



HAL
open science

Nombres de Weil, sommes de Gauss et annulateurs Galoisiens

Thong Nguyen Quang Do, Vésale Nicolas

► **To cite this version:**

Thong Nguyen Quang Do, Vésale Nicolas. Nombres de Weil, sommes de Gauss et annulateurs Galoisien. 2009. hal-00369803v1

HAL Id: hal-00369803

<https://hal.science/hal-00369803v1>

Preprint submitted on 21 Mar 2009 (v1), last revised 16 Sep 2010 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nombres de Weil, sommes de Gauss et annulateurs Galoisien

Thong NGUYEN QUANG DO, Vésale NICOLAS

Table des matières

1	Introduction	2
2	Nombres de Weil et sommes de Gauss	3
2.1	Modules (et nombres) de Weil	3
2.2	Sommes de Gauss, modules de Jacobi	4
2.3	Sommes de Jacobi et théorème de Stickelberger	5
2.4	ψ -parties, quelques propriétés fonctorielles	8
3	Montée et annulateurs	9
3.1	Idéaux annulateurs	9
3.2	Quelques représentations galoisiennes	10
3.3	Une suite exacte fondamentale	12
3.4	Idéaux de Fitting	14
4	Calculs explicites sur \mathbb{Q}	17
4.1	Rappels sur quelques caractères p -adiques.	19
4.2	Sommes de Gauss	20
5	Calculs explicites sur un corps totalement réel	21
5.1	Généralités	22
5.2	Calculs cyclotomiques.	25
5.3	Retour à F	28
5.4	Comparaison avec des résultats de Solomon	30
6	Appendice sur le "miroir" (Spiegelung)	31

Abstract :

For an abelian number field K containing a primitive p^{th} root of unity (p an odd prime) and satisfying certain technical conditions, we parametrize the $\mathbb{Z}_p[G(K/\mathbb{Q})]$ -annihilators of the "minus" part A_K^- of the p -class group by means of modules of Jacobi sums. Using a reflection theorem and Bloch-Kato's reciprocity law, we then determine the Fitting ideal of the "plus" part A_K^+ in terms of "twisted" Gauss sums.

Key words : sommes de Gauss, miroir, Ihara, Bloch-Kato.

AMS subject classification : 11R23.

1 Introduction

Pour une extension galoisienne de corps de nombres K/k , de groupe de Galois H , l'étude de la structure de H -module du groupe de classes $\mathcal{C}l_K$ commence naturellement par la détermination de son idéal annulateur. Si $k = \mathbb{Q}$ et K est un corps abélien CM, un annulateur classique est l'idéal de Stickelberger, mais qui ne voit que "la moitié du monde", en ce sens que sa partie "plus" est triviale, et donc n'apporte que des renseignements... triviaux. Les mêmes problèmes se posent dans le cadre p -adique pour la $\mathbb{Z}_p[H]$ -structure du p -groupe de classes A_K : la partie "moins" s'étudie à partir de la Conjecture Principale de la théorie d'Iwasawa (théorème de Mazur-Wiles), mais la partie "plus" demeure mystérieuse (conjecture de Vandiver, conjecture de Greenberg).

Dans le présent travail, on fixe un corps abélien K contenant une racine primitive $p^{i\text{eme}}$ de l'unité ζ_p ($p \neq 2$) et l'on adopte les notations habituelles $K_n = K(\zeta_{p^{n+1}})$, $K_\infty = \cup_{n \geq 0} K_n$, $H_n = \text{Gal}(K_n/\mathbb{Q})$, $H_\infty = \text{Gal}(K_\infty/\mathbb{Q})$, A_n = le p -groupe de classes de K_n , $X_\infty = \varprojlim A_n$. On se propose dans un premier temps de "paramétriser" les $\mathbb{Z}_p[H_n]$ (resp. $\mathbb{Z}_p[[H_\infty]]$) annulateurs de A_n^- (resp. X_∞^-) par des modules de sommes de Jacobi : c'est une idée ancienne d'A. Weil ([We]), appliquée par Iwasawa à $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ ([Iw1]), puis par Anglès et Beliaeva aux corps $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ et $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ ([AB]), et généralisée aux corps abéliens par le second auteur dans son mémoire de Master. Dans un second temps, on utilise le "miroir" (*Spiegelung*) pour en déduire une description de l'idéal de Fitting initial de A_n^+ (resp. X_∞^+) sur $\mathbb{Z}_p[H_n]$ (resp. $\mathbb{Z}_p[[H_\infty]]$) en termes de sommes de Gauss "tordues". Ces sommes de Gauss sont explicitées dans une troisième étape en utilisant la loi de réciprocité de Bloch-Kato (le principe du calcul est expliqué à la fin du §3). Dans un dernier paragraphe, on fait le lien avec des résultats d'annulation récemment annoncés par D.Solomon ([Sol]) au colloque "Iwasawa 2008" à Irsee. Un appendice rappelle les relations du "miroir" (dont certaines sont peut-être peu connues) qui sont utilisées dans le texte.

NB : le tableau précédemment décrit est un petit peu optimiste. En réalité, les calculs sont faits caractère par caractère, et l'on se place pour simplifier dans le cas où p ne divise pas $[K : \mathbb{Q}]$. Ce n'est pas une contrainte essentielle, le cas général pouvant se traiter par exemple par les méthodes de [T] et [B], la plupart des résultats demeurant valables au prix de certaines complications techniques. Mais qu'on se place dans la situation semi-simple ou pas, les caractères impairs ψ t.q. $\psi(p) = 1$ posent problème : c'est le cas dit "totalement p -décomposé", notoirement réfractaire aux techniques de descente de la théorie d'Iwasawa, et où les complications ne sont plus seulement techniques. On l'a écarté pour ne pas surcharger cet article (voir les commentaires du §3.4).

Notations générales

Soit p un nombre premier impair. Soit K/\mathbb{Q} une extension abélienne de \mathbb{Q} contenant μ_p . Soit F un sous-corps totalement réel de K . Supposons que

$$p \nmid [K : \mathbb{Q}].$$

Notons, pour $n \geq 1$ $K_n = K(\mu_{p^{n+1}})$, $G_n = \text{Gal}(K_n/F)$, $\Gamma_n = \text{Gal}(K_n/K)$, $\Delta = \text{Gal}(K/F)$. Comme $p \nmid [K : \mathbb{Q}]$,

$$G_n \simeq \Gamma_n \times \Delta.$$

Notons μ_{K_n} le groupe des racines de l'unité de K_n et c_n le conducteur de K_n .

Soit I_n le $\mathbb{Z}[G_n]$ -module des idéaux fractionnaires de K_n premiers à c_0 , P_n le $\mathbb{Z}[G_n]$ -module des $\alpha \in K_n$ tels que $(\alpha) \in I_n$, \mathcal{O}_{K_n} l'anneau des entiers de K_n et $\mathcal{C}l_{K_n}$ le groupe des classes de K_n . Notons \mathcal{U}_n le module des unités semi-locales de K_n , i.e.

$$\mathcal{U}_n = \prod_{\mathfrak{q}|p} U_{\mathfrak{q},n}^1;$$

où $U_{\mathfrak{q},n}^1$ est le module des unités principales du \mathfrak{q} -complété de K_n .

2 Nombres de Weil et sommes de Gauss

Dans ce paragraphe, nous généralisons les définitions des modules et des nombres de Weil de la première partie de [AB] au cas abélien sur \mathbb{Q} et nous relierons ces modules à l'annulateur du groupes de classes de K_n , aux sommes de Gauss, de Jacobi et à l'idéal de Stickelberger. Par rapport à [AB], on ne donnera les démonstrations que là où le cas abélien se distingue vraiment du cas cyclotomique.

2.1 Modules (et nombres) de Weil

Définition 1. On appelle module de Weil de K_n et on note \mathcal{W}_n l'ensemble des f appartenant à $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G_n]}(I_n, K_n^\times)$ tels que

1. $\exists \beta(f) \in \mathbb{Z}[G_n]$ tel que $\forall \alpha \in P_n$, $f(\alpha \mathcal{O}_n) \equiv \alpha^{\beta(f)} \pmod{\mu_{K_n}}$
2. $f(I_n) \subset \mu_{K_n} \mathcal{U}_n$.

Définition 2. On appelle module des nombres de Weil de K_n et on note Weil_n

$$\text{Weil}_n := \{f(\mathfrak{a}); f \in \mathcal{W}_n, \mathfrak{a} \in I_n\}.$$

Notons que Weil_n est un sous-module de $\mu_{K_n}\mathcal{U}_n$. Ce module ne servira qu'à partir de la deuxième partie.

Le résultat suivant généralise [Iw1], pp 102-103, [AB] Proposition 1, et sa démonstration est exactement celle de [AB] Proposition 1 :

Théorème 1. *On a une suite exacte de $\mathbb{Z}[G_n]$ -modules*

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G_n]}(I_n, \mu_{K_n}) \longrightarrow \mathcal{W}_n^- \xrightarrow{\beta} (\text{Ann}_{\mathbb{Z}[G_n]}\mathcal{Cl}(K_n))^- \longrightarrow B_n \longrightarrow 0$$

où B_n est un 2-groupe fini abélien, et $\beta : f \mapsto \beta(f)$.

2.2 Sommes de Gauss, modules de Jacobi

Posons $E_n = \mathbb{Q}(\mu_{c_n})$ le corps conducteur de K_n . Soit \mathcal{O}_{E_n} l'anneau des entiers de E_n et G_{E_n} le groupe de Galois de E_n/\mathbb{Q} . Soit \mathfrak{L} un idéal premier de E_n ne divisant pas c_n et $(l) = \mathfrak{L} \cap \mathbb{Z}$. Notons $\mathcal{O}_{E_n}/\mathfrak{L} = \mathbb{F}_q$. On définit le caractère

$$\chi_{\mathfrak{L}} : \mathcal{O}_{E_n}/\mathfrak{L} \rightarrow \mu_{c_n}$$

pour $y \neq 0$ par la relation de congruence

$$\chi_{\mathfrak{L}}(y \bmod \mathfrak{L}) \equiv y^{-\frac{q-1}{c_n}} \bmod \mathfrak{L}$$

et on étend $\chi_{\mathfrak{L}}$ à \mathbb{F}_q en posant $\chi_{\mathfrak{L}}(0) = 0$.

Soit Tr la trace de $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_l$. On a un caractère

$$\psi_q : \mathcal{O}_n/\mathfrak{L} \rightarrow \mu_l, \quad \psi_q(x) = \zeta_l^{\text{Tr}(x)}$$

où ζ_l est une racine primitive l -ième de l'unité.

On pose alors

$$\tau_{E_n}(\mathfrak{L}) := - \sum_{a \in \mathbb{F}_q} \chi_{\mathfrak{L}}(a) \psi_q(a)$$

et on dit que $\tau_{E_n}(\mathfrak{L})$ est la *somme de Gauss* associée à \mathfrak{L} .

Comme tous les idéaux au-dessus de l ont le même corps résiduel associé à isomorphisme près, comme G_{E_n} agit par permutation sur ceux-ci et comme $\chi_{\mathfrak{L}}^\delta = \chi_{\mathfrak{L}^\delta}$ pour tout $\delta \in G_{E_n}$, on a, pour tout \mathfrak{L} idéal premier de E_n ne divisant pas c_0 ,

$$\forall \delta \in G_{E_n}, \quad \tau_{E_n}(\mathfrak{L})^\delta = \tau_{E_n}(\mathfrak{L}^\delta).$$

Donc τ_{E_n} s'étend multiplicativement en un morphisme de $\mathbb{Z}[G_{E_n}]$ -modules

$$\tau_{E_n} : I_{E_n} \rightarrow \Omega(\mu_{c_n})^*$$

où Ω est le compositum de tous les $\mathbb{Q}(\mu_m)$, m premier à c_n et en notant I_{E_n} l'ensemble de tous \mathfrak{L} idéaux premiers de E_n ne divisant pas c_n .

Comme $p \nmid [K : \mathbb{Q}]$, G_n est canoniquement isomorphe à $\text{Gal}(\Omega K_n / \Omega)$ donc τ_{E_n} induit un morphisme de $\mathbb{Z}[G_n]$ -modules

$$\tau_n : I_n \rightarrow \Omega(\mu_{c_n})^*.$$

Soit t l'ordre du groupe multiplicatif du corps résiduel d'un idéal premier de K au dessus de p . Notons que t ne dépend pas du choix d'un tel idéal, puisque G_0 agit transitivement sur ceux-ci. Alors, pour tout $x \in K_n^*$ tel que $(x, p) = 1$, on a $x^t \in \mathcal{U}_n$ via le plongement diagonal. Posons

$$\tilde{\tau}_n := \tau_n^t.$$

2.3 Sommes de Jacobi et théorème de Stickelberger

Définition 3. On appelle module de Jacobi de K_n et on note \mathcal{J}_n l'ensemble défini par

$$\mathcal{J}_n := \mathbb{Z}[G_n] \tilde{\tau}_n \cap \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G_n]}(I_n, K_n^*).$$

On appelle module des sommes de Jacobi de K_n et on note Jac_n l'ensemble défini par

$$\text{Jac}_n := \{f(\mathbf{a}); f \in \mathcal{J}_n, \mathbf{a} \in I_n\}.$$

Soit a un entier premier à c_n . Soit $\sigma_a \in G_{E_n}$ l'image de $a \bmod c_n \mathbb{Z}$ via l'isomorphisme

$$(\mathbb{Z}/c_n \mathbb{Z})^\times \simeq G_{E_n}.$$

L'élément de Stickelberger de E_n est alors

$$\Theta_{E_n} := \sum_{a=1..c_n, (a, c_n)=1} \frac{a}{c_n} \sigma_a^{-1} \in \mathbb{Q}[G_{E_n}].$$

Et celui de K_n est la restriction de Θ_{E_n} à K_n au sens des morphismes galoisiens, noté Θ_n .

Définition 4. L'idéal de Stickelberger de K_n est

$$\mathcal{S}_n := \mathbb{Z}[G_n] \cap \Theta_n \mathbb{Z}[G_n].$$

Posons $\mathcal{S}'_n = \{g \in \mathbb{Z}[G_n]; gt\Theta_n \in \mathbb{Z}[G_n]\}$ où t a été défini au paragraphe précédent.

Théorème 2 (Théorème de Stickelberger). Soit \mathfrak{p} un idéal premier de I_n . Supposons que $\beta\Theta_n \in \mathbb{Z}[G_n]$. Alors $\tau_n(\mathfrak{p})^\beta \in K_n^\times$, et

$$\tau_n(\mathfrak{p})^\beta \mathcal{O}_n = \mathfrak{p}^{\beta\Theta_n}.$$

Donc, si $\beta \in \mathcal{S}'_n$, $\tilde{\tau}_n(\mathfrak{p})^\beta \in \mathcal{U}_n$, $\beta t\Theta_n \in \mathbb{Z}[G_n]$ et

$$\tilde{\tau}_n(\mathfrak{p})^\beta \mathcal{O}_n = \mathfrak{p}^{\beta t\Theta_n}.$$

Remarques.

