



HAL
open science

Fonctions de Mittag-Leffler et processus de Lévy stables sans saut négatif

Thomas Simon

► **To cite this version:**

Thomas Simon. Fonctions de Mittag-Leffler et processus de Lévy stables sans saut négatif. 2009. hal-00375396

HAL Id: hal-00375396

<https://hal.science/hal-00375396>

Preprint submitted on 14 Apr 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FONCTIONS DE MITTAG-LEFFLER ET PROCESSUS DE LÉVY STABLES SANS SAUT NÉGATIF

THOMAS SIMON

RÉSUMÉ. On remarque que la fonction $E_\alpha(x^\alpha) - \alpha x^{\alpha-1} E'_\alpha(x^\alpha)$ est complètement monotone pour tout $\alpha \in [1, 2]$. Grâce à l'expression de sa densité de Bernstein, on en déduit une identité en loi entre suprema de processus de Lévy α -stables complètement asymétriques. Dans le cas spectralement positif, on retrouve l'expression d'une constante de petites déviations unilatères qui avait été obtenue avec une autre méthode par Bernyk, Dalang et Peskir [1].

1. UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS DE MITTAG-LEFFLER

La fonction de Mittag Leffler E_α d'indice $\alpha > 0$ est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par le développement en série entière

$$(1) \quad E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + \alpha n)}$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler. En écrivant $1/\Gamma$ comme une intégrale curviligne le long d'un chemin de Hankel - voir par exemple [4] Chapitre IX.4 et Figure 56 :

$$\frac{1}{\Gamma(1 + \alpha n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_H t^{-\alpha n - 1} e^t dt,$$

et en intégrant la série terme à terme on trouve la représentation bien connue

$$(2) \quad E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_z} \frac{t^{\alpha-1} e^t}{t^\alpha - z} dt$$

où H_z désigne un chemin de Hankel contournant le cercle centré en l'origine de rayon $|z|$. En particulier on a pour tout $x \geq 0$

$$E_\alpha(x^\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_{x^\alpha}} \frac{t^{\alpha-1} e^t}{t^\alpha - x^\alpha} dt.$$

On peut appliquer la même procédure à la fonction suivante définie sur $(0, +\infty)$:

$$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1} E'_\alpha(x^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)},$$

pour trouver la représentation

$$\alpha x^{\alpha-1} E'_\alpha(x^\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_{x^\alpha}} \frac{x^{\alpha-1} e^t}{t^\alpha - x^\alpha} dt.$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 33E12, 60E05, 60G52.

Mots-clés. Factorisation de Wiener-Hopf - Fonction de Mittag-Leffler - Processus de Lévy stable.

On définit maintenant la fonction

$$D_\alpha(x) = E_\alpha(x^\alpha) - \alpha x^{\alpha-1} E'_\alpha(x^\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_{x^\alpha}} e^t \left(\frac{t^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}}{t^\alpha - x^\alpha} \right) dt$$

pour tout $x > 0$ et on la prolonge par continuité en zéro en posant $D_\alpha(0) = 1$. On rappelle qu'une fonction $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est complètement monotone - ce que nous noterons par CM - si elle est indéfiniment dérivable et si

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}, x > 0$. Le théorème de Bernstein - voir par exemple [5] Chapitre XIII.4 - dit que si f est CM et si $f(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$, alors il existe une unique mesure de probabilité μ sur \mathbb{R}^+ telle que

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \mu(dt)$$

pour tout $x > 0$, la réciproque étant immédiate.

Théorème 1. *Pour tout $\alpha \in [1, 2]$, la fonction D_α est CM.*

Preuve : La propriété est évidente pour $\alpha = 1$ puisque $D_1(x) = 0$ et pour $\alpha = 2$ puisque l'on voit facilement que $D_2(x) = e^{-x}$, prototype d'une fonction CM avec mesure de Bernstein $\mu = \delta_1$. Supposons maintenant $\alpha \in (1, 2)$ et fixons $x > 0$. En raisonnant comme dans [4] Chapitre VII.7, la fonction

$$g : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}}{t^\alpha - x^\alpha}$$

se prolonge analytiquement dans tout le plan fendu $\mathbb{C}/(-\infty, 0]$ en ayant posé $g(x^\alpha) = (1 - 1/\alpha)/x$.

