



**HAL**  
open science

# Constrained interpolation on finite subsets of the disc

Rachid Zarouf

► **To cite this version:**

| Rachid Zarouf. Constrained interpolation on finite subsets of the disc. 2009. hal-00367561v1

**HAL Id: hal-00367561**

**<https://hal.science/hal-00367561v1>**

Preprint submitted on 11 Mar 2009 (v1), last revised 24 Mar 2011 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# INTERPOLATION AVEC CONTRAINTES SUR DES ENSEMBLES FINIS DU DISQUE

RACHID ZAROUF

## Résumé

Etant donné un ensemble fini  $\sigma$  du disque unité  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  et une fonction  $f$  holomorphe dans  $\mathbb{D}$  appartenant à une certaine classe  $X$ , on cherche  $g$  dans une autre classe  $Y$  (plus petite que  $X$ ) qui minimise la norme de  $g$  dans  $Y$  parmi toutes les fonctions  $g$  satisfaisant la condition  $g|_{\sigma} = f|_{\sigma}$ . On montre que dans le cas  $Y = H^{\infty}$ , la constante d'interpolation correspondante  $c(\sigma, X, H^{\infty})$  est majorée par  $a\varphi_X \left(1 - \frac{1-r}{n}\right)$  où  $n = \#\sigma$ ,  $r = \max_{\lambda \in \sigma} |\lambda|$  et  $\varphi_X(t)$  est la norme de la fonctionnelle d'évaluation  $f \mapsto f(\lambda)$ , sur l'espace  $X$ . La majoration est exacte sur l'ensemble des  $\sigma$  avec  $n$  et  $r$  donné.

## Abstract

Given a finite set  $\sigma$  of the unit disc  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  and a holomorphic function  $f$  in  $\mathbb{D}$  which belongs to a class  $X$ , we are looking for a function  $g$  in another class  $Y$  (smaller than  $X$ ) which minimizes the norm  $\|g\|_Y$  among all functions  $g$  such that  $g|_{\sigma} = f|_{\sigma}$ . For  $Y = H^{\infty}$ , and for the corresponding interpolation constant  $c(\sigma, X, H^{\infty})$ , we show that  $c(\sigma, X, H^{\infty}) \leq a\varphi_X \left(1 - \frac{1-r}{n}\right)$  where  $n = \#\sigma$ ,  $r = \max_{\lambda \in \sigma} |\lambda|$  and where  $\varphi_X(t)$  stands for the norm of the evaluation functional  $f \mapsto f(\lambda)$  on the space  $X$ . The upper bound is sharp over sets  $\sigma$  with given  $n$  and  $r$ .

## Abridged English version

The problem considered is the following: given  $X$  and  $Y$  two Banach spaces of holomorphic functions on the unit disc  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ,  $X \supset Y$ , and a finite set  $\sigma \subset \mathbb{D}$ , to find the least norm interpolation by functions of the space  $Y$  for the traces  $f|_{\sigma}$  of functions of the space  $X$ , in the worst case of  $f$ .

The classical interpolation problems- those of Nevanlinna-Pick and Carathéodory-Schur (on the one hand) and Carleson's free interpolation (on the other hand)- are of this nature. Two first are "individual", in the sens that one looks simply to compute the norms  $\|f\|_{H^{\infty}_{|\sigma}}$  or  $\|f\|_{H^{\infty}/z^n H^{\infty}}$  for a given  $f$ , whereas the third one is to compare the norms  $\|a\|_{l^{\infty}(\sigma)} = \max_{\lambda \in \sigma} |a_{\lambda}|$  and

$$\inf (\|g\|_{\infty} : g(\lambda) = a_{\lambda}, \lambda \in \sigma).$$

Here and everywhere below,  $H^{\infty}$  stands for the space (algebra) of bounded holomorphic functions in the unit disc  $\mathbb{D}$  endowed with the norm  $\|f\|_{\infty} = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$ . Looking at this comparison problem, say, in the form of computing/estimating the interpolation constant

