaux un nœud de manière canonique, la question se pose naturellement de savoir si la multiplication du groupe des classes d'idéaux a un pendant du côté des nœuds, c'est-à-dire si on peut définir directement une opération de multiplication des nœuds et, par exemple, mieux comprendre les observations de l'exemple 4.18. Les seules réponses connues à ce jour, très partielles, sont les résultats suivants, qui semblent nouveaux.

Le premier résultat décrit complètement le sous-groupe du groupe des classes d'idéaux formé par les classes associées au nœud trivial. On note $\wedge$ l'opération de pgcd de deux entiers et $\vee$ leur ppcm.

THÉORÈME 4.19. *Soit $t > 2$ un entier, α une racine du polynôme $x^2 - tx + 1$, et G le groupe des classes associé à l'ordre $\mathbf{Z}[\alpha]$. L'ensemble des éléments de G associés au nœud trivial forme un sous-groupe G_0 de G qui est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{d-1}$ où d est le nombre de diviseurs premiers de $t-2$. Les matrices correspondant aux éléments de G_0 sont de la forme $X^mY^{m'}$ avec $mm' = t-2$ et $m \wedge m' = 1$. Exprimée en termes de matrices, la multiplication de G_0 est donnée par la formule*

$$X^{m_1}Y^{(t-2)/m_1} \cdot X^{m_2}Y^{(t-2)/m_2} = X^{m_3}Y^{(t-2)/m_3}, \quad \textit{avec } m_3 = \frac{m_1 \vee m_2}{m_1 \wedge m_2}.$$

Démonstration. Le nœud trivial étant le seul nœud obtenu comme clôture d'une tresse à un brin, c'est le seul nœud de Lorenz de pas 1. Par conséquent, les orbites triviales du flot de Lorenz sont exactement celles qui sont associées aux mots de la forme $X^mY^{m'}$.

Comme inverser dans le groupe des classes revient à transposer la matrice, les classes correspondant aux mots $X^m Y^{m'}$ et $X^{m'} Y^m$ sont inverses l'une de l'autre. Or ces classes coïncident, puisqu'au niveau des idéaux l'échange des caractères X et Y et la permutation circulaire des lettres ne modifient pas la classe. Par conséquent, ces classes sont d'ordre 2 dans le groupe des classes G.

L'ordre associé aux matrices de trace t est $\mathbf{Z}[\alpha]$, où $\alpha = \frac{-t+\sqrt{t^2-4}}{2}$, et l'idéal associé à la matrice $X^m Y^{m'}$, c'est-à-dire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & m \\ m' & 1+mm' \end{pmatrix}$, est $\langle m, \alpha - 1\rangle$. D'après [8, p. 220], la forme quadratique associée est $mx^2 + mm'xy + m'y^2$, et, d'après la proposition 5.2.5 de [8], la condition pour qu'un idéal soit inversible est que les coefficients de la forme quadratique associée soient premiers entre eux, soit, dans le cas présent, $m \wedge m' = 1$. Les nœuds triviaux apparaissant dans le groupe des classes correspondent donc aux mots de la forme $X^m Y^{m'}$, avec $mm' = t-2$ et $m \wedge m' = 1$.

Il reste à vérifier la stabilité par produit des éléments associés à des nœuds triviaux, et la forme explicite du produit annoncée. Calculant au niveau des idéaux, on trouve

$$\begin{aligned}
&\langle m_1, \alpha - 1\rangle \cdot \langle m_2, \alpha - 1\rangle \\
&\qquad = \left\langle m_1 m_2, m_1(\alpha-1), m_2(\alpha-1), \alpha^2 - 2\alpha + 1\right\rangle \\
&\qquad = \langle (m_1 \wedge m_2)(m_1 \vee m_2), (m_1 \wedge m_2)(\alpha - 1), (t-2)\alpha\rangle \\
&\qquad = (m_1 \wedge m_2)\left\langle m_1 \vee m_2, \alpha - 1, \frac{t-2}{m_1 \wedge m_2}\alpha\right\rangle.
\end{aligned}$$