Par le théorème de Cauchy, on a donc

$$D_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_H e^t \left(\frac{t^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}}{t^\alpha - x^\alpha} \right) dt$$

où H est un chemin de Hankel entourant l'origine indépendamment de x . Pour tout $\rho > 0$, on décompose classiquement H en la branche inférieure de \mathbb{R}^- parcourue de $-\infty$ à $-\rho$, le cercle centré en l'origine de rayon ρ parcouru dans le sens trigonométrique, et la branche supérieure de \mathbb{R}^- parcourue de $-\rho$ à $-\infty$. Comme $x > 0$, l'intégrale le long du cercle tend vers 0 quand $\rho \rightarrow 0$. L'intégrale le long des deux branches vaut d'autre part

$$\begin{aligned} I_\rho &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\rho^\infty e^{-s} \left(\frac{e^{-i\pi(\alpha-1)} s^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}}{e^{-i\pi\alpha} s^\alpha - x^\alpha} \right) ds - \int_\rho^\infty e^{-s} \left(\frac{e^{i\pi(\alpha-1)} s^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}}{e^{i\pi\alpha} s^\alpha - x^\alpha} \right) ds \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^\infty e^{-s} \left(\frac{e^{i\pi\alpha} s^{\alpha-1} + x^{\alpha-1}}{e^{i\pi\alpha} s^\alpha - x^\alpha} - \frac{e^{-i\pi\alpha} s^{\alpha-1} + x^{\alpha-1}}{e^{-i\pi\alpha} s^\alpha - x^\alpha} \right) ds \right) \end{aligned}$$

quand $\rho \rightarrow 0$. Après changement de variable $s = xu$, on trouve

$$\begin{aligned} D_\alpha(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-xu} \left(\frac{e^{i\pi\alpha} u^{\alpha-1} + 1}{e^{i\pi\alpha} u^\alpha - 1} - \frac{e^{-i\pi\alpha} u^{\alpha-1} + 1}{e^{-i\pi\alpha} u^\alpha - 1} \right) du \\ &= \frac{-\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty e^{-xu} \left(\frac{u^{\alpha-1}(1+u)}{u^{2\alpha} - 2u^\alpha \cos \pi\alpha + 1} \right) du, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que D_α est CM avec pour mesure de Bernstein

$$(3) \quad \mu_\alpha(dt) = \frac{(-\sin \pi\alpha)t^{\alpha-1}(1+t)}{\pi(t^{2\alpha} - 2t^\alpha \cos \pi\alpha + 1)} dt.$$

□

Remarques 2. (a) La question de la monotonie complète ne se pose évidemment pas pour E_α elle-même mais il est classique [8] que $x \mapsto E_\alpha(-x)$ est CM pour tout $\alpha \in (0, 1]$. Cette propriété avait été obtenue auparavant par Feller avec un argument probabiliste et nous y reviendrons dans la section suivante. Nous renvoyons à [11] pour des résultats plus généraux, qui entraînent en particulier que $x \mapsto E_\alpha(-x)$ n'est pas CM quand $\alpha > 1$.

(b) On voit facilement que $\mu_\alpha \Rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow 1$ et on peut montrer que $\mu_\alpha \Rightarrow \delta_1$ quand $\alpha \rightarrow 2$. Jean-François Burnol m'a aussi fait remarquer que la fonction $\alpha \mapsto E_\alpha(x)$ est en fait analytique dans un cône contenant \mathbb{R}^+ pour tout $x > 0$. Quand $\alpha \in]0, 1[$ les calculs précédents restent valables et entraînent que $-D_\alpha$ est CM avec mesure de Bernstein

$$\frac{(\sin \pi\alpha)t^{\alpha-1}(1+t)}{\pi(t^{2\alpha} - 2t^\alpha \cos \pi\alpha + 1)} dt.$$

En revanche, quand $\alpha > 2$ il semble que l'on perde toute monotonie puisque la fonction g ci-dessus admet alors au moins deux pôles à l'intérieur du contour. On peut par exemple calculer

$$D_4(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + \cos x + \sin x).$$

Il n'est pas impossible qu'il faille retrancher ou ajouter des dérivées successives à D_α pour retomber sur une fonction CM.