$$c(\sigma, X, Y) = \sup_{f \in X, \|f\|_X \leq 1} \inf \{ \|g\|_Y : g|_{\sigma} = f|_{\sigma} \},$$

which is nothing but the norm of the embedding operator  $(X|_{\sigma}, \|\cdot\|_{X|_{\sigma}}) \rightarrow (Y|_{\sigma}, \|\cdot\|_{Y|_{\sigma}})$ , one can think, of course, on passing (after) to the limit- in the case of an infinite sequence  $\{\lambda_j\}$  and its finite sections  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ - in order to obtain a Carleson type interpolation theorem  $X|_{\sigma} = Y|_{\sigma}$ . But not necessarily. In particular, even the classical Pick-Nevanlinna theorem (giving a necessary and sufficient condition on a function  $a$  for the existence of  $f \in H^{\infty}$  such that  $\|f\|_{\infty} \leq 1$  and  $f(\lambda) = a_{\lambda}$ ,  $\lambda \in \sigma$ ), does not lead immediately to Carleson's criterion for  $H^{\infty}_{|\sigma} = l^{\infty}(\sigma)$ . (Finally, a direct deduction of Carleson's theorem from Pick's result was done by P. Koosis [10] in 1999 only). Similarly, the problem stated for  $c(\sigma, X, Y)$  is of interest in its own. For this paper, the following question was especially stimulating (which is a part of a more complicated question arising in an applied situation in [2] and [3]): given a set  $\sigma \subset \mathbb{D}$ , how to estimate  $c(\sigma, H^2, H^{\infty})$  in terms of  $n = \text{card}(\sigma)$  and  $\max_{\lambda \in \sigma} |\lambda| = r$  only? ( $H^2$  being the standard Hardy space of the disc).

Here, we consider the case of  $H^{\infty}$  interpolation ( $Y = H^{\infty}$ ) and the following scales of Banach spaces  $X$  :

- (a)  $X = H^p = H^p(\mathbb{D})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , the standard Hardy spaces on the disc  $\mathbb{D}$ ,
- (b)  $X = l^2_a \left( \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \right)$ ,  $\alpha \geq 1$ , the weighted spaces of all  $f(z) = \sum_{k \geq 0} \hat{f}(k) z^k$  satisfying

$$\sum_{k \geq 0} \left| \hat{f}(k) \right|^2 \frac{1}{(k+1)^{2(\alpha-1)}} < \infty.$$

An equivalent description of this scale of spaces is:

$X = L_a^2 \left( \left(1 - |z|^2\right)^\beta dx dy \right)$ ,  $\beta = 2\alpha - 3 > -1$ , the Bergman weighted spaces of holomorphic functions such that

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right)^\beta dA < \infty.$$

For the case  $\beta = 0$ , we shorten the notation to  $X = L_a^2$ . For these two series of spaces we show

$$c_1 \varphi_X \left(1 - \frac{1-r}{n}\right) \leq \sup \{c(\sigma, X, H^\infty) : \#\sigma \leq n, |\lambda| \leq r, \lambda \in \sigma\} \leq c_2 \varphi_X \left(1 - \frac{1-r}{n}\right),$$

where  $\varphi_X(t)$ ,  $0 \leq t < 1$  stands for the norm of the evaluation functional  $f \mapsto f(t)$  on the space  $X$ .

