



HAL
open science

Représentation bond graph de problèmes d'optimisation dynamique : extension aux systèmes à stockages d'énergie non-linéaires

Audrey Jardin, Wilfrid Marquis-Favre, Daniel Thomasset

► To cite this version:

Audrey Jardin, Wilfrid Marquis-Favre, Daniel Thomasset. Représentation bond graph de problèmes d'optimisation dynamique : extension aux systèmes à stockages d'énergie non-linéaires. CIFA, Sep 2008, Bucarest, Roumanie. papier 206. hal-00374616

HAL Id: hal-00374616

<https://hal.science/hal-00374616>

Submitted on 15 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Représentation bond graph de problèmes d'optimisation dynamique : extension aux systèmes à stockages d'énergie non-linéaires

Audrey JARDIN¹, Wilfrid MARQUIS-FAVRE¹, Daniel THOMASSET¹

¹Laboratoire AMPERE
INSA-Lyon, 25 avenue Jean Capelle, 69621 Villeurbanne Cedex, France

prenom.nom@insa-lyon.fr
<http://www.ampere-lab.fr>

Résumé— Le but de cet article est d'établir une procédure permettant de traiter des problèmes d'optimisation dynamique à l'aide de l'outil bond graph. Si un tel couplage a déjà été envisagé dans le domaine de l'analyse des sensibilités, il s'agissait d'utiliser d'emblée des *méthodes directes* de résolution numérique. Ici, l'approche adoptée est une *approche indirecte* basée sur le calcul variationnel. Notre objectif final étant de coupler la procédure à une méthodologie de dimensionnement par modèles bond graphs inverses, il nous a effectivement paru utile de pouvoir construire la solution du problème d'optimisation grâce à un modèle bond graph. Si une procédure de construction systématique d'un tel bond graph a d'ores et déjà été établie dans de précédents travaux, l'objectif de cet article consiste à étendre le champ d'application au cas des systèmes à stockages d'énergie non-linéaires. Après avoir situé le contexte de l'étude dans la première section, les différentes étapes de la procédure sont démontrées de manière théorique grâce notamment à la formulation port-Hamiltonienne du problème et au principe du maximum de Pontryagin. Ces étapes sont ensuite récapitulées et montrent qu'il est possible de construire un *bond graph final*, couplage entre le *bond graph initial* du système étudié et un *bond graph optimisant*, et reflète des *conditions d'optimalité* fournissant la solution exacte au problème. La troisième partie est consacrée à l'illustration de la procédure par le biais de l'exemple d'une charge en rotation actionnée par un moteur à courant continu. Enfin, la dernière partie conclut sur les avantages et limitations d'une telle approche ainsi que sur les pistes de recherche qu'il serait intéressant d'investir.

Mots-clés— commande optimale, non-linéarité, bond graph, système port-Hamiltonien, problème inverse.

I. INTRODUCTION

Face aux concurrents de plus en plus compétitifs, à des normes de sécurité toujours plus strictes et à une exigence accrue des consommateurs, les ingénieurs concepteurs doivent trouver chaque jour le meilleur compromis possible entre des contraintes de conception toujours plus nombreuses. Celles-ci peuvent être certes redondantes (comme vouloir alléger le poids d'un véhicule et diminuer le coût de la matière première) mais sont malheureusement souvent contradictoires (avoir les meilleures performances au prix le plus bas) : l'ingénieur est alors obligé de prioriser et de pondérer ces critères pour optimiser sa conception et satisfaire le cahier des charges le plus fidèlement possible. De plus, dans un contexte où désormais les industriels sont obligés de tenir compte du développement

durable, les problèmes d'optimisation tels que la minimisation d'apport/de consommation d'énergie ou encore la minimisation d'émission de gaz polluants prennent de plus en plus d'importance. Les notions de meilleur rapport qualité/prix et d'optimisation sont désormais ancrés dans notre société et ce quel que soit le secteur d'activité considéré. De nouveaux outils permettant l'intégration de techniques d'optimisation au sein du processus de conception doivent donc être développés.

Dans cette optique, le laboratoire AMPERE¹ propose une méthodologie originale pour la conception de systèmes mécatroniques [1], [2], [3], [4], [5]. Basée sur l'outil bond graph et sur l'utilisation de modèles inverses, celle-ci permet un dimensionnement sur critères énergétiques et dynamiques (*i.e.* à tout instant du fonctionnement). Les marges dont dispose le concepteur en termes de sur- ou sous-dimensionnement sont évaluées de manière quantitative et conduisent ainsi au dimensionnement le plus juste.