Considérons maintenant pour tout $\alpha \in [1, 2]$ la fonction F_α définie sur \mathbb{R}^+ par

$$F_\alpha(x) = D_\alpha(x^{1/\alpha}) = E_\alpha(x) - \alpha x^{1-1/\alpha} E'_\alpha(x).$$

Comme $x \mapsto x^{1/\alpha}$ est une fonction positive de dérivée CM, par le Théorème 1 on sait en appliquant le Critère 2 dans [5] Chapitre XIII. 4 que F_α est également CM. En fait on aurait pu obtenir ce résultat, qui est légèrement plus faible que le Théorème 1, par un argument probabiliste. C'est ce que nous allons commencer par expliquer dans la section suivante.

2. UNE IDENTITÉ EN LOI POUR LES PROCESSUS STABLES

On fixe $\alpha \in (1, 2]$ et on considère un processus de Lévy α -stable sans saut négatif $X = \{X_t, t \geq 0\}$, normalisé tel que $\mathbb{E}[e^{-X_1}] = e$. On pose $\hat{X} = -X$ qui est un processus de Lévy α -stable sans saut positif et l'on renvoie aux chapitres VII et VIII de [2] pour plus de détails concernant \hat{X} . La formule de Lévy-Khintchine s'écrit

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda X_t}] = \mathbb{E}[e^{\lambda \hat{X}_t}] = e^{t\lambda^\alpha}$$

pour tout $t, \lambda \geq 0$, de sorte qu'avec cette normalisation, quand $\alpha = 2$ on a $X \stackrel{d}{=} \hat{X} \stackrel{d}{=} \sqrt{2}B$ où B est un mouvement brownien standard. On définit les suprema

$$S_t = \sup\{X_s, s \leq t\} \quad \text{et} \quad \hat{S}_t = \sup\{\hat{X}_s, s \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Pour tout $q > 0$, soit τ_q une variable exponentielle de paramètre q indépendante de X . Comme $S_t = -\inf\{\hat{X}_s, s \leq t\}$ pour tout t , la factorisation de Wiener-Hopf pour \hat{X} - voir [2] Chapitre VII.1 Formule (3) - entraîne que pour tout $\lambda > q^{1/\alpha} > 0$

$$(4) \quad \mathbb{E}[e^{-\lambda S_{\tau_q}}] = \frac{q(\lambda - q^{1/\alpha})}{q^{1/\alpha}(\lambda^\alpha - q)}$$

et après intégration par parties, il vient

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathbb{P}[S_{\tau_q} \geq x] dx = \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha - q} - \frac{q^{1-1/\alpha}}{\lambda^\alpha - q}$$

pour tout $\lambda > q^{1/\alpha} > 0$. En fait les deux formules ci-dessus sont valables pour tout $\lambda, q > 0$ avec un prolongement par continuité immédiat en $\lambda = q^{1/\alpha}$.

Le lien avec les fonctions de Mittag-Leffler est le suivant : en intégrant (1) terme à terme on peut aussi obtenir l'expression de la transformée de Laplace de $E_\alpha(qx^\alpha)$: pour tout $\lambda > q^{1/\alpha}$ on a

$$(5) \quad \int_0^\infty e^{-\lambda x} E_\alpha(qx^\alpha) dx = \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha - q}$$

et en intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda x} (E_\alpha(qx^\alpha) - \alpha(qx^\alpha)^{1-1/\alpha} E'_\alpha(qx^\alpha)) dx &= \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha - q} - \frac{q^{1-1/\alpha}}{\lambda^\alpha - q} \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathbb{P}[S_{\tau_q} \geq x] dx. \end{aligned}$$