- Notons que ce théorème est un résultat d’annulation du groupe de classes d’idéaux de K_n .
- La première partie de la preuve de ce théorème (voir [Wa, p.98]) nous donne le résultat :
Soit $l \equiv 1 \pmod{q_n}$ un nombre premier, \mathfrak{L} au-dessus de l dans E_n et $\tilde{\mathfrak{L}}$ l’unique idéal au-dessus de \mathfrak{L} dans $F_n(\mu_l)$. Alors

$$\tau_n(\mathfrak{L})\mathbb{Z}[\zeta_{q_n}, \zeta_l] = \tilde{\mathfrak{L}}^{(l-1)\Theta_n}.$$

Ce résultat implique sans difficulté le lemme suivant (voir [AB] Lemme2) :

Lemme 1.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_n &= \{u \in \mathbb{Z}[G_n] \mid \tilde{\tau}_n^u \in \mathcal{J}_n\} \\ \mathcal{J}_n &= \{\tilde{\tau}_n^\delta, \delta \in \mathcal{S}'_n\} \end{aligned}$$

Proposition 1. *Le morphisme β induit par restriction le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}_n & \longrightarrow & \text{Ann}_{\mathbb{Z}[G_n]}(\mathcal{C}l(K_n)) \\ \text{Id} \uparrow & & \uparrow \text{Id} \\ \mathcal{J}_n & \hookrightarrow & {}^t\mathcal{S}_n \end{array}$$

Preuve. 1. Notons N_n l’élément norme de G_n .

Soit $f \in \mathcal{J}_n$. Par le lemme 1, $\exists \delta \in \mathcal{S}'_n$ tq $f = \tilde{\tau}_n^\delta$.

Soit $\alpha \mathcal{O}_{K_n} \in I_n$. Par le théorème de Stickelberger, on a

$$f(\alpha \mathcal{O}_{K_n}) = \tilde{\tau}_n^\delta(\alpha \mathcal{O}_{K_n}) = \epsilon \alpha^{\delta t \Theta_n}$$

avec $\epsilon \in \mathcal{O}_{K_n}^\times$. Mais [Wa, lemma 6.1],

$$\tilde{\tau}_n^\delta(\alpha \mathcal{O}_{K_n}) \tilde{\tau}_n^{\delta \sigma^{-1}}(\alpha \mathcal{O}_{K_n}) = \alpha^{t \delta N_n}$$

Donc, comme G_n est commutatif,

$$\alpha^{t \delta N_n} = \epsilon \epsilon^{\sigma^{-1}} \alpha^{t \delta (\Theta_n + \sigma^{-1} \Theta_n)}.$$

Notons $\{x\}$ la partie fractionnaire du réel x . Comme $\{x\} + \{-x\} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $N_n = \Theta_n + \sigma^{-1} \Theta_n$, donc $\epsilon \epsilon^{\sigma^{-1}} = 1$. D’où $\epsilon \in \mu_{q_n}$. Finalement,

$$f(\alpha \mathcal{O}_{K_n}) \equiv \alpha^{\delta t \Theta_n} \pmod{\mu_{q_n}}. \quad (1)$$

Mais le point 2 de la définition 1 est vérifié par définition de $\tilde{\tau}_n$, donc $f \in \mathcal{W}_n$.

2. On a un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G_n]}(I_n, \mu_{q_n}) & \hookrightarrow & \mathcal{W}_n & \longrightarrow & \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G_n]}(\mathrm{Cl}(K_n)) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Ker} \beta' & \hookrightarrow & \mathcal{J}_n & \xrightarrow{\beta'} & {}_t\mathcal{S}_n
\end{array}$$

La ligne du dessus est donnée par la preuve du théorème 1. Les inclusions de \mathcal{J}_n et \mathcal{S}_n proviennent de 1. et du théorème de Stickelberger respectivement. De plus par (1), $\forall f \in \mathcal{J}_n$, $f = \tilde{\tau}_n^\delta$, $\delta \in \mathcal{S}'_n$,

$$\beta(f) = \beta(\tilde{\tau}_n^\delta) = \delta t \Theta_n.$$

Donc β induit par restriction à \mathcal{J}_n une application β' , surjective par le lemme 1 et la définition de \mathcal{S}'_n .

Soit $\delta \in \mathcal{S}'_n$ tel que $\delta t \Theta_n = 0$.

$\mathrm{Ker}(\beta') \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G_n]}(I_n, \mu_{q_n}) \subset \mathcal{W}_n^-$ donc $\tilde{\tau}_n^{\sigma^{-1}\delta} = \tilde{\tau}_n^{-\delta}$.

En outre, la partie "plus" de l'élément de Stickelberger est triviale [Wa, Theorem 4.9] donc $\delta t \in \mathbb{Z}[G_n]^+$.

Donc $\tilde{\tau}_n^{2\delta} = 1$. Mais $\tilde{\tau}_n^\delta \in \mathcal{U}_n$, donc $\tilde{\tau}_n^\delta = 1$.

□

Ce diagramme commutatif peut suggérer une extension de la définition de \mathcal{J}_n au cas relativement abélien, c.a.d où le corps de base n'est pas \mathbb{Q} (celles de \mathcal{W}_n et Weil_n s'étendant sans difficulté). Plus précisément, prenons (juste pour cette fin de paragraphe) les notations suivantes :

F est un corps de nombres totalement réel. Soit K/F une extension abélienne de F . Supposons que $\mu_p \subset K$ et

$$p \nmid [K : F].$$

Notons, pour $n \geq 1$ $K_n = K(\mu_{p^{n+1}})$, $G_n = \mathrm{Gal}[K_n/F]$.

L'élément de Stickelberger de K_n est défini par

$$\Theta_n := \sum_{\sigma \in G_n} \zeta_{F, R_n}(\sigma, 0) \sigma^{-1},$$

où $\zeta_{F, R_n}(\sigma, s)$ est la fonction zeta partielle, définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta_{F, R_n}(\sigma, s) = \sum_{(\mathfrak{a}, R_n)=1, (\mathfrak{a}, K_n/F)=\sigma} N\mathfrak{a}^{-s}.$$

et admettant un prolongement méromorphe à \mathbb{C} .

On sait que l'ensemble

$$\mathcal{S}_n := \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G_n]}(\mu_{K_n}) \Theta_n$$

est un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}[G_n]$. La conjecture de Brumer s'énonce alors

Conjecture 1. $\mathcal{S}_n^- \subset (\text{Ann}_{\mathbb{Z}[G_n]} \mathcal{C}l_{K_n})^-$.

Par analogie avec le cas cyclotomique, on appelle *module de Jacobi* et l'on note \mathcal{J}_n l'image réciproque de $t\mathcal{S}_n$ par β . On appelle *module des sommes de Jacobi* et l'on note Jac_n le module défini par

$$\text{Jac}_n := \{f(\mathfrak{p}); f \in \mathcal{J}_n, \mathfrak{p} \in I_n\}.$$

Avec ces définitions et la conjecture de Brumer, on pourrait généraliser une partie des résultats de cet article.

2.4 ψ -parties, quelques propriétés fonctorielles

Pour tout \mathbb{Z} -module M , notons \overline{M} le pro- p -complété de M . On a $\overline{M} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ si M est de type fini. Comme \mathbb{Z}_p est plat et $p \neq 2$, la suite exacte du théorème 1 donne

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G_n]}(I_n, \mu_{K_n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \longrightarrow \overline{\mathcal{W}}_n^- \xrightarrow{\overline{\beta}} (\text{Ann}_{\mathbb{Z}_p[G_n]} A_n)^- \longrightarrow 0,$$

où A_n est le p -Sylow de $\mathcal{C}l_{K_n}$ et $\overline{\beta}$ est naturellement induit par β .

Soit ψ un $\overline{\mathbb{Q}}_p$ caractère impair irréductible de Δ , différent du caractère de Teichmüller ω . Notons $\psi^* := \omega \cdot \psi^{-1}$ son caractère "miroir", $\mathbb{Z}_p[\psi]$ le sous anneau de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ engendré par l'image de ψ . L'idempotent e_ψ associé à ψ est défini par

$$e_\psi = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\delta \in \Delta} \psi(\delta) \delta^{-1} \in \mathbb{Z}_p[\psi] \simeq e_\psi \mathbb{Z}_p[\Delta].$$

Soit M un $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ -module. Dans toute la suite, on notera $M^\psi = e_\psi M$. Soit $\Lambda_\psi = \varprojlim e_\psi \mathbb{Z}_p[G_n] = \varprojlim e_\psi \mathbb{Z}_p[\Delta][\Gamma_n] \simeq \mathbb{Z}_p[\psi][[\Gamma]]$.

Soit γ_0 un générateur topologique de Δ . On a l'isomorphisme bien connu $\Lambda_\psi \simeq \mathbb{Z}_p[\psi][[T]]$, en envoyant $\gamma_0 - 1$ sur T .

Comme $\psi \neq \omega$ et t (défini au §2.2) est premier à p , le diagramme du paragraphe précédent induit le diagramme commutatif de $\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$ -modules :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{W}}_n^\psi & \longrightarrow & \text{Ann}_{\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]} A_n \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{G}_n^\psi & \longrightarrow & \overline{\mathcal{S}}_n^\psi \end{array}$$

Nous allons maintenant montrer que les objets de ce diagramme "montent". Comme $\psi \neq \omega$, $\overline{\mathcal{S}}_n^\psi$ est principal, engendré par Θ_n^ψ la psi-partie de l'élément de Stickelberger de K_n , qui est alors un élément de $\mathbb{Z}_p[\psi][G_n]$.

De plus, $(\Theta_n^\psi)_{n \geq 0}$ forme un système projectif pour la restriction des automorphismes (voir e.g. [Wa, Proposition 7.6]). Notons

$$\Theta_\psi := \varprojlim \Theta_n^\psi.$$

Notons $X_\infty = \varprojlim A_n$, la limite étant prise pour les applications de norme. Il est clair que

$$\varprojlim \text{Ann}_{\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]} A_n^\psi = \text{Ann}_{\Lambda_\psi} X_\infty^\psi.$$

Les objets de gauche du diagramme montent alors via l'isomorphisme $\bar{\beta}$. Notons leur limites respectives

$$\bar{\mathcal{S}}_\infty^\psi, \bar{\mathcal{W}}_\infty^\psi.$$

Comme on s'est placé dans la situation semi-simple, toute place ramifiée dans k_∞/K_n est totalement ramifiée. Pour tout idéal $\mathfrak{q}|p$ de K , notons \mathfrak{q}_n l'unique idéal de K_n au-dessus de \mathfrak{q} . Alors, pour $n \geq 0$, on peut écrire

$$\mathcal{U}_n = \prod_{\mathfrak{q}|p} U_{\mathfrak{q},n}^1.$$

et $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 0}$ forme un système projectif. Notons

$$\mathcal{U}_\infty := \varprojlim \mathcal{U}_n.$$

Enfin, comme $(I_n)_{n \geq 0}$ est un système projectif pour la norme, $(\overline{\text{Weil}}_n^\psi)_{n \geq 0}$ et $(\overline{\text{Jac}}_n^\psi)_{n \geq 0}$ en sont aussi. Notons leur limites respectives

$$\overline{\text{Weil}}_\infty^\psi, \overline{\text{Jac}}_\infty^\psi.$$

3 Montée et annulateurs

En profitant des propriétés fonctorielles précédentes, on va maintenant passer à la limite projective le long de la tour cyclotomique pour paramétrer, au niveau infini, les annulateurs du Λ_ψ -module X_∞^ψ .

3.1 Idéaux annulateurs

Comme depuis le début, ψ est impair, $\psi \neq \omega$. Le lemme suivant ([H, p.31, remarque 2]-[Wa, proposition 13.28]) permet de définir la "série minimale" d'un certain type de module de torsion :

Lemme 2. *Si M est de Λ -torsion, sans sous-module fini non nul, alors M est de dimension projective inférieure ou égale à un sur Λ . Soit alors P une matrice de présentation de M . L'annulateur de M est principal sur Λ , engendré par le quotient Δ_0/Δ_1 , où Δ_0 est l'idéal de Fitting, engendré par $\det(P)$, et Δ_1 est le pgcd des sous-déterminants stricts de rang maximal de P .*

Sous les hypothèses de lemme 2, on appelle *série minimale* de M un générateur de l'annulateur de M . C'est un annulateur dont le degré de Weierstrass est minimal. Bien entendu, la série minimale de M divise sa série caractéristique.

Si E est le module élémentaire associé à M comme dans le lemme 2, M et E ont même annulateur. La matrice de présentation de E étant diagonale, un générateur de l'annulateur est le ppcm des termes diagonaux (i.e. des termes qui apparaissent dans le théorème de structure) alors que la série caractéristique en est le produit.

Fait : X_∞^ψ vérifie ces hypothèses pour ψ impair.

3.2 Quelques représentations galoisiennes

Dans cette section, et sauf mention expresse du contraire, ψ est un caractère impair, *distinct du caractère de Teichmüller* ω .

On se propose de construire certaines représentations galoisiennes de \mathfrak{X}_n^ψ (resp. \mathfrak{X}_∞^ψ) dans $\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$ (resp. Λ_ψ) qui joueront un rôle important dans l'étude des annulateurs galoisiens du groupe de classes.

Notre premier résultat va décrire les modules $\overline{\text{Jac}}_n^\psi$ et $\overline{\text{Jac}}_\infty^\psi$ comme des modules de sommes de Gauss au sens d'Ichimura-Hachimori-Beliaeva ([HI], §3.2; [B], §6).

On va utiliser les notations suivantes :

L_n la pro- p -extension abélienne non ramifiée maximale de K_n .

L'_n la pro- p -extension abélienne non ramifiée p décomposée maximale de K_n .

M_n la pro- p -extension abélienne non ramifiée hors de p maximale de K_n .

D_n la pro- p -extension non ramifiée hors de p maximale de K_n .

$X_n = \text{Gal}(L_n/K_n)$, $X'_n = \text{Gal}(L'_n/K_n)$, $\mathfrak{X}_n = \text{Gal}(M_n/K_n)$, et enfin $\Omega_n = \text{Gal}(D_n/K_n)$. Nous noterons par un indice infini les limites projectives des groupes de Galois pour les applications de norme.

Lemme 3. *Tout $z_n \in \overline{\mathcal{W}}_n^\psi$ (resp. $z_\infty \in \overline{\mathcal{W}}_\infty^\psi$) induit un morphisme de $\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$ -modules $z_n : \mathfrak{X}_n^\psi \rightarrow \mathcal{U}_n^\psi$ (resp. un morphisme de Λ_ψ -modules $z_\infty : \mathfrak{X}_\infty^\psi \rightarrow \mathcal{U}_\infty^\psi$). Si l'on identifie par le corps de classes \mathcal{U}_n^ψ (resp. \mathcal{U}_∞^ψ) à un sous-module de \mathfrak{X}_n^ψ (resp. de \mathfrak{X}_∞^ψ), z_n (resp. z_∞) s'identifie à la multiplication par $\beta(z_n)$ (resp. $\beta(z_\infty)$) dans \mathfrak{X}_n^ψ (resp. \mathfrak{X}_∞^ψ).*

Preuve. L'application d'Artin nous donne les isomorphismes

$$A_n \simeq X_n, \quad \overline{I}_n^p \simeq \Omega_n$$

où \overline{I}_n^p est le p -complété de I_n .