Cependant, si cette méthodologie a d'ores et déjà pu être appliquée à certains problèmes industriels [6], [7], [8], celle-ci reste actuellement limitée aux cas où le concepteur est capable de traduire le cahier des charges en termes de fonctions du temps, ce qui, en pratique, n'est pas toujours évident voire même réalisable. Afin de pallier cette limitation et d'élargir la classe de problèmes pouvant être traités, l'idée a alors été de coupler cette méthodologie à de l'optimisation dynamique. Notamment, des articles récents [9], [10], [11] ont déjà permis d'établir une procédure pour construire, de manière systématique, un bond graph représentant un système d'équations algèbro-différentielles (ou *conditions d'optimalité*) dont la résolution analytique fournit la solution exacte d'un problème de commande optimale donné (problème ayant pour objectif la minimisation d'énergie dissipée ou le suivi d'une trajectoire par exemple).

Ces travaux étant limités aux cas des systèmes linéaires et invariants dans le temps, l'objectif de cet article est d'étendre la procédure à une classe de problèmes plus générale, à savoir, la classe des systèmes à stockages d'énergie non-linéaires. Pour cela, la section sui-

¹Depuis le 1er janvier 2007, le LAI, le CEGELY ainsi qu'une équipe de microbiologie environnementale ont fusionné pour devenir le laboratoire AMPERE (UMR CNRS 5005).

vante présente tout d'abord un bref état de l'art sur le couplage entre l'optimisation dynamique et le bond graph, puis décrit le type de systèmes, de problèmes ainsi que les hypothèses considérés. Une fois établi ce cadre d'étude, l'application analytique du principe du maximum de Pontryagin à la formulation port-Hamiltonienne du problème nous permet de démontrer progressivement comment les *conditions d'optimalité* peuvent être traduites en termes de modèle bond graph. Les étapes de la construction systématique du *bond graph optimisant* sont alors récapitulées avant de laisser place dans la troisième partie à la mise en oeuvre de cette procédure sur un exemple. Enfin, la dernière partie permet de discuter des avantages et limitations de cette démarche et de présenter les différents axes de recherche qu'il serait intéressant d'investir de manière à étendre la procédure à une classe de problèmes encore plus générale.

II. PROCÉDURE DE CONSTRUCTION SYSTÉMATIQUE D'UN *bond graph optimisant* DANS LE CAS DE STOCKAGES D'ÉNERGIE NON-LINÉAIRES

La méthodologie faisant intervenir des problèmes de dimensionnement associés à des systèmes dynamiques, il convient de se placer tout d'abord dans le domaine d'optimisation approprié, à savoir, celui de l'optimisation dynamique. Dans cette catégorie, la résolution du problème peut être menée suivant deux types d'approches : la première, dite *directe*, consiste à discrétiser *a priori* la formulation du problème pour un calcul d'emblée numérique, tandis que la seconde, dite *indirecte*, correspond à une recherche analytique de la solution exacte puis à une discrétisation, cette fois-ci *a posteriori*, des équations pour en obtenir une solution numérique.

De plus, si le couplage entre l'optimisation dynamique et l'outil bond graph a déjà été considéré dans le domaine de l'analyse des sensibilités [12], [13], [14], il s'agit dans ces travaux de coupler un algorithme d'optimisation à un modèle bond graph et donc d'utiliser des *méthodes directes* de résolution. Le bond graph n'est alors utilisé que pour la modélisation du système à optimiser : il est vu simplement comme un outil efficace de représentation.

Ici, notre but étant d'étendre la méthodologie bond graph à la résolution de problèmes d'optimisation, il nous a paru intéressant de construire la solution exacte du problème d'optimisation (ou tout au moins un système d'équations dont la résolution conduit à la solution exacte) à l'aide d'un modèle bond graph. Les *méthodes directes* reposant plus sur le calcul numérique et étant de ce fait inadaptées pour une traduction en langage bond graph, nous avons alors choisi d'adopter une *approche indirecte* comme celles offertes par le calcul variationnel ou plus particulièrement par la méthode de Pontryagin. Pour effectuer cette traduction, nous proposons dans cette partie de partir de la formulation port-Hamiltonienne du problème (représentation qui a été choisie notamment pour son analogie avec le point de vue énergétique du langage bond graph), d'y appliquer de manière analytique le principe du maximum de Pontryagin et de démontrer comment les *conditions d'optimalité* issues de cette méthode peuvent être représentées par un modèle bond graph.