Signalons que la formule (5) avait déjà été utilisée dans [7] pour obtenir de nouvelles correspondances symboliques entre fonctions E_α d'indices différents, et plus récemment dans [3] pour calculer une constante de petites déviations en norme uniforme pour X . L'inversion de la transformée de Laplace donne

$$(6) \quad \mathbb{P}[S_{\tau_q} \geq x] = E_\alpha(qx^\alpha) - \alpha(qx^\alpha)^{1-1/\alpha} E'_\alpha(qx^\alpha)$$

pour tout $q, x > 0$. Il n'est pas évident a priori que la fonction $x \mapsto \mathbb{P}[S_{\tau_1} \geq x]$ soit complètement monotone. En revanche, on peut retrouver à l'aide de (6) le résultat énoncé à la fin de la première section. Pour cela, on introduit pour tout $x > 0$ le premier temps de sortie

$$T_x = \inf\{t > 0, X_t > x\}.$$

Comme X est auto-similaire d'indice $1/\alpha$ on a $T_x \stackrel{d}{=} x^\alpha T_1$, et la continuité à droite de X entraîne d'autre part $\{S_t \geq x\} = \{T_x \leq t\}$ p.s. Après changement de variable $y = qx^\alpha$ dans (6), on trouve

$$(7) \quad \int_0^\infty e^{-yt} \mathbb{P}[T_1 \in dt] = E_\alpha(y) - \alpha y^{1-1/\alpha} E'_\alpha(y), \quad y > 0,$$

et ceci entraîne que la fonction à droite est complètement monotone avec mesure de Bernstein $\mathbb{P}[T_1 \in dt]$. On va maintenant inverser (7) et donner une expression de la loi de T_1 . Pour $\alpha = 2$ et $\hat{X} \stackrel{d}{=} \sqrt{2}B$, le terme de droite vaut $e^{-\sqrt{x}}$ et on retrouve l'expression classique pour la densité de T_1 qui est $e^{-1/4t}/2t\sqrt{\pi t}$. On fixe maintenant $\alpha \in]1, 2[$ et on note

$$\hat{T}_1 = \inf\{t > 0, \hat{X}_t > 1\}.$$

Il est bien connu et facile à voir - voir le Théorème VII.1 dans [2] - que $\mathbb{E}[e^{-\lambda \hat{T}_1}] = e^{-\lambda^{1/\alpha}}$ pour tout $\lambda > 0$, autrement dit que \hat{T}_1 est une variable stable positive d'indice $1/\alpha$. Sa densité $f_{\hat{T}_1}$ peut être donnée sous forme intégrale - voir [9] pour le calcul :

$$f_{\hat{T}_1}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-(tu+u^{1/\alpha} \cos(\pi/\alpha))} \sin(u^{1/\alpha} \sin(\pi/\alpha)) du,$$

expression qui se simplifie légèrement pour $\alpha = 3/2$ en termes de la fonction de Whittaker $W_{-1/2, -1/6}$ - voir à nouveau [9]. On considère d'autre part une variable T indépendante de \hat{T}_1 et de densité

$$f_T(t) = \frac{(-\sin \pi \alpha)(1 + t^{1/\alpha})}{\pi \alpha (t^2 - 2t \cos \pi \alpha + 1)}$$

sur \mathbb{R}^+ . Il est évident après un changement de variable dans (3) que T est bien une variable aléatoire finie p.s. mais je n'ai pas trouvé d'exemples où T jouât un rôle dans la littérature. En particulier, malgré les apparences, il ne semble pas que T soit reliée à une loi de l'arcsinus - voir [2] Théorème III.6 - ou encore à un noyau fractionnaire de type Kato - voir [12] Formule XI.11.6, puisque $\alpha > 1$.

