

# Commande en juste-à-temps sous contraintes de systèmes $(max, +)$ -linéaires

L. Houssin, S. Lahaye, J.L. Boimond

Université d'Angers - LISA - France  
<http://www.istia.univ-angers.fr/LISA/>

6 octobre 2005

## Théorie des systèmes linéaires dans les diïodes

- Systèmes à Événements Discrets (SED) mettant en jeu des phénomènes de synchronisations

---

<sup>1</sup>F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder and J. P. Quadrat, *Synchronization and*

## Théorie des systèmes linéaires dans les diïodes

- Systèmes à Événements Discrets (SED) mettant en jeu des phénomènes de synchronisations
- développée par analogie avec la théorie conventionnelle <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder and J. P. Quadrat, *Synchronization and*

## Théorie des systèmes linéaires dans les diïdes

- Systèmes à Événements Discrets (SED) mettant en jeu des phénomènes de synchronisations
- développée par analogie avec la théorie conventionnelle <sup>1</sup>
- généralisation de la commande en juste-à-temps des systèmes  $(\max, +)$ -linéaires.

---

<sup>1</sup>F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder and J. P. Quadrat, *Synchronization and*

## Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes

- Systèmes à Événements Discrets (SED) mettant en jeu des phénomènes de synchronisations
- développée par analogie avec la théorie conventionnelle <sup>1</sup>
- généralisation de la commande en juste-à-temps des systèmes  $(\max, +)$ -linéaires.

## Applications

<sup>1</sup>F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder and J. P. Quadrat, *Synchronization and*

## Théorie des systèmes linéaires dans les diïodes

- Systèmes à Événements Discrets (SED) mettant en jeu des phénomènes de synchronisations
- développée par analogie avec la théorie conventionnelle <sup>1</sup>
- généralisation de la commande en juste-à-temps des systèmes  $(\max, +)$ -linéaires.

## Applications

- 1 systèmes de production

<sup>1</sup>F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder and J. P. Quadrat, *Synchronization and*

## Théorie des systèmes linéaires dans les diïodes

- Systèmes à Événements Discrets (SED) mettant en jeu des phénomènes de synchronisations
- développée par analogie avec la théorie conventionnelle <sup>1</sup>
- généralisation de la commande en juste-à-temps des systèmes  $(\max, +)$ -linéaires.

## Applications

- 1 systèmes de production
- 2 réseaux informatiques

<sup>1</sup>F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder and J. P. Quadrat, *Synchronization and*

## Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes

- Systèmes à Événements Discrets (SED) mettant en jeu des phénomènes de synchronisations
- développée par analogie avec la théorie conventionnelle <sup>1</sup>
- généralisation de la commande en juste-à-temps des systèmes  $(\max, +)$ -linéaires.

## Applications

- 1 systèmes de production
- 2 réseaux informatiques
- 3 systèmes de transport
  - réseaux ferroviaires
  - trafic urbain

<sup>1</sup>F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder and J. P. Quadrat, *Synchronization and*

## Théorie des systèmes linéaires dans les diïodes

- Systèmes à Événements Discrets (SED) mettant en jeu des phénomènes de synchronisations
- développée par analogie avec la théorie conventionnelle <sup>1</sup>
- généralisation de la commande en juste-à-temps des systèmes  $(\max, +)$ -linéaires.

## Applications

- 1 systèmes de production
- 2 réseaux informatiques
- 3 systèmes de transport
  - réseaux ferroviaires
  - trafic urbain
  - réseaux urbains

<sup>1</sup>F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder and J. P. Quadrat, *Synchronization and*

## Dioïde

Un dioïde  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  est un ensemble muni de deux lois :

- $\oplus$  : commutative, associative, idempotente et qui admet pour élément neutre  $\varepsilon$ ,
- $\otimes$  : associative, distributive par rapport à la somme et qui admet pour élément neutre  $e$ .

## Dioïde

Un dioïde  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  est un ensemble muni de deux lois :

- $\oplus$  : commutative, associative, idempotente et qui admet pour élément neutre  $\varepsilon$ ,
- $\otimes$  : associative, distributive par rapport à la somme et qui admet pour élément neutre  $e$ .

## Relation d'ordre

La relation d'équivalence :  $a \preceq b \Leftrightarrow a = a \oplus b$  est une relation d'ordre.