A. Cadre d'étude

Soit le système explicite multi-entrées multi-sorties dont la formulation port-Hamiltonienne est [15] :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_u \cdot \mathbf{u} - \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{u}_R \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}_u^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{y}_R = \mathbf{g}_R^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (1)$$

où :

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état d'ordre minimal (*i.e.* constitué uniquement de variables d'état indépendantes), $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_I^T \quad \mathbf{x}_C^T]$ avec \mathbf{x}_I (resp. \mathbf{x}_C) le vecteur d'état associé aux stockages d'énergie de type I (resp. C) ;
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrées, $\mathbf{u}^T = [\mathbf{u}_e^T \quad \mathbf{u}_f^T]$ avec \mathbf{u}_e (resp. \mathbf{u}_f) le vecteur d'entrées en effort (resp. en flux) ;
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de sorties ;
- $\mathbf{u}_R \in \mathbb{R}^r$ (resp. $\mathbf{y}_R \in \mathbb{R}^r$) est le vecteur d'entrées (resp. de sorties) associé aux phénomènes dissipatifs ;
- H est l'Hamiltonien du système, à savoir une fonction du vecteur d'état \mathbf{x} à valeurs dans \mathbb{R} et représentant la totalité de l'énergie stockée dans le système ;
- $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice hessienne de H ;
- $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie ;
- $\mathbf{g}_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie et les entrées, $\mathbf{g}_u^T = [\mathbf{g}_{u_e}^T \quad \mathbf{g}_{u_f}^T]$ avec \mathbf{g}_{u_e} (resp. \mathbf{g}_{u_f}) celle liée aux entrées en effort (resp. en flux) ;
- $\mathbf{g}_R \in \mathbb{R}^{n \times r}$ est la matrice associée à la structure de jonction entre les phénomènes de stockage d'énergie et ceux dissipatifs ;
- les matrices \mathbf{J} , \mathbf{g}_u et \mathbf{g}_R sont supposées indépendantes du vecteur d'état \mathbf{x} puisqu'ici seules les lois caractéristiques des phénomènes de stockage d'énergie sont considérées comme pouvant être non-linéaires (dans ce cas, elles seront supposées explicites).

Supposons maintenant que l'objectif de l'étude soit de déterminer la commande optimale permettant de minimiser la puissance dissipée par certains phénomènes. Il convient alors de voir le problème comme un problème d'optimisation avec pour :

- Objectif : déterminer \mathbf{u} tel que :

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} V \quad (2)$$

- Indice de performance :

$$V = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R}_u \cdot \mathbf{u} + P_{diss}] dt \quad (3)$$

où :

- $\mathbf{R}_u \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice de pondération des entrées, supposée diagonale, $\mathbf{R}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{u_e}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{u_f} \end{bmatrix}$ avec \mathbf{R}_{u_e} (resp. \mathbf{R}_{u_f}) celle associée aux entrées en effort (resp. en flux) ;
- P_{diss} est la puissance dissipée par tout ou une partie des phénomènes dissipatifs présents dans le système,

$P_{diss} = \mathbf{e}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{R}_{opt}}$ où $\mathbf{e}_{\mathbf{R}_{opt}} \in \mathbb{R}^{r_{opt}}$ (resp. $\mathbf{f}_{\mathbf{R}_{opt}} \in \mathbb{R}^{r_{opt}}$) est le vecteur d'effort (resp. de flux) associé aux phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance ;

- les conditions aux limites sont fixées :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(\mathbf{t}_f) = \mathbf{x}_f \end{cases} \quad (4)$$

- Contraintes : les équations d'état (1) du système étudié (des contraintes supplémentaires comme la saturation des entrées ou des variables d'état ne sont pas ici considérées).

B. D'une formulation port-Hamiltonienne ...

Partons désormais de la formulation port-Hamiltonienne (1) pour démontrer la solution exacte du problème d'optimisation (2) grâce au principe du maximum de Pontryagin.

B.1 Hypothèses

Si le cas général a été démontré dans l'article [10] grâce au concept de dualisation partielle, supposons ici que les entrées (resp. les sorties) associées aux phénomènes dissipatifs sont toutes des efforts (resp. des flux) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_R = \mathbf{e}_R \\ \mathbf{y}_R = \mathbf{f}_R \end{cases} \quad (5)$$

Comme les lois caractéristiques des phénomènes dissipatifs sont supposées être linéaires, nous pouvons également relier ces deux quantités entre elles par l'équation suivante :

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f}_R \quad (6)$$

où $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est la matrice caractéristique associée aux phénomènes dissipatifs.

