



HAL
open science

Evaluation de l'efficacité individuelle des maintenances préventives avec un modèle de Brown-Proschan en présence de censure à gauche

Laurent Doyen

► **To cite this version:**

Laurent Doyen. Evaluation de l'efficacité individuelle des maintenances préventives avec un modèle de Brown-Proschan en présence de censure à gauche. 2009. hal-00363873

HAL Id: hal-00363873

<https://hal.science/hal-00363873>

Preprint submitted on 24 Feb 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE JEAN KUNTZMANN

**Evaluation de l'efficacité individuelle
des maintenances préventives
avec un modèle de Brown-Prochan
en présence de censure à gauche**

Laurent Doyen

Février 2009

1 Introduction

Tout au long de leur vie opérationnelle, les systèmes industriels sont soumis à des actions de maintenance préventive et corrective. La maintenance préventive (MP) a pour but de ralentir le vieillissement des matériels pour retarder l'occurrence des défaillances, tandis que la maintenance corrective (MC) doit remettre en fonctionnement les matériels défaillants. La sûreté de fonctionnement de ces systèmes dépend naturellement étroitement de l'efficacité de ces opérations de maintenance. Une maintenance efficace permet la prolongation de la durée d'exploitation des matériels.

Il est donc important de construire des modèles des effets des maintenances des systèmes réparables complexes et de développer des méthodes permettant d'évaluer leur efficacité. Basiquement, on suppose soit que les maintenances remettent les matériels à neuf (AGAN : As Good As New), soit qu'elles ne font que les remettre en fonctionnement dans le même état qu'auparavant (ABAO : As Bad As Old). La réalité se trouve naturellement entre ces deux extrêmes. On parle alors de maintenance imparfaite.

Ce document propose un modèle de maintenance imparfaite pour un système soumis à des actions de maintenance corrective et préventive. Ce modèle est du même type que celui proposé par Brown et Proschan [3]. A partir de ce modèle des techniques statistiques sont développées afin d'évaluer simultanément l'usure intrinsèque du système et de façon différenciée l'efficacité de chacune des actions de maintenance préventive. De plus, les techniques proposées permettent de prendre en compte le fait que les dates de défaillances ne sont connues depuis la mise en route du système, c'est à dire permettent de prendre en compte une censure à gauche du processus des défaillances. Enfin l'ensemble de ces méthodes sont appliquées à deux jeux de données issues d'un matériel de production d'électricité EDF.

2 Le modèle de Brown-Proschan

Dans ce document nous nous intéressons plus particulièrement à un modèle de maintenance imparfaite qui a été introduit par Brown et Proschan (BP) en 1983 [3] dans le cadre de maintenances uniquement correctives. Ce modèle vérifie les hypothèses suivantes :

- Les effets des maintenances sont indépendants des instants auxquels elles sont réalisées et sont indépendants les uns des autres.
- Le système après maintenance est AGAN avec une probabilité p et ABAO avec une probabilité $1 - p$.

Ainsi, l'effet de la $i^{\text{ème}}$ maintenance est représentée par une variable aléatoire B_i telle que :

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{si la maintenance est AGAN} \\ 0 & \text{si la maintenance est ABAO} \end{cases}$$

Les B_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p .

Dans le cadre de maintenances uniquement correctives, un certain nombre de travaux ont développé des méthodes statistiques portant sur la loi du premier instant de défaillance (qui représente l'usure intrinsèque hors maintenance du matériel) quand les effets des maintenances B_i sont supposés connus. Whitaker et Samaniego [10] ont proposé un estimateur non paramétrique en utilisant une méthode du type Kaplan-Meier. Hollander, Presnell et Sethuraman [4], puis Kvam, Singh et Whitaker [5] ont également développé des estimateurs non paramétriques mais sur une généralisation du modèle BP proposée par Block, Borges et Savits (BBS) [2] dans laquelle la probabilité de maintenance parfaite dépend de l'instant auquel est effectuée la maintenance corrective. Pour le modèle BBS, Agustin et Peña [1] ont proposé un test d'adéquation toujours pour la loi du premier instant de défaillance quand les B_i sont supposés connus.