## Dioïde

Un dioïde  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  est un ensemble muni de deux lois :

- $\oplus$  : commutative, associative, idempotente et qui admet pour élément neutre  $\varepsilon$ ,
- $\otimes$  : associative, distributive par rapport à la somme et qui admet pour élément neutre  $e$ .

## Relation d'ordre

La relation d'équivalence :  $a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b$  est une relation d'ordre.

## Exemple

$$\overline{\mathbb{Z}}_{max} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}, max, +)$$

## Théorie de la résiduation<sup>2</sup>

$f$  est résiduable  $\Leftrightarrow$  l'inéquation  $f(x) \preceq b$  admet  
une plus grande solution  $f^\#(b)$

$f^\#$  est appelée *résiduée* de  $f$ .

---

<sup>2</sup>T. S. Blyth and M. F. Janowitz, *Residuation theory*, 1972, Pergamon press

## Théorie de la résiduation<sup>2</sup>

$f$  est résiduable  $\Leftrightarrow$  l'inéquation  $f(x) \preceq b$  admet  
une plus grande solution  $f^\#(b)$

$f^\#$  est appelée *résiduée* de  $f$ .

### Exemple

$L_a : x \mapsto a \otimes x$  est résiduable,

La plus grande solution de  $L_a(x) \preceq b$  est  $L_a^\#(b) = a \oslash b$ .

► Application à la commande en Juste à Temps

<sup>2</sup>T. S. Blyth and M. F. Janowitz, *Residuation theory*, 1972, Pergamon press

## Plus grands points fixes d'applications définies sur des diïodes complets <sup>34</sup>

$$\mathcal{F}_f = \{x \mid f(x) = x\} \quad \mathcal{P}_f = \{x \mid f(x) \succeq x\}$$

<sup>3</sup>A. Tarski, 1955, A lattice theoretical fixed point theorem and its applications.

<sup>4</sup>B. A. Davey and Priestley, 1990, Introduction to lattices and order.

## Plus grands points fixes d'applications définies sur des diïodes complets <sup>34</sup>

$$\mathcal{F}_f = \{x \mid f(x) = x\} \quad \mathcal{P}_f = \{x \mid f(x) \succeq x\}$$

Théorème : L'ensemble  $\mathcal{P}_f$  a une structure de **treillis complet**.

<sup>3</sup>A. Tarski, 1955, A lattice theoretical fixed point theorem and its applications.

<sup>4</sup>B. A. Davey and Priestley, 1990, Introduction to lattices and order.

## Plus grands points fixes d'applications définies sur des dioides complets <sup>34</sup>

$$\mathcal{F}_f = \{x | f(x) = x\} \quad \mathcal{P}_f = \{x | f(x) \succeq x\}$$

Théorème : L'ensemble  $\mathcal{P}_f$  a une structure de **treillis complet**.

Théorème :

$$\text{Sup } \mathcal{P}_f = \text{Sup } \mathcal{F}_f$$

et

$$\text{Sup } \mathcal{F}_f \in \mathcal{F}_f$$

<sup>3</sup>A. Tarski, 1955, A lattice theoretical fixed point theorem and its applications.

<sup>4</sup>B. A. Davey and Priestley, 1990, Introduction to lattices and order.

Proposition <sup>5</sup> :

Si le calcul itératif suivant

$$\begin{aligned}y_0 &= T \\ y_{k+1} &= f(y_k)\end{aligned}$$

converge en un nombre fini  $k_e$  d'itérations, alors  $y_{k_e}$  est le plus grand point fixe de  $f$ .

---

<sup>5</sup>L. Houssin, S. Lahaye and J.L. Boimond, 2005, Just in Time Control of  $(\max, +)$ -Linear Systems.

## Modélisation des SED dans les diodes

- ▶ *dateurs*  $x(k)$  : date de la  $k + 1$ -ème occurrence de  $x$

## Modélisation des SED dans les dioides

- ▶ *dateurs*  $x(k)$  : date de la  $k + 1$ -ème occurrence de  $x$
- ▶ représentation d'état : 
$$\begin{cases} x(k) & = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) & = Cx(k) \end{cases}$$

## Modélisation des SED dans les dioïdes

- ▶ *dateurs*  $x(k)$  : date de la  $k + 1$ -ème occurrence de  $x$
- ▶ représentation d'état : 
$$\begin{cases} x(k) & = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) & = Cx(k) \end{cases}$$

pour  $k < k_{d_i}$ , on considère  $x_i(k) = -\infty = \varepsilon$ .