In order to prove the right hand side inequality, we first use a linear interpolation:

$$f \mapsto \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k,$$

where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  means the Cauchy sesquilinear form  $\langle h, g \rangle = \sum_{k \geq 0} \hat{h}(k) \overline{\hat{g}(k)}$ , and  $(e_k)_{k=1}^n$  is the explicitly known Malmquist basis of the space  $K_B = H^2 \Theta B H^2$ ,  $B = \prod_{i=1}^n b_{\lambda_i}$  being the corresponding Blaschke product,  $b_\lambda = \frac{\lambda-z}{1-\lambda z}$  (see N. Nikolski, [12] p. 117)). Next, we use the complex interpolation between Banach spaces, (see H. Triebel [14] Theorem 1.9.3 p.59). Among the technical tools used in order to find an upper bound for  $\|\sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k\|_\infty$  (in terms of  $\|f\|_X$ ), the most important is a Bernstein-type inequality  $\|f'\|_p \leq c_p \|B'\|_\infty \|f\|_p$  for a (rational) function  $f$  in the star-invariant subspace  $H^p \cap B\overline{H}_0^p$  generated by a (finite) Blaschke product  $B$ , (K. Dyakonov [7]). For  $p = 2$ , we give an alternative proof of the Bernstein-type estimate we need.

The lower bound problem is treated by using the “worst” interpolation  $n$ -tuple  $\sigma = \sigma_{\lambda, n} = \{\lambda, \dots, \lambda\}$ , a one-point set of multiplicity  $n$  (the Carathéodory-Schur type interpolation). The “worst” interpolation data comes from the Dirichlet kernels  $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$  transplanted from the origin to  $\lambda$ . We notice that spaces  $X$  of (a) and (b) satisfy the condition  $X \circ b_\lambda \subset X$  but this is not the case for spaces  $X$  described in (c) below for  $p \neq 2$ , which makes the problem of upper/lower bound more difficult.

Other spaces considered are the following:

$$(c) X = l_a^p \left( \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} \right), \alpha \geq 1, 1 \leq p \leq \infty; (d) X = L_a^p \left( \left(1 - |z|^2\right)^\beta dA \right), \beta > -1, 1 \leq p \leq 2.$$

For these spaces we also found upper and lower bounds for  $c(\sigma, X, H^\infty)$  (sometimes for special sets  $\sigma$ ) but with some gaps between these bounds.

## A. Introduction

Le problème extremal d’interpolation est le suivant: étant donnés  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  dans

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ,  $B = \prod_{i=1}^n b_{\lambda_i}$  où  $b_\lambda = \frac{\lambda-z}{1-\lambda z}$ , et  $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ , on cherche à calculer ou estimer

$$\|f\|_{H^\infty/BH^\infty} = \inf \{ \|g\|_\infty : f - g \in B\mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \}.$$

Les problèmes classiques de Nevanlinna-Pick (1916) et de Carathéodory-Schur (1908), (voir [8] et [12] pour ces deux problèmes classiques et pour des références originales), en sont des cas particuliers correspondant respectivement à celui où les  $\lambda_j$  sont  $n$  points distincts et au cas où  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

### (1) Le sujet de cette note est une version de ce dernier problème:

Trouver ou majorer/minorer la norme de la meilleure interpolante  $\|f\|_{H^\infty/BH^\infty}$  en fonction de la taille de  $f$  mesurée dans un espace de Banach  $X$  de fonctions holomorphes dans  $\mathbb{D}$ , c’est à dire  $\|f\|_X$ . De façon plus précise, il s’agit de calculer ou majorer/minorer les constantes

$$c(\sigma, X, Y) = \sup_{f \in X, \|f\|_X \leq 1} \inf \{ \|g\|_Y : g|_\sigma = f|_\sigma \}, \text{ et}$$

$$C_{n,r}(X, Y) = \sup \{ c(\sigma, X, Y) : \#\sigma \leq n, \forall j = 1..n, |\lambda_j| \leq r \},$$

lorsque  $Y = H^\infty$ ,  $r \in [0, 1[$  et  $n \geq 1$ . Nous pouvons néanmoins faire quelques commentaires sur la constante  $c(\sigma, X, Y)$  lorsque  $Y$  est, comme  $X$ , un espace de Banach de fonctions holomorphes (inclus dans  $X$ ).