Dans la pratique, il est douteux que l'on puisse connaître avec certitude les effets des maintenances. Les variables aléatoires B_i sont alors des variables cachées. Whitaker et Samaniego [10] ont mis en évidence un problème d'identifiabilité pour p dans le cas où la durée d'attente de la première défaillance est de loi exponentielle : la loi des durées entre défaillances ne dépend pas de p dans ce cas. C'est logique dans la mesure où les maintenances sont inutiles quand le système ne vieillit pas. Dans ce cas, les modèles ABAO et AGAN sont les mêmes. Dans le cas où cette première durée est supposée de loi non exponentielle, ce problème ne se pose pas et on peut donc a priori estimer p et les autres paramètres du modèle, sans connaître les effets de maintenance B_i . Pour ce faire, il est possible d'utiliser l'algorithme EM, comme l'a fait Lim [9]. Langseth et Lindqvist [6] ont proposé une autre méthode d'estimation, basée sur le maximum de vraisemblance. Enfin, Lim, Lu et Park [8] ont effectué une analyse bayésienne du modèle BP en donnant au paramètre p une loi a priori de type béta. Exception faite des travaux de Langseth et Lindqvist, toutes ces études portent encore sur des systèmes soumis uniquement à des maintenances correctives.

La méthode proposée par Langseth et Lindqvist a un problème mathématique du au fait qu'ils ont considéré que les effets des maintenances B_i sont indépendants des instants de maintenance. En fait le $i^{\text{ème}}$ effet de maintenance B_i est indépendant des instants de maintenance survenus avant lui, mais pas de ceux qui surviennent après lui. En effet si $B_i = 1$, la $i^{\text{ème}}$ maintenance est parfaite, le système est donc neuf et a peu de chances de tomber en panne. Par contre si $B_i = 0$ la $i^{\text{ème}}$ maintenance est minimale, le système n'est donc pas remis à neuf et a ainsi plus de chances de tomber en panne.

Enfin, Last et Szekli [7] se sont intéressés aux propriétés asymptotiques du processus des défaillances sur une généralisation du modèle BP.

3 Hypothèses et notations

Nous considérons dans la suite que le système subit des MP à instants déterministes depuis sa date de mise en service (date à laquelle il était supposé être neuf). L'ensemble de ces dates de MP sont connues, leurs durées ne sont pas considérées. L'effet des MP est supposé suivre un modèle BP de même paramètre p pour toutes les MP. p représente donc l'efficacité globale des MP. Après chaque défaillance, le système subit une MC dont la durée n'est pas considérée. L'effet des MC est supposé suivre un modèle ABAO.

En pratique il n'est souvent pas aberrant de considérer les MC comme ayant un effet minimal sur le système. En effet, les MC sont des actions de maintenance non planifiées dont le but est, en règle générale, de remettre le système au plus vite dans un état où il peut à nouveau fonctionner. Par opposition, aux actions de maintenance préventive qui sont planifiées à l'avance et dont le but est d'améliorer la fiabilité futur du système, et qui sont donc en règle générale efficaces.

On ne connaît les dates de défaillance qu'entre un instant $c > 0$ et la date de fin d'observation. Cette date de fin d'observation, notée T , est soit déterministe (censure de type I), soit aléatoire. Dans ce cas, cela peut être l'instant de la $n^{\text{ème}}$ défaillance, où n est déterministe (censure de type II), ou également l'instant de la $m^{\text{ème}}$ maintenance, où m est déterministe.

Afin d'analyser ce modèle, on a besoin des notations suivantes :

- c : instant de censure à gauche du processus des MC.
- T : instant de censure à droite du processus des maintenances. T peut être aléatoire ou non, on a nécessairement $T > c$.
- M_t : nombre de MP programmées entre l'instant 0 et t . Ainsi, M_c est le nombre de MP programmées avant la période de début d'observation des MC.
- $\{\tau_m\}_{m \geq 0}$: instants successifs de MP. Par convention $\tau_0 = 0$.

- $\{N_t\}_{t \geq 0}$: processus de comptage du nombre de MC survenues jusqu'à l'instant t .
- $\{T_n\}_{n \geq 0}$: instants successifs de MC, observées à partir de la date c .
- $\{C_k\}_{k \geq 0}$: instants successifs de maintenances (MP et MC) observées après la date c .
- U_k : type de la $k^{\text{ème}}$ maintenance. U_k vaut 0 si C_k correspond à une MC et 1 si C_k correspond à une MP.
- p : probabilité qu'une MP soit AGAN.
- B_m : effet de la $m^{\text{ème}}$ MP. B_m vaut 0 si elle est ABAO et 1 si elle est AGAN (par convention $B_m = 1$ pour $m \leq 0$).
- $\lambda(t)$: intensité initiale. Par extension et pour simplifier les notations on notera λ les paramètres dont dépend cette intensité initiale. Dans le cas d'une intensité initiale de type Weibull : $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$ et $\lambda = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times]1, +\infty[$.
- $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$.
- $L_{t;N_t,T_1,\dots,T_{N_t}}(\lambda, p)$: vraisemblance correspondant à l'observation du processus des MC entre c et t (pour $c < t \leq T$).
- t^- : est la limite à droite de t .
- t^+ : est la limite à gauche de t .