$k_{d_i}$  est appelé nombre caractéristique de  $x_i$ , c'est l'indice de la première occurrence de  $x_i$  engendrée par les entrées.

## Modélisation des SED dans les diodes

- ▶ *dateurs*  $x(k)$  : date de la  $k + 1$ -ème occurrence de  $x$
- ▶ représentation d'état : 
$$\begin{cases} x(k) &= Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases}$$

pour  $k < k_{d_i}$ , on considère  $x_i(k) = -\infty = \varepsilon$ .

$k_{d_i}$  est appelé nombre caractéristique de  $x_i$ , c'est l'indice de la première occurrence de  $x_i$  engendrée par les entrées.

On peut aussi calculer le décalage entre une variable d'état  $x_i$  et une sortie  $y_j$ . Ce décalage est noté  $k_{f_{ji}}$ .

- transformée en  $\gamma, \delta$  d'un dateur  $x(k)$  :

$$x = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n \delta^{x(n)}$$

$\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  : dioïde des séries formelles non décroissantes en  $\gamma, \delta$

- transformée en  $\gamma, \delta$  d'un dateur  $x(k)$  :

$$x = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n \delta^{x(n)}$$

$\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  : dioïde des séries formelles non décroissantes en  $\gamma, \delta$

- représentation d'état dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  : 
$$\begin{cases} x & = Ax \oplus Bu \\ y & = Cx. \end{cases}$$

## Généralisation de la commande en juste-à-temps

- Le processus vérifie des conditions terminales.

---

<sup>6</sup>P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis,  
*Commande et optimisation des processus*, 1990, Technip

## Généralisation de la commande en juste-à-temps

- Le processus vérifie des conditions terminales.
- Les variables d'état sont soumises à certaines contraintes.

---

<sup>6</sup>P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis,  
*Commande et optimisation des processus*, 1990, Technip

## Généralisation de la commande en juste-à-temps

- Le processus vérifie des conditions terminales.
- Les variables d'état sont soumises à certaines contraintes.
- La commande optimise un critère.

---

<sup>6</sup>P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis,  
*Commande et optimisation des processus*, 1990, Technip

## Conditions terminales

- Conditions initiales : pour chaque variable d'état  $x_i$  :  $k_{d_i}$

## Conditions terminales

- Conditions initiales : pour chaque variable d'état  $x_i$  :  $k_{d_i}$
- Conditions finales : pour chaque sortie  $y_j$  :  $k_{f_j}$ ,

## Conditions terminales

- Conditions initiales : pour chaque variable d'état  $x_i$  :  $k_{d_i}$
- Conditions finales : pour chaque sortie  $y_j$  :  $k_{f_j}$ ,  
la dernière occurrence de  $x_i$  à commander pour générer la dernière occurrence de  $y_j$  :  $k'_{f_{ji}} = k_{f_j} - k_{f_{ji}}$ ,

## Conditions terminales

- Conditions initiales : pour chaque variable d'état  $x_i$  :  $k_{d_i}$
- Conditions finales : pour chaque sortie  $y_j$  :  $k_{f_j}$ ,  
la dernière occurrence de  $x_i$  à commander pour générer la dernière occurrence de  $y_j$  :  $k'_{f_{ji}} = k_{f_j} - k_{f_{ji}}$ ,  
dernière occurrence de  $x_i$  à commander :  $k_{f_i} = \max(k'_{f_{1i}}, k'_{f_{2i}}, \dots, k'_{f_{pi}})$ .

## Contraintes

dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  :

$$x_i(k) \preceq g_l(x(k)) \quad \text{pour } k_{d_i} \leq k \leq k_{f_i}.$$

## Contraintes

dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  :

$$x_i(k) \preceq g_l(x(k)) \quad \text{pour } k_{d_i} \leq k \leq k_{f_i}.$$

dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  :

$$x \preceq (g_l(x) \wedge \omega) \oplus \nu,$$

où  $l \in [1, q]$  pour  $q$  contraintes et avec  $\omega_i = \gamma^{k_{d_i}} \delta^\top$  et  $\nu_i = \gamma^{k_{f_i}+1} \delta^\top$ .