## (2) Motivations pour ce problème

(a) Le point de départ est une partie d'une question posée par Laurent Baratchart (communication orale) et provenant d'un problème d'approximation appliquée (voir [2] et [3]): trouver une estimation de  $c(\sigma, H^2, H^\infty)$  en fonction de  $\text{card}(\sigma) = \text{deg}(B)$  et de  $\max_{\lambda \in \sigma} |\lambda| = r$ .

Parmi d'autres résultats, voici ci-dessous la réponse obtenue:

$$\left( \frac{\frac{1}{32}n}{1-r} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{n,r}(H^2, H^\infty) \leq \left( \frac{2n}{1-r} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) D'autre part, le problème de calculer/estimer  $c(\sigma, X, Y)$  peut être vu comme une *interpolation intermédiaire* entre celle dite de Carleson et l'interpolation individuelle de Nevanlinna-Pick.

(c) On trouve une autre motivation pour l'estimation de la constante  $c(\sigma, X, Y)$  dans le calcul matriciel où on s'intéresse à la norme du calcul fonctionnel: trouver  $C > 0$  optimale telle que si  $A$  est une matrice  $n \times n$  vérifiant  $\sigma(A) \subset \sigma \subset \mathbb{D}$ , telle que  $\|A\|_{E \rightarrow E} \leq 1$  par rapport à une certaine norme sur  $\mathbb{C}^n$ ,  $E = (\mathbb{C}^n, |\cdot|)$ ,

$$\|f(A)\| \leq C \|f\|_\infty,$$

pour tout polynôme analytique  $f$ . Il est facile de voir que  $C = c(\sigma, H^\infty, W_a)$ , où  $W_a$  est l'algèbre de Wiener des séries de Taylor absolument convergentes. Notons l'apparition d'un cas intéressant pour  $f \in H^\infty$  telle que  $f|_\sigma = \frac{1}{z}|_\sigma$  (estimation du conditionnement et des normes d'inverses des matrices  $n \times n$ ) ou telle que  $f|_\sigma = \frac{1}{\lambda-z}|_\sigma$  (pour l'estimation de la norme de la résolvante d'une matrice  $n \times n$ ).

Un résultat de N. Nikolski (voir [13]) nous garanti que  $c(\sigma, X, W_a)$  est majoré par  $9n.c(\sigma, X, H^\infty)$  pour tout espace de Banach  $X$  de fonctions holomorphes dans  $\mathbb{D}$  et que cette majoration est exacte (sur  $X$  et  $\sigma$ ,  $\#\sigma \leq n$ ) à une constante numérique près.

## (3) Les espaces considérés

(a)  $X = H^p = H^p(\mathbb{D})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , les espaces de Hardy du disque  $\mathbb{D}$ ,

(b)  $X = L_a^2(\alpha) := L_a^2\left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right)$ ,  $\alpha \geq 1$ , l'espace à poids des fonctions  $f(z) = \sum_{k \geq 0} \hat{f}(k)z^k$  vérifiant

$$\sum_{k \geq 0} |\hat{f}(k)|^2 \frac{1}{(k+1)^{2(\alpha-1)}} < \infty;$$

une description équivalente de cette même série d'espaces est:

$X = L_a^2(\beta) := L_a^2\left(\left(1 - |z|^2\right)^\beta dx dy\right)$ ,  $\beta = 2\alpha - 3 > -1$ , l'espace de Bergman à poids des fonctions holomorphes  $f$  telles que

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right)^\beta dx dy < \infty.$$

Pour  $\beta = 0$ , on raccourcit la notation,  $X = L_a^2$ .

(c) On va un peu plus loin en considérant:

$X = L_a^p(\alpha) := L_a^p\left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right)$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , puis  $X = L_a^p(\beta) := L_a^p\left(\left(1 - |z|^2\right)^\beta dx dy\right)$ ,  $\beta > -1$ ,  $1 \leq p \leq 2$ .