Ainsi, en remplaçant les équations (5) et (6) dans le système (1), la représentation d'état est alors équivalente à :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_u \cdot \mathbf{u} - \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_R^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}_u^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{y}_R = \mathbf{g}_R^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (7)$$

B.2 Application du principe du maximum de Pontryagin

Appliquons désormais le principe du maximum de Pontryagin [16], [17] au problème d'optimisation décrit à la section II-A. Pour cela, il convient de construire dans un premier temps la *fonction de Pontryagin* $H_p = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{t}) + \lambda^T \cdot \dot{\mathbf{x}}$ (d'où la nécessité d'avoir une représentation d'état explicite) et d'y appliquer ensuite les *conditions d'Euler-Lagrange* pour trouver la solution analytique au problème.

Ici, compte-tenu de l'indice de performance (3) et de la représentation d'état (7), nous obtenons :

$$\begin{aligned} H_p &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R}_u \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{R}_{opt}} \\ &+ \lambda^T \cdot \left[[\mathbf{J} - \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_R^T] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_u \cdot \mathbf{u} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de co-état ou vecteur constitué des multiplicateurs de Lagrange.

De plus, puisque $\mathbf{e}_{\mathbf{R}_{opt}}$ et $\mathbf{f}_{\mathbf{R}_{opt}}$ vérifient tous deux les équations (5), (6) et (7), ceci est encore équivalent à :

$$\begin{aligned} H_p &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R}_u \cdot \mathbf{u} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \cdot \mathbf{R}_{opt}^T \cdot \left[\mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \\ &+ \lambda^T \cdot \left[[\mathbf{J} - \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_R^T] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_u \cdot \mathbf{u} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Les *équations d'Euler-Lagrange* (10) permettent alors d'obtenir la solution optimale pour le triplet $(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})$ conformément aux conditions aux limites fixées \mathbf{x}_0 et \mathbf{x}_f :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H_p(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} = - \frac{\partial H_p(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial H_p(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (10)$$

Celles-ci conduisent notamment dans notre cas à :

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{J} - \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_R^T] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_u \cdot \mathbf{u} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R}_u \cdot \mathbf{u} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \cdot \left[\mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \cdot \mathbf{R}_{opt}^T \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\lambda^T \cdot \left[[\mathbf{J} - \mathbf{g}_R \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_R^T] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_u \cdot \mathbf{u} \right] \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{R}_u \cdot \mathbf{u} + [\lambda^T \cdot \mathbf{g}_u]^T = 0 \quad (13)$$

Remarquons que l'équation (11) n'est autre que l'équation d'état du système étudié tandis que les équations (12) et (13) traduisent les conditions d'optimalité par rapport aux vecteurs λ et \mathbf{u} .

C. ... vers une formulation bond graph

D'après [15], le système port-Hamiltonien régi par les équations (7) peut être représenté de manière équivalente par le modèle bond graph de la Fig. 1². Ce modèle reflète donc d'ores et déjà la première *condition d'optimalité* issue du principe du maximum de Pontryagin. Afin de traduire en langage bond graph les deux autres conditions, à savoir celles par rapport aux vecteurs λ et \mathbf{u} , l'idée est de partir de ce *bond graph initial* et de lui coupler un modèle *bond graph optimisant*. Le modèle *bond graph final* ainsi obtenu permettra de représenter le système d'équations fournissant la solution optimale $(\mathbf{x}_{opt}, \lambda_{opt}, \mathbf{u}_{opt})$: le *bond graph initial* reflétant la condition (11) sur l'état, le *bond graph optimisant* représentant la condition (12) sur le co-état et leur couplage traduisant la prise en compte de l'indice de performance (voir les sections II-C.1 et II-C.2) dont notamment la condition (13) sur les entrées.

²Notons que l'hypothèse que la matrice \mathbf{g}_u (resp. \mathbf{g}_R) est indépendante du vecteur d'état \mathbf{x} se traduit, dans la représentation bond graph causale, par le fait que les chemins causaux entre une entrée (resp. un phénomène dissipatif) et un phénomène de stockage d'énergie ne traversent aucun phénomène non-linéaire.