## Critère

$$J = u$$

La commande recherchée est celle qui maximise  $J$ .

↪ problématique du juste-à-temps

## Synthèse

$$\begin{cases} u \preceq g'_1(u) \\ u \preceq g'_2(u) \\ \vdots \\ u \preceq g'_q(u), \end{cases}$$

avec  $g'_i = A^* B \backslash ((g_i(A^* B u) \wedge \omega) \oplus \nu)$  (en considérant le fonctionnement du système au plus tôt, on a  $x = A^* B u$ ).

## Synthèse

$$\left\{ \begin{array}{l} u \preceq g'_1(u) \\ u \preceq g'_2(u) \\ \vdots \\ u \preceq g'_q(u), \end{array} \right.$$

avec  $g'_i = A^* B \circ ((g_i(A^* B u) \wedge \omega) \oplus \nu)$  (en considérant le fonctionnement du système au plus tôt, on a  $x = A^* B u$ ).

$$\Leftrightarrow u \preceq g'_1(u) \wedge g'_2(u) \wedge \dots \wedge g'_q(u) = f(u).$$

## Proposition

Si l'algorithme itératif suivant

$$\begin{aligned}u_0 &= T \\ u_{k+1} &= f(u_k)\end{aligned}$$

converge en un nombre fini  $k_e$  d'itérations, alors  $u_{k_e}$  est la commande recherchée.

L'exploitation des réseaux urbains se décompose en deux phases :

L'exploitation des réseaux urbains se décomposent en deux phases :

## 1. Tableau de marche

L'exploitation des réseaux urbains se décomposent en deux phases :

## 1. Tableau de marche

- ▶ étude géographique et sociale

L'exploitation des réseaux urbains se décomposent en deux phases :

## 1. Tableau de marche

- ▶ étude géographique et sociale
- ▶ choix des performances nominales (nombre de bus par ligne, contraintes d'écart-temps)

L'exploitation des réseaux urbains se décomposent en deux phases :

## 1. Tableau de marche

- ▶ étude géographique et sociale
- ▶ choix des performances nominales (nombre de bus par ligne, contraintes d'écart-temps)
- ▶ synthèse des tables d'horaires

L'exploitation des réseaux urbains se décomposent en deux phases :

## 1. Tableau de marche

- ▶ étude géographique et sociale
- ▶ choix des performances nominales (nombre de bus par ligne, contraintes d'écart-temps)
- ▶ synthèse des tables d'horaires

## 2. Régulation

ajustement des paramètres du tableau de marche aux conditions de fonctionnement.

## temps de trajet et correspondance

$x_i(k)$  dénote la date du  $k + 1$ -ème bus à l'arrêt  $x_i$ .

$$x(k) \geq Ax(k - 1)$$

$A_{ij}$  : temps de parcours de l'arrêt  $j$  à l'arrêt  $i$

## temps de trajet et correspondance

$x_i(k)$  dénote la date du  $k + 1$ -ème bus à l'arrêt  $x_i$ .

$$x(k) \geq Ax(k - 1)$$

$A_{ij}$  : temps de parcours de l'arrêt  $j$  à l'arrêt  $i$

## table d'horaires

$$x(k) \geq Bu(k)$$

$B_{ij} = e$  si les bus respectent la table à l'arrêt  $i$ ,  $B_{ij} = \varepsilon$  sinon

## temps de trajet et correspondance

$x_i(k)$  dénote la date du  $k + 1$ -ème bus à l'arrêt  $x_i$ .

$$x(k) \geq Ax(k - 1)$$

$A_{ij}$  : temps de parcours de l'arrêt  $j$  à l'arrêt  $i$

## table d'horaires

$$x(k) \geq Bu(k)$$

$B_{ij} = e$  si les bus respectent la table à l'arrêt  $i$ ,  $B_{ij} = \varepsilon$  sinon

## représentation d'état

$$x(k) = Ax(k - 1) \oplus Bu(k)$$

## Conditions terminales

Pour chaque  $x_i$

- Conditions initiales :  $k_{d_i}$  (indice du premier bus synchronisé avec la table d'horaires à l'arrêt  $x_i$ )