## B. Ce qui est montré

Nous commençons par étudier le cas d'espaces de Banach généraux  $X$  et  $Y$  vérifiant les propriétés naturelles suivantes:

(P<sub>1</sub>) *pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\text{Hol}((1 + \epsilon)\mathbb{D})$  est continument inclus dans  $Y$*

(P<sub>2</sub>)  $Pol_+ \subset X$  et  $Pol_+$  est dense dans  $X$ ,

où  $Pol_+$  désigne l'espace des polynômes analytiques à coefficients complexes  $p$ ,  $p(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k$ ,

(P<sub>3</sub>)  $[f \in X] \Rightarrow \left[ z^n f \in X, \forall n \geq 0 \text{ and } \overline{\lim} \|z^n f\|^{\frac{1}{n}} \leq 1 \right]$ ,

(P<sub>4</sub>)  $[f \in X, \lambda \in \mathbb{D}, \text{ and } f(\lambda) = 0] \Rightarrow \left[ \frac{f}{z - \lambda} \in X \right]$ .

**Lemme 0.** Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach vérifiant les propriétés (P<sub>i</sub>),  $i = 1..4$ . Pour tout  $n \geq 1$ ,  $r \in [0, 1)$ , on a  $C_{n,r}(X, Y) < \infty$ .

Puis, en étudiant le cas particulier où  $Y = H^\infty$  et où  $X$  parcourt les espaces décrits en A.(3)-(a) et A.(3)-(b), nous obtenons des majorations/minorations du type

$$c_1 \varphi_X \left( 1 - \frac{1-r}{n} \right) \leq C_{n,r}(X, H^\infty) \leq c_2 \varphi_X \left( 1 - \frac{1-r}{n} \right),$$

où  $\varphi_X(t)$ ,  $0 \leq t < 1$  est la norme de la fonctionnelle d'évaluation  $f \mapsto f(t)$  sur l'espace  $X$ .

Plus précisément, en ce qui concerne les espaces de Hardy  $H^p$  du A.(3)-(a), on obtient le théorème suivant.

**Théorème 1.** Soit  $p \in 2\mathbb{Z}_+$ . Il existe une constante  $A_p$  dépendant de  $p$  uniquement telle que pour tout  $n \geq 1$ ,  $r \in [0, 1)$ ,

$$\frac{1}{32^{\frac{1}{p}}} \left( \frac{n}{1-r} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{n,r}(H^p, H^\infty) \leq A_p \left( \frac{n}{1-r} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus, la majoration est vraie pour tout réel  $p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ .

Quant au cas des espaces à poids (où de façon équivalente celui des espaces de Bergman à poids radial) du A.(3)-(b),  $X = l_a^2(\alpha) = L_a^2(2\alpha - 3)$ , on obtient l'encadrement suivant.

**Théorème 2.** Soit  $\alpha \geq 1$  tel que  $2\alpha - 1$  soit entier. Il existe des constantes  $a$  et  $A$  telles que pour tout  $n \geq 1, r \in [0, 1)$ ,

$$a \left( \frac{n}{1-r} \right)^{\frac{2\alpha-1}{2}} \leq C_{n,r}(l_a^2(\alpha), H^\infty) \leq A \left( \frac{n}{1-r} \right)^{\frac{2\alpha-1}{2}},$$

où les constantes  $a$  et  $A$  sont telles que  $a \asymp \frac{1}{2^{3N}(2N)!}$  et  $A \asymp N^{2N}$ ,  $N$  étant la partie entière de  $\alpha$ . De plus, la majoration est vraie pour tout réel  $\alpha \geq 1$ . (La notation  $x \asymp y$  signifie qu'il existe des constantes numériques  $c_1, c_2 > 0$  telles que  $c_1 y \leq x \leq c_2 y$ ).