Théorème 3. *Avec les notations précédentes, on a pour tout $\alpha \in]1, 2[$*

$$T_1 \stackrel{d}{=} T \times \hat{T}_1.$$

Preuve : En combinant (7) et le théorème 1, on a pour tout $x > 0$

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha t} \mathbb{P}[T_1 \in dt] = D_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \mu_\alpha(dt)$$

où l'on a repris la notation (3). D'autre part, comme par définition

$$e^{-xt} = \int_0^\infty e^{-(xt)^\alpha u} f_{\hat{T}_1}(u) du,$$

on déduit par Fubini et en faisant le changement de variable $s = t^\alpha u$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^\alpha t} \mathbb{P}[T_1 \in dt] &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(xt)^\alpha u} \left(\frac{(-\sin \pi \alpha) t^{\alpha-1} (1+t)}{\pi(t^{2\alpha} - 2t^\alpha \cos \pi \alpha + 1)} \right) f_{\hat{T}_1}(u) du dt \\ &= \int_0^\infty e^{-x^\alpha s} \left(\int_0^\infty f_{\hat{T}_1}(u) f_T(s/u) \frac{du}{u} \right) ds, \end{aligned}$$

ce qui prouve en inversant la transformée de Laplace que T_1 a pour densité

$$f_{T_1}(t) = \int_0^\infty f_{\hat{T}_1}(u) f_T(t/u) \frac{du}{u} = \int_0^\infty f_T(u) f_{\hat{T}_1}(t/u) \frac{du}{u}$$

qui est bien celle de $T \times \hat{T}_1$. □

Cette identité en loi peut se décliner de plusieurs façons. On sait par exemple par auto-similarité que $T_1 \stackrel{d}{=} S_1^{-\alpha}$ et $\hat{T}_1 \stackrel{d}{=} \hat{S}_1^{-\alpha}$, d'où

$$(8) \quad S_1 \stackrel{d}{=} T^{-1/\alpha} \times \hat{S}_1$$

avec les notations précédentes. Ceci donne une autre relation entre S_1 et les fonctions de Mittag-Leffler que celle donnée par (6). On sait en effet que \hat{S}_1 suit une loi de Mittag-Leffler d'indice $1/\alpha$ au sens où

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \hat{S}_1}] = E_{1/\alpha}(-\lambda), \quad \lambda \geq 0$$

et l'on renvoie pour cela à l'Exercice 29.18 dans [10] qui donne une preuve probabiliste du résultat de Pollard [8]. En utilisant (8) et un changement de variable que nous laissons au lecteur, on obtient donc une relation probablement inutile, mais inédite à notre connaissance, entre fonctions de Mittag-Leffler d'indices différents :

Corollaire 4. *On fixe $\alpha \in]1, 2[$ et on note $f_{1/\alpha}$ la densité de Bernstein associée à la fonction complètement monotone $x \mapsto E_{1/\alpha}(-x)$. Avec les notations précédentes, on a*

$$D_\alpha(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{1/\alpha}(u) e^{-sx^\alpha/u^\alpha} \frac{(-\sin \pi \alpha)(1+s^{1/\alpha})}{\pi \alpha (s^2 - 2s \cos \pi \alpha + 1)} dud s$$

pour tout $x > 0$.

A l'aide du théorème de Skorohod qui stipule que $\hat{S}_1 \stackrel{d}{=} \hat{X}_1$ sachant $\hat{X}_1 > 0$ - voir pour cela les Exercices 29.7 et 29.18 dans [10], on obtient enfin une relation entre les lois de S_1 et X_1 :

Corollaire 5. *Avec les notations précédentes on a*

$$S_1 \stackrel{d}{=} -(T^{-1/\alpha} \times X_1) \text{ sachant } X_1 < 0.$$

3. UN CALCUL DE CONSTANCE

On va s'intéresser maintenant au comportement asymptotique de la fonction de répartition de T_1 en l'infini. On sait par la Proposition VIII.2 dans [2] et l'identité $T_1 \stackrel{d}{=} S_1^{-\alpha}$ que

$$(9) \quad \mathbb{P}[T \geq t] \sim \kappa t^{1/\alpha-1}, \quad t \rightarrow +\infty$$

où κ est une constante dépendant de la loi de la trajectoire du processus X - plus précisément de celle de son processus d'échelle bivarié (L^{-1}, H) en suivant les notations de [2]. Les résultats précédents permettent de calculer κ :