Comme \mathcal{U}_n est un \mathbb{Z}_p -module, le morphisme z_n induit un morphisme, encore noté z_n , de $\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$ -modules

$$z_n : \Omega_n^\psi \rightarrow \mathcal{U}_n^\psi.$$

d'où, par restriction :

$$z_n : \mathfrak{X}_n^\psi \rightarrow \mathcal{U}_n^\psi.$$

Notons $N_{n+1,n} : \mathcal{U}_{n+1}^\psi \rightarrow \mathcal{U}_n^\psi$ l'application de norme.

Il est clair, par la définition de l'application d'Artin, que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_{n+1}^\psi & \xrightarrow{z_{n+1}} & \mathcal{U}_{n+1}^\psi \\ \downarrow \text{Res}_{n+1,n} & & \downarrow N_{n+1,n} \\ \mathfrak{X}_n^\psi & \xrightarrow{z_n} & \mathcal{U}_n^\psi \end{array}$$

Donc les applications $(z_n)_{n \geq 0}$ induisent un Λ_ψ -homomorphisme

$$z_\infty : \mathfrak{X}_\infty^\psi \rightarrow \mathcal{U}_\infty^\psi.$$

L'identification de z_n (resp. z_∞) résulte de la preuve du Théorème 1 et de la suite exacte du corps de classes ($\psi \neq \omega$, ψ impair) :

$$0 \rightarrow \mathcal{U}_n^\psi \rightarrow \mathfrak{X}_n^\psi \rightarrow A_n^\psi \rightarrow 0.$$

□

A partir de maintenant, on notera \mathcal{F}_ψ "la" série caractéristique de X_∞^ψ , \mathcal{M}_ψ "sa" série minimale au sens du lemme 2. D'après la Conjecture Principale (ou théorème de Mazur-Wiles), les séries Θ_ψ et \mathcal{F}_ψ diffèrent par multiplication par un inversible de Λ_ψ , ce qu'on écrira $\Theta_\psi = \mathcal{F}_\psi$.

Lemme 4. $\overline{\text{Jac}}_n^\psi = \Theta_n^\psi \mathfrak{X}_n^\psi$ et $\overline{\text{Jac}}_\infty^\psi = \Theta_\psi \mathfrak{X}_\infty^\psi = \mathcal{F}_\psi \mathfrak{X}_\infty^\psi$

C'est la caractérisation des modules de sommes de Gauss p -adiques au niveau infini par Hachimori-Ichimura-Beliaeva ([HI] [B]).

Remarquons au passage que comme $\overline{\mathcal{W}}_\infty^\psi \simeq \mathcal{M}_\psi \Lambda_\psi$, $\overline{\text{Weil}}_\infty^\psi = \mathcal{M}_\psi \mathfrak{X}_\infty^\psi$.

Preuve. D'après le lemme 1, tout élément de \mathcal{J}_n est de la forme $\tilde{\tau}_n^\delta$, donc $\overline{\text{Jac}}_n^\psi \subset \text{Im} \tilde{\tau}_n$, et d'après le lemme 1, $\text{Im} \tilde{\tau}_n = \beta(\tilde{\tau}_n) \mathfrak{X}_n^\psi$. Or $\beta(\tilde{\tau}_n) = t \Theta_n$ et t est premier à p . □

Dans la suite, on verra que la Λ_ψ -liberté éventuelle de \mathcal{U}_∞^ψ est fondamentale. Si $\psi^*(p) \neq 1$, c'est un module libre, mais dans le cas $\psi^*(p) = 1$, on va devoir modifier les modules \mathcal{U}_∞^ψ , \mathfrak{X}_∞^ψ et Jac_∞^ψ comme suit :

Notons $\mathfrak{T}_n := \text{Tor}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{U}_n$ et $\mathfrak{T} = \varprojlim \mathfrak{T}_n$, et remarquons que que $\mathfrak{T}_n^\psi = \{1\}$ si $\psi^*(p) \neq 1$. Notons $\tilde{\mathcal{U}}_n^\psi := \mathcal{U}_n^\psi / \mathfrak{T}_n^\psi$ (resp. $\tilde{\mathcal{U}}_\infty^\psi := \mathcal{U}_\infty^\psi / \mathfrak{T}^\psi$) et $\tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi := \mathfrak{X}_n^\psi / \mathfrak{T}_n^\psi$ (resp. $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi := \mathfrak{X}_\infty^\psi / \mathfrak{T}^\psi$) en voyant \mathcal{U}_n^ψ comme un sous-module de \mathfrak{X}_n^ψ (resp. \mathcal{U}_∞^ψ comme un sous-module de \mathfrak{X}_∞^ψ) via le corps de classes. Le module $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi$ est la ψ -partie du **module de Bertrandias-Paysan** dont les propriétés

sont rappelées dans l'appendice.

Les applications z_n (resp. z_∞) se factorisent alors en des morphismes de $\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$ -modules (resp. de Λ_ψ -modules)

$$z_n : \tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_n^\psi, \quad z_\infty : \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_\infty^\psi.$$

On sait (voir e.g. [G], propositions 1 et 2) que $\tilde{\mathcal{U}}_\infty^\psi \simeq \Lambda_\psi$ et que si $\psi(p) \neq 1$, $\tilde{\mathcal{U}}_n^\psi \simeq \Lambda_\psi / \omega_n \Lambda_\psi \simeq \mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$ ($\omega_n = ((1+T)^{p^n} - 1)$), donc les morphismes z_∞ et z_n si $\psi(p) \neq 1$ peuvent être considérés, ce qu'on fera désormais, comme des représentations galoisiennes

$$z_n : \tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi \rightarrow \mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n], \quad z_\infty : \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi \rightarrow \Lambda_\psi.$$

3.3 Une suite exacte fondamentale

On va maintenant, à partir de X_∞^ψ , fabriquer une suite exacte qui donnera des renseignements sur le "miroir" de X_∞^ψ (défini au § 3.2).

Soit $Z \in \Lambda_\psi$ tel que

$$\mathcal{M}_\psi | Z | \mathcal{F}_\psi.$$

Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'image de Z par la surjection canonique $\Lambda_\psi \rightarrow \Lambda_\psi / \omega_n$. On a

$$Z_n \equiv Z \pmod{\omega_n}, \quad Z = \varprojlim Z_n.$$

Lemme 5. *Pour $n \geq 0$, $Z_n \in \text{Ann}_{\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]} A_n^\psi$.*

Preuve. Soit E le Λ_ψ -module élémentaire tel que

$$0 \rightarrow X_\infty^\psi \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0$$

où B est un Λ_ψ -module fini [W, proposition 13.28]. Pour $n \geq 0$, $\omega_n B = 0$ donc par le lemme du serpent,

$$0 \rightarrow B \rightarrow A_n^\psi \rightarrow E / \omega_n E \rightarrow B \rightarrow 0.$$

Mais $\text{Ann}_{\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]} E / \omega_n E = \mathcal{M}_{n,\psi} \mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$, donc pour $n \geq 0$,

$$\mathcal{M}_{n,\psi} \mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n] \hookrightarrow \text{Ann}_{\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]} A_n^\psi.$$

□

Construisons z_n, z_∞ par la méthode du §3.2 à partir des images des Z_n par les isomorphismes $\overline{W}_n^\psi \simeq \text{Ann}_{\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]} A_n^\psi$.

$$z_n : \tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi \rightarrow \mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n], \quad z_\infty : \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi \rightarrow \Lambda_\psi. \quad (2)$$

Dans la suite, les applications correspondant à \mathcal{M}_ψ et \mathcal{F}_ψ joueront un rôle particulier, on les notera m_n, m_∞ resp. f_n, f_∞ . Notons que si cette construction est licite pour $n \geq 0$ par le lemme 5, elle l'est en général dès que $Z_n \in \text{Ann}_{\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]} A_n^\psi$. En particulier, f_n est définie pour tout n .

Théorème 3. Soit ψ impair, $\psi \neq \omega$.

L'application z_∞ définie en (2) donne une suite exacte de Λ_ψ -modules :

$$0 \rightarrow \operatorname{tor}_{\Lambda_\psi} \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi \rightarrow X_\infty^\psi \rightarrow \Lambda_\psi / (Z) \rightarrow \Lambda_\psi / z_\infty(\tilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi) \rightarrow 0.$$

Au niveau fini, elle donne, si $\psi(p) \neq 1$, une suite exacte de $\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$ -modules :

$$0 \rightarrow \operatorname{tor}_{\mathbb{Z}_p} \tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi \rightarrow A_n^\psi \rightarrow \mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n] / (Z_n) \rightarrow \mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n] / z_n(\tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi) \rightarrow 0.$$

Preuve. Donnons la preuve au niveau fini. La preuve au niveau infini est exactement la même, en plus facile.

Par définition des modules $\tilde{\mathcal{U}}_n^\psi$ et $\tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi$, la suite exacte d'inertie du corps de classes induit la suite exacte

$$0 \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_n^\psi \rightarrow \tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi \rightarrow A_n^\psi \rightarrow 0.$$

On en déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{U}}_n^\psi & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi & \longrightarrow & A_n^\psi \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \times Z_n & & \downarrow z_n & & \downarrow \alpha_n \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{U}}_n^\psi & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi & \longrightarrow & A_n^\psi \longrightarrow 0. \end{array}$$

L'application α_n est déduite du diagramme, et z_n est ici considérée à valeurs dans $\tilde{\mathcal{U}}_n^\psi$, puis envoyée dans $\tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi$ par le corps de classes.

Comme $\psi(p) \neq 1$, $\tilde{\mathcal{U}}_n^\psi \simeq \tilde{\mathcal{U}}_\infty^\psi / \omega_n \simeq \Lambda_\psi / \omega_n \Lambda_\psi \simeq \mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$. De plus, Z_n est le co-descendu de Z et l'on sait (Gross) que $(Z, \omega_n) = 1$. Donc $\operatorname{Ker}(\times Z_n)$ est un sous-module fini de $\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$ d'où, comme $\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$ n'a pas de sous-module fini non nul,

$$\operatorname{Ker}(\times Z_n) = \{0\}.$$

D'autre part, $\operatorname{Ker}(z_n) \subset \operatorname{tor}_{\mathbb{Z}_p} \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi$. Mais, comme $\tilde{\mathcal{U}}_n^\psi$ est sans \mathbb{Z}_p -torsion, la suite exacte du corps de classes nous donne, en regardant les \mathbb{Z}_p -torsions : $\operatorname{tor}_{\mathbb{Z}_p} \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi \hookrightarrow A_n^\psi$. Donc, comme Z_n annule A_n^ψ ,

$$\operatorname{Ker}(z_n) = \operatorname{tor}_{\mathbb{Z}_p} \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi.$$

Enfin, $\operatorname{Ker}(\alpha_n) = A_n^\psi$ et $\operatorname{Coker}(\alpha_n) = A_n^\psi$ puisque z_n est à valeurs dans $\tilde{\mathcal{U}}_n^\psi$.

On a ainsi, par le lemme du serpent, la suite exacte :

$$0 \rightarrow \operatorname{tor}_{\mathbb{Z}_p} \tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi \rightarrow A_n^\psi \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_n^\psi / Z_n \tilde{\mathcal{U}}_n^\psi \rightarrow \tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi / z_n(\tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi) \rightarrow \tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi / \tilde{\mathcal{U}}_n^\psi \rightarrow 0.$$

Mais $z_n(\tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi) \subset \tilde{\mathcal{U}}_n^\psi$, donc en choisissant un isomorphisme $\tilde{\mathcal{U}}_n^\psi \simeq \mathbb{Z}_p[\Gamma_n]$,

$$0 \rightarrow \operatorname{tor}_{\mathbb{Z}_p} \tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi \rightarrow A_n^\psi \rightarrow \mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n] / (Z_n) \rightarrow \mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n] / z_n(\tilde{\mathfrak{X}}_n^\psi) \rightarrow 0.$$

□

Notons $\widetilde{\text{Jac}}_\infty^\psi = \Theta_\psi \widetilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi = \mathcal{F}_\psi \widetilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi$ (resp. $\widetilde{\text{Jac}}_n^\psi = \Theta_n^\psi \widetilde{\mathfrak{X}}_n^\psi$) et $\widetilde{\text{Weil}}_\infty^\psi = \mathcal{M}_\psi \widetilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi$ (et remarquons que ces notations sont cohérentes par le lemme 4). De ce théorème, on déduit immédiatement "l'écart" entre le Fitting et l'annulateur de X_∞^ψ :

Corollaire 1. *Soient $Z, Z' \in \Lambda_\psi$ tels que $\mathcal{M}_\psi |Z|Z'| \mathcal{F}_\psi$. Alors*

$$\frac{z_\infty(\widetilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi)}{z'_\infty(\widetilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi)} \simeq \frac{Z\Lambda_\psi}{Z'\Lambda_\psi}.$$

En particulier, $\mathcal{F}_\psi/\mathcal{M}_\psi = \text{char}_{\Lambda_\psi} \widetilde{\text{Weil}}_\infty^\psi/\widetilde{\text{Jac}}_\infty^\psi$.

Comme dans [AB], on peut en tirer diverses formulations de versions plus ou moins affaiblies de la conjecture de Greenberg.

3.4 Idéaux de Fitting

Dans cette sous-section, on va déterminer les idéaux de Fitting initiaux des modules $X_\infty^{\psi^*}$ et $A_n^{\psi^*}$, pour ψ **impair, distinct de ω** , $\psi^* = \omega\psi^{-1}$ (on sait, par le théorème de Stickelberger que $A_n^\omega = \{0\}$). Pour ne pas se perdre dans les détails techniques, on sera amené parfois à supposer que $\psi(p) \neq 1$. En effet, le cas où $\psi(p) = 1$ (i.e. p est totalement décomposé dans la sous-extension fixée par $\text{Ker}\psi$) est le cas notoirement le plus compliqué de la descente d'Iwasawa, celui où la nullité de certains homomorphismes naturels de descente empêche d'obtenir des renseignements au niveau fini (voir e.g. les commentaires dans l'introduction de [BelN]). Il faut alors modifier certains modules de p -unités circulaires, comme c'est fait par exemple dans [BelN], mais les complications techniques sont assez considérables pour qu'on ait préféré ici écarter le cas $\psi(p) = 1$ - quitte à y revenir ultérieurement en cas de besoin.