Les diviseurs de $t-2$ se divisent en quatre catégories : ceux qui ne divisent ni m_1 ni m_2 dont nous noterons le pgcd p_{--}, ceux qui divisent m_1 et pas m_2 dont nous noterons le pgcd p_{+-}, ceux qui divisent m_2 et pas m_1 dont nous noterons le pgcd p_{-+}, et ceux qui divisent m_1 et m_2 dont nous noterons le pgcd p_{++}. On a alors

$$m_1 \vee m_2 = p_{-+}p_{+-}p_{++} \quad \text{et} \quad \frac{t-2}{m_1 \wedge m_2} = p_{--}p_{-+}p_{+-},$$

d'où $(m_1 \vee m_2) \wedge \dfrac{t-2}{m_1 \wedge m_2} = p_{-+}p_{+-} = \dfrac{m_1 \wedge m_2}{m_1 \vee m_2}$. On en déduit

$$(m_1 \wedge m_2)\left\langle m_1 \vee m_2, \alpha - 1, \frac{t-2}{m_1 \wedge m_2}\alpha\right\rangle = (m_1 \wedge m_2)\left\langle \frac{m_1 \wedge m_2}{m_1 \vee m_2}, \alpha - 1\right\rangle.$$

Ce dernier idéal est dans la même classe que $\left\langle \dfrac{m_1 \wedge m_2}{m_1 \vee m_2}, \alpha - 1\right\rangle$, dont la matrice idéale est

$$X^{\frac{m_1 \vee m_2}{m_1 \wedge m_2}} Y^{(t-2)/\frac{m_1 \vee m_2}{m_1 \wedge m_2}}.$$

Notre seconde observation est un résultat de symétrie très simple. Si w est un mot (de Lyndon), on appelle *miroir* de w le mot obtenu en renversant l'ordre des lettres de w.

PROPOSITION 4.20. *Pour tout mot de Lyndon w, les nœuds de Lorenz correspondants à w et à son miroir sont les mêmes.*

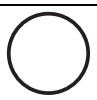
Démonstration. Transposé en termes de nœuds modulaires, l'énoncé devient : les nœuds sur le fibré unitaire tangent à la surface modulaire $T^1\Sigma_{mod}$ qui correspondent au parcours dans un sens et dans l'autre d'une géodésique périodique de la surface modulaire Σ_{mod} sont les mêmes. Or, vis-à-vis de la métrique riemannienne g introduite au début de la section, l'involution de $T^1\Sigma_{mod}$ qui associe au vecteur tangent v de $T^1_x\Sigma_{mod}$ le vecteur $-v$ de $T^1_x\Sigma_{mod}$ est une isométrie de $T^1\Sigma_{mod}$ [23]), qui préserve l'orientation. Par conséquent, elle envoie tout lacet sur un lacet isotope, et les nœuds associés coïncident.

Ce résultat montre l'intérêt de la correspondance de Ghys et du lien entre nœuds de Lorenz et nœuds modulaires. Sur le patron de Lorenz, une seule involution naturelle apparaît, à savoir la symétrie par rapport à l'axe du patron, qui correspond à la symétrie par rapport à la première diagonale sur les diagrammes de Young associés. La proposition 4.20 révèle une autre symétrie sur les orbites du flot de Lorenz, naturelle dans le langage du fibré tangent $T^1\Sigma_{mod}$ à la surface modulaire, mais cachée sur le patron de Lorenz. Par exemple, elle montre que les orbites associées aux mots de Lyndon *LLRRLRRR* et *LLRRRLRR*, correspondant aux tableaux complétés et , sont isotopes.

EXEMPLE 4.21. Comme dernière illustration, considérons les nœuds associés à des matrices de trace 40. L'ordre associé est $\mathbf{Z}[-20+3\sqrt{11}]$. Un logiciel de calcul algébrique, comme par exemple PARI/GP [24]), fournit la structure du groupe des classes associé, ici $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, et des représentants des classes associées à chaque élément. En termes de matrices, les huit éléments du groupe des classes d'idéaux de l'ordre $\mathbf{Z}[-20+3\sqrt{11}]$ sont les suivants.

