



**HAL**  
open science

**Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux associés à un poids ayant un zéro d'ordre fractionnaire sur le cercle. Applications aux valeurs propres d'une classe de matrices aléatoires unitaires.**

Philippe Rambour, Abdellatif Seghier

► **To cite this version:**

Philippe Rambour, Abdellatif Seghier. Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux associés à un poids ayant un zéro d'ordre fractionnaire sur le cercle. Applications aux valeurs propres d'une classe de matrices aléatoires unitaires.. 2009. hal-00371376v2

**HAL Id: hal-00371376**

**<https://hal.science/hal-00371376v2>**

Preprint submitted on 27 Apr 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux associés à un poids ayant un zéro d'ordre fractionnaire sur le cercle. Applications aux valeurs propres d'une classe de matrices aléatoires unitaires.

Philippe Rambour\*      Abdellatif Seghier†

27 avril 2009

**Résumé**

**Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux associés à un poids ayant un zéro fractionnaire sur le cercle. Applications aux valeurs propres de certaines matrices aléatoires unitaires**

Cet article s'intéresse aux polynômes orthogonaux  $\Phi_N$  correspondant aux poids de type  $(1 - \cos \theta)^\alpha c$  où  $c$  est une fonction suffisamment régulière et  $\alpha \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ . On décrit le comportement asymptotique des coefficients et de la valeur en 1 de ces polynômes et de leur dérivées lorsque  $N$  tend vers l'infini. Ceci nous permet d'obtenir une asymptotique du noyau de Christofel-Darboux associé à un tel poids et de calculer la loi conjointe des valeurs propres d'une famille de matrices aléatoires unitaires. Les démonstrations des résultats relatifs aux polynômes orthogonaux sont essentiellement basées sur les propriétés de l'inverse de la matrice de Toeplitz de symbole  $f$ .

**Abstract**

**Asymptotic behavior of orthogonal polynomials on the circle, with respect to a weight having a fractional zero on the torus. Applications to the eigenvalues of certain unitary random matrices.**

This paper is devoted to the orthogonal polynomial on the circle, with respect to a weight of type  $f = (1 - \cos \theta)^\alpha c$  where  $c$  is a sufficiently smooth function and  $\alpha \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ . We obtain an asymptotic expansion of the coefficients of this polynomial and of  $\Phi_N^{(p)}(1)$  for all integer  $p$ . These results allow us to obtain an asymptotic expansion of the associated Christofel-Darboux kernel, and to compute the distribution of the eigenvalues of a family of random unitary matrices. The proof of the results related with the orthogonal polynomials are essentially based on the inversion of Toeplitz matrix associated to the symbol  $f$ .

**Mathematical Subject Classification (2000)** Primaire 47B39 ; Secondaire 47BXX.

**Mots clef**

**Inversion des matrices de Toeplitz , matrices aléatoires unitaires, Polynômes orthogonaux.**

---

\*Université de Paris Sud, Bâtiment 425; F-91405 Orsay Cedex; tel : 01 69 15 57 28 ; fax 01 69 15 60 19  
e-mail : philippe.rambour@math.u-psud.fr

†Université de Paris Sud, Bâtiment 425; F-91405 Orsay Cedex; tel : 01 69 15 57 29 ; fax 01 69 15 72 34  
e-mail : abdelatif.seghier@math.u-psud.fr

# 1 Introduction.

Il est bien connu qu'une matrice aléatoire est caractérisée par la loi de probabilité de la distribution de ses valeurs propres. Lorsqu'il s'agit d'étudier des matrices aléatoires unitaires, le cas le plus étudié est celui de l'ensemble circulaire de Dyson où cette densité est de la forme, pour une matrice unitaire  $N \times N$  (voir [5], [4], [6], [23]) :

$$P_N(\theta_1, \dots, \theta_N) = c_N \prod_{1 \leq j < k \leq N} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2.$$

Il faut remarquer que dans le cas des matrices aléatoires unitaires c'est bien sûr la distribution des arguments des valeurs propres qu'on étudie.

Cet ensemble est considéré comme une bonne représentation des phénomènes physiques qui ont motivé initialement l'étude des matrices aléatoires. Il est naturel de chercher à l'étendre à un ensemble plus vaste où la loi des valeurs propres est de la forme ( voir [14] et [22]) :

$$P_N(\theta_1, \dots, \theta_N) = \prod_{1 \leq j \leq N} f(\theta_j) \prod_{1 \leq j < k \leq N} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2, \quad (1)$$

(ensemble circulaire de Dyson généralisé) où  $f$  est une fonction positive, intégrable sur le tore. Alors que, dans le cas de l'ensemble circulaire de Dyson, la fonction de corrélation des arguments des valeurs propres se calcule en fonction des polynômes orthogonaux associés à la mesure de Haar du tore ([20]), dans le cas de l'ensemble circulaire de Dyson généralisé cette fonction de corrélation se calcule au moyen des noyaux de Christoffel-Darboux  $K_N$  associés aux polynômes orthogonaux unitaires ( $\Phi_n$  où  $1 \leq n \leq N$ ) associés au poids  $f$ . On définit généralement  $K_N$  par (voir [19]) :

$$K_N(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) = \sqrt{f(e^{i\theta})} \sqrt{f(e^{i\theta'})} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{h_m} \overline{\Phi_m(e^{i\theta})} \Phi_m(e^{i\theta'})$$

avec

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{\Phi_m(e^{i\theta})} \Phi_m(e^{i\theta}) d\theta = h_m.$$

On sait que, pour  $z \neq 0$ , on peut écrire aussi, si  $\theta \neq \theta'$ , et avec  $\Phi_N^*(z) = z^N \overline{\Phi_N(\frac{1}{z})}$ ,

$$K_N(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) = \frac{1}{h_N} \sqrt{f(e^{i\theta})} \sqrt{f(e^{i\theta'})} \frac{\overline{\Phi_N^*(e^{i\theta})} \Phi_N^*(e^{i\theta'}) - \overline{\Phi_N(e^{i\theta})} \Phi_N(e^{i\theta'})}{(1 - e^{i(\theta' - \theta)})}.$$

Dans le cas unitaire, le lien entre ce noyau et la fonction de corrélation est rappelé dans le cours de la démonstration. La fonction de corrélation étant définie, un des problèmes relatifs aux matrices aléatoires est de déterminer la distribution des valeurs propres lorsque l'entier  $N$  tend vers l'infini. Ce problème se subdivise en fait en deux. D'une part il s'agit de déterminer la distribution des arguments de ces valeurs propres sur un intervalle  $]\epsilon, 2\pi - \epsilon[$  avec  $\epsilon > 0$  pour les matrices aléatoires unitaires ou la distribution des valeurs propres elles-mêmes dans l'intervalle  $]0, +\infty[$  pour les matrices aléatoires hermitiennes (voir [21], [22], [23]). D'autre part on recherche cette distribution au voisinage de zéro pour les matrices aléatoires unitaires, ou au voisinage de zéro ou de plus l'infini pour les matrices aléatoires hermitiennes.

Dans le cas de matrices aléatoires Hermitiennes Gaussiennes et grâce à des résultats qui ont été obtenus sur les polynômes orthogonaux qui leur sont associés (on peut consulter, par exemple, [1], [3], [11], [15] ...), on dispose de nombreux renseignements sur la loi des valeurs propres “ au bord ” du spectre (c’est à dire les valeurs propres proches de zéro ou tendant vers l’infini).

Dans ce cadre Kuijlaars et Vanlessen [11] étudient des matrices aléatoires Gaussiennes (hermitiennes) dont la loi des valeurs propres est donnée par

$$P^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{Z_n} \prod_{j=1}^N w_N(x_j) \prod_{i < j} |x_i - x_j|^2,$$

où  $w_N$  un poids de la forme  $w_n(x) = |x|^{2\alpha} e^{-NV(x)}$ , pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $V$  une fonction potentielle qui peut par exemple être une fonction polynôme. Les auteurs de l’article montrent que la fonction de corrélation des valeurs propres autour de l’origine est donnée par un noyau de la forme

$$\mathbb{J}_\alpha^\alpha(u, v) = \pi \sqrt{u} \sqrt{v} \frac{J_{\alpha+1/2}(\pi u) J_{\alpha-1/2}(\pi v) - J_{\alpha-1/2}(\pi u) J_{\alpha+1/2}(\pi v)}{2(u - v)},$$

où les fonctions  $J_{\alpha+1/2}$  et  $J_{\alpha-1/2}$  sont les fonctions de Bessel usuelles.

Dans le présent article, nous obtenons un résultat du même type relativement à une classe de matrices aléatoires unitaires. En fait nous étudions les coefficients des polynômes orthogonaux  $\Phi_N$  de degré  $N$  associés au symbole

$$f(e^{i\theta}) = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha} c(e^{i\theta}) \quad (2)$$

avec  $c$  une fonction régulière sur le tore et  $\alpha \in ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ . En effet nous obtenons dans un premier temps une expression asymptotique quand  $N$  tend vers l’infini des coefficients des polynômes orthogonaux puis nous en déduisons la loi des arguments des valeurs propres au voisinage de l’origine quand  $N$  tend vers l’infini.