Proposition 6. *La constante κ dans (9) vaut $1/\Gamma(\alpha)\Gamma(1/\alpha)$.*

Preuve : Dans le cas $\alpha = 2$ et $\kappa = 1/\sqrt{\pi}$, le résultat est bien connu et découle directement de l'expression de la densité de T_1 rappelée plus haut. Dans le cas $\alpha \in]1, 2[$, on déduit d'abord de (7) et du Théorème 1 que pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda^\alpha T_1}] = \frac{-\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda u} \left(\frac{u^{\alpha-1}(1+u)}{u^{2\alpha} - 2u^\alpha \cos \pi \alpha + 1} \right) du.$$

Après une intégration par parties et un changement de variables, ceci implique

$$\lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha t} \mathbb{P}[T_1 \geq t] dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{P}[T \geq t^\alpha] dt$$

avec les notations précédentes pour T . Grâce à l'expression de f_T , on sait d'autre part que

$$\mathbb{P}[T \geq t^\alpha] \sim \frac{\sin \pi \alpha}{\pi(1-\alpha)} t^{1-\alpha}, \quad t \rightarrow \infty.$$

En utilisant deux fois de suite un théorème taubérien - celui donné par exemple dans [5] Chapitre XIII.5, Théorème 4, on voit que

$$\mathbb{P}[T \geq t] \sim \frac{\sin \pi \alpha \Gamma(2-\alpha)}{\pi(1-\alpha)\Gamma(1/\alpha)} t^{1/\alpha-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1/\alpha)} t^{1/\alpha-1}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

où dans la dernière égalité on a utilisé successivement la formule de récurrence et la formule des compléments pour la fonction Gamma. □

Remarque 7. En écrivant

$$\lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha t} \mathbb{P}[T_1 \leq t] dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{P}[T \leq t^\alpha] dt, \quad \lambda > 0,$$

on voit à cause de l'asymptotique $\mathbb{P}[T \leq t^\alpha] \sim (-\sin \pi \alpha / \pi) t^\alpha$ et à nouveau par un théorème taubérien que

$$\mathbb{P}[T_1 \leq t] \sim \frac{1}{\pi} (-\Gamma(\alpha) \sin \pi \alpha) t = \left(\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \right) t, \quad t \rightarrow 0^+,$$

résultat déjà connu en combinant l'identité $T_1 \stackrel{d}{=} S_1^{-\alpha}$ avec la Proposition VIII.4 de [2] et l'estimée (14.37) de [10] dans le cas particulier $\rho = 1 - 1/\alpha$.

4. REMARQUES FINALES

En fait le résultat de la Proposition 6 avait lui aussi déjà été obtenu, plus récemment et avec une normalisation différente, dans [1] Corollaire 3 Formule (2.61), comme conséquence d'un résultat plus général qui était un développement complet en série alternée de la densité de S_1 - voir [1] Formule (2.8) :

$$(10) \quad f_{S_1}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\Gamma(\alpha n - 1)\Gamma(1 + 1/\alpha - n)} x^{\alpha n - 2}.$$

Quitte à changer de variable, ce résultat est en effet équivalent à une décomposition du même type pour la densité de T_1 :

$$(11) \quad f_{T_1}(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha n - 1)\Gamma(1 + 1/\alpha - n)} t^{1/\alpha - n - 1},$$

et entraîne donc automatiquement la Proposition 6. Pour obtenir (10), Bernyk, Dalang et Peskir avaient inversé la double transformée de Laplace (4) d'abord en temps et en termes de fonctions d'erreur généralisées, puis en espace à l'aide d'une équation intégrale fractionnaire de type Abel, dont ils avaient pu donner la solution par un développement en série. Remarquons au passage que les fonctions de Mittag-Leffler d'indice plus grand que 1 interviennent dans la résolution d'équations intégrales fractionnaires de type Abel [6]. Mais il ne semble pas que l'on puisse déduire de [6, 1] l'identité en loi du Théorème 3.