Enfin, en ce qui concerne le cas des espaces  $X$  du A.(3)-(c), les résultats obtenus sont plus faibles et ne répondent pas, comme c'était le cas précédemment, à la conjecture faisant intervenir  $\varphi_X$  définie ci-dessus. Nous donnons néanmoins des majorations/minorations pour la quantité  $c(\sigma, X, H^\infty)$ , parfois pour des  $\sigma$  spécifiques et avec des écarts entre les bornes intervenant dans ces encadrements.

**Théorème 3.** (1) Soit  $\alpha \geq 1$  et  $X = l_a^p(\alpha)$ . Pour  $1 \leq p \leq +\infty$ , il existe une minoration de  $C_{n,r}(X, H^\infty)$  de l'ordre de  $1/(1-r)^{\alpha-1/p}$ . Pour  $1 \leq p \leq 2$  (resp.  $2 \leq p \leq +\infty$ ), il existe une majoration de  $C_{n,r}(X, H^\infty)$  de l'ordre de  $\left(\frac{n}{1-r}\right)^{\alpha-1/2}$  (resp. de l'ordre de  $\left(\frac{n}{1-r}\right)^{\alpha+1/2-2/p}$ ).

(2) Soient  $\lambda \in \mathbb{D}$ ,  $\beta > -1$ ,  $1 \leq p \leq 2$  et  $X = L_a^p(\beta)$ . Alors il existe une majoration de  $c(\sigma_{\lambda,n}, X, H^\infty)$  de l'ordre de  $\left(\frac{n}{1-|\lambda|}\right)^{(\beta+2)/p}$ .

### C. Les moyens pour montrer cela

## (a) Majorations

(i) Nous avons choisi d'utiliser une interpolation linéaire

$$T : f \mapsto \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est la forme sesquilinéaire de Cauchy  $\langle h, g \rangle = \sum_{k \geq 0} \hat{h}(k) \overline{\hat{g}(k)}$ , et  $(e_k)_{k=1}^n$  est la base de l'espace  $K_B = H^2 \ominus BH^2$ , dite de Malmquist, connue de façon explicite, (voir N. Nikolski, [12] p. 117)). Ce choix est justifié par le fait que si  $X = H^2$ , l'opérateur  $T$  coïncide avec la projection orthogonale de  $H^2$  sur  $H^2 \ominus BH^2$ . Nous conserverons ce choix même dans le cas plus général où  $X = H$  est un espace de Hilbert différent de  $H^2$ , car pour ce type d'espace la projection orthogonale de  $H$  sur  $H \ominus BH$  demeure implicite. D'autre part, si  $X$  n'est pas un espace de Hilbert, trouver la "meilleure" interpolante de  $f$  est encore moins clair, il y aura donc un prix à payer relativement à notre choix. A ce propos, en général la vraie interpolation optimale est non-linéaire, voir S.A. Vinogradov ([15]) pour les détails.

(ii) Pour le cas A.(3)-(a) (Théorème 1) avec  $p = 2$ , on profite du fait que  $e_k \in \mathcal{Hol}(|z| < \frac{1}{r})$  où  $r = \max_{\lambda \in \sigma} |\lambda|$  pour majorer  $\|g\|_\infty$ . Pour généraliser au cas  $p \geq 1$  quelconque on utilise un résultat d'interpolation de P. Jones notamment que  $[H^1, H^\infty]_\theta = H^p$ , voir [9].

Pour le cas A.(3)-(b) (Théorème 2), on utilise les points ci-après.

(iii) Pour  $X = l_a^2(N+1)$ , on fait apparaître la quantité  $\|g^{(N)}\|_{H^2}$  (qui est comparable à  $\|g\|_{X^*}$ ) que l'on majore en fonction de  $\|f\|_{H^2}$  à l'aide d'une inégalité type Bernstein sur les fonctions rationnelles à pôles dans  ${}^c\mathbb{D}$ , que l'on montrera. Plus précisément, on démontrera le lemme suivant, qui est un analogue pour le disque d'un résultat de K. Dyakonov démontré dans le demi-plan, voir [7].