Nous donnons d’abord (théorèmes 1 et 2) l’asymptotique quand  $N$  tend vers l’infini des coefficients des polynômes  $\Phi_N^*$  et  $\Phi_N$ . Pour ce faire nous utilisons des méthodes basées

sur des résultats antérieurs (se rapporter à [16] ou [17]). Si l’on pose  $\Phi_N(e^{i\theta}) = \sum_{u=0}^N \tilde{\beta}_u e^{iu\theta}$

notre énoncé se subdivise en trois parties qui correspondent à trois zones distinctes de l’ensemble des indices. Nous donnons d’abord les indices qui correspondent “aux bords” de l’ensemble des indices, c’est à dire des entiers  $u$  tels que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{u}{N} = 0$  ou  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{u}{N} = 1$  et les indices qui se trouvent “au coeur” de l’ensemble des indices, ce qui correspond aux entiers  $u$  tels que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{u}{N} = x$  avec  $0 < x < 1$ . Ces expressions nous permettent ensuite de

calculer l’asymptotique de  $\Phi_N^{(p)}(1)$  et  $\Phi_N^{*(p)}(1)$  (voir les théorèmes 1 et 4), pour un entier  $p$  fixé. Nous pouvons alors calculer une représentation asymptotique du noyau de Christoffel-Darboux d’ordre  $N$  associé au symbole  $\theta \rightarrow |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha} c(e^{i\theta})$ . Si  $-\pi < u, v \leq \pi$  et  $u \neq v$ , on a

$$K_N(e^{iu/N}, e^{iv/N}) = \frac{N(uv)^\alpha}{\Gamma^2(\alpha) c_1(1)} \frac{\rho(\alpha, -u) \rho(\alpha, v) - \rho(\alpha, u) \rho(\alpha, -v) e^{i(v-u)}}{i(u - v)} + o(N) \quad (3)$$

où  $\rho$  est une fonction qui sera précisée plus loin (voir les théorèmes 5 et 6), et dont l'expression est différente selon que  $\alpha \in ]-\frac{1}{2}, 0[$  ou que  $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$ .

Notons maintenant  $\theta_1^N, \dots, \theta_N^N$  les arguments contenus dans l'intervalle  $] -\pi, \pi[$  d'une matrice aléatoire  $U_N$  de taille  $N \times N$  suivant la loi donnée dans l'égalité (1) avec un poids

$W$  comme précisé en (2). Si l'on pose  $F_N = \sum_{i=1}^N \delta_{\theta_i^N}$  les résultats précédents permettent d'établir, si  $-\pi < u < v \leq \pi$  (voir les théorèmes 5 et 6)

i)

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(F_N\left[\frac{u}{N}, \frac{v}{N}\right] = m\right) = F_\infty(a, b, m)$$

où  $F_\infty$  est une fonction définie au moyen du déterminant d'un opérateur de Fredholm de noyau  $K = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{K_N}{N}$ .

ii) Si  $q$  est un entier supérieur ou égal à 2

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(F_N\left[\frac{u}{N^q}, \frac{v}{N^q}\right] = m\right) = 0;$$

Heuristiquement, cela signifie que lorsque  $N$  tend vers l'infini il existe des valeurs propres de la forme  $e^{i\theta_N}$  avec  $\theta_N = O(\frac{1}{N})$ , mais qu'il n'en existe pas de la forme  $e^{i\theta'_N}$  avec  $\theta'_N = O(\frac{1}{N^q})$  pour  $q > 1$ .

La première partie de nos résultats se rapproche en le complétant du travail de Martinez-Finkelstein, Mac-Laughin et Saff qui dans [13] étudient une famille de polynômes orthogonaux  $\tilde{\Phi}_N$  orthogonaux pour le poids

$$W(z) = w(z) \prod_{k=1}^m |z - a_k|^{2\beta_k} \quad z \in \mathbb{T}, \quad (4)$$

où la fonction  $w$  est suffisamment régulière et où  $W$  vérifie les conditions de Szegő

$$\int_{\mathbb{T}} W(z) dz > 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{T}} \ln(W(z)) dz > -\infty. \quad (5)$$

Dans l'article ([13]) ces auteurs donnent notamment le comportement asymptotique de  $\Phi_N(z)$  pour  $z \neq a_k \quad 1 \leq k \leq m$ , et étudient également les zéros des polynômes  $\tilde{\Phi}_N$ , leur principal outil de démonstration étant la méthode de Riemann-Hilbert.

A la fin de cet article, nous proposons un appendice dans lequel nous donnons des tableaux de valeurs numériques permettant de comparer  $\Phi_N(1)$  et les quantités données dans les théorèmes 3 et 4 pour des valeurs de  $\alpha$  égales à  $-0,275, -0,150, 0,025, 0,1, 0,225$ .

## 2 Notations et définitions. Enoncé des résultats

Avant d'énoncer nos principaux résultats, nous introduisons des notations et définitions.

### 2.1 Notations. Définitions

Etant donnée  $f \in L^1(\mathbb{T})$  une fonction définie sur le cercle unité, on appelle matrice de Toeplitz de taille  $(N+1) \times (N+1)$  associée au symbole  $f$  la matrice

$$T_N(f) = \left(\widehat{f}(i-j)\right)_{0 \leq i, j \leq N} \quad (6)$$

où

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

désigne la suite des coefficients de Fourier de  $f$ .

Le lien entre les matrices de Toeplitz et les polynômes orthogonaux est bien connu (voir, par exemple, [12]). Ainsi nous avons

$$\Phi_N^*(z) = \sum_{k=0}^N \frac{(T_N(f))_{k+1,1}^{-1}}{(T_N(f))_{1,1}^{-1}} z^k, \quad |z| = 1. \quad (8)$$

Les polynômes  $\Phi_n^* \sqrt{(T_n(f))_{1,1}^{-1}}$  sont souvent appelés polynômes prédicteurs. Comme le montre la relation ci dessus, leurs coefficients sont, à normalisation près, ceux de la première colonne de la matrice  $T_N(f)^{-1}$ . Ce sont d'abord ces coefficients que nous donnons dans les théorèmes 1 et 2.

D'autre part la relation

$$\Phi_N^*(z) = z^N \bar{\Phi}_N\left(\frac{1}{z}\right), \quad (9)$$

implique que les coefficients des polynômes orthogonaux correspondent, à une normalisation près, aux termes de la dernière colonne de la matrice  $T_N^{-1}(f)$ . Nous utiliserons la notation, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{Z}$

$$\chi^k : e^{i\theta} \mapsto \chi^k(\theta) = e^{ik\theta}.$$

On notera  $H_+$  (resp.  $H_-$ ) le sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{T})$  constitué des fonctions  $u$  dont les coefficients de Fourier  $\widehat{f}(k) = 0$  quand  $k < 0$  (resp.  $k \geq 0$ ). On notera par  $\pi_{\pm} : L^2(\mathbb{T}) \mapsto H_{\pm}$  les projecteurs orthogonaux respectifs.

Nous rappelons la définition de l'espace de Beurling. On commence par introduire la notion de poids de Beurling : une suite  $(\mu_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est dite poids de Beurling si elle satisfait aux trois propriétés suivantes

$$\begin{cases} (i) & \mu_j \geq 1, & j \in \mathbb{Z} \\ (ii) & \mu_j = \mu_{-j}, & j \in \mathbb{Z} \\ (iii) & \mu_{j+k} \leq \mu_j \mu_k, & j, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (10)$$

La classe de Beurling  $\mathcal{W}_{\mu}$  associée au poids  $\mu = (\mu_j)$  est alors définie comme suit

$$\mathcal{W}_{\mu} = \{w \in L^1(\mathbb{T}) : \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu_j |\widehat{w}(j)| < \infty\}. \quad (11)$$

Soit  $f$  un symbole tel que

$$f(e^{i\theta}) = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha} c(e^{i\theta})$$

où  $c$  est une fonction supposée être strictement positive sur cercle unité et appartenant à un espace de Beurling. Nous noterons  $g_{\alpha} \in H_+$  la fonction analytique dans le disque unité ouvert, dite fonction extérieure, vérifiant

$$f = |g_{\alpha}|^2,$$

et  $c_1$  la fonction de  $H^+$  vérifiant

$$c = c_1 \bar{c}_1$$

nous noterons par  $(\beta_k^{(\alpha)})$  la suite des coefficients de Fourier de  $1/g_{\alpha}$ , et enfin pour alléger les notations nous supposerons  $(\beta_k^{(0)}) = 1$ .

## 2.2 Énoncé des résultats.

### 2.2.1 Polynômes orthogonaux

Nous nous intéressons, en premier lieu, au comportement asymptotique de la première colonne de l'inverse d'une matrice de Toeplitz  $T_N(f)$ . Nous donnons d'abord un énoncé qui porte sur les coefficients situés sur les "bords" de la première colonne de l'inverse (voir [10]).

**Théorème 1** *Soit  $T_N(f)$  une matrice de Toeplitz dont le symbole  $f$  s'écrit*

$$f = |1 - \chi|^{2\alpha} c$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha| < \frac{1}{2}$  et où la fonction  $c > 0$  est supposée appartenir à une classe de Beurling  $\mathcal{W}_\mu$  avec  $\mu_j \geq \frac{3}{2}$  pour tout entier  $j$ . Pour tout entier naturel  $k$ , tel que  $\frac{k}{N} \rightarrow 0$  lorsque  $N \rightarrow \infty$  on a alors

i)

$$T_N(f)^{-1}_{k+1,1} = \left( \beta_k^{(\alpha)} - \frac{\alpha^2}{N} \beta_k^{(\alpha+1)} \right) + R_N, \quad N \rightarrow \infty \quad (12)$$

avec  $R_N = O(\frac{k^{\alpha+1}}{N^2})$  si  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ , et avec  $R_N = O(\frac{k}{N^2})$  si  $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ .

ii)

$$(T_N^{-1}(f))_{N+1-k,1} = \left( \frac{c(1)}{\bar{c}_1(1)} \beta_k^{(\alpha+1)} \right) \frac{\alpha}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty. \quad (13)$$

La convergence est uniforme sur tout intervalle  $[0, [N\epsilon]]$  et sur  $(N, N - [N\epsilon])$  pour  $\epsilon$  assez petit.

On a d'autre part l'énoncé suivant qui porte sur les éléments du "coeur" de la première colonne de l'inverse ([16] et [17])

**Théorème 2** *Si  $0 < x < 1$  est un réel donné, on a, avec les mêmes hypothèses que pour le théorème 1*

$$c_1(1) (T_N^{-1}(f))_{[Nx]+1,1} = K_\alpha(x) N^{\alpha-1} + o(N^{\alpha-1}), \quad N \rightarrow \infty \quad (14)$$

où

$$K_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha.$$

Le théorème 2 la convergence est uniforme sur tout intervalle  $[\delta_1, \delta_2]$  pour  $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ .

Avec les hypothèses que nous nous sommes données, les termes calculés ci-dessus correspondent aux coefficients de  $\Phi_N^*$ . Ceux de  $\Phi_N$  en sont alors déduits à partir de la relation 9. Ce sont ces coefficients que nous donnons maintenant.

**Corollaire 1** *Posons  $\Phi_N(z) = \sum_{u=0}^{N+1} \tilde{\beta}_u z^u$  le polynôme orthogonal associé au symbole  $f =$*

$|1 - \chi|^{2\alpha} c$ . Avec les mêmes hypothèses que pour les théorèmes 1 et 2 on a, si  $k/N \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow +\infty$

1.

$$\tilde{\beta}_{N-k} = \left( \overline{\beta_k^{(\alpha)}} - \frac{\alpha^2}{N} \overline{\beta_k^{(\alpha+1)}} \right) + R_N, \quad N \rightarrow \infty$$

avec  $R_N = O\left(\frac{k^{\alpha+1}}{N^2}\right)$  si  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ , et avec  $R_N = O\left(\frac{k}{N^2}\right)$  si  $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ .

2.

$$\tilde{\beta}_k = \left( \frac{\bar{c}_1(1)}{c_1(1)} \overline{\beta_{N-k}^{(\alpha+1)}} \right) \frac{\alpha}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

De plus, si  $0 < x < 1$  est un réel donné, on a alors

$$\tilde{\beta}_{[Nx]} = K_\alpha(1-x)N^{\alpha-1} + o(N^{\alpha-1}), \quad N \rightarrow \infty \quad (15)$$

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, le calcul du noyau de Christoffel-Darboux que nous nous proposons d'effectuer pour obtenir les noyaux annoncés nous oblige à déterminer avec précision les quantités  $\Phi_N^{(p)}(1)$  et  $(\Phi_N^*)^{(p)}(1)$  pour tout entier naturel  $p$ . C'est ce que nous faisons dans les théorèmes 3 et 4. Il est à noter que ces résultats, bien que donnés seulement dans le cas d'une seule singularité, prolongent les résultats de [13], puisque dans cet article les valeurs prises en les singularités par les polynômes orthogonaux sont inaccessibles.

**Théorème 3** Avec les hypothèses des théorèmes (1) et (2) on obtient

- Si  $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$  on a

$$\Phi_N^*(1) = \frac{N^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{c_1(1)} \left( \int_0^1 x^{\alpha-1} ((1-x)^\alpha - 1) dx + \frac{1}{\alpha} \right) + o(N^\alpha). \quad (16)$$

- D'autre part, pour un entier  $j$  strictement positif fixé, dans le cas  $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$  et pour un entier  $j$  positif fixé dans le cas  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  on a

$$(\Phi_N^*)^{(j)}(1) = \frac{N^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{c_1(1)} \int_0^1 x^{\alpha-1+j} (1-x)^\alpha dx + o(N^{\alpha+j}). \quad (17)$$

**Remarque 1** On peut remarquer que pour un entier  $j$  strictement positif et suffisamment petit devant  $N$  toujours avec l'hypothèse  $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$  on a en fait

$$(\Phi_N^*)^{(j)}(1) = N^{\alpha+j} \frac{\Gamma(\alpha+j)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+j+1)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)c_1(1)} + o(N^{\alpha+j}).$$

On obtient le même genre d'énoncé pour les polynômes orthogonaux.

**Théorème 4** Avec les hypothèses des théorèmes 1 et 2 on obtient

- Si  $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$  et si  $j$  un entier positif on a

$$\Phi_N^{(j)}(1) = \frac{N^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\bar{c}_1(1)} \left( \int_0^1 x^{\alpha-1} ((1-x)^{\alpha+j} - 1) dx + \frac{1}{\alpha} \right) + o(N^\alpha). \quad (18)$$

- D'autre part, pour un entier  $j$  positif fixé dans le cas  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  nous pouvons écrire

$$(\Phi_N)^{(j)}(1) = \frac{N^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\bar{c}_1(1)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\alpha+j} dx + o(N^{\alpha+j}). \quad (19)$$



**Remarque 2** On peut là aussi remarquer que pour un entier  $j$  strictement positif suffisamment petit devant  $N$  et toujours avec  $\frac{1}{2} > \alpha > 0$  on a

$$(\Phi_N)^{(j)}(1) = N^{\alpha+j} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+j+1)}{\Gamma(2\alpha+j+1)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\bar{c}_1(1)} + o(N^{\alpha+j}).$$

### 2.2.2 Matrices aléatoires unitaires.

Soit maintenant  $U_N$  une matrice aléatoire unitaire de taille  $N$ . Notons  $\theta_i^N$   $1 \leq i \leq N$  les arguments des valeurs propres de  $U_N$  que l'on suppose classés dans l'ordre croissant dans  $]-\pi, +\pi]$ . On suppose que ces arguments ont pour densité de probabilité

$$P_N(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = \prod_{j=1}^N f(e^{i\theta_j}) \prod_{j<i}^N |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_i}|^2$$

avec  $f(e^{i\theta}) = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha} c_1(e^{i\theta})$  et où  $c_1$  est dans une classe de Beurling d'indice supérieur ou égal à  $\frac{3}{2}$ . Nous posons ensuite  $F_N = \sum_{i=1}^N \delta_{\theta_i^N}$  où  $\delta_{\theta_i^N}$  désigne la mesure de Dirac de support  $\theta_i^N$ . Dans la suite nous supposons enfin que  $u$  et  $v$  sont deux réels tels que  $-\pi < u \leq v \leq \pi$ . On a alors les énoncés suivants qui précisent la loi au voisinage de 1 des valeurs propres des matrices aléatoires unitaires étudiées dans cet article.

**Théorème 5** Soit  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ . Posons, pour tout  $u \in \mathbb{R}$

$$\psi(\alpha, u) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha e^{iux} dx, \quad \tau(\alpha, u) = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\alpha e^{iux} dx$$

Nous pouvons alors écrire, avec les hypothèses ci-dessus, et pour tout entier positif  $m$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(F_N\left[\frac{u}{N}, \frac{v}{N}\right] = m\right) = \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{d}{d\gamma}\right)^m \det[(Id - \gamma\mathcal{K})|_{L^2(I)}] \Big|_{\gamma=1} \quad (20)$$

où  $I = [u, v]$  et où  $\mathcal{K}$  est l'opérateur de Fredholm de noyau  $K$  avec

- si  $\theta \neq \theta'$

$$(\theta, \theta') \rightarrow \frac{\theta^\alpha \theta'^\alpha}{\Gamma^2(\alpha)c(1)e^{-i\theta}} \left( \frac{e^{i\theta}\psi(\alpha, -\theta)\psi(\alpha, \theta') - \psi(\alpha, \theta)\psi(\alpha, -\theta')e^{i\theta'}}{i(\theta' - \theta)} \right).$$

- et si  $\theta = \theta'$ ,

$$\theta \rightarrow (-2\Re(\psi(\alpha, \theta)\tau(\alpha, -\theta)) + |\psi(\alpha, \theta)|^2) \frac{\theta^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha)c(1)}.$$

**Remarque 3** On a en particulier le résultat

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(F_N\left[\frac{u}{N}, \frac{v}{N}\right] = 0\right) = \det[(Id - \mathcal{K})|_{L^2(I)}] \quad (21)$$

Le théorème suivant permet d'envisager le cas où  $\alpha$  est négatif.

**Théorème 6** Soit  $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ . Posons, pour tout  $u, v \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\psi}(\alpha, u) = \int_0^1 x^{\alpha-1} ((1-x)^\alpha e^{-iux} - 1) dx + \frac{1}{\alpha}.$$

Nous pouvons alors écrire, avec les hypothèses du théorème 5,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(F_N\left[\frac{u}{N}, \frac{v}{N}\right] = m\right) = \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{d}{d\gamma}\right)^m \det[(Id - \gamma \tilde{\mathcal{K}})|_{L^2(I)}] \Big|_{\gamma=1} \quad (22)$$

où  $I = [u, v]$  où  $\tilde{\mathcal{K}}$  est l'opérateur de Fredholm de noyau  $\tilde{K}$  avec  
- si  $\theta \neq \theta'$

$$(\theta, \theta') \rightarrow \frac{\theta^\alpha \theta'^\alpha}{\Gamma^2(\alpha) c(1) e^{-i\theta}} \left( \frac{e^{i\theta} \tilde{\psi}(\alpha, -\theta) \tilde{\psi}(\alpha, \theta') - \tilde{\psi}(\alpha, \theta) \tilde{\psi}(\alpha, -\theta') e^{i\theta'}}{i(\theta' - \theta)} \right).$$

- Ou encore si  $\theta = \theta'$ ,

$$\theta \rightarrow \left( -2\Re \left( \tilde{\psi}(\alpha, \theta) \tau(\alpha, -\theta) \right) + |\tilde{\psi}(\alpha, \theta)|^2 \right) \frac{\theta^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha) c(1)}.$$

**Remarque 4** On a en toujours le cas particulier intéressant suivant

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(F_N\left[\frac{u}{N}, \frac{v}{N}\right] = 0\right) = \det[(Id - \tilde{\mathcal{K}})|_{L^2(I)}] \quad (23)$$

**Théorème 7** Pour tous entiers naturels  $q$  et  $m$  vérifiant  $q > 1$  et  $N > m \geq 1$  et pour tout réel  $\alpha$  tel que  $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$  on a, toujours avec les mêmes hypothèses qu'au théorème 5

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(F_N\left[\frac{u}{N^q}, \frac{v}{N^q}\right] = m\right) = O\left(N^{(1-p)}\right). \quad (24)$$