$G=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$(\cdot,\bar{0})$	$(\cdot,\bar{1})$	$(\cdot,\bar{2})$	$(\cdot,\bar{3})$
$(\bar{0},\cdot)$	$X^{38}Y$	$X^3Y^3X^2Y$	$XYXY^{12}$	$X^3YX^2Y^3$
$(\bar{1},\cdot)$	$X^{19}Y^2$	X^2Y^7XY	X^5YX^4Y	X^2YXY^7

Traduit en termes de nœuds de Lorenz via la correspondance de Ghys, ce tableau devient :

$G=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$(\cdot,\bar{0})$	$(\cdot,\bar{1})$	$(\cdot,\bar{2})$	$(\cdot,\bar{3})$
$(\bar{0},\cdot)$				
$(\bar{1},\cdot)$				

[23]) En fait, c'est même une rotation d'angle π par rapport à l'axe constitué des vecteurs tangents au point i.
[24]) `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`

On peut y voir illustrés les résultats des théorèmes 4.19 et 4.20. D'abord, comme 40 admet deux diviseurs premiers distincts, les nœuds triviaux forment un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, qui correspond à la colonne $(\cdot, \overline{0})$ du tableau. Par ailleurs, les colonnes $(\cdot, \overline{1})$ et $(\cdot, \overline{3})$ correspondent à des éléments opposés dans le groupe, et on voit que, sur chaque ligne, les nœuds correspondants sont en effet les mêmes.

5. QUELQUES QUESTIONS OUVERTES

Nous terminerons ce tour d'horizon des nœuds de Lorenz par quelques-unes des multiples questions ouvertes les concernant.

5.1 CODAGE PAR LES MOTS DE LYNDON ET LES DIAGRAMMES DE YOUNG

On a vu dans la section 1 comment tous les nœuds de Lorenz peuvent être codés par des mots de Lyndon, ou, de façon presque équivalente, par des diagrammes de Young. Ces codages ne sont pas injectifs : même minimaux, deux mots de Lyndon distincts peuvent coder le même nœud de Lorenz et, de même, deux diagrammes de Young (non complétés) distincts peuvent coder le même nœud de Lorenz. Reconnaître quand deux mots de Lyndon, ou deux diagrammes de Young, codent le même nœud de Lorenz est une question pour le moment difficile. On a vu dans le corollaire 2.24 que le genre du nœud détermine le nombre de cases du diagramme de Young, mais bien sûr pas le diagramme complet. Par exemple, on vérifie facilement que la tresse de Birman-Williams associée au deux diagrammes de Young $[3, 3, 2]$ et $[4, 4]$ est la même, et donc les nœuds de Lorenz associés coïncident.

QUESTION 2. *Existe-t-il un algorithme permettant de déterminer quand deux diagrammes de Young codent le même nœud de Lorenz ?*

La section 3.5 et l'article [4] donnent une reformulation plus générale.

QUESTION 3. *Existe-t-il un algorithme permettant de déterminer quand deux T-nœuds sont isotopes ?*

Une première étape pourrait consister à démontrer la propriété suivante, qui a été vérifiée sur un grand nombre d'exemples.

CONJECTURE 5.1 ([4]). *Soit b et b' deux tresses de Birman-Williams associées à deux orbites périodiques isotopes du flot de Lorenz. Alors b et b' sont conjuguées dans B_t, où t est le pas commun de ces orbites.*

5.2 Nœuds satellites

Avec le théorème 2.11, on a obtenu une description complète de ceux des nœuds de Lorenz qui sont satellites d'un nœud de Lorenz. Par contre, on n'a pas de caractérisation générale de tous les nœuds de Lorenz qui sont des nœuds satellites. Il semblerait en fait que seule la situation du théorème 2.11 soit possible.

Conjecture 5.2 (H. Morton, communication personnelle). *Tout nœud de Lorenz qui est un nœud satellite est un câblage sur un nœud de Lorenz, selon le schéma de la proposition 2.7.*

Un important résultat de W. Thurston [48] montre que tout nœud qui n'est ni torique, ni satellite est hyperbolique. Notons qu'une solution positive à la conjecture 5.2 permettrait de déterminer précisément quels nœuds de Lorenz sont des nœuds satellites, et, de là, par complément, quels nœuds de Lorenz sont hyperboliques.

Dans la lignée de la question 2, il est également naturel de chercher à reconnaître le type d'un nœud de Lorenz à partir d'un diagramme de Young le codant.

Question 4. *Existe-t-il un algorithme qui, à partir d'un diagramme de Young codant un nœud de Lorenz K, détermine le type du nœud torique associé si K est torique, et la suite des cablâges successifs si K est satellite ?*

5.3 Invariants polynomiaux et volume hyperbolique

Il semble que les polynômes d'Alexander ou de Jones des nœuds de Lorenz soient particulièrement simples. Les simulations numériques de [13] montrent que les coefficients du polynôme d'Alexander d'un nœud de Lorenz donné comme clôture d'une tresse, tout comme ceux de leurs polynômes de Jones, sont très petits comparés à ceux de la clôture d'une tresse aléatoire de même taille.