## Conditions terminales

Pour chaque  $x_i$

- Conditions initiales :  $k_{d_i}$  (indice du premier bus synchronisé avec la table d'horaires à l'arrêt  $x_i$ )
- Conditions finales :  $k_{f_i}$  (indice du dernier bus à synchroniser avec la table d'horaires à l'arrêt  $x_i$ )

## Contraintes

▷ Consigne :

$$C \otimes x(k) \preceq z(k) \quad \text{pour } k_{d_i} \leq k \leq k_{f_i},$$

## Contraintes

- ▷ Consigne :

$$C \otimes x(k) \preceq z(k) \quad \text{pour } k_{d_i} \leq k \leq k_{f_i},$$

- ▷ Contrainte d'écart temps maximum

$$\begin{cases} x_i(k) \preceq \Delta_i^{\max} \otimes x_i(k-1) & \text{pour } k_{d_i} < k \leq k_{f_i}, \\ x_i(k) = x_i(k_{d_i}) & \text{pour } k = k_{d_i}, \end{cases}$$

$$\iff x_i(k) \preceq \Delta_i^{\max} \otimes x_i(k-1) \oplus x_i(k_{d_i}) \quad \text{pour } k_{d_i} \leq k \leq k_{f_i},$$

## Contraintes

- ▷ Contrainte d'écart temps minimum

$$x_i(k) \succeq \Delta_i^{\min} \otimes x_i(k-1) \quad \text{pour } k_{d_i} \leq k \leq k_{f_i}.$$

## Contraintes

- ▷ Contrainte d'écart temps minimum

$$x_i(k) \succeq \Delta_i^{\min} \otimes x_i(k-1) \quad \text{pour } k_{d_i} \leq k \leq k_{f_i}.$$

- ▷ Pic de charge

$$\exists k \in [k_{d_i}, k_{f_i}] \text{ tel que } x_i(k) \succeq t_j \text{ et } x_i(k+m) \prec t_j + r,$$

où  $m$  est le nombre de bus souhaités à l'arrêt  $i$  pendant l'intervalle  $[t_j, t_j + r]$  pour absorber le pic.

## Contraintes

▷ Temps d'attente maximum

$$\begin{cases} x_j(k) \preceq \phi_{ji}^{\max} \otimes x_i(k-1) & \text{pour } k_{d_j} < k \leq k_{f_j}, \\ x_j(k) = x_j(k_{d_j}) & \text{pour } k = k_{d_j}, \end{cases}$$

$$\iff x_j(k) \preceq \phi_{ji}^{\max} \otimes x_i(k-1) \oplus x_j(k_{d_j}) \quad \text{pour } k_{d_j} \leq k \leq k_{f_j},$$

▷ extension

Les contraintes précédentes trouvent une expression dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  et en considérant le fonctionnement au plus tôt du système :

$$u \preceq g'_1(u) \wedge g'_2(u) \wedge \dots \wedge g'_5(u) = f(u).$$

Si le calcul itératif défini précédemment converge en  $k_e$  itérations alors  $u_{k_e}$  est la table d'horaires optimale.

## proposition

Appliqué à ce problème, l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations.

## proposition

Appliqué à ce problème, l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations.

## idée de la preuve

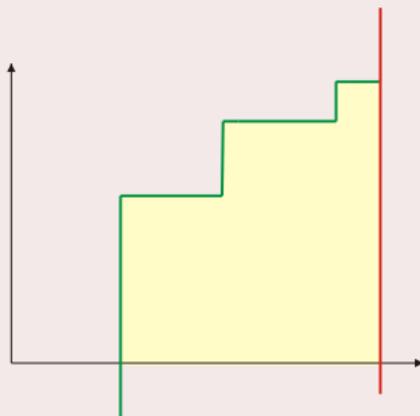
d'après la première contrainte, on a

$$f(u_k) \preceq A^* B \oplus ((C \oplus z \wedge \omega) \oplus \nu) \quad \text{pour tout } k \geq 0. \quad (1)$$