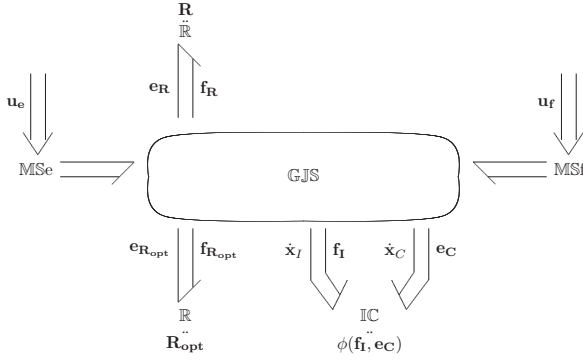


Fig. 1. Modèle *bond graph initial*

C.1 Traduction de la condition sur le co-état

Par souci de clarté, procédons par étapes et notons :

$$\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} \right)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \cdot [\mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}]^T \cdot \mathbf{R}_{opt}^T \cdot [\mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}] \right)$$

$$\mathbf{C} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\lambda^T \cdot [[\mathbf{J} - \mathbf{g}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}}^T] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}] \right)$$

Tout d'abord, comme $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}$ et \mathbf{u} sont indépendants de \mathbf{x} , nous pouvons facilement conclure que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (14)$$

Ensuite, concernant \mathbf{B} , les développements analytiques conduisent à :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) [\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T] \mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{H}^T(\mathbf{x}) \mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}} [\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T] \mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (15) \end{aligned}$$

Enfin, comme $\mathbf{g}_{\mathbf{u}}$, λ et \mathbf{u} sont indépendants de \mathbf{x} , l'expression de \mathbf{C} peut se simplifier conformément aux développements ci-dessous à :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\lambda^T \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\lambda^T \cdot \mathbf{J} \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\lambda^T \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \\ &= -\mathbf{H}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}^T \cdot \lambda + \mathbf{H}^T(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{g}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}}^T]^T \cdot \lambda \quad (16) \end{aligned}$$

Finalement, en récapitulant les expressions (14), (15) et (16) des termes \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} et en utilisant les propriétés respectivement de symétrie³ et d'anti-symétrie des matrices $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ et \mathbf{J} , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}} \cdot [\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T] \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ &\quad + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{J} + \mathbf{g}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}}^T] \cdot \lambda \quad (17) \end{aligned}$$

Maintenant que l'expression de $\dot{\lambda}$ a pu être mise en forme, il convient de traduire celle-ci en *bond graph optimisant*. Afin de faciliter la construction de ce modèle, scindons l'expression de $\dot{\lambda}$ en deux parties telles que :

$$\dot{\lambda} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{\Lambda}_{\lambda} + \mathbf{\Lambda}_{opt}] \quad (18)$$

³Rappelons que cette propriété est due à la réversibilité des phénomènes de stockage d'énergie.

où :

$$\mathbf{\Lambda}_{\lambda} = [\mathbf{J} + \mathbf{g}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}}^T] \cdot \lambda \quad (19)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{opt} = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}} \cdot [\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T] \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}}^T \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (20)$$

Si nous analysons désormais l'expression (19) plus en détails et si nous la comparons à l'équation d'état (7) du système étudié :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : [\mathbf{J} - \mathbf{g}_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}}^T] \cdot \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \downarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\ \lambda : \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{g}_{\mathbf{R}} \cdot [-\mathbf{R}]^T \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}}^T] \cdot \lambda \end{aligned}$$

En rappelant que, par définition, le vecteur constitué des variables de co-énergie \mathbf{x}^* du *bond graph initial* vérifie la relation $\mathbf{x}^* = \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$, nous constatons alors que le terme $\mathbf{\Lambda}_{\lambda}$ peut être vu comme la représentation port-Hamiltonienne d'un *bond graph optimisant* où :

- le vecteur de co-état λ joue le rôle de variable de co-énergie, $\lambda^T = [\lambda_I^T \quad \lambda_C^T]$ avec λ_I (resp. λ_C) le vecteur de variables de co-énergie associé aux stockages d'énergie de type I (resp. C) ;
- la structure de jonction est identique à celle du *bond graph initial* ;
- et où la matrice associée aux phénomènes dissipatifs est $-\mathbf{R}^T$.

En notant \mathbf{x}_{λ} le vecteur constitué des variables d'énergie associé à ce *bond graph optimisant*, calculer la partie $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{\Lambda}_{\lambda}$ de $\dot{\lambda}$ revient alors à caractériser les éléments de stockage d'énergie du *bond graph optimisant* par la relation : $\dot{\lambda} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}_{\lambda}$ (l'article [18] montre en effet que même s'il est plutôt inhabituel de travailler avec les variables de co-énergie en représentation bond graph, il est possible de caractériser les éléments multiports \mathbb{IC} à l'aide de variables de co-énergie prises comme variables d'état)⁴.

Ainsi, construire le *bond graph optimisant*, revient à dupliquer le modèle *bond graph initial* (**étape 1**) puis à le modifier de sorte que les lois caractéristiques associées aux phénomènes de stockage soient remplacées par $\dot{\lambda} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}_{\lambda}$ et que celles associées aux phénomènes dissipatifs soient transposées et de signes opposés (**étape 2**).