La méthode de cette note, où l'on a inversé (4) d'abord en espace puis en temps, est plus simple que celle de [1]. En revanche, l'expression de la densité de T_1 obtenue par le Théorème 3 comme une intégrale double :

$$\begin{aligned} f_{T_1}(t) &= \frac{-\sin \pi \alpha}{\alpha \pi} \int_0^\infty f_{\hat{T}_1}(t/u) \frac{1 + u^{1/\alpha}}{u^3 - 2u^2 \cos \pi \alpha + u} du \\ &= \frac{(-\sin \pi \alpha)}{\pi^2 \alpha} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-(tv/u + v^{1/\alpha} \cos(\pi/\alpha))} \sin(v^{1/\alpha} \sin(\pi/\alpha)) dv \right) \frac{(1 + u^{1/\alpha})}{u^3 - 2u^2 \cos \pi \alpha + u} du \end{aligned}$$

ne permet pas de retrouver la décomposition (11) puisque le terme $-v^{1/\alpha} \cos(\pi/\alpha) > 0$ sous l'exponentielle interdit d'appliquer Fubini. D'un autre côté, on peut trouver cette dernière expression un tantinet plus ramassée que celle obtenue en changeant la variable dans la formule (2.56) de [1].

Une autre formulation de la densité de T_1 peut être obtenue en inversant (7) comme dans le Théorème 1. Avec les mêmes notations on peut en effet écrire

$$\mathbb{E}[e^{-xT_1}] = E_\alpha(x) - \alpha x^{1-1/\alpha} E'_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_H e^t \left(\frac{t^{\alpha-1} - x^{1-1/\alpha}}{t^\alpha - x} \right) dt.$$

D'autre part, il est possible de choisir $H = H_\delta$ telle que son intersection avec $\text{Re}(t) \geq 0$ soit contenue dans le cercle centré en l'origine de rayon $x^{1/\alpha}$, et son intersection avec $\text{Re}(t) \leq 0$ dans un secteur angulaire $-\pi/2 - \delta < \theta < \pi/2 + \delta$ avec δ aussi petit qu'on veut - voir à nouveau [4] Figure 56. Comme $\alpha \in]1, 2[$ le changement de variable $t \mapsto t^\alpha$ transforme alors H_δ en un chemin de Hankel situé dans le demi-plan $\text{Re}(t) < x$ pour δ assez petit. Raisonnant exactement comme dans [9] on peut donc calculer

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_H \frac{t^{\alpha-1} e^t}{t^\alpha - x} dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_H \frac{e^{t^{1/\alpha}}}{t - x} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-xt} g_{\hat{T}_1}(t) dt \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$(12) \quad g_{\hat{T}_1}(t) = \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty e^{-(tu - u^{1/\alpha} \cos(\pi/\alpha))} \sin(u^{1/\alpha} \sin(\pi/\alpha)) du.$$

Le calcul du deuxième terme se fait comme plus haut et nous laissons les détails au lecteur :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_H \frac{x^{1-1/\alpha} e^t}{t^\alpha - x} dt &= \frac{-\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty e^{-x^{1/\alpha} u} \left(\frac{u^\alpha}{u^{2\alpha} - 2u^\alpha \cos \pi \alpha + 1} \right) du \\ &= \int_0^\infty e^{-xt} \left(\frac{-\sin \pi \alpha}{\alpha \pi} \int_0^\infty f_{\hat{T}_1}(t/u) \frac{u^{1/\alpha}}{u^3 - 2u^2 \cos \pi \alpha + u} du \right) dt, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(13) \quad f_{T_1}(t) = (1/\alpha)g_{\hat{T}_1}(t) + (1 - 1/\alpha)h_{\hat{T}_1}(t)$$

en ayant noté

$$h_{\hat{T}_1}(t) = \frac{-\sin \pi \alpha}{(\alpha - 1)\pi} \int_0^\infty f_{\hat{T}_1}(t/u) \left(\frac{u^{1/\alpha}}{u^2 - 2u \cos \pi \alpha + 1} \right) \frac{du}{u}.$$