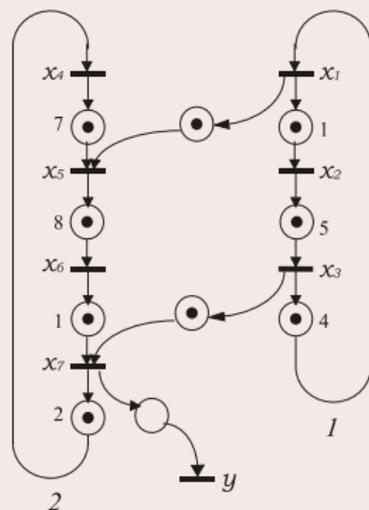
En outre, on a toujours

$$f(u_k) \succeq A^* B \oplus \nu \quad \text{pour tout } k \geq 0 \quad (2)$$

## idée de la preuve

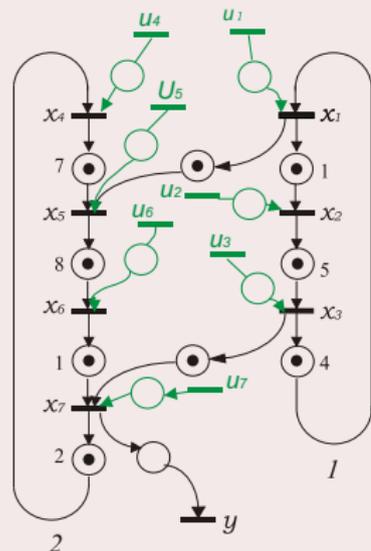


# Exemple



$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \gamma^1 \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \gamma^1 \delta^1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma^1 \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma^1 \delta^2 \\ \gamma \delta^0 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma^1 \delta^7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma^1 \delta^8 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma \delta^0 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma^1 \delta^1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

# Exemple



$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \gamma^1 \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \gamma^1 \delta^1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma^1 \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma^1 \delta^2 \\ \gamma \delta^0 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma^1 \delta^7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma^1 \delta^8 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma \delta^0 & \varepsilon & \varepsilon & \gamma^1 \delta^1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$B = Id \text{ et } C = (\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e).$$

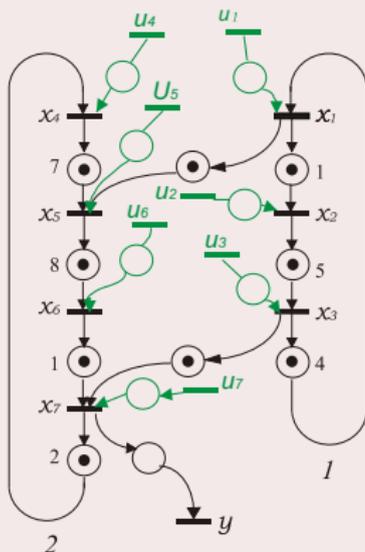
## Conditions terminales

Conditions initiales :  $\omega$  tel que

$$\forall i, \omega_i = \gamma^0 \delta^T$$

Conditions finales : On désire effectuer 15 départs de bus à l'arrêt  $x_7$

$$\nu = \begin{pmatrix} \gamma^{12} \delta^T \\ \gamma^{13} \delta^T \\ \gamma^{14} \delta^T \\ \gamma^{12} \delta^T \\ \gamma^{13} \delta^T \\ \gamma^{14} \delta^T \\ \gamma^{15} \delta^T \end{pmatrix}.$$