**Lemme 1.** *Soit  $g \in K_B =: H^2 \ominus BH^2$ . Alors*

$$\|g'\|_{H^2} \leq \frac{5}{2} \frac{n}{1-r} \|g\|_{H^2},$$

où comme toujours,  $r = \max_{\lambda \in \sigma} |\lambda|$ . Par récurrence,

$$\|g^{(k)}\|_{H^2} \leq k! \left(\frac{5}{2}\right)^k \left(\frac{n}{1-r}\right)^k \|g\|_{H^2},$$

pour tout  $k = 0, 1, \dots$ .

Notre preuve est différente de celle de M. Dyakonov et elle donne en particulier une constante (5/2) plus petite. En général, on notera que les inégalités type Bernstein ont déjà fait l'objet de nombreuses publications. Entre autres, le chapitre 7 du livre de P. Borwein et T. Erdélyi, voir [5], y est consacré. C'est aussi le cas de la thèse de A. Baranov, voir [1], et de l'ouvrage de R. A. DeVore and G. G. Lorentz, voir [6].

(iv) Enfin, comme en (ii), on interpole entre  $l_a^2(N)$  et  $l_a^2(N+1)$  (interpolation classique complexe entre espaces de Banach, voir [14] ou [4]).

(v) Pour traiter le cas A.(3)-(c), on fait de même qu'en (iv) mais entre  $l_a^{p_1}(\alpha)$  et  $l_a^{p_2}(\alpha)$ , puis entre  $L_a^{p_1}(\beta)$  et  $L_a^{p_2}(\beta)$ .

## (b) Minorations

On se rend compte, grâce l'interpolation de Carleson, que la séquence la "pire" est probablement  $\sigma = \sigma_{\lambda, n} = \{\lambda, \dots, \lambda\}$  ( $n$  fois). En effet, dans ce cas la constante de Carleson explose et, au travers de la majoration, (qui est vraie pour toute séquence  $\sigma$  de  $\mathbb{D}$ ),

$$c(\sigma, X, H^\infty) \leq C_I(\sigma) \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \|\varphi_{\lambda_i}\|,$$

où  $\varphi_\lambda(f) = f(\lambda)$  et

$$C_I(\sigma) = \sup_{\|a\|_{l^\infty} \leq 1} \inf(\|g\|_\infty : g \in H^\infty, g|_\sigma = a),$$

est la constante de Carleson relative à  $\sigma$ , on comprend que pour  $\sigma$  ayant une constante d'interpolation  $C_I(\sigma)$  "raisonnable", la quantité  $c(\sigma, X, H^\infty)$  se comporte comme  $\max_i \|\varphi_{\lambda_i}\|$ . En revanche, pour des séquences  $\sigma$  "serrées", la constante  $C_I(\sigma)$  peut être si grande que la dernière majoration peut en devenir très grossière.

(i) On remarque d'abord que

$$c(\sigma_{0,n}, H^2, H^\infty) \geq \frac{1}{\|p_n\|_{H^2}} \|p_n \star K_n\|_\infty \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}} (p_n \star K_n)(1) \geq \frac{1}{2} \sqrt{n},$$

où  $K_n$  désigne le noyau de Fejer d'ordre  $n$ , et  $p_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ .

(ii) Le cas  $c(\sigma_{0,n}, X, H^\infty)$  pour  $X$  espace de Hilbert du A.(3)-(b) se traite de la même façon, en remplaçant  $p_n$  par une puissance de  $p_n$ .

(iii) La minoration de  $c(\sigma_{\lambda,n}, H^2, H^\infty)$  se "déduit" de (ii) en considérant, au lieu de la fonction  $p_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ , une fonction construite à partir de  $p_n \circ b_\lambda$ , ou plus simplement  $p_n \circ b_r$ ,  $0 \leq r < 1$  puisque les normes considérées sont invariantes par rotation. On prouve ainsi la minoration du Théorème 1 pour  $p = 2$ .