Question 5. *La petitesse observée des coefficients des polynômes d'Alexander, de Jones, et HOMFLY associés aux nœuds de Lorenz est-elle un phénomène général, et peut-on l'expliquer ? Comment se répartissent les racines des polynômes d'Alexander et de Jones dans le plan complexe ?*

Une réponse partielle pour la répartition des racines du polynôme d'Alexander est donnée dans [14], mais rien n'est dit sur les coefficients. Dans [4], J. Birman et I. Kofman ont calculé les volumes hyperboliques des complémentaires d'un certain nombre de nœuds de Lorenz hyperboliques. Comme dans le cas des coefficients des invariants polynomiaux, il apparaît que ce volume prend des valeurs étonnamment petites.

Question 6. *Peut-on borner supérieurement le volume hyperbolique des nœuds de Lorenz qui sont hyperboliques en fonction de la taille d'une tresse de Birman–Williams les représentant ?*

Par ailleurs, il se trouve que, parmi les cent nœuds hyperboliques de plus petit volume, plus de la moitié sont des nœuds de Lorenz. Une explication de cette observation étonnante serait bienvenue.

5.4 CORRESPONDANCE DE GHYS ET NŒUDS MODULAIRES

Le lien entre les nœuds de Lorenz et l'arithmétique par le biais du groupe des classes d'idéaux associé à un ordre sur un corps quadratique est fascinant, mais encore très incomplètement compris. Les propositions 4.19 et 4.20 semblent n'être que les parties émergées d'un analogue du groupe des classes qui serait défini sur les nœuds modulaires, donc, de façon équivalente, sur les nœuds de Lorenz.

QUESTION 7. *Peut-on définir directement au niveau des nœuds modulaires, ou des nœuds de Lorenz, une multiplication (dépendant de α) qui induise la structure de groupe associée sur les nœuds correspondant au groupe de classes d'idéaux de $\mathbf{Z}[\alpha]$?*

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. W. ALEXANDER, *A lemma on systems of knotted curves*, Proc. Amer. Sci. U. S. A. **9** (1923), 93–95.

[2] R. BEDIENT, *Classifying 3-trip Lorenz knots*, Topology Appl. **20** (1985), 89–96.

[3] J. BERSTEL, D. PERRIN, *The origins of combinatorics on words*, European J. Combinatorics **28** (2007), 996–1022.

[4] J. S. BIRMAN, I. KOFMAN, *A new twist on Lorenz knots*, `arXiv : 0707.4331v3 [math.GT]`.

[5] J. S. BIRMAN, R. F. WILLIAMS, *Knotted periodic orbits in dynamical systems–I : Lorenz's Equations* Topology **22** (1) (1983), 47–82. (erratum at `http ://www.math.columbia.edu/ jb/bw-KPO-I-erratum.pdf`)

[6] G. BURDE, H. ZIESCHANG, *Knots*, de Gruyter Studies in Mathematics 5, Walter de Gruyter & Co, 1985.

[7] K. CHEN, R. FOX, R. LYNDON, *Free differential calculus IV : The quotient groups of the lower central series*, Annals of Math. **58** (1958), 81–95.

[8] H. COHEN, *A Course in computational algebraic number theory*, GTM 138, Springer Verlag, 1993.

[9] H. COHN, *A classical invitation to algebraic numbers and class fields*, Universitext, Springer Verlag, 1978.

[10] H. COHN, *Advanced number theory*, Dover Publications, 1980.

[11] F. DAL'BO, F. PAULIN, G. COURTOIS, *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques*, Journées mathématiques X-UPS 2007.

[12] PI. DEHORNOY, *Atlas of Lorenz knots*, `http ://www.eleves.ens.fr/home/dehornoy/atlaslorenz.txt`

[13] PI. DEHORNOY, *Nœuds de Lorenz*, Mémoire de M2R, `http ://www.eleves.ens.fr/home/dehornoy/maths/Lorenz4.pdf`

[14] PI. DEHORNOY, *Invariants topologiques des orbites périodiques d'un champ de vecteurs*, thèse en préparation.

[15] D. EISENBUD, W. NEUMAN, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Ann. Math. Studies 110, Princeton University Press, 1985.

[16] E. A. EL RIFAI, *Positive braids and Lorenz links*, PhD. Thesis, Univ. Liverpool, 1988.