Puisque

$$u \mapsto \frac{(-\sin \pi \alpha)u^{1/\alpha}}{(\alpha - 1)\pi(u^2 - 2u \cos \pi \alpha + 1)}$$

est une densité de probabilité sur \mathbb{R}^+ , si l'on note \bar{T} la v.a. correspondante on voit que $h_{\hat{T}_1}$ est la densité du produit indépendant $\bar{T} \times \hat{T}_1$. D'autre part, en comparant (13) avec l'expression de f_{T_1} donnée par le Théorème 3, on voit que $g_{\hat{T}_1}$ est aussi une densité de probabilité, celle du produit indépendant $\tilde{T} \times \hat{T}_1$ où \tilde{T} a pour densité

$$u \mapsto \frac{-\sin \pi \alpha}{\pi(u^2 - 2u \cos \pi \alpha + 1)}.$$

En particulier $g_{\hat{T}_1}$ est positive, ce qui n'était pas évident a priori, et la décomposition (13) se lit comme une *combinaison convexe* de densités de probabilité. Le premier terme $(1/\alpha)g_{\hat{T}_1}$ donne le comportement de f_{T_1} en 0, et le second $(1 - 1/\alpha)h_{\hat{T}_1}$ celui de f_{T_1} à l'infini.

Remarquons enfin que la densité $g_{\hat{T}_1}$ a quelque parenté avec $f_{\hat{T}_1}$ - d'où sa souscription en \hat{T}_1 - puisque son développement en série alternée, que l'on tire de (12) exactement comme dans [8], est

$$g_{\hat{T}_1}(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\Gamma(-n/\alpha)n!} t^{-1-n/\alpha},$$

tandis que celui de $f_{\hat{T}_1}$ est

$$f_{\hat{T}_1}(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\Gamma(-n/\alpha)n!} t^{-1-n/\alpha}.$$

En changeant une dernière fois la variable, on trouve donc l'expression d'une certaine transformée intégrale reliant ces deux séries alternées :

$$g_{\hat{T}_1}(t) = \int_0^\infty f_{\hat{T}_1}(u) \left(\frac{(-\sin \pi \alpha)u}{\pi(u^2 - 2 \cos \pi \alpha t u + t^2)} \right) du$$

avec laquelle je conclurai, en remerciant Jean-François Burnol et Francis Hirsch pour leur aide dans l'élaboration de cet article.

REFERENCES

- [1] V. BERNYK, R. C. DALANG et G. PESKIR. The law of the supremum of a stable Lévy process with no negative jumps. *Ann. Probab.* **36**, 1777-1789, 2008.
- [2] J. BERTOIN. *Lévy processes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] J. BERTOIN. On the first exit time of a completely asymmetric stable process from a finite interval. *Bull. Lond. Math. Soc.* **28** (5), 514-520, 1996.
- [4] J. DIEUDONNÉ. *Calcul infinitésimal*. Hermann, Paris, 1968.
- [5] W. FELLER. *An introduction to probability theory and its applications. Vol II*. Wiley, New York, 1971.
- [6] R. GORENFLO et F. MAINARDI. On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes. *J. Comput. Appl. Math.* **118** (1-2), 283-299, 2000.
- [7] P. HUMBERT. Quelques résultats relatifs à la fonction de Mittag-Leffler. *C. R. Acad. Sci. Paris* **236**, 1467-1468, 1953.
- [8] H. POLLARD. The representation of e^{-x^λ} as a Laplace integral. *Bull. Am. Math. Soc.* **52**, 908-910, 1946.
- [9] H. POLLARD. The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_\alpha(-x)$. *Bull. Am. Math. Soc.* **54**, 1115-1116, 1948.
- [10] K. SATO. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [11] W. R. SCHNEIDER. Completely monotone generalized Mittag-Leffler functions. *Expo. Math.* **14** (1), 3-16, 1996.
- [12] K. YOSIDA. *Functional Analysis*. Springer, Berlin, 1965.

LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ, U. F. R. DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE LILLE 1, F-59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX. Adresse électronique : simon@math.univ-lille1.fr