Cependant, la traduction de la condition sur le vecteur de co-état n'est pas terminée pour autant : il convient de s'attarder maintenant sur la traduction du terme $\mathbf{\Lambda}_{opt}$. Comme nous l'avons vu lors des calculs précédents, ce terme provient de la dérivation de l'indice de performance par rapport à \mathbf{x} . De plus, comme $\mathbf{f}_{\mathbf{R}_{opt}}$ vérifie également les équations (5) et (7), son expression peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{\Lambda}_{opt} = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}} \cdot [\mathbf{R}_{opt} + \mathbf{R}_{opt}^T] \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{R}_{opt}}$$

Ainsi, le terme $\mathbf{\Lambda}_{opt}$ contribue au calcul d'une partie d'un effort $\mathbf{e}_{\mathbf{R}_{opt}, \lambda}$ du *bond graph optimisant* à travers la structure de jonction caractérisée par la matrice $\mathbf{g}_{\mathbf{R}_{opt}}$. Cette partie de $\mathbf{e}_{\mathbf{R}_{opt}, \lambda}$ étant calculée à partir du flux $\mathbf{f}_{\mathbf{R}_{opt}}$

⁴Remarquons que le vecteur d'état \mathbf{x} du *bond graph initial* modulant la relation $\dot{\lambda} = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}_{\lambda}$, le *bond graph optimisant* sera couplé au *bond graph initial* au niveau des éléments de stockage.

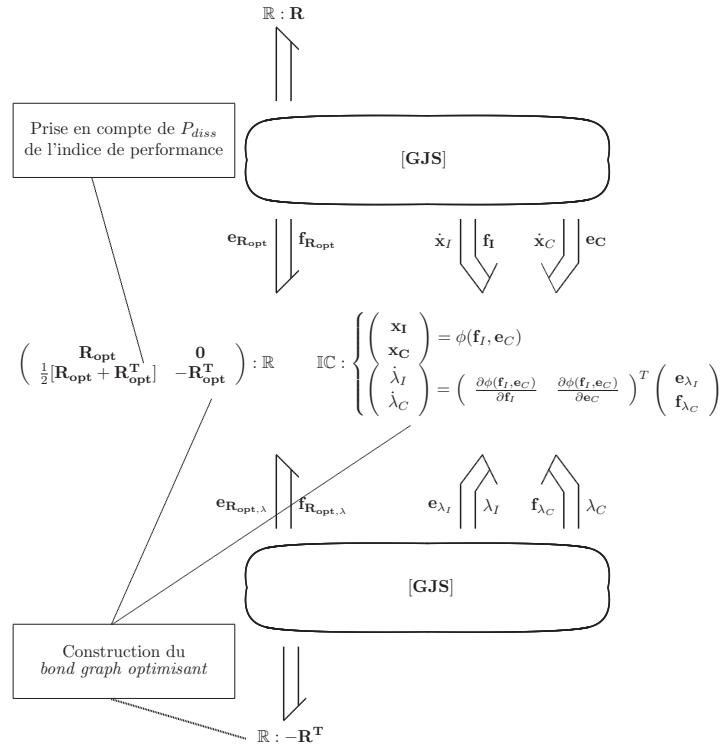


Fig. 2. Traduction bond graph de la *condition d'optimalité* sur le co-état

appartenant au *bond graph initial*, le terme \mathbf{A}_{opt} ne peut alors être traduit qu'en couplant les deux modèles bond graphs comme le montre la Fig. 2 (**étape 3-A**).

C.2 Traduction de la condition sur les entrées

Enfin, il reste à traduire la *condition d'optimalité* sur les entrées. Pour cela, réécrivons cette condition (13) sous la forme suivante :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{g}_{\mathbf{u}}^T \cdot \lambda = \mathbf{0}$$

Cette équation peut être vue comme un bilan (d'effort (resp. de flux) si l'on considère la composante \mathbf{u}_e (resp. \mathbf{u}_f) de \mathbf{u}) entre le vecteur de commande \mathbf{u} issu du *bond graph initial* et le vecteur de co-état λ appartenant au *bond graph optimisant* à travers la structure de jonction caractérisée par la matrice $\mathbf{g}_{\mathbf{u}}$. Traduire en langage bond graph la *condition d'optimalité* sur les entrées consiste alors, selon [10], à coupler les deux bond graphs de sorte que (Fig. 3) :

- de nouveaux éléments \mathbb{R} multiports soient introduits entre la structure de jonction et chaque entrée;
- la matrice caractéristique de ces nouveaux éléments \mathbb{R} multiports soit $\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_e} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_e} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}_e} \end{bmatrix}$ pour les entrées en effort et $\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{u}_f} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{u}_f} & -\mathbf{R}_{\mathbf{u}_f} \end{bmatrix}$ pour celles en flux (**étape 3-B**);
- les sources MSe et MSf soient remplacées par des double détecteurs DeDf dans le *bond graph initial* et par des double sources SeSf d'effort et de flux nuls dans le *bond graph optimisant* (**étape 4**).