Lemme 6. *Choisissons des isomorphismes cohérents $\widetilde{\mathcal{U}}_\infty^\psi \simeq \Lambda_\psi$ et $\widetilde{\mathcal{U}}_n^\psi \simeq \mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$ (si $\psi(p) \neq 1$), et notons $\widetilde{\mathcal{G}}_n^\psi$ et $\widetilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi$ resp. les images par ces isomorphismes de $\widetilde{\text{Jac}}_n^\psi$ et $\widetilde{\text{Jac}}_\infty^\psi$. Alors $\widetilde{\mathcal{G}}_n^\psi$ (resp. $\widetilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi$) est l'idéal de Fitting initial du $\mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]$ -module $\widetilde{\mathcal{U}}_n^\psi/\widetilde{\text{Jac}}_n^\psi$ (resp. du Λ_ψ -module $\widetilde{\mathcal{U}}_\infty^\psi/\widetilde{\text{Jac}}_\infty^\psi$). En particulier, ces idéaux sont indépendants du choix des isomorphismes de départ.*

Preuve. C'est évident, puisque

$$\widetilde{\mathcal{U}}_\infty^\psi/\widetilde{\text{Jac}}_\infty^\psi \simeq \Lambda_\psi/\widetilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi \text{ et } \widetilde{\mathcal{U}}_n^\psi/\widetilde{\text{Jac}}_n^\psi \simeq \mathbb{Z}_p[\psi][\Gamma_n]/\widetilde{\mathcal{G}}_n^\psi.$$

□

Alors, par le théorème 3, l'application f_∞ définie en (2) induit une suite exacte de Λ_ψ -modules :

$$0 \rightarrow \text{tor}_{\Lambda_\psi} \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi \rightarrow X_\infty^\psi \rightarrow \Lambda_\psi/(\mathcal{F}_\psi) \rightarrow \Lambda_\psi/\tilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi \rightarrow 0.$$

De plus, (voir appendice sur le "miroir") la torsion du module de Bertrandias-Paysan peut être vue comme un adjoint :

$$\text{tor}_{\Lambda_\psi} \tilde{\mathfrak{X}}_\infty^\psi \simeq \alpha(X'_\infty(-1))^\psi.$$

où $\alpha(\cdot)$ est le foncteur "adjoint" d'Iwasawa. D'après les propriétés fonctorielles de l'adjoint, on a un pseudo-isomorphisme :

$$\alpha(X'_\infty(-1)) \approx (X_\infty^{\psi^*})^\sharp$$

où $(\cdot)^\sharp$ désigne l'involution d'Iwasawa définie par $\sigma \mapsto \kappa(\sigma)\sigma^{-1}$ et \approx signifie "pseudo-isomorphisme".

Donc le théorème 3 peut se réénoncer ainsi :

Théorème 4. *Pour tout ψ impair, distinct de ω , On a une suite exacte de Λ_ψ -modules :*

$$0 \rightarrow \alpha(X'_\infty(-1))^\psi \rightarrow X_\infty^\psi \rightarrow \Lambda_\psi/(\mathcal{F}_\psi) \rightarrow \Lambda_\psi/\tilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi \rightarrow 0.$$

En particulier, $\text{char}_{\Lambda_\psi} \alpha(X'_\infty(-1))^\psi = \text{char}_{\Lambda_\psi} \Lambda_\psi/\tilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi$.

Pour passer des idéaux caractéristiques aux idéaux de Fitting, on utilisera le lemme suivant ([Cor], thm. 1) :

Lemme 7. *Pour tout Λ -module de torsion M dont l'invariant μ est nul, on a : $\text{Fitt}_\Lambda(M) = (\text{char}_\Lambda(M)).\text{Fitt}_\Lambda(M^0) = (\text{char}_\Lambda(M)).|M^0|_\Lambda$, où M^0 désigne le sous-module fini maximal de M .*

Théorème 5. *Pour tout caractère impair ψ de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ t.q. $\psi \neq \omega$ et $\psi(p) \neq 1$, $(\tilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi)^\sharp$ est l'idéal de Fitting de $X_\infty^{\psi^*}$ sur l'algèbre Λ_{ψ^*} . Si $\psi^*(p) \neq 1$, $(\mathcal{G}_\infty^\psi)^\sharp$ est le Fitting de $X_\infty^{\psi^*}$.*

Preuve. On sait déjà par le théorème 4 que $(X_\infty^{\psi^*})^\sharp$ et $\Lambda_{\psi^*}/(\tilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi)$ ont même idéal caractéristique. Pour appliquer le lemme 7, il faut montrer que les sous-modules finis maximaux de $(X_\infty^{\psi^*})^\sharp$ et $\Lambda_{\psi^*}/(\tilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi)$ ont même ordre.

Pour simplifier l'écriture, posons $Y_\infty = \tilde{\mathcal{U}}_\infty^\psi/\widetilde{\text{Jac}}_\infty^\psi \simeq \Lambda_\psi/\tilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi$ et faisons la descente sur ce module. A partir de la suite exacte tautologique

$$0 \rightarrow \widetilde{\text{Jac}}_\infty^\psi \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_\infty^\psi \rightarrow Y_\infty \rightarrow 0,$$

on obtient, en prenant les invariants-co-invariants par Γ^{p^n} (l'isomorphisme du milieu provient de l'hypothèse $\psi(p) \neq 1$) :

$$\dots \rightarrow (\widetilde{\mathcal{J}ac}_\infty^\psi)_{\Gamma^{p^n}} \rightarrow (\widetilde{\mathcal{U}}_\infty^\psi)_{\Gamma^{p^n}} \simeq \widetilde{\mathcal{U}}_n^\psi \rightarrow (Y_\infty)_{\Gamma^{p^n}} \rightarrow 0$$

La norme étant surjective sur la partie "moins" des modules de sommes de Gauss (sous-section 2.5), on en déduit que $(Y_\infty)_{\Gamma^{p^n}} \simeq \widetilde{\mathcal{U}}_n^\psi / \widetilde{\mathcal{J}ac}_n^\psi$. Or l'ordre de ce dernier quotient est égal à celui de $(X_\infty^{\prime\psi^*})_{\Gamma^{p^n}}$ pour $n \geq 1$:

- si $\psi^*(p) \neq 1$, c'est le thm. 2 de [B]
- si $\psi^*(p) = 1$, il suffit de reprendre la démonstration du thm. 2 de [B] : dans l'étape-clé de la p.150, on remplace \mathfrak{X}_n^ψ et \mathcal{U}_n^ψ par $\widetilde{\mathfrak{X}}_n^\psi$ et $\widetilde{\mathcal{U}}_n^\psi$, et le reste de la preuve est inchangé.

L'égalité des séries caractéristiques de $(X_\infty^{\prime\psi^*})^\sharp$ et Y_∞ , et donc l'égalité des quotients de Herbrand, montre alors que $((X_\infty^{\prime\psi^*})^\sharp)_{\Gamma^{p^n}}$ et $Y_\infty^{\Gamma^{p^n}}$ ont même ordre pour $n \geq 1$, donc que les sous-modules finis maximaux de Y_∞ et $(X_\infty^{\prime\psi^*})^\sharp$ ont même ordre. La première partie du théorème 5 est ainsi démontrée.

Dans le cas où $\psi^*(p) \neq 1$, on a par définition $\widetilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi = \mathcal{G}_\infty^\psi$ et il est connu (voir par ex. [HI], pp. 380-381) que la surjection naturelle $X_\infty^{\psi^*} \rightarrow X_\infty^{\prime\psi^*}$ est alors un isomorphisme, d'où la seconde assertion du théorème. \square

Corollaire 2. $X_\infty^{\prime\psi^*} = (0) \Leftrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi = \Lambda_\psi \Leftrightarrow X_\infty^\psi \simeq \Lambda_\psi / (\mathcal{F}_\psi)$

Remarque : C'est l'analogie exact de la conjecture de Vandiver - sous différentes formulations - au-dessus de $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$; rappelons que la conjecture de Greenberg prévoit seulement la finitude de $X_\infty^{\prime\psi^*}$.

Preuve. La première équivalence résulte immédiatement du théorème 5. La seconde équivalence résulte de la première et de la suite exacte du théorème 4. \square

Corollaire 3. *Soit ψ impair, $\psi \neq \omega$.*

1. Si $\psi(p) \neq 1$, $(\widetilde{\mathcal{G}}_n^\psi)^\sharp$ est l'idéal de Fitting de $X_\infty^{\prime\psi^*} / \omega_n$ sur l'algèbre $\mathbb{Z}_p[\psi^*][\Gamma_n]$.
2. Si en outre $\psi^*(p) \neq 1$, $(\mathcal{G}_n^\psi)^\sharp$ est le Fitting de $A_n^{\psi^*}$, $\forall n \geq 0$.

Preuve. 1. Le Fitting de $X_\infty^{\prime\psi^*} / \omega_n$ sur $\Lambda_{\psi^*} / \omega_n \simeq \mathbb{Z}_p[\psi^*][\Gamma_n]$ est l'image dans cette algèbre de $(\widetilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi)^\sharp$. Il reste à montrer la surjectivité de l'application naturelle $N : (\widetilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi)^\sharp \rightarrow (\widetilde{\mathcal{G}}_n^\psi)^\sharp$ i.e., par le lemme de Nakayama, la surjectivité de $N : (\widetilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi)^\sharp / p \rightarrow (\widetilde{\mathcal{G}}_n^\psi)^\sharp / p$. Comme $\kappa(\sigma) \equiv 1 \pmod{p}$ pour tout $\sigma \in \Gamma^{p^n}$, $M^\sharp / p \simeq M / p$ pour tout Γ^{p^n} -module M , et la surjectivité cherchée équivaut à celle de $N : \widetilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi / p \rightarrow \widetilde{\mathcal{G}}_n^\psi / p$ i.e., par Nakayama, à la surjectivité de $N : \widetilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi \rightarrow \widetilde{\mathcal{G}}_n^\psi$, qui est clair par le paragraphe 2.5. La première assertion du corollaire est ainsi démontrée.

2. Par l'hypothèse de semi-simplicité, toutes les p -places sont totalement ramifiées dans K_∞/K , donc les applications naturelles $X_\infty^{\psi^*}/\omega_n \rightarrow A_n^{\psi^*}$ sont surjectives. L'hypothèse $\psi^*(p) \neq 1$ entraîne qu'elles sont injectives d'après [LMN], proposition 4.1. Elle entraîne aussi, comme on l'a déjà vu dans le théorème 4, que $X_\infty^{\psi^*} \simeq X_\infty^{\psi^*}$.

□

Bien entendu, l'intérêt du théorème 5 dépend de notre capacité à décrire plus ou moins explicitement l'idéal $\tilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi$. Le module des sommes de Jacobi $\overline{\text{Jac}}_\infty^\psi$ étant isomorphe à $\mathcal{F}_\psi \cdot \mathfrak{X}_\infty^\psi$ (lemme 1), on est ramené à la détermination des éléments $\mathcal{F}_\psi \cdot \rho$ pour $\rho \in \mathfrak{X}_\infty^\psi$, ce qui constitue en quelque sorte une loi de réciprocité explicite au niveau infini. Le principe du calcul sera le suivant : puisque $\psi \neq \omega$, la ψ -partie de \mathcal{U}_∞^ψ s'injecte dans \mathfrak{X}_∞^ψ (par le corps de classes, on peut l'identifier au sous-groupe d'inertie de \mathfrak{X}_∞^ψ en toutes les p -places). Comme \mathcal{F}_ψ annule X_∞^ψ , $\mathcal{F}_\psi \cdot \rho \in \mathcal{U}_\infty^\psi$ pour tout $\rho \in \mathfrak{X}_\infty^\psi$, et l'on peut chercher à déterminer $\mathcal{F}_\psi \cdot \rho$ par la théorie de Coleman, ce qui revient *in fine* à calculer certains caractères de Coates-Wiles. Par une approche "motivique" et en utilisant la loi de réciprocité de Bloch-Kato, on peut se ramener aux caractères de Soulé, c.à.d. à des caractères kummeriens construits à partir d'un système cohérent particulier de p -unités cyclotomiques. On obtient ainsi une description remarquablement simple et explicite des idéaux de Fitting de $X_\infty^{\psi^*}$ et des $A_n^{\psi^*}$.

4 Calculs explicites sur \mathbb{Q}

Pour des raisons heuristiques, on étudiera d'abord le cas particulier $F = \mathbb{Q}$, qui présente le double avantage, d'une part de ne pas obscurcir les arguments principaux par excès de détails techniques, d'autre part "d'expliquer" l'intervention des sommes de Gauss et de Jacobi. Le lecteur intéressé seulement au cas général pourra se reporter directement au §5.

Dans toute la suite, on désignera par ω le caractère de Teichmüller de $G = G_0 = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$. Tout caractère impair ψ de G s'écrira sous la forme $\psi = \omega^i$, $1 \leq i \leq p-2$, i impair. Si M est un module sur lequel G opère, on notera $M^{(i)}$ le sous-espace propre correspondant au caractère ω^i . Suivant la démarche générale exposée à la fin du §3.4, il nous faut choisir un homomorphisme "explicite"

$$\mathcal{U}_\infty^{(i)} \hookrightarrow \Lambda_{\omega^i} \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]e_i,$$

où e_i est l'idempotent associé à ω^i .

Partons de l'homomorphisme de Coleman $\mathcal{U}_\infty \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[[G_\infty]] \cdot (1+T)$ défini par

$$\epsilon \in \mathcal{U}_\infty \mapsto \text{Col}(\epsilon) = (1 - \varphi/p) \log f_\epsilon(T),$$

où $f_\epsilon(T) \in \mathbb{Z}_p((T))^\times$ est la série de Coleman associée à ϵ et $(\varphi g)(T) = g((1+T)^p - 1)$. Rappelons que $G_\infty = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q})$ opère sur \mathcal{U}_∞ naturellement, et sur $\mathbb{Z}_p[[T]]$ par $(\tau f)(T) = f((1+T)^{\kappa(\tau)} - 1)$, où κ désigne le caractère cyclotomique. Pour $\epsilon \in \mathcal{U}_\infty$, il existe alors un unique élément $\text{Mel}(\epsilon) \in \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ t.q. $\text{Col}(\epsilon) = \text{Mel}(\epsilon).(1+T)$, ce qui permet de définir un $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ -homomorphisme

$$\text{Mel} : \mathcal{U}_\infty \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[[G_\infty]] \simeq \mathbb{Z}_p[G][[T]].$$

D'après les considérations du §3.4, il est clair que l'idéal de Fitting $\mathcal{G}_\infty^{(i)} \subset \Lambda_{\omega^i}$ est formé des éléments $\text{Mel}(\mathcal{F}_i.\rho)$, où \mathcal{F}_i est la série caractéristique de $X_\infty^{(i)}$ et ρ parcourt $\mathfrak{X}_\infty^{(i)}$. Il est connu que $X_\infty^{(1)} = (0)$, i.e. \mathcal{F}_1 est inversible.

Remarque : Les notations de la théorie de Coleman ne sont pas très bien fixées. On a adopté ici la terminologie de [PR], qui se justifie par le fait que Mel provient essentiellement d'une transformée de Mellin ([PR], p.91). Pour calculer $\text{Mel}(\mathcal{F}_i.\rho)$, on va utiliser des résultats de la théorie d'Ihara sur les pro-p-revêtements étales de la droite projective privée de trois points.

Rappels sur la théorie d'Ihara : ([Col3], [Ih], etc...)