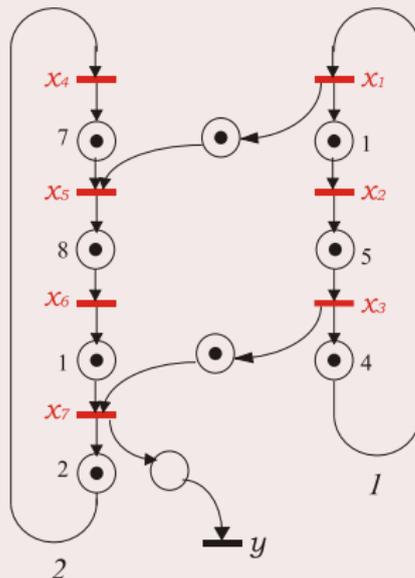
# Contraintes

▷ Consigne

$$x_7 \preceq z = \gamma^0 \delta^{150} \oplus \gamma^{10} \delta^{200},$$

▷ Ecart-temps minimum

$$\Delta_{ii}^{min} = \gamma^0 \delta^6 \quad \forall i,$$



# Contraintes

▷ Consigne

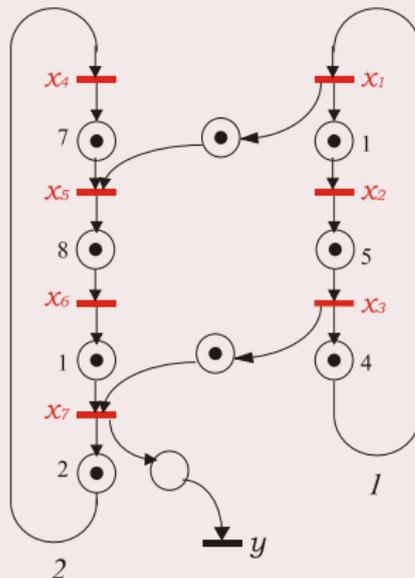
$$x_7 \preceq z = \gamma^0 \delta^{150} \oplus \gamma^{10} \delta^{200},$$

▷ Ecart-temps minimum

$$\Delta_{ii}^{min} = \gamma^0 \delta^6 \quad \forall i,$$

▷ Ecart-temps maximum

$$\Delta_{ii}^{max} = \gamma^0 \delta^{10} \quad \forall i,$$



## Contraintes

▷ Consigne

$$x_7 \preceq z = \gamma^0 \delta^{150} \oplus \gamma^{10} \delta^{200},$$

▷ Ecart-temps minimum

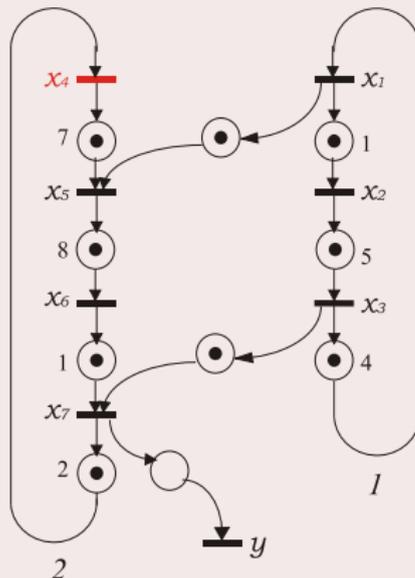
$$\Delta_{ii}^{min} = \gamma^0 \delta^6 \quad \forall i,$$

▷ Ecart-temps maximum

$$\Delta_{ii}^{max} = \gamma^0 \delta^{10} \quad \forall i,$$

▷ **Pic de charge**

un départ entre les dates  
130 et 132 à l'arrêt  $x_4$ .



## Contraintes

▷ Consigne

$$x_7 \preceq z = \gamma^0 \delta^{150} \oplus \gamma^{10} \delta^{200},$$

▷ Ecart-temps minimum

$$\Delta_{ii}^{min} = \gamma^0 \delta^6 \quad \forall i,$$

▷ Ecart-temps maximum

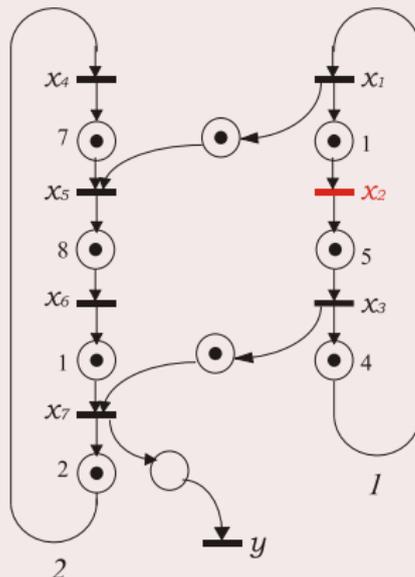
$$\Delta_{ii}^{max} = \gamma^0 \delta^{10} \quad \forall i,$$

▷ Pic de charge

un départ entre les dates  
130 et 132 à l'arrêt  $x_4$ .

▷ Temps d'attente  
maximum

pas plus de 2 unités de  
temps à l'arrêt  $x_2$ .