### 3 Preuves des résultats

#### 3.1 Preuve des théorèmes 1 et 2

Les points *i*) et *ii*) du théorème 1 ont été démontrés dans [10]. La preuve est basée sur une formule explicite de l'inverse que nous avons obtenue dans un précédent travail ([16] ou [17]). Nous pouvons en effet écrire pour tout entier  $k$ ,  $0 \leq k \leq N+1$ , l'expression

$$(T_N(f))_{k+1,1}^{-1} = \bar{\beta}_0^{(\alpha)} \left( \beta_k^{(\alpha)} - \frac{1}{N} \left( \sum_{u=0}^k \beta_u^{(\alpha)} F_{N,\alpha}((k-u)/N) \right) \right) (1 + o(1)) \quad (25)$$

avec

$$F_{N,\alpha}(u/N) = \sum_{m=0}^{\infty} F_{2m,N}^{(\alpha)}(u/N) \left( \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \right)^{2m+2}$$

où on a posé, pour  $z \in [0, 1]$

$$F_{2m,N}^{(\alpha)}(z) = \sum_{j_0=0}^{\infty} \frac{1}{j_0 + N_\alpha} \sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{j_1 + j_0 + N_\alpha} \dots + \sum_{j_{2m-1}=0}^{\infty} \frac{1}{j_{2m-1} + j_{2m-2} + N_\alpha} + \quad (26)$$

$$+ \sum_{j_{2m}=0}^{\infty} \frac{1}{j_{2m} + j_{2m-1} + N_\alpha} \frac{1}{(j_{2m} + \alpha + 1)/N - z}$$

où  $N_\alpha = N + 1 + \alpha$ . Dans ([9]), Inoue montre que  $\frac{1}{N}F_{2m,N}^{(\alpha)}(0)$  est approximé par une intégrale dont la valeur est  $\alpha^2$ . En combinant ce résultat à un théorème d'approximation de Bleher ([2]) permettant d'estimer l'écart entre l'intégrale et la somme, on obtient le développement

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_{2m,N}^{(\alpha)}(0) \left( \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \right)^{2m+2} = \frac{\alpha^2}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (27)$$

Ces résultats permettent alors d'obtenir le point i) du théorème. Le point ii) est une conséquence de la relation de récurrence de Szegö (voir [7]) : pour  $|z|=1$

$$\begin{cases} \Phi_{N+1}(z) &= z\Phi_N(z) - \overline{\gamma_N}\Phi_n^*(z) \\ \Phi_{N+1}^*(z) &= \Phi_n^*(z) - \gamma_N z\Phi_N(z), \end{cases} \quad (28)$$

où  $\overline{\gamma_N} = -\overline{\Phi_{n+1}(0)}$  est appelé coefficient de Verblunsky. L'uniformité est une conséquence de l'uniformité de la formule 25.

Pour le théorème 2, le lecteur se reportera à [16] ou à [17].

Dans le calcul précédent nous avons déterminé le comportement asymptotique du polynôme

prédicteur  $\Phi_N^*(\chi) = \sum_{k=0}^N \frac{(T_N(f))_{k+1,1}^{-1}}{\sqrt{(T_N(f))_{1,1}^{-1}}}$ , on déduit alors celui de  $\Phi_N$  via l'opération

$$\Phi_N(z) = z^N \overline{\Phi_N^*\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

### 3.2 Preuve du théorème 3

Au lieu de considérer  $\Phi_N(e^{i\theta})$  nous considérons  $\Phi_N^*(e^{i\theta})$  le polynôme prédicteur associé. La relation 9 montre que  $\Phi_N(1) = \Phi_N^*(1)$ . Posons  $\Phi_N^*(e^{i\theta}) = \sum_{l=0}^N \beta_{N,l}(e^{i\theta})^l$ . Ecrivons

$\Phi_N^*(1) = S_1 + S_2 + S_3$  avec  $S_1 = \sum_{l=0}^{[N\epsilon]} \beta_{N,l}$ ,  $S_2 = \sum_{l=[N\epsilon]+1}^{N-[N\epsilon]} \beta_{N,l}$ ,  $S_3 = \sum_{l=N-[N\epsilon]+1}^N \beta_{N,l}$ , avec  $\epsilon$

un réel positif tendant vers zéro.. En utilisant le théorème 1 nous obtenons

$$\begin{aligned} S_1 &= \left( \sum_{l=0}^{[N\epsilon]} \beta_l^{(\alpha)} - \frac{\alpha^2}{N} \beta_l^{(\alpha+1)} + O\left(\frac{l}{N^2}\right) \right) \\ &= \left( \beta_{[N\epsilon]}^{(\alpha+1)} - \frac{\alpha^2}{N} \beta_{[N\epsilon]}^{(\alpha+2)} - \frac{[N\epsilon]}{N} O\left(\frac{l}{N}\right) \right). \end{aligned}$$

Comme on a d'autre part

$$\begin{aligned} \beta_l^{(\alpha+1)} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)c_1(1)} l^\alpha + O(l^\alpha) \quad \text{et} \\ \beta_l^{(\alpha+2)} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)c_1(1)} l^{\alpha+1} + O(l^\alpha + 1) \end{aligned}$$

nous pouvons conclure

$$S_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)c_1(1)} [N\epsilon]^\alpha \left( 1 + \frac{\epsilon}{\alpha + 1} + \epsilon^2 O(1) \right)$$

ou encore

$$S_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)c_1(1)} [N\epsilon]^\alpha + o(N^\alpha).$$

Considérons maintenant la somme  $S_2$ . Cette fois ci d'après le théorème 2 on a

$$S_2 \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)c_1(1)} \sum_{l=[N\epsilon]+1}^{N-[N\epsilon]} \frac{l^{\alpha-1}}{N} \left( 1 - \frac{l}{N} \right)^\alpha.$$

Nous allons maintenant distinguer pour notre démonstration les cas  $\alpha > 0$  et  $\alpha < 0$ .

**Le cas**  $\frac{-1}{2} < \alpha < 0$ .

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)c_1(1)} N^\alpha \left( \int_{([N\epsilon]+1)/N}^1 t^{\alpha-1} ((1-t)^\alpha - 1) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{([N\epsilon]+1)/N}^1 t^{\alpha-1} dt \right) + o(N^\alpha) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)c_1(1)} N^\alpha \left( \int_0^1 t^{\alpha-1} ((1-t)^\alpha - 1) dt + \frac{1}{\alpha} \right) \\ &\quad - \frac{[N\epsilon]^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)c_1(1)} + o(N^\alpha) \end{aligned}$$

Compte tenu de  $\beta_k = O\left(\frac{\beta_{N-k}^{(\alpha+1)}}{N}\right)$  pour  $k \in [N - [N\epsilon]]$  on obtient évidemment comme plus haut  $S_3 = O(N^\alpha \epsilon^{\alpha+1}) = o(N^\alpha)$ . D'où

$$\Phi_N^*(1) = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)c_1(1)} N^\alpha \left( \int_0^1 t^{\alpha-1} ((1-t)^\alpha - 1) dt + \frac{1}{\alpha} \right) + o(N^\alpha).$$

**Le cas**  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ .

Puisque  $\alpha > 0$  on a tout de suite  $S_1 = O(N^\alpha)$  et d'autre part

$$S_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)c_1(1)} N^\alpha \left( \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^\alpha dt \right) + o(N^\alpha),$$

Puisque l'on a toujours  $S_3 = o(N^\alpha)$  on peut écrire

$$\Phi_N^*(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)c_1(1)} N^\alpha \left( \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^\alpha dt \right) + o(N^\alpha).$$

### Calcul des dérivées

Démontrons maintenant la formule dans le cas où  $p$  est un entier strictement positif. Avec les mêmes notations que précédemment nous avons

$$(\Phi_N^*)^{(p)}(e^{i\theta}) = \sum_{l=p}^N l(l-1) \cdots (l-p+1) \beta_{N,l}(e^{i\theta})^l.$$

Nous sommes ramenés à calculer  $(\Phi_N^*)^{(p)}(1) = S_1 + S_2 + S_3$  avec  $S_1 = \sum_{l=0}^{[N\epsilon]} l^p \beta_{N,l}$ ,  $S_2 = \sum_{l=[N\epsilon]+1}^{N-[N\epsilon]} l^p \beta_{N,l}$ ,  $S_3 = \sum_{l=N-[N\epsilon]+1}^N l^p \beta_{N,l}$ , avec  $\epsilon$  un réel positif tendant vers zéro.. En utilisant le théorème (1) nous obtenons

$$\begin{aligned} S_1 &= \left( \sum_{l=0}^{[N\epsilon]} l^p (\beta_l^{(\alpha)} - \frac{\alpha^2}{N} \beta_l^{(\alpha+1)}) + O\left(\frac{l}{N^2}\right) \right) \\ &= O(N^{\alpha+p} \epsilon^{\alpha+p}) = o(N^{\alpha+p}). \end{aligned}$$

On obtient de même  $S_3 = o(N^{\alpha+p})$ , et en utilisant le théorème (2) il est facile de vérifier que

$$S_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)c_1(1)} N^{\alpha+p} \left( \int_0^1 t^{\alpha+p-1} (1-t)^\alpha dt \right) + o(N^{\alpha+p}),$$

ce qui achève la démonstration de ce cas.

### 3.3 Démonstration du théorème 4

Remarquons tout d'abord que bien sûr  $\Phi_N(1) = \overline{\Phi_N^*(1)}$ . Pour le calcul des dérivées d'ordre supérieur ou égal à un nous allons là aussi devoir distinguer le cas  $\alpha$  positif du cas  $\alpha$  négatif. Là aussi trois cas sont à distinguer.