Le pro-p-revêtement abélien étale maximal de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ est donné par la tour des courbes de Fermat d'équations homogènes $X^{p^n} + Y^{p^n} + Z^{p^n} = 0$, $n \geq 1$, et le groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$ opère naturellement sur le module de Tate $\mathbb{T} := \varprojlim T_p(J_n(\overline{\mathbb{Q}}))$ associé aux jacobiniennes J_n de ces courbes. La théorie d'Ihara permet d'en déduire des représentations galoisiennes décrites en termes de séries formelles. Citons trois résultats principaux :

Théorème 6. \mathbb{T} est un module monogène sur l'anneau

$$\mathcal{A} \simeq \mathbb{Z}_p[[u, v]] \simeq \mathbb{Z}_p[[u, v, w]] / ((1+u)(1+v)(1+w) - 1).$$

Un générateur privilégié η de \mathbb{T} sur \mathcal{A} provient du commutateur $xyx^{-1}y^{-1}$ dans le pro-p-groupe libre à deux générateurs x et y , qui est le groupe fondamental du pro-p-revêtement étale maximal de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ (ce commutateur correspond au contour de Pochhammer dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$). En fixant une fois pour toutes un générateur de $T_p(G_m) = \mathbb{Z}_p(1)$, l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur \mathbb{T} se traduit par un 1-cocycle continu

$$\text{Ih} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{A}^*,$$

$\sigma \mapsto \text{Ih}_\sigma(u, v, w)$ t.q. $\sigma.\eta = \text{Ih}_\sigma(u, v, w).\eta$. Par restriction, on obtient une représentation continue de \mathfrak{X}_∞ dans \mathcal{A}^* :

Théorème 7. On a une représentation continue $\text{Ih} : \mathfrak{X}_\infty \rightarrow \mathcal{A}^*$, $\rho \mapsto \text{Ih}_\rho(u, v, w)$ t.q.

$$\text{Ih}_\rho(u, v, w) = \exp \sum_{m \geq 3, m \text{ impair}} \frac{\beta_m(\rho)}{m!} (U^m + V^m + W^m),$$

$1 + u = \exp U$, $1 + v = \exp V$, $1 + w = \exp W$. En particulier, $\text{Ih}_\rho(u, v, w) = G_\rho(u)G_\rho(v)G_\rho(w)$, $(1 + u)(1 + v)(1 + w) = 1$, avec

$$G_\rho(u) = \exp \sum_{m \geq 3, m \text{ impair}} \frac{\beta_m(\rho)}{m!} U^m$$

et des expressions analogues pour $G_\rho(v)$, $G_\rho(w)$. Pour tout $m \geq 3$, impair, $\beta_m \in \text{Hom}_{G_\infty}(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}_p(m))$.

La série Ih_ρ (resp. G_ρ) est universelle pour les sommes de Jacobi (resp pour les sommes de Gauss) en un sens bien précis, voir [Ih], thm.7 (resp. [Col2], thm. 5.3). La factorisation de Ih_ρ dans le théorème précédent est l'analogie de la factorisation d'une somme de Jacobi à deux paramètres en un produit de trois sommes de Gauss. De plus, alors que les valeurs spéciales de G_ρ sont reliées aux sommes de Gauss, les coefficients de G_ρ sont reliés aux unités cyclotomiques.

4.1 Rappels sur quelques caractères p -adiques.

Rappelons d'abord la définition de quelques caractères qui interviennent classiquement en théorie d'Iwasawa cyclotomique (voir e.g. [IS]). Fixons une fois pour toutes un générateur $\nu = (\zeta_{p^n})_{n \geq 1}$ de $\mathbb{Z}_p(1)$.

- **les caractères de Coates-Wiles** $\phi_m^{CW} \in \text{Hom}_{G_\infty}(\mathcal{U}_\infty, \mathbb{Z}_p(m))$ apparaissent comme coefficients dans le développement en série de $\log f_\epsilon$:

$$\forall \epsilon \in \mathcal{U}_\infty, \log f_\epsilon(u) = \sum_{m \geq 1, m \text{ impair}} \frac{\phi_m(\epsilon)}{m!} U^m, \quad 1 + u = \exp U,$$

$$\text{et } \phi_m^{CW}(\epsilon) = \phi_m(\epsilon) \otimes \nu^{\otimes m}.$$

- **les caractères de Soulé** $\chi_m \in \text{Hom}_{G_\infty}(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}_p(m))$, qui sont des caractères kummeriens sur des systèmes projectifs de p -unités cyclotomiques :

$\forall n \geq 1, \forall m \geq 1$, impair, posons

$$\epsilon_n^{(m)} = \prod_{1 \leq a \leq p^n, (a,p)=1} (1 - \zeta_{p^n}^a)^{a^{m+1}}$$

et définissons χ_m par $\zeta_{p^n}^{\chi_m(\rho)} = \{(\epsilon_n^{(m)})\}^{\rho-1}$, $\forall n \geq 1 \forall \rho \in \mathfrak{X}_\infty$. Alors :

Théorème 8. Pour tout $m \geq 3$, m impair, on a :

$$1. \forall \epsilon \in \mathcal{U}_\infty^{(i)}, \beta_m(\epsilon) = L_p(m, \omega^{i-m}) \phi_m^{CW}(\epsilon).$$

2. $\forall \epsilon \in \mathcal{U}_\infty^{(i)}, \chi_m(\epsilon) = (1 - p^{m-1})L_p(m, \omega^{1-m})\phi_m^{CW}(\epsilon)$
3. $\forall i$ impair, $3 \leq i \leq p-2$, $\forall \rho \in \mathfrak{X}_\infty^{(i)}$, $\forall m \equiv i \pmod{p-1}$, $\chi_m(\rho) = (1 - p^{m-1})\phi_m^{CW}(\mathcal{F}_i \cdot \rho)$
4. $\forall i$ impair, $3 \leq i \leq p-2$, $\forall \rho \in \mathfrak{X}_\infty^{(i)}$, $\forall m \equiv i \pmod{p-1}$, $\beta_m(\rho) = \phi_m^{CW}(\mathcal{F}_i \cdot \rho) = (1 - p^{m-1})^{-1}\chi_m(\rho)$

Principe de la preuve. 1. provient de [Ih], thm. 10. La relation 2. a été montrée par Coleman en utilisant sa loi de réciprocité explicite ([Col1]). Donnons une idée de la preuve de 3. suivant la méthode simplifiée de [Ich] : Comme \mathcal{F}_i est "la" série caractéristique de $X_\infty^{(i)}$, on a déjà vu que $\mathcal{F}_i \cdot \rho \in \mathcal{U}_\infty^{(i)}$. Puisque $\text{Hom}_{G_\infty}(\mathfrak{X}_\infty^{(i)}, \mathbb{Z}_p(m)) = 0$ pour $m \not\equiv i \pmod{p-1}$, on peut se limiter au cas où $m \equiv i \pmod{p-1}$; alors, pour $\rho = \epsilon \in \mathcal{U}_\infty^{(i)}$, les relations 2. et 3. coïncident par Mazur-Wiles, donc 3. découle de 2. si la restriction

$$\text{Hom}_{G_\infty}(\mathfrak{X}_\infty^{(i)}, \mathbb{Z}_p(m)) \rightarrow \text{Hom}_{G_\infty}(\mathcal{U}_\infty^{(i)}, \mathbb{Z}_p(m))$$

est injective. Or, toujours d'après Mazur-Wiles, cette injectivité a lieu si et seulement si $L_p(m, \omega^{1-i}) \neq 0$. Mais il n'y a qu'un nombre fini d'entiers m pour lesquels $L_p(m, \omega^{1-i}) = 0$, et donc la continuité en m des caractères χ_m et $(1 - p^{m-1})\phi_m^{CW}$ entraîne la validité de la relation 3.

La relation 4., quant à elle, repose sur l'injectivité (inconditionnelle) d'un autre homomorphisme de restriction, à savoir

$$\text{Hom}_{G_\infty}(\mathfrak{X}_\infty^{(i)}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Hom}_{G_\infty}(\mathcal{U}_\infty^{(i)}, \mathcal{B}),$$

où $\mathcal{B} = \{g \in \mathcal{A}^*; g(0,0) \equiv 1 \pmod{p}\}$ (voir e.g. [Ich]). □

4.2 Sommes de Gauss

Le théorème précédent détermine clairement l'image $\text{Col}(\mathcal{F}_i \cdot \rho)$ en termes kummeriens. Plus précisément :

Lemme 8. $\forall i \geq 3$, impair, $\forall \rho \in \mathfrak{X}_\infty^{(i)}$, $\text{Col}(\mathcal{F}_i \cdot \rho)$ est la "série universelle de Gauss"

$$H_\rho^i(T) := \sum_{m \geq 3, m \equiv i \pmod{p-1}} \frac{\chi_m(\rho)}{m!} X^m,$$

avec $\exp X = 1 + T$.

Preuve. A partir de la formule évidente $D(\varphi g) = p\varphi(Dg)$, où D est l'opérateur différentiel $(1+T)\frac{d}{dT}$, on obtient immédiatement le développement en série

$$\text{Col}(\epsilon) = \sum_{m \geq 1, m \text{ impair}} \frac{(1 - p^{m-1})\phi_m^{CW}(\epsilon)}{m!} X^m,$$

$\exp X = 1+T$, $\forall \epsilon \in \mathcal{U}_\infty$. Pour $\epsilon = \mathcal{F}_i \cdot \rho$, on en déduit, d'après 3. du théorème précédent, que $\text{Col}(\mathcal{F}_i \cdot \rho) = H_\rho^i(T)$. □

Il reste à déterminer $\text{Mel}(\mathcal{F}_i, \rho)$, ce qu'on va faire en introduisant, pour tout $\rho \in \mathfrak{X}_\infty$, une mesure $\delta_\rho \in \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ définie par Ihara-Kaneko-Yukinari ([IKY], prop.2) :

Définition-Lemme 1. *Pour tout $\rho \in \mathfrak{X}_\infty$, pour tout $n \geq 1$ et tout $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$, fixons $b_{n,\bar{a}} \in \mathbb{Z}_p$ t.q. $\{(1 - \zeta_{p^n}^{\bar{a}})\}^{\rho-1} = \zeta_{p^n}^{b_{n,\bar{a}}}$ et posons*

$$\delta_n = \sum_{a=1, (a,p)=1}^{p^n-1} b_{n,\bar{a}} a^{-1} \sigma_a \in \mathbb{Z}_p[G_\infty],$$

où σ_a est l'unique élément de G_∞ t.q. $\kappa(\sigma_a) = a$. Alors $\delta_\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \in \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ existe, et

$$\delta_\rho \cdot (1 + T) = \sum_{m \geq 1} \frac{\chi_m(\rho)}{m!} X^m, \quad \exp X = 1 + T.$$

Principe de la preuve : On remarque qu'en fait $\delta_\rho = \lim_{\leftarrow} \pi_n(\delta_n)$, où π_n est la projection de $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[G_n]$. De plus, par définition,

$$\chi_m(\rho) \equiv \sum_{a=1, (a,p)=1}^{p^n-1} b_{n,\bar{a}} \cdot a^{m-1} \pmod{p^n}.$$

Or il est immédiat que :

$$\delta_n \cdot (1 + T) = \sum_{a=1, (a,p)=1}^{p^n-1} b_{n,\bar{a}} a^{-1} (1 + T)^a = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{a=1, (a,p)=1}^{p^n-1} b_{n,\bar{a}} \cdot a^{m-1} \right\} \frac{X^m}{m!}.$$

Le reste du calcul est purement algébrique. □

Il en résulte immédiatement que pour tout i impair, $3 \leq i \leq p-2$, $\text{Mel}(\mathcal{F}_i, \rho) = \delta_\rho^{(i)}$, où $\delta_\rho^{(i)} \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ est la ω^i -partie de δ_ρ . D'où :

Proposition 2. *Pour tout i impair, $3 \leq i \leq p-2$, $\mathcal{G}_\infty^{(i)} = \{\delta_\rho^{(i)}, \rho \in \mathfrak{X}_\infty^{(i)}\}$.*

Ce résultat sera généralisé au théorème 10.

5 Calculs explicites sur un corps totalement réel

On se propose dans cette section de déterminer explicitement les idéaux de Fitting $\tilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi$ en se plaçant dans la situation suivante :

F est un corps abélien totalement réel, $\Delta = \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$, p premier avec $|\Delta|$ et p ne se ramifie pas dans F .

$K = K_0 = F(\zeta_p)$, $K_n = F(\zeta_{p^{n+1}})$, $K_\infty = \bigcup_{n \geq 0} K_n$, $\Delta = \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$, $G =$

$\text{Gal}(K/F)$, $G_n = \text{Gal}(K_n/F)$, $G_\infty = \text{Gal}(K_\infty/F)$, $\Gamma_n = \text{Gal}(K_n/K)$, $\Gamma = \text{Gal}(K_\infty/K)$.

ψ impair s'écrit $\chi\omega^i$, où χ est un caractère (forcément pair) de Δ et $i \in \mathbb{Z}$ est impair.

Notons que l'hypothèse de non ramification de p dans F n'est pas vraiment restrictive puisque tout corps abélien totalement réel peut être plongé dans un corps de la forme K_n^+ . Quand à l'hypothèse de semi-simplicité, on a déjà signalé dans l'introduction qu'elle n'est pas vraiment nécessaire.

L'extension des méthodes du §4 au cas général n'est pas immédiate. La théorie d'Ihara étant spécifique à $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, on perd l'interprétation des sommes de Gauss ou de Jacobi en termes de séries universelles. Mais l'étape essentielle, à savoir la relation de Coleman (thm. 8), peut être généralisée en adoptant une approche "motivique".

5.1 Généralités

Rappelons d'abord les préliminaires de la **théorie de Coleman** sur F (voir e.g. [T]). Soit Δ_p le groupe de décomposition de p dans Δ et $\sigma_p \in \Delta$ l'automorphisme de Frobenius en p . Posons

$$\widehat{\mathcal{O}}_F = \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p \simeq \prod_{v|p} \mathcal{O}_v,$$

où \mathcal{O}_v est l'anneau des entiers du complété F_v . Comme F/\mathbb{Q} est non ramifiée en p , le $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ -module additif $\widehat{\mathcal{O}}_F$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p[\Delta]$.

L'anneau des séries formelles $\widehat{\mathcal{O}}_F[[T]]$ admet une action de Δ via les coefficients, ainsi qu'une action de G_∞ définie par :

$$(\tau g)(T) = g((1+T)^{\kappa(\tau)} - 1),$$

où κ est le caractère cyclotomique.

Soit ϕ l'endomorphisme continu de $\widehat{\mathcal{O}}_F[[T]]$ tel que

$$(\phi g)(T) = g^{\sigma_p}((1+T)^p - 1).$$

L'homomorphisme de Coleman est le $\mathbb{Z}_p[\Delta][[G_\infty]]$ -homomorphisme $\text{Col} : \mathcal{U}_\infty \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_F[[T]]$ défini par $\text{Col}(\epsilon) = (1 - \phi/p)\log f_\epsilon(T)$, où $f_\epsilon(T) \in \widehat{\mathcal{O}}_F((T))^\times$ est la série de Coleman associée à $\epsilon = (\epsilon_n)_{n \geq 0}$, vérifiant $f_\epsilon(\zeta_{p^{n+1}} - 1) = (\epsilon_n)^{\sigma_p^n} \forall n \geq 0$.

L'image de Col est contenue dans un module libre $\widehat{\mathcal{O}}_F[[G_\infty]] \cdot (1+T)$, de sorte qu'on peut définir $\text{Mel}(\epsilon) \in \widehat{\mathcal{O}}_F[[G_\infty]]$ par la relation $\text{Mel}(\epsilon) \cdot (1+T) = \text{Col}(\epsilon)$. Le résultat fondamental de Coleman est l'existence d'une suite exacte de $\mathbb{Z}_p[\Delta][[G_\infty]]$ -modules :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\Delta/\Delta_p](1) \longrightarrow \mathcal{U}_\infty \xrightarrow{\text{Mel}} \widehat{\mathcal{O}}_F[[G_\infty]] \xrightarrow{\kappa} \frac{\widehat{\mathcal{O}}_F}{(\sigma - 1)\widehat{\mathcal{O}}_F}(1) \longrightarrow 0$$

qui provient par induction (i.e. en tensorisant au-dessus de $\mathbb{Z}_p[\Delta_p][[G_\infty]]$ par $\mathbb{Z}_p[\Delta][[G_\infty]]$) d'une suite exacte de $\mathbb{Z}_p[\Delta_p][[G_\infty]]$ -modules :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow \mathcal{U}_{v,\infty} \longrightarrow \mathcal{O}_v[[G_\infty]] \xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow 0$$

(où $\mathcal{U}_{v,\infty}$ désigne la limite projective des unités locales principales).