L'algorithme défini précédemment converge en 9 itérations.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$u_2$	102	108	114	120	126	132	138	144	154	164	174	184	194	—	—
$u_4$	96	102	108	114	120	126	132	142	152	162	172	182	—	—	—
$u_7$	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	160	170	180	190	200

L'algorithme défini précédemment converge en 9 itérations.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$u_2$	102	108	114	120	126	132	138	144	154	164	174	184	194	—	—
$u_4$	96	102	108	114	120	126	132	142	152	162	172	182	—	—	—
$u_7$	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	160	170	180	190	200

▷ Consigne

$$x_7 \preceq z = \gamma^0 \delta^{150} \oplus \gamma^{10} \delta^{200},$$

L'algorithme défini précédemment converge en 9 itérations.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$u_2$	102	108	114	120	126	132	138	144	154	164	174	184	194	—	—
$u_4$	96	102	108	114	120	126	132	142	152	162	172	182	—	—	—
$u_7$	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	160	170	180	190	200

▷ Consigne

$$x_7 \preceq z = \gamma^0 \delta^{150} \oplus \gamma^{10} \delta^{200},$$

▷ Ecart-temps minimum

$$\Delta_{ii}^{min} = \gamma^0 \delta^6 \quad \forall i,$$

L'algorithme défini précédemment converge en 9 itérations.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$u_2$	102	108	114	120	126	132	138	144	154	164	174	184	194	—	—
$u_4$	96	102	108	114	120	126	132	142	152	162	172	182	—	—	—
$u_7$	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	160	170	180	190	200

▷ Consigne

$$x_7 \preceq z = \gamma^0 \delta^{150} \oplus \gamma^{10} \delta^{200},$$

▷ Ecart-temps minimum

$$\Delta_{ii}^{min} = \gamma^0 \delta^6 \quad \forall i,$$

▷ Ecart-temps maximum

$$\Delta_{ii}^{max} = \gamma^0 \delta^{10} \quad \forall i,$$

L'algorithme défini précédemment converge en 9 itérations.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$u_2$	102	108	114	120	126	132	138	144	154	164	174	184	194	—	—
$u_4$	96	102	108	114	120	126	132	142	152	162	172	182	—	—	—
$u_7$	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	160	170	180	190	200

▷ Consigne

$$x_7 \preceq z = \gamma^0 \delta^{150} \oplus \gamma^{10} \delta^{200},$$

▷ Ecart-temps minimum

$$\Delta_{ii}^{min} = \gamma^0 \delta^6 \quad \forall i,$$

▷ Ecart-temps maximum

$$\Delta_{ii}^{max} = \gamma^0 \delta^{10} \quad \forall i,$$

▷ Pic de charge

un départ entre les dates 130 et 132 à l'arrêt  $x_4$ .

L'algorithme défini précédemment converge en 9 itérations.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$u_2$	102	108	114	120	126	132	138	144	154	164	174	184	194	—	—
$u_4$	96	102	108	114	120	126	132	142	152	162	172	182	—	—	—
$u_7$	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	160	170	180	190	200

▷ Consigne

$$x_7 \preceq z = \gamma^0 \delta^{150} \oplus \gamma^{10} \delta^{200},$$

▷ Ecart-temps minimum

$$\Delta_{ii}^{min} = \gamma^0 \delta^6 \quad \forall i,$$

▷ Ecart-temps maximum

$$\Delta_{ii}^{max} = \gamma^0 \delta^{10} \quad \forall i,$$

▷ Pic de charge

un départ entre les dates 130 et 132 à l'arrêt  $x_4$ .

▷ Temps d'attente maximum

pas plus de 2 unités de temps à l'arrêt  $x_2$ .

généralisation de la commande en juste-à-temps des SED dans les dioïdes : prise en comptes de contrainte sur l'état.

- conditions générales de convergence du calcul de la commande

généralisation de la commande en juste-à-temps des SED dans les dioïdes : prise en comptes de contrainte sur l'état.

- conditions générales de convergence du calcul de la commande
- problème de régulation dans les systèmes de transport.

## Commande en juste-à-temps

Pour une consigne donnée  $z$ , on cherche le plus grand  $u$  tel que  $y = Hu \preceq z$ .

→ la théorie de la résiduation fournit la plus grande solution  $u_{opt} = H \setminus z$ .



◀ Back