D. Les différentes étapes de la procédure

Conformément à ce qui a été démontré à la section précédente, la résolution du problème d'optimisation (2)

par le principe du maximum de Pontryagin peut être représentée par l'intermédiaire d'un couplage entre le *bond graph initial* et un *bond graph optimisant*. Ce *bond graph final* (Fig. 3) peut être construit de manière systématique en effectuant les étapes suivantes.

Etape 1 : Duplication

Dupliquer le *bond graph initial* (Fig. 1) c'est-à-dire le modèle bond graph correspondant au système étudié. La partie ainsi dupliquée sera désignée par la suite par *bond graph optimisant*.

Etape 2 : Caractéristiques du *bond graph optimisant*

Dans le *bond graph optimisant*, remplacer les matrices caractéristiques \mathbf{R} des éléments \mathbb{R} par $-\mathbf{R}^T$ et modifier les lois caractéristiques associées aux phénomènes de stockage d'énergie de telle sorte que :

- pour les éléments \mathbb{I} : $\mathbf{f}_I = \phi_I(\mathbf{x}_I)$ devienne $\dot{\lambda}_I = \frac{d(\phi_I(\mathbf{x}_I))}{d\mathbf{x}_I} \cdot \mathbf{e}_{\lambda_I}$;
- pour les éléments \mathbb{C} : $\mathbf{e}_C = \phi_C(\mathbf{x}_C)$ devienne $\dot{\lambda}_C = \frac{d(\phi_C(\mathbf{x}_C))}{d\mathbf{x}_C} \cdot \mathbf{f}_{\lambda_C}$.

Etape 3 : Prise en compte de l'indice de performance

A - Pour les phénomènes dissipatifs pris en compte dans l'indice de performance, coupler les éléments \mathbb{R} multiports présents à la fois dans le *bond graph initial* et *optimisant* et correspondants au même phénomène. Ensuite, selon [10], ajouter sous la diagonale de la matrice caractéristique de l'élément, la sous-matrice $\frac{1}{2}[\mathbf{R}_{\text{opt}} + \mathbf{T}]$ où $\mathbf{R}_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{rr} & \mathbf{R}_{cr} \\ \mathbf{R}_{rc} & \mathbf{R}_{cc} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{rr}^T & -\mathbf{R}_{cr}^T \\ -\mathbf{R}_{rc}^T & \mathbf{R}_{cc}^T \end{bmatrix}$ (les indices r et c correspondent respectivement à une causalité résistance

A.2 Problème d'optimisation

Supposons maintenant que le but de l'étude est de déterminer la commande \mathbf{u} permettant de minimiser la puissance dissipée par les frottements visqueux situés sur l'arbre de sortie. L'étude s'apparente alors à un problème d'optimisation avec pour :

- Objectif : déterminer \mathbf{u} tel que :

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} V \quad (21)$$

- Indice de performance :

$$V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{R_u} + \frac{b_c}{J_c^2} \cdot x_3^2 \right] dt \quad (22)$$

avec des conditions fixées sur les temps et les états initiaux et finaux ;

- Contraintes : les équations d'état du système⁶.

B. Construction du *bond graph optimisant*

En appliquant au *bond graph initial* (Fig. 5) la procédure décrite à la section II-D, nous obtenons le *bond graph final* (Fig. 6) correspondant au problème d'optimisation donné (21)-(22).