On notera que $\mathbb{Z}_p[\Delta/\Delta_p](1)$ n'est autre que le module W_∞ introduit au § 3.2. Soit ψ un caractère impair, $\psi = \chi\omega^i$, $1 \leq i \leq p-2$, i impair, où χ est un caractère de Δ (forcément pair). Alors $\Lambda_\psi := \widehat{\mathcal{O}}_F[[G_\infty]]^\psi \simeq \mathbb{Z}_p[\chi][[T]]e_i$, e_i étant l'idempotent associé à ω^i . D'après la suite exacte de Coleman et la stratégie exposée à la fin du §3, il est clair que l'image par Mel de $\mathcal{F}_\psi \cdot \mathfrak{X}_\infty^\psi \subset \mathcal{U}_\infty^\psi$ n'est autre que $\widetilde{\mathcal{G}}_\infty^\psi \subset \Lambda_\psi$. Pour calculer les éléments $\text{Mel}(\mathcal{F}_\psi \cdot \rho)$, $\rho \in \mathfrak{X}_\infty^\psi$, on dispose encore des caractères de Coates-Wiles et de Soulé dans le cas général, même s'ils sont plus compliqués à définir que dans le cas particulier du paragraphe précédent :

-pour un corps F totalement réel, non ramifié en p , **les caractères de Coates-Wiles locaux**

$$\phi_{m,v}^{CW} : \overline{U}_{v,\infty} \rightarrow F_v(m) := F_v \otimes \mathbb{Q}_p(m)$$

relatifs à F_v ($v|p$) sont donnés à partir du développement en série

$$\log f_\epsilon(u) = \sum_{m \geq 1} \frac{\phi_{m,v}(\epsilon)}{m!} U^m,$$

où $\epsilon \in \mathcal{U}_{v,\infty}$, f_ϵ est la série de Coleman associée, $1+u = \exp U$. En choisissant un générateur ν de $\mathbb{Z}_p(1)$, on pose, pour tout $m \in \mathbb{Z}$: $\phi_{m,v}^{CW}(\epsilon) = \phi_{m,v}(\epsilon) \otimes \nu^{\otimes m}$. Alors $\phi_{m,v}^{CW}(\epsilon) \in \text{Hom}_{G_\infty}(\mathcal{U}_{v,\infty}, F_v(m)) \simeq \text{H}^1(F_v, F_v(m))$ ([BK], §2). En induisant de Δ_p à Δ , on peut définir un **caractère de Coates-Wiles semi-local** relatif à F ,

$$\phi_m^{CW} : \mathcal{U}_\infty \rightarrow F_p(m),$$

avec $F_p := F \otimes \mathbb{Q}_p \simeq \bigoplus_{v|p} F_v$, qui appartient à $\text{Hom}_{G_\infty}(\mathcal{U}_\infty, F_p(m)) \simeq \bigoplus_{v|p} \text{H}^1(F_v, F_v(m))$.

-les **caractères de Soulé** $\chi_m^{(e)}$ relatifs à un corps de nombres **quelconque** F sont des caractères kummeriens attachés à un système projectif e de p -unités : si $e = (e_n)_{n \geq 0} \in \overline{U}_\infty' = \varprojlim (U_n' \otimes \mathbb{Z}_p)$, où U_n' est le groupe des p -unités de $K_n = F(\zeta_{p^n})$, on pose

$$\epsilon_n^{(m)}(e) = \prod_{\tau} e_n^{\tau \cdot \langle \kappa(\tau) \rangle^{m-1} \cdot \tau},$$

où τ parcourt $\text{Gal}(K_n/F)$ et $\langle \alpha \rangle_n$ désigne l'unique entier de l'intervalle $[0, p^n]$ qui est congru à $\alpha \pmod{p^n}$. On définit alors le caractère $\chi_m^{(e)} : \mathfrak{X}_\infty \rightarrow$

$\mathbb{Z}_p(m)$ par ([Sou], [IS]) :

$$(\zeta_{p^n})\chi_m^{(e)}(\rho) = \{(\epsilon_n^{(m)}(e))^{1/p^n}\}^{\rho-1}, \quad \forall \rho \in \mathfrak{X}_\infty, \forall n \geq 1.$$

Une interprétation peut-être plus fonctorielle consiste à utiliser l'isomorphisme ([KNF], lemma 2.2)

$$\mathrm{Hom}_{G_\infty}(\mathfrak{X}_\infty, \mathbb{Z}_p(m)) \simeq \mathrm{H}_{\acute{e}t}^1(\mathcal{O}_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m)) \text{ mod torsion}$$

et pour $m \neq 1$, la suite exacte ([KNF] thm 3.2)

$$0 \rightarrow \overline{U}'_\infty(m-1)_{G_\infty} \rightarrow \mathrm{H}_{\acute{e}t}^1(\mathcal{O}_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m)) \rightarrow X'_\infty(m-1)^{G_\infty} \rightarrow 0$$

(toutes les constructions sont canoniques). On peut alors définir le caractère $\chi_m^{(e)}$ comme l'image de $(e_n \otimes \zeta_{p^n}^{\otimes m-1})_n \in (\overline{U}'_\infty(m-1))_{G_\infty}$ dans $\mathrm{H}_{\acute{e}t}^1(\mathcal{O}_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m))$ mod torsion.

Si F est abélien, le caractère de Soulé proprement dit, noté $\chi_m = \chi_m(F)$, correspond à un choix particulier de $e = (e_n)_{n \geq 1}$: on prend pour e_n la p -unité cyclotomique $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_{fp^n})/K_n}(1 - \zeta_{fp^n})$, où f est le conducteur de K . Dans la suite, il sera même commode de considérer plutôt l'image χ_m^S (S pour Soulé) de χ_m dans $\oplus_{v|p} \mathrm{H}^1(F_v, \mathbb{Z}_p(m))$ mod torsion, via le morphisme de localisation

$$\mathrm{loc}_m : \mathrm{H}_{\acute{e}t}^1(\mathcal{O}_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m)) \rightarrow \oplus_{v|p} \mathrm{H}^1(F_v, \mathbb{Z}_p(m)).$$

Remarques :

1. Pour $m \geq 1$, la \mathbb{Z}_p -torsion de $\mathrm{H}_{\acute{e}t}^1(\mathcal{O}_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m))$ n'est autre que $\mathrm{H}_{\acute{e}t}^0(\mathcal{O}_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m))$ ([KNF], lemma 2.2)
2. Si F est abélien totalement réel, pour tout caractère χ de $\Delta = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$, la χ -composante loc_m^χ de loc_m est injective si et seulement si la valeur spéciale $L_p(F, \chi\omega^{1-m})$ est non nulle ([KN] thm. 3.1), ce qui se produit pour presque tout m .
3. Certains énoncés de [KN] et [KNF] (mais qui ne sont pas utilisés ici) comportent des facteurs eulériens erronés, qui sont corrigés dans [BenN]

Dans le cas particulier d'un corps cyclotomique $F = \mathbb{Q}(\zeta_N)$, le caractère de Soulé χ_m coïncide mod torsion avec l'**élément cyclotomique de Deligne-Soulé** $c_m(\zeta_N) \in \mathrm{H}_{\acute{e}t}^1(\mathbb{Z}[\zeta_N][1/p], \mathbb{Z}_p(m))$

$$c_m(\zeta_N) := \varprojlim \mathrm{Cores}_{\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n})/\mathbb{Q}(\zeta_N)}(1 - \zeta_{np^n}) \otimes (\zeta_{Np^n}^N)^{\otimes m-1}$$

(voir e.g [HK], def 3.1.2, où notre m est noté r), qui intervient dans la théorie des valeurs spéciales des fonctions L .

Notre objectif va maintenant être de trouver une relation entre ϕ_m^{CW} et χ_m^S

généralisant la formule de Coleman dans le thm. 8. Le calcul reposera sur la loi de réciprocité de Bloch-Kato et la compatibilité entre régulateurs étale et syntomique.

La loi de réciprocité de Bloch-Kato ([BK], [PR], etc...) pour le motif $\mathbb{Z}(m)$ peut être considérée comme une version "supérieure" des lois de réciprocité classiques pour le motif $\mathbb{Z}(1)$ ou le groupe multiplicatif \mathbb{G}_m . Soit F totalement réel, non ramifié en p . Pour toute place $v|p$, pour tout $m \geq 1$, le cobord $\partial_v^m : F_v = H^0(F_v, B_{cris}^+) \rightarrow H^1(F_v, \mathbb{Q}_p(m))$ associé à la suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p(m) \longrightarrow J_{\mathbb{Q}}^{[m]} \xrightarrow{1-p^{-m}\sigma_p} B_{cris}^+ \longrightarrow 0$$

(pour les définitions manquantes, voir [BK, p.339]) vérifie :

$$\partial_v^m(a_v) = \frac{1}{(m-1)!} T(a_v \cdot \phi_{m,v}^{CW}),$$

où $T : H^1(F_v, F_v(m)) \rightarrow H^1(F_v, \mathbb{Q}_p(m))$ se déduit de la trace de F_v/\mathbb{Q}_p ([BK], thm. 2-1).

5.2 Calculs cyclotomiques.

La tactique va consister à appliquer Bloch-Kato à un élément spécial convenablement choisi. Dans cette sous-section, on travaillera dans des corps cyclotomiques pour lesquels il convient de donner quelques notations supplémentaires.

Fixons un caractère χ (forcément pair) de $\Delta = \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$, de conducteur $N = N_\chi$. Les caractères de Coates-Wiles et de Soulé seront relatifs à $\mathbb{Q}(\zeta_N)^+$ et notés $\phi_m^{CW}(N)$, $\chi_m(N)$, $\chi_m^S(N)$. Dans l'algèbre du groupe $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$, on désignera par e_χ^N l'idempotent associé à χ et $\epsilon_\chi^N = \sum_{\tau \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi(\tau)^{-1} \tau$ son numérateur (pour appliquer e_χ^N ou ϵ_χ^N il

faut évidemment élargir les scalaires, mais pour alléger le texte, on évitera autant que possible de faire figurer les scalaires dans les notations). Les éléments $\chi_m^N = c_m(\zeta_N)$ sont compatibles pour la norme et définissent des systèmes d'Euler, et sont donc reliés aux fonctions L_p . En les modifiant par des facteurs eulériens, Kato a construit des éléments $\tilde{c}_m(\zeta_N)$ tels que $c_m(\zeta_N) = (1 - p^{m-1}\sigma_p^{-1})\tilde{c}_m(\zeta_N)$, et ces $\tilde{c}_m(\zeta_N)$ proviennent d'éléments spéciaux de la K-théorie. Plus précisément, pour $m \geq 3$, il existe des éléments spéciaux $b_m(\zeta_N) \in K_{2m-1}(\mathbb{Q}(\zeta_N)) \otimes \mathbb{Q}$ (appelés **éléments de Beilinson**) t.q. le **régulateur étale** de Soulé

$$r_{ét}^m : K_{2m-1}(\mathbb{Q}(\zeta_N)) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_{ét}^1(\mathbb{Z}[\zeta_N][1/p], \mathbb{Q}_p(m)) \rightarrow V_m^{ét}$$

(où la première flèche est une classe de Chern p -adique, la deuxième est loc_m et $V_m^{ét} := \bigoplus_{v|p} H_{ét}^1(\mathbb{Q}(\zeta_N)_v, \mathbb{Q}_p(m))$) envoie $b_m(\zeta_N)$ sur $\tilde{c}_m(\zeta_N)/N^{m-1}(m-1)!$

(Deligne-Beilinson-Huber-Wildeshaus, voir e.g. [HK], thm. 5-2-2).

Les valeurs spéciales des fonctions L_p , quant à elles, interviennent via les **régulateurs syntomiques** de Gros-Somekawa (voir e.g. [KN], §1). Pour toute place $v|p$, on a un homomorphisme composé

$$r_{syn,v}^m : K_{2m-1}(\mathbb{Q}(\zeta_N)) \longrightarrow H^1(\mathbb{Z}_p[\zeta_N], S_\infty(m)_{\mathbb{Q}_p}) \xrightarrow{\alpha_v} \mathbb{Q}(\zeta_N)_v$$

où la première flèche est une classe de Chern syntomique à valeurs dans un groupe de cohomologie syntomique ; si $p \nmid N$, ce groupe est égal à $\mathbb{Q}(\zeta_N)_v$ et $\alpha_v = (1 - p^{-m}\sigma_p)$.

Alors $b_m(\zeta_N)$ s'envoie via $r_{syn,v}^m$ sur $(1 - p^{-m}\sigma_p)Li_m(\zeta_N)$ (voir e.g. [KN], thm. 1.5), où Li_m est le polylogarithme p -adique de Coleman, dont le lien avec les fonctions L_p est donné, pour tout caractère de Dirichlet pair $\theta \neq 1$, de conducteur N_θ , par la formule ([Col3], p.172) :

$$(1 - \theta(p)p^{-m})^{-1} \cdot L_p(\theta\omega^{1-m}, m) = \tau(\theta)N_\theta^{-1} \sum_{b=1}^{N_\theta} \theta(b)Li_m(\zeta_{N_\theta}^b)$$

où $\tau(\theta) = \sum_{b=1}^{N_\theta} \theta(b)\zeta_{N_\theta}^b$ est la somme de Gauss pour θ . Si p ne divise pas N_θ ,

$\tau(\theta)$ est une unité p -adique, et l'on posera $u_\theta = \tau(\theta)^{-1}N_\theta$ (indépendant de m). Pour $\theta = 1$, la formule précédente doit être remplacée par une formule à la limite au voisinage de 1 ([Col3], p.173). Dans la suite, pour alléger le texte, on ne fera pas les calculs pour $\theta = 1$ (qui sont parallèles à ceux du cas $\theta \neq 1$).