Supposons d'abord  $\alpha$  positif. Considérons les sommes  $\sum_{u=p}^N \overline{\beta_{N-u}} u(u-1)(u-2)\cdots(u-p+1)$

dont la partie principale est en fait  $\sum_{u=p}^N \overline{\beta_{N-u}} u^p$ . Là aussi nous pouvons utiliser une décomposition

$$\sum_{u=0}^N \overline{\beta_{N-u}} u^p = \sum_{u=0}^{[N\epsilon]} \overline{\beta_{N-u}} u^p + \sum_{u=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \overline{\beta_{N-u}} u^p + \sum_{u=N-[N\epsilon]}^N \overline{\beta_{N-u}} u^p,$$

où  $\epsilon$  est un réel strictement positif qui tend vers zéro. En utilisant le théorème 1 nous pouvons écrire

$$\sum_{u=0}^{[N\epsilon]} \overline{\beta_{N-u}} u^p \sim \frac{\bar{c}_1(1)}{c_1(1)} \sum_{u=0}^{[N\epsilon]} \overline{\beta_u^{(\alpha+1)}} u^p,$$

et l'on vérifie facilement que ce dernier terme est d'ordre  $O(N^{\alpha+p} \epsilon^{\alpha+1+p}) = o(N^{\alpha+p})$ . Nous avons de même

$$\sum_{u=N-[N\epsilon]}^N \overline{\beta_{N-u}} u^p \sim \sum_{u=0}^{[N\epsilon]} u^p \left( \overline{\beta_u^{(\alpha)}} - \frac{\alpha^2}{N} \overline{\beta_u^{(\alpha+1)}} \right).$$

Il est là encore clair que ce terme est d'ordre  $O(N^{\alpha+p}\epsilon^{\alpha+p}) = o(N^{\alpha+p})$ . Reste à calculer

$\sum_{u=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \overline{\beta_{N-u} u^p}$  ce qui peut aussi s'écrire  $\sum_{u=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \bar{\beta}_u (N-u)^p$ , ou encore avec le théorème 1

$$\sum_{u=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \bar{\beta}_u (N-u)^p = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\bar{c}_1(1)} \sum_{u=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} N^p \left( u^{\alpha-1} \left(1 - \frac{v}{N}\right)^{\alpha+p} + o(N^{\alpha-1}) \right).$$

La formule d'Euler et Mac-Laurin et l'hypothèse  $\epsilon$  tend vers zéro permettent de conclure

$$\sum_{u=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \bar{\beta}_u (N-u)^p = \frac{N^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha)\bar{c}_1(1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+p} t^{\alpha-1} dt + o(N^{\alpha+p}),$$

et finalement

$$\Phi_N^{(p)}(1) = \frac{N^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha)\bar{c}_1(1)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha+p} t^{\alpha-1} dt + o(N^{\alpha+p}).$$

Ce qui est l'énoncé attendu.

Nous allons maintenant traiter le cas  $\alpha$  négatif.

En introduisant la même décomposition que dans le cas précédent, considérons tout d'abord

la somme  $S_1 = \sum_{N-N\epsilon}^N \overline{\beta_{N-u} u^p}$ . On a

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{u=N-[N\epsilon]}^N \left( \overline{\beta_{N-u}^{(\alpha)}} - \frac{\alpha^2}{N} \overline{\beta_{N-u}^{(\alpha+1)}} \right) u^p = \sum_{u=0}^{[N\epsilon]} \left( \overline{\beta_u^{(\alpha)}} - \frac{\alpha^2}{N} \overline{\beta_u^{(\alpha+1)}} \right) (N-u)^p \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k N^{p-k} \left( \sum_{u=0}^{[N\epsilon]} \left( \overline{\beta_u^{(\alpha)}} - \frac{\alpha^2}{N} \overline{\beta_u^{(\alpha+1)}} \right) u^k \right) \\ &\sim \sum_{k=0}^p (-1)^k C_p^k N^{p-k} \left( \frac{(N\epsilon)^{\alpha+k}}{(\alpha+k)\Gamma(\alpha)} - \frac{\alpha^2 (N\epsilon)^{\alpha+k+1}}{(\alpha+k+1)\Gamma(\alpha+1)} \right) \frac{1}{\bar{c}_1(1)} \\ &= \frac{N^{p+\alpha}\epsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\bar{c}_1(1)} + \epsilon O(N^{p+\alpha}\epsilon^\alpha) = \frac{N^{p+\alpha}\epsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\bar{c}_1(1)} + o(N^{p+\alpha}\epsilon^\alpha). \end{aligned}$$

On a d'autre part , si l'on pose  $S_2 = \sum_{u=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \overline{\beta_{N-u}} u^p$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{u=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \overline{\beta_{N-u}} u^p = \sum_{u=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \bar{\beta}_u (N-u)^p \\
&= \frac{N^{p+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\bar{c}_1(1)} \sum_{u=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \left( u^{\alpha-1} \left(1 - \frac{u}{N}\right)^{\alpha+p} \right) (1 + o(1)) \\
&= \frac{N^{p+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\bar{c}_1(1)} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} t^{\alpha-1} (1-t)^{\alpha+p} dt \\
&= \frac{N^{p+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\bar{c}_1(1)} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} t^{\alpha-1} ((1-t)^{\alpha+p} - 1) dt + \frac{N^{p+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\bar{c}_1(1)} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} t^{\alpha-1} dt \\
&= \frac{N^{p+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\bar{c}_1(1)} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} t^{\alpha-1} ((1-t)^{\alpha+p} - 1) dt - \frac{N^{p+\alpha}\epsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\bar{c}_1(1)} + \frac{N^{p+\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\bar{c}_1(1)}
\end{aligned}$$

La troisième somme intervenant dans la décomposition étant clairement négligeable, on a finalement

$$\Phi_N^{(p)}(1) = \frac{N^{p+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\bar{c}_1(1)} \left( \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} t^{\alpha-1} ((1-t)^{\alpha+p} - 1) dt + \frac{1}{\alpha} \right) + o(N^{p+\alpha-1}),$$

ce qui donne immédiatement le résultat.

### 3.4 Preuve du théorème 5.

#### 3.4.1 Déterminant des opérateurs de Fredholm dans $L^2(\mathbb{T})$

Pour  $(\theta, \theta')$  dans  $] -\pi, \pi[ \times ] -\pi, \pi[$  nous posons

$$k(\theta, \theta') = \sum_{m=1}^N \phi_m(\theta) f_m(\theta')$$

où pour tout entier  $m$  tles fonctions  $\phi_m$  et  $f_m$  sont dans  $L^2(\mathbb{T})$ . Si  $X$  est un intervalle  $] -\pi, \pi[$  on peut alors définir un opérateur  $K$  sur  $L^2(X)$  en posant, pour tout  $x$  dans  $L^2(X)$ ,

$$K_x(\theta) = \int_X k(\theta, \theta') x(\theta') d\theta'.$$

Il est alors connu (voir, par exemple, [8] ou [18] ) que  $\det(I + K)$  est la quantité définie par

$$\det(I + K) = 1 + \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \int_{X^m} \det(k(\theta_i, \theta_j)_{i,j=1,\dots,m}) d\theta_1 \cdots d\theta_m$$

ou encore en posant que l'intégrale sur  $X^0$  vaut 1 on peut écrire, de manière plus synthétique

$$\det(I + K) = \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} \int_{X^m} \det(k(\theta_i, \theta_j)_{i,j=1,\dots,m}) d\theta_1 \cdots d\theta_m$$

De même on peut définir la trace de  $K$  par

$$\text{Tr}K = \int_X k(\theta, \theta) d\theta.$$

D'autre part si  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'opérateurs ainsi définis qui converge vers un opérateur  $A$  au sens des opérateurs sur  $L^2(X)$ , on peut poser

$$\det(\text{Id} + A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \det(\text{Id} + K_n) \quad \text{et} \quad \text{Tr}A = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr}(K_n).$$

On sait que  $A$  est alors un opérateur fixé (voir [8]) la fonction  $\lambda \rightarrow \det(\text{Id} + \lambda A)$  est une fonction entière sur  $\mathbb{C}$  dont le développement en série entière est donné par

$$\det(\text{Id} + \lambda A) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(A)}{n!} \lambda^n.$$

Les coefficients  $c_n$  étant définis par

$$c_n(A) = \det \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \text{Tr}(A^2) & \text{Tr}(A) & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Tr}(A^{n-1}) & \text{Tr}(A^{n-2}) & \text{Tr}(A^{n-3}) & \dots & \text{Tr}(A) & 1 \\ \text{Tr}(A^n) & \text{Tr}(A^{n-1}) & \text{Tr}(A^{n-2}) & \dots & \text{Tr}(A^2) & \text{Tr}(A) \end{pmatrix}$$

Ce qui peut s'écrire aussi

$$\det(\text{Id} + \lambda A) = \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \text{Tr}(A^m) \lambda^m \right).$$

On peut alors énoncer le résultat :

**Propriété 1** *L'opérateur  $\text{Id} + A$  est inversible si et seulement si  $\det(\text{Id} + A) \neq 0$ .*

### 3.4.2 Polynômes orthogonaux et fonction de corrélation

Considérons l'égalité

$$\Phi_N^*(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^N \frac{(e^{i\theta} - 1)^j}{j!} (\Phi_N^*)^{(j)}(1).$$

Nous pouvons écrire, pour un entier  $k_0$  fixé

$$\Phi_N^*(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{k_0} \frac{(e^{i\theta} - 1)^j}{j!} (\Phi_N^*)^{(j)}(1) + N^\alpha O \left( \frac{|\theta^{k_0+1}|}{(k_0+1)!} \right).$$

En effet la démonstration du théorème 3 permet d'obtenir, si  $j > k_0$ , et en remarquant que  $l(l-1)(l-2)\dots(l-p+1) < l^p$  :

$$\left| \frac{(e^{i\theta/N} - 1)^j}{j!} (\Phi_N^*)^{(j)}(1) \right| \leq \frac{N^\alpha |i\theta|^j}{c_1(1)\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^1 \frac{x^{\alpha+j-1}(1-x)^\alpha}{j!} dx + o(N^\alpha) \right)$$



uniformément par rapport à  $j$ . Ce qui donne, toujours en utilisant le théorème 3

$$\Gamma(\alpha)c_1(1)\Phi_N^*(e^{i\theta/N}) = N^\alpha \left( \sum_{j=0}^{k_0} \int_0^1 \frac{x^{\alpha+j-1}(i\theta)^j}{j!} (1-x)^\alpha dx + O\left(\frac{|\theta^{k_0+1}|}{(k_0+1)!}\right) + o(1) \right).$$