[17] E. A. EL RIFAI, *Necessary and sufficient condition for Lorenz knots to be closed under satellite construction*, Chaos, Solitons and Fractals **10** (1) (1999), 137–146.

[18] J. FRANKS, R. F. WILLIAMS, *Braids and the Jones polynomial*, Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1) (1987), 97–108.

[19] D. GABAI, *The Murasugi sum is a natural geometric operation*, Cont. Math. **20** (1983), 131–143.
[20] D. GABAI, *Detecting fibred links in* $\mathbf{S}^3$, Comment. Math. Helv. **61** (1986), 519–555.
[21] A. GARSIDE, *The braid group and other groups*, Quart. J. Math. Oxford **20** (1969), 235–254.
[22] R. W. GHRIST, *Branched two-manifolds supporting all links*, Topology **36**(2) (1997), 423–488.
[23] R. W. GHRIST, PH. J. HOLMES, M. C. SULLIVAN, *Knots and links in three-dimensional flows*, Lect. Notes Math. 1654, Springer Verlag, 1997.
[24] É. GHYS, *Knots and dynamics*, Proc. of the International Congress of Mathematicians **I**, Madrid, 2006.
[25] É. GHYS, J. LEYS, *Lorenz and modular flow : a visual introduction*, Feature Column Amer. Math. Soc. (2006).
[26] N. D. GILBERT, T. PORTER, *Knots and Surfaces*, Oxford U.P. (1994).
[27] J. GUCKENHEIMER, *A strange, strange attractor*, The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications, Springer-Verlag (1976), 368–381.
[28] R. GUCKENHEIMER, R. F. WILLIAMS, *Structural stability of Lorenz attractors*, Publ. Math. IHES **50** (1979), 59–72.
[29] J. HADAMARD, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Pures Appl. **4** (1898), 27–74.
[30] S. KATOK, *Fuchsian Groups*, University of Chicago Press, 1992.
[31] W. B. R. LICKORISH, *An introduction to knot theory*, GTM 175, Springer Verlag, 1997.
[32] E. N. LORENZ, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmospheric Sci. **20** (1963), 130–141.
[33] E. N. LORENZ, *Predictability : does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ?*, 139th Meeting of the AAAS (1972).
[34] R. LYNDON, *On Burnside problem I*, Trans. AMS **77** (1954), 202–215.
[35] V. MELESHUK, *Embedding templates in flows*, PhD. Thesis, Northwestern Univ., 2002.
[36] J. MILNOR, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Studies 61, Princeton University Press (1965).
[37] H. R. MORTON, *Seifert circles and knot polynomials*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **99** (1986), 107–109.
[38] K. MURASUGI, *On a certain subgroup of the group of an alternating link*, Amer. J. Math. **85** (1963), 544–550.
[39] T. PINSKY, *Templates for geodesic flows*, phD. Thesis (2011).
[40] H. POINCARÉ, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta. Math. **13** (1890), 1–270.
[41] C. REUTENAUER, *Free Lie algebras*, Clarendon Press, Oxford, 1993.
[42] D. ROLFSEN, *Knots and links*, Publish or Perish, 1976.
[43] L. RUDOLPH, *Non-trivial positive braids have positive signature*, Topology **21** (1983), 325–327.
[44] J.-P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, Presses universitaires de France, 1970.
[45] C. SPARROW, *The Lorenz equations : bifurcation, chaos and strange attractors*, Applied Mathematical Science 41, Springer Verlag, 1982.
[46] J. STALLINGS, *Constructions of fibered knots and links*, Symp. in Pure math. Am. Math. Soc. Part 2, (1978), 55–59.
[47] M. C. SULLIVAN, *The prime decomposition of knotted periodic orbits in Lorenz-like templates*, J. Knot Thy. and Ram. **3**(1) (1994), 83–120.
[48] W. THURSTON, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton lecture notes (1978-1981).
[49] W. TUCKER, *The Lorenz attractor exists*, PhD. Thesis, Univ. Uppsala, 1998.
[50] W. TUCKER, *A rigorous ODE solver and Smale's* 14*th problem*, Found. Comput. Math. **2** (2002), 53–117.
[51] R. F. WILLIAMS, *The structure of Lorenz attractors*, Publ. Math. IHES **50** (1979), 73–99.

[52] R. F. WILLIAMS, *Lorenz knots are prime*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **4** (1983), 147–163.

Lyon, le 27 novembre 2009