L'exploitation de ce modèle *bond graph final* conduit au système d'équations suivant, système qui aurait été obtenu en appliquant le principe du maximum de Pontryagin de manière analytique :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u - R \cdot \phi^{-1}(x_1) - \frac{k_c}{J_m} \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = k_c \cdot \phi^{-1}(x_1) - \frac{b_m}{J_m} \cdot x_2 - \frac{k}{N} \cdot x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{b_c}{J_c} \cdot x_3 + k \cdot x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{N \cdot J_m} \cdot x_2 - \frac{1}{J_c} \cdot x_3 \\ \dot{\lambda}_1 = R \cdot \frac{\partial \phi^{-1}(x_1)}{\partial x_1} \cdot \lambda_1 - k_c \cdot \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{k_c}{J_m} \cdot \lambda_1 + \frac{b_m}{J_m} \cdot \lambda_2 - \frac{1}{N \cdot J_m} \cdot \lambda_4 \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{b_c}{J_c^2} \cdot x_3 + \frac{b_c}{J_c} \cdot \lambda_3 + \frac{1}{J_c} \cdot \lambda_4 \\ \dot{\lambda}_4 = \frac{k}{N} \cdot \lambda_2 - k \cdot \lambda_3 \\ u = -R_u \cdot \lambda_1 \\ y = \phi^{-1}(x_1) - \lambda_1 \\ y_{R_1} = \phi^{-1}(x_1) \\ y_{R_2} = \frac{1}{J_m} \cdot x_2 \\ y_{R_3} = \frac{1}{J_c} \cdot x_3 \end{cases}$$

IV. CONCLUSION

Le contexte des travaux présentés dans ce papier est le couplage d'une méthodologie de dimensionnement développée au laboratoire AMPERE et de l'optimisation dynamique en étudiant comment peut être traité un problème d'optimisation via l'outil *bond graph*. Contrairement à l'approche numérique adoptée traditionnellement, notre approche repose ici sur le calcul variationnel et propose de montrer qu'il est possible de représenter, sous la forme d'un modèle *bond graph*, le système d'équations fournissant la solution exacte d'un problème de commande optimale. Si de récents travaux ont permis notamment

⁶Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de déterminer au préalable les équations d'état du système pour appliquer la procédure de construction du *bond graph optimisant*.

d'établir, dans le cas de systèmes linéaires et invariants dans le temps, une procédure systématique de construction d'un tel *bond graph*, l'enjeu de cet article a consisté à élargir le champ d'application de cette procédure aux systèmes à stockages d'énergie non-linéaires.

En partant de la formulation port-Hamiltonienne du problème et en appliquant de manière analytique le principe du maximum de Pontryagin, nous avons alors démontré le bien-fondé de cette procédure. Celle-ci consiste à coupler un modèle *bond graph optimisant* au modèle *bond graph initial* du système étudié et cela en quatre étapes :

- 1 - Duplication du *bond graph initial* ;
- 2 - Caractéristiques du *bond graph optimisant* ;
- 3 - Prise en compte de l'indice de performance ;
- 4 - Affectation de la bicausalité au *bond graph final*.

L'exploitation du modèle *bond graph final* conduit alors à un système d'équations algébro-différentielles identique aux *conditions d'optimalité* obtenues en appliquant la méthode de Pontryagin de manière analytique.

Du côté de l'optimisation, les avantages d'une telle procédure résident notamment dans son caractère graphique mais aussi systématique : l'ingénieur n'a plus besoin de développement analytique pour appliquer le principe de Pontryagin et a désormais une vue plus « physique » du problème d'optimisation. Cette procédure lui permet notamment :

- une visualisation et une interprétation physique possible, via le *bond graph optimisant*, du modèle dual souvent utilisé dans les problèmes d'optimisation ;
- une visualisation graphique de l'impact de chaque critère d'optimisation, d'une part sur la puissance dissipée (par l'intermédiaire des éléments \mathbb{R} multiports de couplage), et d'autre part sur les entrées (grâce aux double sources et à la propagation de la bicausalité) ;
- la possibilité d'ajouter ou de retirer facilement des critères d'optimisation (possibilité d'optimiser tout ou une partie des entrées et de la puissance dissipée en ajoutant ou retirant des éléments \mathbb{R} multiports de couplage).

Du côté de la méthodologie de dimensionnement, l'intérêt pour nous réside surtout dans la possibilité désormais d'élargir la classe de problèmes pouvant être traités. Cette procédure nous permettra notamment de diminuer les exigences en termes de rédaction du cahier des charges (les spécifications n'auront plus besoin d'être spécifiquement traduites comme des fonctions du temps) et de traiter des systèmes non carrés (ce qui est généralement le cas puisque les contraintes de conception sont très souvent en sur-nombre par rapport aux degrés de liberté disponibles).

Cependant, si la résolution d'un problème d'optimisation à un niveau exclusivement *bond graph* nous paraît prometteuse, il convient de poursuivre nos recherches avant tout couplage avec notre méthodologie de dimensionnement. Le nombre d'hypothèses prises pour l'application de la procédure doit être réduit au maximum de manière à pouvoir traiter des systèmes les plus généraux possibles et des contraintes d'optimisation exprimées sous la forme d'inégalités. Enfin, si l'approche variationnelle nous permet ici de résoudre le problème de manière analytique, celle-ci nous fournit uniquement un système d'équations