La compatibilité entre les régulateurs syntomique et étale (théorème de Gros-Niziol, voir e.g. [KN], thm. 3.7) se résume en un triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & V_{syn}^m := \bigoplus_{v|p} \alpha_v(H^1(\mathbb{Z}_p[\zeta_N], S_\infty(m)_{\mathbb{Q}_p})) \\ & \nearrow r_{syn}^m & \downarrow \partial^m \\ K_{2m-1}(\mathbb{Q}(\zeta_N)) \otimes \mathbb{Q} & & \\ & \searrow r_{ét}^m & \\ & & V_m^{ét} := \bigoplus_{v|p} H_{ét}^1(\mathbb{Q}(\zeta_N)_v, \mathbb{Q}_p(m)) \end{array}$$

les flèches r_{syn}^m et ∂^m étant définies à partir de $r_{syn,v}^m$ et ∂_v^m par induction de H_p à H , où H désigne momentanément $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$ et H_p son sous-groupe de décomposition en une place $v|p$. Notons que $V_{syn}^m = \bigoplus_{v|p} \mathbb{Q}(\zeta_N)_v$. La tactique va consister à calculer les images de $\epsilon_{\chi^{-1}}^N(b_m(\zeta_N))$ dans le triangle précédent :

1. Par le régulateur étale :

D'après les rappels,

$$r_{\acute{e}t}^m(\epsilon_{\chi^{-1}}^N b_m(\zeta_N)) = \frac{1}{N^{m-1}(m-1)!} \epsilon_{\chi^{-1}}^N(\tilde{c}_m(\zeta_N))$$

i.e.

$$r_{\acute{e}t}^m(\epsilon_{\chi^{-1}}^N b_m(\zeta_N)) = \frac{(1-p^{m-1}\chi(p))^{-1}}{N^{m-1}(m-1)!} \epsilon_{\chi^{-1}}^N \chi_m^S(N).$$

2. Par le régulateur syntomique :

Fixons une place $v|p$ et notons χ_v la restriction de χ à H_p de conducteur N_p , $\epsilon_{\chi_v}^{N_p}$ le numérateur de l'idempotent relatif à χ_v^{-1} et H_p . D'après les rappels, le régulateur $r_{syn,v}^m$ envoie $b_m(\zeta_N)$ sur $(1-p^{-m}\sigma_p^{-1})Li_m(\zeta_N)$, donc il envoie $\epsilon_{\chi_v}^{N_p} b_m(\zeta_N)$ sur

$$(1-p^{-m}\sigma_p^{-1})\epsilon_{\chi_v}^{N_p} Li_m(\zeta_N) = (1-p^{-m}\chi(p)) \sum_{t \in H_p} \chi(t) t(Li_m(\zeta_N)).$$

Comme $\epsilon_{\chi^{-1}}^N = (\sum_{H/H_p} \chi(s)s)(\sum_{H_p} \chi(t)t)$, où s parcourt un système complet de représentants de H/H_p , le régulateur r_{syn}^m va envoyer $\epsilon_{\chi^{-1}}^N b_m(\zeta_N)$

sur $(1-p^{-m}\chi(p)) \sum_{s,t} \chi(st) st(Li_m(\zeta_N)) = \sum_{b=1}^N \chi(b) Li_m(\zeta_N^b)$ puisque le polylogarithme est Galois-équivariant. En appliquant la formule de Coleman, on obtient finalement :

$$r_{syn}^m(\epsilon_{\chi^{-1}}^N(b_m(\zeta_N))) = u_\chi L_p(\chi\omega^{1-m}, m).$$

NB : cette formule doit être lue dans le χ^{-1} -partie de $\oplus_{v|p} \mathbb{Q}(\zeta_N)_v$, identifiée à $\mathbb{Q}_p(\chi)$.

3. Par Bloch-Kato :

Comme précédemment, fixons une place $v|p$ et posons

$$a_v = r_{syn,v}^m(\epsilon_{\chi_v}^{N_p}(b_m(\zeta_N))).$$

Pour $u_v \in \mathcal{U}_{v,\infty}(N)$, la formule de Bloch-Kato s'écrit :

$$(m-1)! \partial_v^m(a_v)(u_v) = \sum_{t \in H_p} t(a_v) t(\phi_{m,v}(u_v)),$$

où l'on a noté $\phi_{m,v}$ pour $\phi_{m,v}^{CW}(N)$. Or $t(\phi_{m,v}(u_v)) = t(\phi_{m,v}(t^{-1}tu_v)) = (t\phi_{m,v})(tu_v)$ en tenant compte de l'action galoisienne habituelle sur les homomorphismes. Prenons maintenant u_v dans la χ_v -partie de $\mathcal{U}_{v,\infty}(N)$:

$$(m-1)! \partial_v^m(a_v)(u_v) = \sum_{t \in H_p} \chi_v(t) t(a_v \phi_{m,v})(u_v) = \epsilon_{\chi_v}^{N_p}(a_v \phi_{m,v})(u_v).$$

Examinons d'un peu plus près $a_v = (1-p^{-m}\chi(p))\epsilon_{\chi_v}^{N_p} Li_m(\zeta_N)$. Comme $\mathbb{Q}(\zeta_N)_v = \mathbb{Q}_p(\zeta_{N_p})$, on peut choisir $s_0 \in H$ t.q. $s_0(\zeta_N) = \zeta_{N_p}$, d'où $s_0 Li_m(\zeta_N) = Li_m(\zeta_{N_p})$ dans $\mathbb{Q}(\zeta_N)_w$, avec $w = s_0 v$, et la formule de Coleman donne : $s_0 a_v = u_{\chi_w} L_p(\chi_w \omega^{1-m}, m)$, soit, comme dans le théorème 8, en notant \mathcal{F}_w la série d'Iwasawa associée à la fonction $u_{\chi_w} L_p(\chi_w \omega^{1-m}, \cdot)$:

$$\forall u_v \in \mathcal{U}_{v,\infty}(N)^{\chi_v}, s_0 \epsilon_{\chi_v}^{N_p}(a_v \phi_{m,v})(u_v) = \epsilon_{\chi_w}^{N_p} \phi_{m,w}(\mathcal{F}_w u_w).$$

Par induction, c.à.d. en appliquant $\sum_{H/H_p} \chi(s)s$, on obtient facilement :

$$\forall u \in \mathcal{U}_\infty(N)^{\chi}, (m-1)!(s_0 \partial_m(a))(u) = (\epsilon_{\chi}^N \phi_m^{CW}(N))(\mathcal{F}_\psi \cdot u),$$

où $a = r_{syn}^m(\epsilon_{\chi}^N b_m(\zeta_N))$ et \mathcal{F}_ψ est la série d'Iwasawa associée à la fonction $u_\chi L_p(\chi \omega^{1-m}, \cdot)$, $\psi = \chi \omega^m$. D'après 1. et la commutativité du triangle des régulateurs, on en déduit, pour tout u appartenant à $\mathcal{U}_\infty(N)^{\chi}$:

$$(s_0 \epsilon_{\chi}^N \chi_m^S(N))(u) = N^{m-1}(1-p^{m-1}\chi(p))(\epsilon_{\chi}^N \phi_m^{CW}(N))(\mathcal{F}_\psi \cdot u)$$

ou encore, en changeant légèrement les notations et en écrivant \mathcal{F}_ψ pour $\chi(s_0)\mathcal{F}_\psi$:

$$(\epsilon_{\chi}^N \chi_m^S(N))(u) = N^{m-1}(1-p^{m-1}\chi(p))(\epsilon_{\chi}^N \phi_m^{CW}(N))(\mathcal{F}_\psi \cdot u).$$

Prenons maintenant $u \in \mathcal{U}_\infty(N)^\psi = (\mathcal{U}_\infty(N)^\chi)^{\omega^m}$. Si f est dans une $(\chi')^{-1}$ -partie, alors

$$(\sigma f)(u) = (\chi')^{-1}(\sigma)f(u) = \sigma(f(\sigma^{-1}u)) = \omega(\sigma)^m \psi^{-1}(\sigma)f(u) = \chi^{-1}(\sigma)f(u),$$

donc $\chi' = \chi$ et la relation précédente devient :

$$\forall u \in \mathcal{U}_\infty(N)^\psi, \chi_m^S(N)(u) = N^{m-1}(1-p^{m-1}\chi(p))\phi_m^{CW}(N)(\mathcal{F}_\psi \cdot u).$$

5.3 Retour à F

On revient aux hypothèses et notations générales de début de la partie 5, où χ est un caractère (forcément pair) de Δ , de conducteur $N = N_\chi$. La relation de Coleman (théorème 8 (3)) se généralise comme suit :

Théorème 9. *Soit $\psi = \chi \omega^i$, $1 \leq i \leq p-2$, impair. Pour tout $m \equiv i \pmod{p-1}$, pour tout $\epsilon \in \mathcal{U}_\infty^\psi$, on a :*

$$\chi_m^S(\epsilon) = N^{m-1}(1-p^{m-1}\chi(p))\phi_m^{CW}(\mathcal{F}_\psi \cdot \epsilon)$$

(ici, les notations χ_m^S , ϕ_m^{CW} , \mathcal{U}_∞^ψ sont relatives au corps de base F).

Preuve. Notons F_χ le corps fixé par $\text{Ker}\chi$ et prenons la corestriction de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ à F_χ . D'après les propriétés fonctorielles normiques rappelées au début du paragraphe 4, la dernière formule du paragraphe précédent donne :

$$\forall u' \in \mathcal{U}'_\infty, (\chi_m^S)'(u') = N^{m-1}(1 - p^{m-1}\chi(p))(\phi_m^{CW})'(\mathcal{F}_\psi \cdot u'),$$

où les notations $(.)'$ se réfèrent (provisoirement) au corps de base F_χ .

Or il est bien connu que \mathcal{U}'_∞ est de Λ_ψ -rang 1 et $\text{Hom}_{G_\infty}(\mathcal{U}'_\infty, \mathbb{Z}_p(m))$ est de $\mathbb{Z}_p[\chi]$ -rang 1, et par suite

$$\forall \epsilon \in \mathcal{U}'_\infty, \chi_m^S(\epsilon) = \lambda \phi_m^{CW}(\mathcal{F}_\psi \cdot \epsilon)$$

où $\lambda \in \mathbb{Q}_p(\chi)$ et les notations se réfèrent (définitivement) au corps de base F . En prenant la corestriction de F à F_χ , la formule précédemment obtenue montre que $\lambda = N^{m-1}(1 - p^{m-1}\chi(p))$. On a ainsi montré la formule cherchée pour tout i impair, ≥ 3 . Pour χ fixé, la continuité en m des deux membres de l'équation permet de conclure aussi pour $i = 1$. \square

Il reste maintenant à généraliser la mesure de Ihara-Kaneko-Yukinari (définition-lemme 1).

Définition-Lemme 2. Soit $\psi = \chi\omega^i$ comme précédemment, et $N = N_\chi$. Pour tout $\rho \in \mathfrak{X}_\infty^\psi$, pour tout $n \geq 1$, et tout $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$, fixons $b_{n,\bar{a}} \in \mathbb{Z}_p$ t.q. $\zeta_{p^n}^{b_{n,\bar{a}}} = (\sigma_a e_n^{1/p^n})^{\rho-1}$, où e_n est la p -unité $N_{\mathbb{Q}(\zeta_{fp^n})/K_n^+}(1 - \zeta_{fp^n})$ qui intervient dans la définition des caractères de Soulé (voir les rappels). Posons $c = aN^{-1}$ et

$$\delta_n(\rho) = \sum_{a=1, (a,p)=1}^{p^n-1} b_{n,\bar{a}} c^{-1} \sigma_c \in \mathbb{Z}_p[G_\infty].$$

Alors $\delta_\psi(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(\rho) \in \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ existe et

$$\delta_\psi(\rho) \cdot (1 + T) = \sum_{m \geq 1, m \equiv i(p-1)} \frac{N^{m-1} \chi_m(\rho)}{m!} X^m, \quad \exp X = (1 + T).$$

Preuve. Ce sont les mêmes calculs que dans la définition-lemme 1. \square

Dans ce qui suit, on considérera $\delta_\psi(\rho)$, pour $\rho \in \mathfrak{X}_\infty^\psi$, comme un élément de $\Lambda_\psi = \widehat{\mathcal{O}}_F[[G_\infty]]^\psi$.

Théorème 10. Pour tout caractère impair ψ de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, pour tout $\rho \in \mathfrak{X}_\infty^\psi$, on a : $\text{Mel}(\mathcal{F}_\psi \cdot \rho) = \delta_\psi(\rho)$ dans Λ_ψ . En particulier, $\widehat{\mathcal{G}}_\infty^\psi$ est composé des $\delta_\psi(\rho)$, ρ parcourant \mathfrak{X}_∞^ψ .

Preuve. Par définition de l'homomorphisme de Coleman et des caractères de Coates-Wiles,

$$\text{Col}(\epsilon) = \sum_{m \geq 1} (1 - \chi(p)p^{m-1}) \phi_m^{CW}(\epsilon) \frac{X^m}{m!}$$

pour tout $\epsilon \in \mathcal{U}_\infty^\psi$, et donc, d'après le Théorème 9 et la remarque 2 du § 5.1, $\text{Mel}(\mathcal{F}_\psi, \epsilon) = \delta_\psi(\epsilon)$ pour tout $\epsilon \in \mathcal{U}_\infty^\psi$. Cette identité se prolonge à \mathfrak{X}_∞^ψ , le passage de $\epsilon \in \mathcal{U}_\infty^\psi$ à $\rho \in \mathfrak{X}_\infty^\psi$ se faisant par le même argument de densité que dans la preuve du Théorème 8. \square

Sous les hypothèses où le théorème 5 s'applique, les $(\delta_\psi(\rho))^\sharp$ constituent donc l'idéal de Fitting sur Λ_{ψ^*} du module $X_\infty^{\psi^*}$. Pour avoir un résultat d'annulation galoisienne au niveau fini, introduisons quelques notations : $\forall n \geq 1, \forall \rho \in \mathfrak{X}_\infty^\psi, \forall \tau \in G_n$, soit $\bar{b}_{n,\tau} \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ t.q. $\zeta_{p^n}^{\bar{b}_{n,\tau}} = (\tau(e_n)^{1/p^n})^{\rho-1}$, où e_n est la p -unité spéciale qui intervient dans la définition des caractères de Soulé. Posons

$$\bar{\mathfrak{d}}_n(\rho) = \sum_{\tau \in G_n} \bar{b}_{n,\tau} \tau^{-1} \in \mathbb{Z}_p[\chi]/p^n[G_n].$$

Corollaire 4. *Si $\psi(p) \neq 1$ et $\psi^*(p) \neq 1$, alors les $\sigma_N \bar{\mathfrak{d}}_n(\rho)$, ρ parcourant \mathfrak{X}_∞^ψ , composent l'idéal de Fitting de $A_n^{\psi^*}/p^n$ sur $\mathbb{Z}_p[\chi^*]/p^n[G_n]$.*

Preuve. Dans les calculs justifiant l'existence de $\delta_\psi(\rho)$, on a en fait montré que $\delta_\psi(\rho) = \varprojlim \pi_n(\delta_n(\rho))$, où π_n est la projection de $\widehat{\mathcal{O}}_F[[G_\infty]]$ dans $\widehat{\mathcal{O}}_F/p^n[G_n]$. Or

$$\pi_n(\delta_n(\rho)^\sharp) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})} \bar{b}_{n,a} \sigma_{a^{-1}N} = \sigma_N \bar{\mathfrak{d}}_n(\rho)$$

(rappelons que $N = N_\chi$ est premier à p). On applique alors le corollaire 3 du théorème 5 de la partie 3.4. \square

5.4 Comparaison avec des résultats de Solomon

Dans son exposé [Sol], D.Solomon a construit certains éléments annulateurs de la partie "plus" du groupe de classes en procédant par montée (alors que nous avons procédé par descente). Résumons sa démarche :

1. Avec les mêmes hypothèses et notations que dans 4.1, Solomon construit pour tout $n \geq 1$ un homomorphisme

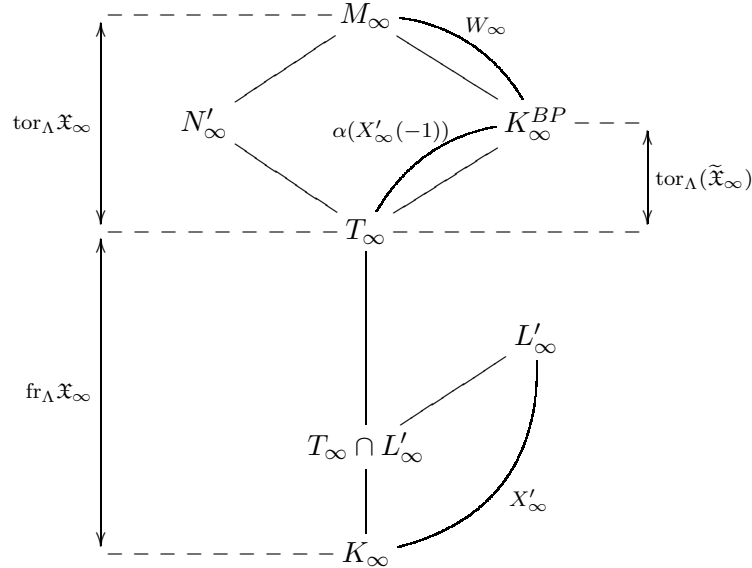
$$\bar{\mathfrak{d}}_n : \mathfrak{X}_n/p^n \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[G_n]^+$$

qui (après traduction) est l'analogue (sans les caractères) du $\bar{\mathfrak{d}}_n$ du corollaire 5.