(iv) Encore une fois, le cas  $c(\sigma_{\lambda,n}, X, H^\infty)$  pour  $X$  espace de Hilbert du A.(3)-(b) se traite comme en (iii), en remplaçant  $p_n$  par une puissance de  $p_n$ . L'observation principale réside dans le fait que  $X = l_a^2(\alpha) = \varphi(H^2) = H(\varphi \circ K)$  dans le sens d'Aronszajn-deBranges, (voir [12] p.320, point (k) de l'Exercice 6.5.2), avec  $\varphi(z) = z^{2\alpha-1}$  et  $K(\lambda, z) = k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\lambda z}$ . En particulier, on utilise l'inégalité suivante, vraie pour tout  $f \in H^2$ :

$$\|\varphi \circ f\|_X^2 \leq \varphi(\|f\|_2^2).$$

Il est bon de noter que l'opérateur de composition par  $b_\lambda$  stabilise les espaces du A.(3)-(a) et du A.(3)-(b) mais qu'en revanche ce n'est pas le cas pour les espaces  $l_a^p(\alpha)$  pour  $p \neq 2$  ce qui rend le problème de minoration mais aussi de majoration plus difficile.

(v) Enfin, pour montrer la minoration du Théorème 3, on utilise simplement que

$$C_{n,r}(X, H^\infty) \geq \|\psi_r\|_X,$$

où  $\psi_r(f) = f(r)$ . (Mais la minoration ainsi obtenue n'est pas optimale).

## Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement le Professeur Nikolai Nikolski pour son aide inestimable.

## REFERENCES

- [1] A. Baranov, *Inégalités de Bernstein dans les espaces modèles et applications*, Thèse soutenue à l'université de Bordeaux 1, 2005.
- [2] L. Baratchart, *Rational and meromorphic approximation in  $L_p$  of the circle : system-theoretic motivations, critical points and error rates.*, Computational Methods and Function Theory, World Scientific Publish. Co, 11 (1999) 45–78.
- [3] L. Baratchart, F. Wielonsky, *Rational approximation problem in the real Hardy space  $H_2$  and Stieltjes integrals: a uniqueness theorem*, Constr. Approx. 9 (1993), 1-21.
- [4] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [5] P. Borwein and T. Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Springer, New York, 1995.
- [6] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [7] K. Dyakonov, *Differentiation in Star-Invariant Subspaces I. Boundedness and Compactness*, J.Funct.Analysis, 192 (2002), 364-386.
- [8] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.
- [9] P. W. Jones,  *$L^\infty$  estimates for the  $\bar{\partial}$  problem in the half plane*, Acta Math. 150 (1983), 137-152.
- [10] P. Koosis, *Carleson's interpolation theorem deduced from a result of Pick*, Complex analysis, operators, and related topics. In V. Havin, and N. Nikolski, editors, 151–162, Oper. Theory Adv. Appl., 113, Birkhäuser, Basel, 2000.
- [11] N.Nikolski, *Treatise on the shift operator*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1986.
- [12] N.Nikolski, *Operators, Function, and Systems: an easy reading*, Vol.1. AMS, Providence, 2002.
- [13] N.Nikolski, *Condition Numbers of Large Matrices and Analytic Capacities*, St. Petersburg Math. J., 17 (2006), 641-682.
- [14] H. Triebel, *Interpolation theory, functions spaces, differential operators*, North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, New York, Oxford, 1978.
- [15] S. A. Vinogradov, *Some remarks on free interpolation by bounded and slowly growing analytic functions*, Zapiski Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 126 (1983), 35-46, (Russian); Engl. translation: J. of Math. Sci., 27-1, (1984), 2450-2458.

Equipe d'Analyse et Géométrie,  
 Institut de Mathématiques de Bordeaux,  
 Université Bordeaux, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence, France.  
 E-mail address: rzarouf@math.u-bordeaux1.fr