Ceci peut encore s'écrire

$$\Gamma(\alpha)c_1(1)\Phi_N^*(e^{i\theta/N}) = N^\alpha \left( \int_0^1 e^{i\theta x} x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha dx + R(k_0) \right). \quad (29)$$

avec

$$R(k_0) = - \sum_{k_0+1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{\alpha+j-1}(i\theta)^j}{j!} (1-x)^\alpha dx + O\left(\frac{|\theta^{k_0+1}|}{(k_0+1)!}\right).$$

Si maintenant nous nous fixons un réel  $\epsilon$  positif, il est clair que l'on peut choisir le réel  $k_0$  tel que  $|R(k_0)| < \epsilon$ . Nous pouvons donc finalement écrire

$$\Gamma(\alpha)c_1(1)\Phi_N^*(e^{i\theta/N}) = N^\alpha \left( \int_0^1 e^{i\theta x} x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha dx + o(1) \right). \quad (30)$$

On obtient de même que

$$\Gamma(\alpha)c_1(1)\Phi_N(e^{i\theta/N}) = N^\alpha \left( \int_0^1 e^{i\theta(1-x)} x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha dx + o(1) \right). \quad (31)$$

Introduisons maintenant le noyau de Christofel-Darboux d'ordre  $N$ , à savoir la quantité

$$K_N(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) = \sqrt{f(e^{i\theta})} \sqrt{f(e^{i\theta'})} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{h_m} \overline{\Phi_m(e^{i\theta})} \Phi_m(e^{i\theta'})$$

où les  $h_m$  sont des constantes de normalisations définies par

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{\Phi_m(e^{i\theta})} \Phi_n(e^{i\theta}) d\theta = h_m \delta_{m,n}.$$

On sait que l'on peut écrire alors, si  $\theta \neq \theta'$  (voir [19])

$$K_N(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) = \frac{1}{h_N} \sqrt{f(e^{i\theta})} \sqrt{f(e^{i\theta'})} \frac{\overline{\Phi_N^*(e^{i\theta})} \Phi_N^*(e^{i\theta'}) - \overline{\Phi_N(e^{i\theta})} \Phi_N(e^{i\theta'})}{(1 - e^{i(\theta' - \theta)})}.$$

En posant dans la formule ci-dessus  $\theta = \frac{u}{N}, \theta' = \frac{v}{N}$  on obtient, en utilisant les formules (29) et (31)

$$\Gamma^2(\alpha)c_1(1)K_N(e^{iu/N}, e^{iv/N}) = \frac{1}{h_N} N^{2\alpha} \sqrt{f(e^{iu/N})} \sqrt{f(e^{iv/N})} \frac{K(u, v) + o(N^{2\alpha})}{1 - e^{i(u/N - v/N)}} \quad (32)$$

avec si  $u \neq v$

$$\begin{aligned} K(u, v) &= \int_0^1 e^{-iux} x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha dx \int_0^1 e^{ivx} x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha dx - \\ &- \int_0^1 e^{-iu(1-x)} x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha dx \int_0^1 e^{iv(1-x)} x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha dx \end{aligned}$$

Ou en posant

$$\psi(\alpha, u) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha e^{iux} dx,$$

$$K(u, v) = \psi(\alpha, -u)\psi(\alpha, v) - \psi(\alpha, u)\psi(\alpha, -v)e^{i(v-u)}$$

et en remplaçant  $\sqrt{f}$  et  $(1 - e^{i(u/N-v/N)})$  par un équivalent, il vient, toujours si  $u \neq v$ ,

$$\Gamma^2(\alpha)c_1(1)K_N(e^{iu/N}, e^{iv/N}) = \frac{1}{h_N} N(uv)^\alpha \frac{K(u, v)}{i(u-v)} + o(N).$$

Pour connaître la valeur  $u = v$  considérons la dérivée au point  $v = u$  de la fonction  $G_u$  définie par

$$G_u(v) = e^{iu}\psi(\alpha, -u)\psi(\alpha, v) - e^{iv}\psi(\alpha, u)\psi(\alpha, -v).$$

La limite quand  $v \rightarrow u$  de  $K_N(e^{iu/N}, e^{iv/N})$  est alors  $\frac{1}{h_N} N(u)^{2\alpha} \left( \frac{e^{-iu}}{-i} \right) G'_u(u)$ . Ce qui donne, en posant  $\tau(\alpha, u) = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\alpha e^{iux} dx$ ,

$$\Gamma^2(\alpha)c_1(1)K_N(e^{iu/N}, e^{iu/N}) = \frac{1}{h_N} Nu^{2\alpha} (-2\Re(\psi(\alpha, u)\tau(\alpha, -u)) + |\psi(\alpha, u)|^2) + o(N).$$

On sait d'autre part (voir [12]) qu'avec les notations du corollaire 1

$$h_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) |\Phi_N(e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

c'est à dire

$$h_m = (T_m(f))_{1,1}^{-1}.$$

Nous avons d'autre part obtenu dans un précédent travail ([16],[17]) que

$$|\beta_0^\alpha|^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{N}\right) \sim (T_m(f))_{1,1}^{-1}.$$

Finalement l'hypothèse  $\beta_0^\alpha = 1$  nous donne, avec  $u \neq v$ ,

$$\Gamma^2(\alpha)c_1(1)K_N(e^{iu/N}, e^{iv/N}) = N(uv)^\alpha \frac{K(u, v)}{i(u-v)} + o(N),$$

et si  $u = v$

$$\Gamma^2(\alpha)c_1(1)K_N(e^{iu/N}, e^{iu/N}) = Nu^{2\alpha} (2\Re(\psi(\alpha, u)\tau(\alpha, u)) + |\psi(\alpha, u)|^2) + o(N).$$

Si maintenant on désigne par  $R_k^{(N)}$  la fonction de corrélation définie par

$$R_k^{(N)}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \frac{1}{(N-k)!} \int_{]-\pi, \pi[^{N-k}} P_N(\theta_1, \dots, \theta_N) d\theta_{k+1} \dots d\theta_N$$

avec

$$P_N(\theta_1, \dots, \theta_N) = \prod_{j=1}^N |1 - e^{i\theta_j}|^{2\alpha} c_1(\theta_j) \prod_{j<i} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_i}|^2.$$

On sait qu'on a alors la relation fondamentale

**Propriété 2** pour tout intervalle  $I$  contenu dans  $]-\pi, \pi[$  et tout entier  $m \in \{0, \dots, N\}$  on a

$$P\left(\left|\{i \leq N, \theta_i \in I\}\right| = m\right) = \frac{(-1)^m}{m} \sum_{k=m}^N \frac{(-1)^k}{(k-m)!} \int_{I^k} R_k^{(N)}(\theta) d^k(\theta). \quad (33)$$

Des calculs classiques sur les polynômes orthogonaux donnent la relation

$$R_k^{(N)}(\theta_1 \cdots \theta_k) = \det[K_N(\theta_i, \theta_j)_{i,j=1 \dots k}].$$

C'est à dire que

$$P\left(\left|\{i \leq N, \theta_i \in I\}\right| = m\right) = \frac{(-1)^m}{m} \sum_{k=m}^N \frac{(-1)^k}{(k-m)!} \int_{I^k} \det[K_N(\theta_i, \theta_j)_{i,j=1 \dots k}] d^k(\theta). \quad (34)$$

On obtient donc finalement, en posant maintenant  $I = [u, v]$ ,  $-\pi < u < v < \pi$  et  $I_N = [\frac{u}{N}, \frac{v}{N}]$ , la formule

$$P\left(\left|\{i \leq N, \theta_i \in I_N\}\right| = m\right) = \frac{(-1)^m}{m} \sum_{k=m}^N \frac{(-1)^k}{(k-m)!} \int_{I_N^k} \det[K_N(\theta_i, \theta_j)_{i,j=1 \dots k}] d^k(\theta). \quad (35)$$

En posant le changement de variables  $u_i = N\theta_i$  on obtient

$$\begin{aligned} P\left(\left|\{i \leq N, \theta_i \in I_N\}\right| = m\right) &= \\ &= \frac{(-1)^m}{m} \sum_{k=m}^N \frac{(-1)^k}{(k-m)!} \int_{I^k} N^{-k} \det[K_N(u_i/N, u_j/N)_{i,j=1 \dots k}] d^k(u), \end{aligned} \quad (36)$$

ou encore

$$P\left(\left|\{i \leq N, \theta_i \in I_N\}\right| = m\right) = \frac{-1^m}{m} \sum_{k=m}^N \frac{(-1)^k}{(k-m)!} \int_{I^k} \det[H_N(u_i, u_j)_{i,j=1 \dots k}] d^k(u), \quad (37)$$

avec, si  $u \neq v$

$$H_N(u, v) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)c_1(1)} (uv)^\alpha \frac{K(u, v)}{i(u-v)} + o(1),$$

et si  $u = v$

$$H_N(u, u) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)c_1(1)} u^{2\alpha} (-2\Re(\psi(\alpha, u)\tau(\alpha, -u)) + |\psi(\alpha, u)|^2) + o(1).$$

En revenant à la définition des déterminants des opérateurs de Fredholm nous pouvons écrire

$$\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!} \int_{I^k} \det[H_N(u_i, u_j)_{i,j=1 \dots k}] d^k(u) = \det[(I - H_N)|_{L^2(I)}] \quad (38)$$

Ce qui donne, au moyen d'un changement de variables,

$$\sum_{k=0}^N \frac{(-\gamma)^k}{k!} \int_{I^k} \det[H_N(u_i, u_j)_{i,j=1 \dots k}] d^k(u) = \det[(I - \gamma H_N)|_{L^2(I)}] \quad (39)$$

ou encore

$$\sum_{k=m}^N \frac{(-1)^k \gamma^{k-m}}{(k-m)!} \int_{I^k} \left| \det[H_N(u_i, u_j)_{i,j=1 \dots k}] \right| d^k(u) = \frac{d^m}{d\gamma^m} \det[(I - \gamma H_N)|_{L^2(I)}]. \quad (40)$$

soit

$$\sum_{k=m}^N \frac{(-1)^k}{(k-m)!} \int_{I^k} \det\left[|H_N(u_i, u_j)_{i,j=1 \dots k}|\right] d^k(u) = \left( \frac{d^m}{d\gamma^m} \det[(I - \gamma H_N)|_{L^2(I)}] \right) \Big|_{\gamma=1}. \quad (41)$$

Et par passage à la limite on obtient finalement

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\left|\{i \leq N\theta_i \in I_N\}\right| = m\right) = \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{d}{d\gamma} \right)^m \det[(Id - \gamma \mathcal{K})|_{L^2(I)}] \Big|_{\gamma=1}. \quad (42)$$

Ceci termine la démonstration du théorème 5. Le deuxième point du théorème est alors la traduction du cas  $m = 0$ .