2. Par la méthode de Thaine, il montre que $\bar{\delta}_n(\rho)$ annule A_n^+/p^n , puis, par passage à la limite projective le long de la tour cyclotomique, il obtient un homomorphisme $\bar{\delta}_\infty : \mathfrak{X}_\infty \rightarrow \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]^+$ dont l'image annule X_∞^+ .
3. Dans le cas particulier de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, il obtient, en utilisant la loi de réciprocité d'Artin-Hasse, une suite exacte au niveau infini qui est duale (sans les caractères) de notre suite exacte fondamentale (thm 4).

6 Appendice sur le "miroir" (Spiegelung)

Les relations du "miroir" étant une combinaison d'isomorphisme (corps de classes) et de dualité (Kummer), c'est au-dessus de K_∞ , dans le cadre de la théorie d'Iwasawa, qu'elles s'expriment le mieux. Voici le schéma galoisien qui contient tous les résultats de Spiegelung ([Iw2], [N2], [LMN]) :



Les notations pour la plupart des extensions sont celles de [Iw 2] : M_∞ est la pro- p -extension p -ramifiée abélienne maximale de K_∞ , N'_∞ est l'extension de K_∞ obtenue en ajoutant toutes les racines p^k -ièmes de toutes les p -unités de K_∞ , L'_∞ est la pro- p -extension abélienne non ramifiée p -décomposée maximale de K_∞ ; $\mathfrak{X}_\infty = \text{Gal}(M_\infty/K_\infty)$, $X'_\infty = \text{Gal}(L'_\infty/K_\infty)$; T_∞ est le corps fixe de $\text{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty$, donc $\text{Gal}(T_\infty/K_\infty) \simeq \text{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty := \mathfrak{X}_\infty / \text{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty$. Notons que la conjecture faible de Leopoldt (valable pour K_∞) entraîne $\mathfrak{X}_\infty^+ = (\text{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty)^+$ et $\text{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty = (\text{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty)^-$. En utilisant la théorie de Kummer, Iwasawa montre dans [Iw2] que :

1. $\text{Gal}(M_\infty/N'_\infty) \approx \alpha(X'_\infty(-1))$, où $\alpha(\cdot)$ désigne l'adjoint et \approx signifie "pseudo-isomorphisme".
2. $\text{Gal}(N'_\infty/T_\infty) \approx W_\infty := (\text{Ind}_{\Lambda_v}^\Lambda \mathbb{Z}_p(1))/\mathbb{Z}_p(1)$, où v est une p -place choisie de K_∞ et Λ_v est l'algèbre d'Iwasawa locale en v

3. $\text{Gal}(T_\infty/T_\infty \cap L'_\infty)$ est fini, i.e. $\text{fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty \approx \text{fr}_\Lambda(\text{Gal}(N'_\infty/K_\infty))$.

Ces résultats peuvent être affinés en introduisant, comme dans [N1], [N2], le **corps de Bertrandias-Paysan** K_∞^{BP} , dont on ne rappellera pas la définition mais qui peut être caractérisé comme étant le corps fixe de W_∞ . Alors, avec les notations du §3.3, $\text{Gal}(K_\infty^{BP}/K_\infty) \simeq \tilde{\mathfrak{X}}_\infty$ et l'on a (voir [LMN]) :

1. $\text{Gal}(M_\infty/N'_\infty) \simeq \text{Gal}(K_\infty^{BP}/K_\infty^{BP} \cap N'_\infty) \simeq \alpha(X'_\infty(-1)) \simeq \text{tor}_\Lambda \tilde{\mathfrak{X}}_\infty$
2. $\text{Gal}(N'_\infty/N'_\infty \cap K_\infty^{BP}) \simeq \text{Gal}(M_\infty/K_\infty^{BP}) = W_\infty$
3. $\text{Gal}(N'_\infty \cap K_\infty^{BP}/T_\infty)$ est fini.

Autrement dit, $\text{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty$ contient un sous-module d'indice fini isomorphe à $W_\infty \oplus \alpha(X'_\infty(-1))$. Ces résultats proviennent essentiellement d'une suite exacte de Poitou-Tate

$$0 \rightarrow W_\infty \rightarrow \text{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty \rightarrow \text{tor}_\Lambda \tilde{\mathfrak{X}}_\infty \simeq \alpha(X'_\infty(-1)) \rightarrow 0$$

qui exprime le fait que la surjection canonique $\mathfrak{X}_\infty \rightarrow X'_\infty$ induit un homomorphisme $\text{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty \rightarrow X'_\infty$ qui se factorise à travers $\eta_\infty : \text{Gal}(K_\infty^{BP}/T_\infty) = \text{tor}_\Lambda \tilde{\mathfrak{X}}_\infty \rightarrow X'_\infty$. Alors (voir [N2]) :

1. $\text{Ker} \eta_\infty^- = (0)$ et $(\text{tor}_\Lambda \tilde{\mathfrak{X}}_\infty)^- \simeq \alpha(X'_\infty(-1))^-$
2. $\text{Im} \eta_\infty = \text{Gal}(L'_\infty/L'_\infty \cap T_\infty) \simeq X_\infty'^+ \oplus \alpha(X'_\infty(-1))^-$

(certains résultats de [N2] sont exprimés à pseudo-isomorphisme près, mais ils sont en fait valables à isomorphisme près, avec exactement les mêmes démonstrations). D'après les propriétés fonctorielles de l'adjoint, en notant $(.)^\sharp$ l'involution d'Iwasawa, $\alpha(X'_\infty(-1))^- \approx (X_\infty'^+)^\sharp$. La conjecture de Greenberg prédit la finitude de $X_\infty'^+$, donc, puisqu'un adjoint n'a pas de sous-module fini non nul, la nullité de $\alpha(X'_\infty(-1))^-$. Par conséquent, elle équivaut à la finitude de $\text{Im} \eta_\infty = \text{Gal}(L'_\infty/L_\infty \cap T_\infty)$ et l'on peut la généraliser au cas non CM :

Conjecture 2. *Pour un corps de base K quelconque, $[L'_\infty : L'_\infty \cap T_\infty] < \infty$*

En retournant aux hypothèses et notations du texte, on peut remarquer que $\overline{\text{Jac}}_\infty^\psi \simeq \text{Fr}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty^\psi$ et $\overline{\text{Jac}}_\infty^\psi / \mathcal{F}_\psi \mathcal{U}_\infty^\psi \simeq \text{Gal}(L'_\infty \cap T_\infty / K_\infty)^\psi$.

Cas particulier du corps de base $\mathbb{Q}(\zeta_p)$: Dans ce cas, il n'y a qu'une seule p -place au-dessus de p et elle est totalement ramifiée dans $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}$. On voit alors facilement que :

$M_\infty = K_\infty^{BP}$ et $\text{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty = \alpha(X'_\infty(-1))$; $T_\infty = N'_\infty = N_\infty$ = l'extension de $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ obtenue en ajoutant toutes les racines p^k -ièmes de toutes les unités de $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$; $L'_\infty = L_\infty$ = la pro- p -extension abélienne non ramifiée maximale de $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$. La conjecture de Greenberg équivaut à $[L_\infty : L_\infty \cap T_\infty] < \infty$ et la conjecture de Vandiver à $[L_\infty : L_\infty \cap T_\infty] = 1$.

Pour tout $n \geq 0$, soit C_n le groupe des unités cyclotomiques de $\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n+1}})$, et

soit $C_\infty = \varinjlim C_n$. On sait que $(U_n^+ : C_n^+)$ est égal au nombre de classes de $\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n+1}})^+$, et la finitude de ces indices entraîne immédiatement que $T_\infty = N_\infty$ coïncide avec l'extension *Cyclo* obtenue en ajoutant à $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ toutes les racines p^k -ièmes de tous les éléments de C_∞ . Or, compte tenu de la définition des caractères de Soulé et du théorème 7 de la partie 4, il n'est pas difficile de montrer que *Cyclo* coïncide avec le sous-corps de M_∞ fixé par le noyau de la représentation d'Ihara $\text{Ih} : \mathfrak{X}_\infty \rightarrow \mathcal{A}^\times$ (pour les détails, voir [IS], prop.5). Notant M_∞^- le sous-corps fixé par \mathfrak{X}_∞^+ , on a :

Proposition 3. *Cyclo* $\subset M_\infty^-$, et *Cyclo* = M_∞^- si et seulement si la conjecture de Greenberg est vraie pour $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$.

Preuve. Il est évident que *Cyclo* $\subset M_\infty^-$ puisque $(\text{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty)^+ = \mathfrak{X}_\infty^+$. De plus, la conjecture de Greenberg équivaut à la nullité de $(\text{tor}_\Lambda \mathfrak{X}_\infty)^+$ d'après ce qui précède. \square

Remarque : Comparer au corollaire de la prop. 5 de [IS], qui utilise la conjecture de Vandiver.

Thong NGUYEN QUANG DO, Vésale NICOLAS
 Université de Franche-Comté
 Laboratoire de Mathématiques, CNRS UMR 6623
 16 route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France.

nguyen@math.univ-fcomte.fr, vnicolas@edu.univ-fcomte.fr.

Références

- [AB] B. Anglès, T. Beliaeva *On Weil numbers in cyclotomic fields*, to appear in Int. J. Number Theory (2009).
- [B] T. Beliaeva, *Unités semi-locales modulo sommes de Gauss*, J. Number Theory **115** (2005), 123-157.
- [BelN] J-R. Belliard, T. Nguyen Quang Do, *On modified circular units and annihilation of real classes*, Nagoya Math. J. **117** (2005), 77-115.
- [BenN] D. Benois, T. Nguyen Quang Do, *Les nombres de Tamagawa locaux et la conjecture de Bloch et Kato pour les motifs $\mathbb{O}(m)$ sur un corps abélien*, Ann. Sci. ENS **35** (2002), 641-672.
- [BK] S. Bloch, K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, in "The Grothendieck Festschrift", vol. 1, Birkhäuser Progress Math. 86 (1990) 333-400.

- [Col1] R. Coleman, *The dilogarithm and the norm residue symbol*, Bull. Soc. Math. Fr. **109** (1981), 373-402.
- [Col2] R. Coleman, *Anderson-Ihara theory : Gauss sums and circular units*, Adv. Studies in Pure Math. **17** (1989), 55-72.
- [Col3] R. Coleman, *Dilogarithms, regulators, and p -adic L -functions*, Inventiones Math. **69** (1982), 171-208.
- [Cor] P. Cornacchia, *Fitting ideals of class groups in a \mathbb{Z}_p -extension*, Acta Arithmetica **LXXXVII** (1998), 79-88.
- [G] R. Gillard, *Unités semi-locales et \mathbb{Z}_l -extensions II*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **29** (1979) 1-15.
- [H] J. Hillman, *Alexander Ideals of links*, Lecture Notes in Mathematics. Springer LNM 895 (2000).
- [HI] Y. Hachimori, H. Ichimura, *Semi-local units modulo Gauss sums*, Manuscripta Math. **95** (1998), 377-394.
- [HK] A. Huber, G. Kings, *Bloch-Kato conjecture and Main Conjecture of Iwasawa theory for Dirichlet characters*, Duke Math. J. **119** (2003), 393-464.
- [Ich1] H. Ichimura, *Local units modulo Gauss sums*, J. Number Theory **68** (1998) 36-56.
- [Ich2] H. Ichimura, *On the coefficients of the universal power series for Jacobi sums*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **86** (1989), 1-7.
- [Ih] Y. Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplication*, Annals of Math. **123** (1986), 43-106.
- [IKY] Y. Ihara, M. Kaneko, A. Yukinari *On some properties of the universal power series for Jacobi sums*, Adv. Studies in Pure Math. **12** (1987), 65-86.
- [IS] H. Ichimura, K. Sakaguchi *On the non-vanishing of certain Kummer characters χ_m (after Soulé), and some related topics*, Adv. Studies in Pure Math. **12** (1987), 53-64.
- [Iw1] K. Iwasawa, *Some remarks on Hecke characters*, in "Algebraic Number Theory" (Kyoto, 1976), Japan Soc. Promotion Sci., Tokyo. (1977), 99-108.
- [Iw2] K. Iwasawa, *On \mathbb{Z}_l -extensions of algebraic number fields*, Annals of Math. **98** (1973), 246-326.
- [KN] M. Kolster, T. Nguyen Quang Do, *Syntomic regulators and special values of p -adic L -functions*, Inventiones Math. **133** (1998), 417-447.
- [KNF] M. Kolster, T. Nguyen Quang Do, V. Fleckinger, *Twisted S -units, p -adic class number formulas, and the Lichtenboim conjectures*, Duke Math. J. **84** (1996), 679-717.

- [LMN] M. Le Floch, A. Movahhedi, T. Nguyen Quang Do, *On capitulation cokernels in Iwasawa theory*, Amer. J. Math. **127** (2005), 851-877.
- [N1] T. Nguyen Quang Do, *Sur la \mathbb{Z}_p -torsion de certains modules Galoisien*s, Ann. de Inst. Fourier **36** (1986) 27-46.
- [N2] T. Nguyen Quang Do, *Sur la torsion de certains modules Galoisien*s II, Sém. Théorie des Nombres Paris, Birkhäuser (1986-87), 271-297.
- [PR] B. Perrin-Riou, *Théorie d'Iwasawa des représentations p -adiques sur un corps local*, Inventiones Math. **115** (1994), 81-149.
- [Sol] D. Solomon, *New ideals in classical Iwasawa Theory*, exposé aux journées "Iwasawa 2008", Irsee, Juillet 2008
- [Sou] C. Soulé, *On higher p -adic regulators*, in "Algebraic K-Theory III", Springer LNM **854** (1981), 372-401.
- [T] T. Tsuji, *Semi-local units modulo cyclotomic units*, J. Number Theory **78,1** (1999), 1-26.
- [Wa] L. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, 2nd edition, Springer, New York (1982).
- [We] A. Weil, *Jacobi sums as Größencharaktere*, Trans. AMS **73** (1952), 487-495.