La démonstration du théorème 6 repose bien sûr sur les mêmes idées que celle ci.

### 3.5 Démonstration du théorème 6

Nous pouvons de nouveau écrire

$$\Phi_N^*(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^N \frac{(e^{i\theta} - 1)^j}{j!} (\Phi_N^*)^{(j)}(1).$$

Comme dans le cas  $\alpha$  positif le théorème (3) permet donne alors pour  $j \geq 1$  :

$$\frac{(e^{i\theta/N} - 1)^j}{j!} (\Phi_N^*)^{(j)}(1) = \frac{N^\alpha (i\theta)^j}{c(1)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{x^{\alpha+j-1} (1-x)^\alpha}{j!} dx + o(N^\alpha).$$

Ce qui donne finalement, en utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration précédente,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha)c_1(1)}{N^\alpha} \Phi_N^*(e^{i\theta/N}) &= \sum_{j=1}^N \int_0^1 \frac{x^{\alpha+j-1} (i\theta)^j}{j!} (1-x)^\alpha dx \\ &+ \int_0^1 x^{\alpha-1} ((1-x)^\alpha - 1) dx + \frac{1}{\alpha} + o(1). \end{aligned}$$

Tout ceci permet de conclure que

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)c_1(1)\Phi_N^*(e^{i\theta/N}) &= N^\alpha \left( \int_0^1 x^{\alpha-1} (e^{i\theta x} - 1)(1-x)^\alpha dx + \right. \\ &\left. + \int_0^1 x^{\alpha-1} ((1-x)^\alpha - 1) dx + \frac{1}{\alpha} + o(1) \right) \end{aligned} \quad (43)$$

ou encore

$$\Gamma(\alpha)c_1(1)\Phi_N^*(e^{i\theta/N}) = N^\alpha \left( \int_0^1 x^{\alpha-1} (e^{i\theta x} (1-x)^\alpha - 1) dx + \frac{1}{\alpha} + o(1) \right). \quad (44)$$

On obtient de même, en utilisant la relation  $\Phi_N^*(z) = z^N \bar{\Phi}_N(\frac{1}{z})$  que

$$\Gamma(\alpha)c_1(1)\Phi_N(e^{i\theta/N}) = N^\alpha e^{i\theta} \left( \int_0^1 (e^{-i\theta x}(1-x)^\alpha - 1)x^{\alpha-1} dx + \frac{1}{\alpha} + o(1) \right). \quad (45)$$

C'est à dire que

$$\frac{\Gamma(\alpha)c_1(1)\Phi_N(e^{i\theta/N})}{N^\alpha} = e^{i\theta} \frac{\Gamma(\alpha)c_1(1)\Phi_N^*(e^{-i\theta/N})}{N^\alpha} + o(1).$$

Désignons maintenant par  $\tilde{K}_N$  le noyau de Christoffel-Darboux d'ordre  $N$ . On pose de nouveau  $\theta = \frac{u}{N}$ ,  $e^{i\theta} = \frac{v}{N}$ , et en on utilise les formules (43) et (45). On obtient alors, par les mêmes méthodes que précédemment, et pour  $u \neq v$

$$\Gamma^2(\alpha)|c_1(1)|^2 \tilde{K}_N(e^{iu/N}, e^{iv/N}) = \frac{1}{h_N} N^{2\alpha} \sqrt{f(e^{iu/N})} \sqrt{f(e^{iv/N})} \frac{\tilde{K}(u, v) + o(N^{2\alpha})}{1 - e^{i(u/N - v/N)}} \quad (46)$$

avec

$$\tilde{K}(u, v) = \tilde{\psi}(\alpha, -u)\tilde{\psi}(\alpha, v) - \tilde{\psi}(\alpha, u)\tilde{\psi}(\alpha, -v)e^{i(v-u)},$$

et

$$\tilde{\psi}(\alpha, u) = \int_0^1 x^{\alpha-1} ((1-x)^\alpha e^{-iux} - 1) dx + \frac{1}{\alpha}.$$

En remplaçant  $\sqrt{f}$  et  $(1 - e^{i(u/N - v/N)})$  par un équivalent, il vient si  $u \neq v$

$$\Gamma^2(\alpha)c_1(1)\tilde{K}_N(e^{iu/N}, e^{iv/N}) = \frac{1}{h_N} N(-uv)^\alpha \frac{\tilde{K}(u, v)}{i(u-v)} + o(N).$$

La valeur pour  $u = v$  s'obtient par un simple passage à la limite. Le reste de la démonstration est alors identique à celle du théorème 5.

### 3.6 Démonstration du théorème 7

Nous pouvons de nouveau écrire pour  $p > 1$

$$\Phi_N^*(e^{i\theta/N^p}) = \sum_{j=0}^N \frac{(e^{i\theta/N^p} - 1)^j}{j!} (\Phi_N^*)^{(j)}(1).$$

Là aussi le théorème 3 permet d'obtenir :

$$\frac{(e^{i\theta/N^p} - 1)^j}{j!} (\Phi_N^*)^{(j)}(1) = \frac{1}{N^{j(p-1)}} \frac{N^\alpha (i\theta)^j}{c_1(1)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{x^{\alpha+j-1} (1-x)^\alpha}{j!} dx + o(N^\alpha).$$

Ce qui donne finalement

$$\frac{\Gamma(\alpha)c_1(1)}{N^\alpha} \Phi_N^*(e^{i\theta/N^p}) = \sum_{j=0}^N \int_0^1 \frac{x^{\alpha+j-1} (i\theta/N^{p-1})^j}{j!} (1-x)^\alpha dx + o(1).$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$\Gamma(\alpha)c_1(1)\Phi_N^*(e^{i\theta/N^p}) = N^\alpha \left( \int_0^1 e^{i\theta x/N^{p-1}} x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha dx + o(1) \right). \quad (47)$$

On obtient de même que

$$\Gamma(\alpha)c_1(1)\Phi_N(e^{i\theta/N}) = N^\alpha \left( \int_0^1 e^{i\theta(1-x)/N^{p-1}} x^{\alpha-1} (1-x)^\alpha dx + o(1) \right). \quad (48)$$

C'est à dire que

$$\begin{aligned} \Gamma^2(\alpha)c_1(1)K_N(e^{iu/N^p}, e^{iv/N^p}) &= \frac{1}{h_N} N^{2\alpha} \sqrt{f(e^{iu/N^p})} \sqrt{f(e^{iv/N^p})} \\ &\times \frac{K(u/N^{p-1}, v/N^{p-1}) + o(N^{2\alpha})}{1 - e^{i(u/N^p - v/N^p)}}. \end{aligned} \quad (49)$$

Ce qui permet de calculer les probabilités  $P\left(\left|\{i \leq N, \theta_i \in I_{N^p}\}\right| = m\right)$  pour tous les entiers  $m, p \geq 1$ . En posant  $I = [u, v]$ ,  $-\pi < u < v < \pi$  et  $I_{N^p} = [\frac{u}{N^p}, \frac{v}{N^p}]$ , on a

$$P\left(\left|\{i \leq N, \theta_i \in I_{N^p}\}\right| = m\right) = \frac{(-1)^m}{m} \sum_{k=m}^N \frac{(-1)^k}{(k-m)!} \int_{I_N^k} \det[K_N(\theta_i, \theta_j)_{i,j=1\dots k}] d^k(\theta). \quad (50)$$

En posant le changement de variables  $u_i = N^p \theta_i$  on obtient

$$\begin{aligned} &P\left(\left|\{i \leq N, \theta_i \in I_N\}\right| = m\right) = \\ &= \frac{(-1)^m}{m} \sum_{k=m}^N \frac{(-1)^k}{(k-m)!} \int_{I^k} N^{-pk} \det[K_N(u_i/N^p, u_j/N^p)_{i,j=1\dots k}] d^k(u), \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} &P\left(\left|\{i \leq N, \theta_i \in I_N\}\right| = m\right) = \\ &= \frac{-1^m}{m} \sum_{k=m}^N N^{k(1-p)} \frac{(-1)^k}{(k-m)!} \int_{I^k} \det[H_N(u_i/N^{p-1}, u_j/N^{p-1})_{i,j=1\dots k}] d^k(u), \end{aligned}$$

Puisque pour tout entier naturel  $k \in [1, N]$  la quantité  $\det[H_N(u_i/N^{p-1}, u_j/N^{p-1})_{i,j=1\dots k}]$  tend vers zéro quand  $N$  tend vers l'infini par continuité de la fonction  $H_N$  il est clair que le résultat annoncé dans l'énoncé est acquis.

## 4 Appendice, résultats numériques

Dans chaque tableau la première colonne donne  $\Phi_N(1)$  la deuxième colonne donne  $AN^{-d}$  où  $A$  est une constante induite par les résultats des théorèmes 3 et 4. Les valeurs de  $N$  étudiés sont entre 400 et 640. Rappelons que par rapport au corps de l'article  $d = -\alpha$ .

#### 4.0.1 $d=-0.2750$

$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$
11.7692	11.7688	11.8282	11.8279	11.8811	11.8809	11.9334	11.9333
11.7746	11.7742	11.8335	11.8332	11.8863	11.8861	11.9386	11.9385
11.7800	11.7796	11.8388	11.8385	11.8916	11.8914	11.9437	11.9437
11.7854	11.7850	11.8441	11.8438	11.8968	11.8967	11.9489	11.9489
11.7907	11.7904	11.8494	11.8491	11.9021	11.9019	11.9541	11.9541
11.7961	11.7958	11.8547	11.8544	11.9073	11.9071	11.9593	11.9592
11.8015	11.8011	11.8600	11.8597	11.9125	11.9124	11.9644	11.9644
11.8068	11.8065	11.8653	11.8650	11.9177	11.9176	11.9696	11.9696
11.8122	11.8118	11.8705	11.8703	11.9229	11.9228	11.9748	11.9747
11.8175	11.8172	11.8758	11.8756	11.9282	11.9281	11.9799	11.9799
1.8228	11.8225						

#### 4.0.2 $d= -0.1500$

$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$
5.4235	5.4234	5.4449	5.4448	5.4542	5.4541	5.4711	5.4723
5.4249	5.4247	5.4463	5.4462	5.4528	5.4554	5.4723	5.4736
5.4262	5.4261	5.4476	5.4475	5.4555	5.4567	5.4736	5.4749
5.4276	5.4274	5.4489	5.4475	5.4568	5.4580	5.4749	5.4762
5.4289	5.4288	5.4383	5.4382	5.4581	5.4593	5.4633	5.4646
5.4303	5.4301	5.4396	5.4395	5.4594	5.4606	5.4646	5.4659
5.4316	5.4315	5.4410	5.4408	5.4607	5.4620	5.4659	5.4672
5.4329	5.4328	5.4423	5.4422	5.4620	5.4633	5.4672	5.4685
5.4343	5.4342	5.4436	5.4435	5.4633	5.4646	5.4685	5.4697
5.4356	5.4355	5.4449	5.4448	5.4646	5.4659	5.4698	5.4710
5.4370	5.4368	5.4463	5.4462	5.4659	5.4672	5.4711	5.4723
5.4383	5.4382	5.4476	5.4475	5.4672	5.4685	5.4723	5.4736
5.4396	5.4395	5.4489	5.4475	5.4685	5.4697	5.4736	5.4749
5.4410	5.4408	5.4502	5.4475	5.4698	5.4710	5.4749	5.4762
5.4423	5.4422	5.4515	5.4501				
5.4436	5.4435	5.4528	5.4515				

### 4.0.3 $d = -0.0250$

$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$
2.3768	2.3768	2.3779	2.3779	2.3789	2.3788	2.3798	2.3798
2.3769	2.3769	2.3780	2.3780	2.3789	2.3789	2.3799	2.3799
2.3770	2.3770	2.3781	2.3781	2.3790	2.3790	2.3800	2.3800
2.3771	2.3771	2.3782	2.3782	2.3791	2.3791	2.3801	2.3801
2.3772	2.3772	2.3783	2.3783	2.3792	2.3792	2.3802	2.3802
2.3773	2.3773	2.3784	2.3784	2.3793	2.3793	2.3803	2.3803
2.3774	2.3774	2.3785	2.3785	2.3794	2.3794	2.3804	2.3804
2.3775	2.3775	2.3786	2.3786	2.3795	2.3795	2.3805	2.3805
2.3776	2.3776	2.3787	2.3787	2.3796	2.3796	2.3805	2.3805
2.3777	2.3777	2.3788	2.3787	2.3797	2.3797	2.3806	2.3806
2.3778	2.3778						

### 4.0.4 $d = 0.100$

$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$
0.9706	0.9707	0.9688	0.9689	0.9671	0.9672	0.9654	0.9655
0.9704	0.9705	0.9687	0.9687	0.9670	0.9670	0.9653	0.9653
0.9702	0.9703	0.9685	0.9686	0.9668	0.9669	0.9651	0.9652
0.9701	0.9702	0.9684	0.9684	0.9667	0.9667	0.9650	0.9650
0.9699	0.9700	0.9682	0.9683	0.9665	0.9665	0.9648	0.9649
0.9698	0.9699	0.9680	0.9681	0.9664	0.9664	0.9647	0.9647
0.9696	0.9697	0.9679	0.9679	0.9662	0.9662	0.9646	0.9646
0.9695	0.9695	0.9677	0.9678	0.9661	0.9661	0.9644	0.9644
0.9693	0.9694	0.9676	0.9676	0.9659	0.9659		
0.9691	0.9692	0.9674	0.9675	0.9658	0.9658		
0.9690	0.9691	0.9673	0.9673	0.9656	0.9656		

### 4.0.5 $d = 0.2250$

$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$	$\Phi_N(1)$	$AN^{-d}$
0.3566	0.3568	0.3552	0.3553	0.3538	0.3539	0.3525	0.3525
0.3565	0.3567	0.3551	0.3552	0.3537	0.3538	0.3524	0.3524
0.3563	0.3565	0.3549	0.3551	0.3536	0.3537	0.3522	0.3523
0.3562	0.3564	0.3548	0.3550	0.3535	0.3535	0.3521	0.3521
0.3561	0.3563	0.3547	0.3548	0.3533	0.3534	0.3520	0.3520
0.3559	0.3561	0.3546	0.3547	0.3532	0.3533	0.3519	0.3519
0.3558	0.3560	0.3544	0.3546	0.3531	0.3532	0.3518	0.3518
0.3557	0.3559	0.3543	0.3544	0.3530	0.3530	0.3517	0.3517
0.3556	0.3557	0.3542	0.3543	0.3528	0.3529		
0.3554	0.3556	0.3541	0.3542	0.3527	0.3528		
0.3553	0.3555	0.3539	0.3540	0.3526	0.3526		



## Références

- [1] P. Bleher and A. Its. Semiclassical asymptotics of orthogonal polynomials, Riemann-Hilbert problem, and universality in the matrix model. *Ann. Math.*, 150 :185–266, 1999.
- [2] P. M. Bleher. Inversion of Toeplitz matrices. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2 :201–224, 1981.
- [3] P. A. Deift, K. T. R. McLaughlin, T. Kriecherbauer, S Venakides, and X. Zhou. A riemann-Hilbert approach to asymptotic questions for orthogonal polynomials. *J. Approx. Theory*, 95 :388–475, 1998.
- [4] F.J. Dyson. A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix. *J. Math. Phys.*, 3 :1191–1198, 1962.
- [5] F.J. Dyson. Statistical theory of the energy levels of complex systems,i-iii. *J. Math. Phys.*, 3 :140–156, 157–165, 166–175, 1962.
- [6] F.J. Dyson. The threefold way. Algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 3 :1199–1215, 1962.
- [7] U. Grenander and G. Szegö. *Toeplitz forms and their applications*. Chelsea, New York, 2nd ed. edition, 1984.
- [8] N. Krupnik I. Gohberg, S. Goldberg. *Operator Theory Advances and Applications. Traces and Determinants of Linear Operators.*, volume 116. Birkaäuser Verlag, 2000.
- [9] A. Inoue. Asymptotics for the partial autocorrelation function of a fractionnal ARIMA process. *Ann. Appl. Prob.*, 12 :1471–1491, 2002.
- [10] D. Kateb, P. Rambour, and A. Seghier. Asymptotic behavior of the predictor polynomial associated to regular symbols. Prépublications de l’Université Paris-Sud, 2003.
- [11] A.B.J Kuijlaars and M. Vanlessen. universality for eigenvalue correlation at the origin of the spectrum,. *Comm. Math. Phys.*, 243 :163–191, 2003.
- [12] H.J. Landau. Maximum entropy and the moment problem. *Bulletin (New Series) of the american mathematical society*, 16(1) :47–77, 1987.
- [13] A. Martinez-Finkelshtein, K. T. R McLaughlin, and E. B. Saff. Asymptotics of orthogonal polynomials with respect to an analytic weight with algebraic singularities on the circle. *Internat. Math. Research Notices*, 2006.
- [14] Taro Nagao and Miki Wadati. An Integration Methodon Generalized Circular Ensembles. *Journal of the Physical Society of Japan.*, 61 :1903–1909, 1992.
- [15] P.A.Deift. *Orthogonal polynomials and random matrices : a Riemann-Hilbert approach*. AMS, New York, 1998.
- [16] P. Rambour and A. Seghier. Inversion asymptotique des matrices de Toeplitz à symboles singuliers. Extension d’un résultat de H. Kesten. Prépublications de l’Université Paris-sud, 2003.
- [17] P. Rambour and A. Seghier. Inverse asymptotique des matrices de Toeplitz de symbole  $(1 - \cos \theta)^\alpha f_1$ ,  $\frac{-1}{2} < \alpha \leq \frac{1}{2}$ , et noyaux intégraux. *Bulletin des Sciences Mathématiques, à paraître*, 2008.

- [18] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics, I-IV*. Academic Press, New York, 1997.
- [19] G. Szegő. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, colloquium publication, Providence, Rhode Island, 3rd edition, 1967.
- [20] C.A. Tracy and H. Widom. *Introduction to random matrices, In : geometry and quantum aspects of integrable systems*, pages 103–130. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [21] C.A. Tracy and H. Widom. Level-spacing distributions and the airy kernel. *Commun. Math. Phys.*, 159 :151–174, 1994.
- [22] C.A. Tracy and H. Widom. Correlation functions, cluster functions and spacing distribution for random matrices. *J. Stat. Phys.*, 92 :809–835, 1999.
- [23] C.A. Tracy and H. Widom. Universality of the distribution functions of random matrix theory. *CRM Proceedings*, 26 :1251–264, 2000.