Sur ces notations, il est important de remarquer que τ_1 est l'instant de la première MP à partir de la date 0, alors que T_1 est la date de la première MC ayant lieu après c (ce n'est donc pas la première MC subie par le système mais la première MC observée). De même C_1 est la date de la première maintenance ayant lieu après c .

On note également $B_{t,m}$ l'événement : juste avant l'instant t , la dernière MP AGAN était la $m^{\text{ème}}$ MP précédente et donc par conséquence les $(m-1)$ MP précédentes étaient ABAO. Mathématiquement cela s'écrit :

$$B_{t,m} = \{ \{B_{M_{t^-}-m} = 1\}, \{B_{M_{t^-}-j} = 0\}_{0 \leq j \leq m-1} \}$$

Dans cette écriture, M_{t^-} est donc la limite à droite de M_t , c'est à dire que $M_{\tau_j^-} = j-1$ et $M_{t^-} = M_t$ si t n'est pas un instant de MP. On constate que l'événement $B_{t,m}$ pour $m \geq M_{t^-} + 1$ n'est jamais réalisé car par convention $B_0 = 1$.

4 Fonction de vraisemblance et estimation

4.1 Expression de la fonction de vraisemblance

À l'instant de censure T , on note t_1, \dots, t_{N_T} les instants successifs de MC observés. La fonction de vraisemblance est la densité conjointe des observations du phénomène aléatoire, c'est à dire des instants de MC et du nombre de MC observées :

$$L_{T;N_T,t_1,\dots,t_{N_T}}(\lambda, p) = f_{T_1,\dots,T_{N_T},N_T}(t_1, \dots, t_{N_T})$$

Pour calculer la valeur de la vraisemblance, on conditionne par le système d'événements complet $\{B_{T,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$:

$$L_{T;N_T,t_1,\dots,t_{N_T}}(\lambda, p) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{T_1,\dots,T_{N_T},N_t|B_{T,i}}(t_1, \dots, t_{N_T}) P(B_{T,i}) \quad (1)$$

- Pour $i \geq M_{T^-} + 1$, $B_{T,i}$ n'est jamais réalisé comme on l'a fait remarquer précédemment, donc $P(B_{T,i}) = 0$ dans ce cas. Ainsi, dans l'équation (1) on n'a pas besoin de sommer sur i jusqu'à l'infini mais uniquement jusqu'à M_{T^-} .

- Pour $M_{T^-} - M_c \leq i \leq M_{T^-}$, $B_{T,i}$ signifie que la dernière MP AGAN était la $(M_{T^-} - i)^{\text{ème}}$ avec $0 \leq M_{T^-} - i \leq M_c$. C'est à dire que toutes les MP entre c et T sont ABAO. Donc, conditionnellement à $B_{T,i}$, l'ensemble des instants de MC observés correspondent aux instants de pannes d'un NHPP ayant pour instant initial $\tau_{M_{T^-} - i}$ et étant observé uniquement entre c et T . Dans ces conditions il est bien connu que,

$$f_{T_1, \dots, T_{N_T}, N_T | B_{T,i}}(t_1, \dots, t_{N_T}) = \left(\prod_{j=1}^{N_T} \lambda(t_j - \tau_{M_{T^-} - i}) \right) e^{-(\Lambda(T - \tau_{M_{T^-} - i}) - \Lambda(c - \tau_{M_{T^-} - i}))}$$

- Pour $0 \leq i \leq M_{T^-} - M_c - 1$, $B_{T,i}$ signifie que la dernière MP AGAN était toujours la $(M_{T^-} - i)^{\text{ème}}$ mais cette fois ci avec $M_{T^-} - i > M_c$. C'est à dire que la dernière MP AGAN a eu lieu entre c et T . Le processus des MC peut donc être découpé en deux processus indépendants, puisqu'on suppose qu'il y a eu un renouvellement en $\tau_{M_{T^-} - i}$. Sur $[c, \tau_{M_{T^-} - i}]$, on a un processus de type MC ABAO et MP BP avec $N_{\tau_{M_{T^-} - i}}$ défaillances en $t_1, \dots, t_{N_{\tau_{M_{T^-} - i}}}$. Sa fonction de vraisemblance ou densité s'écrit :

$$L_{\tau_{M_{T^-} - i}; N_{\tau_{M_{T^-} - i}}, t_1, \dots, t_{N_{\tau_{M_{T^-} - i}}}}(\lambda, p). \text{ Sur } [\tau_{M_{T^-} - i}, T], \text{ on a un NHPP dont l'instant initial est en } \tau_{M_{T^-} - i}, \text{ donc sa densité s'écrit } \left(\prod_{j=N_{\tau_{M_{T^-} - i} + 1}}^{N_T} \lambda(t_j - \tau_{M_{T^-} - i}) \right) \exp(-\Lambda(T - \tau_{M_{T^-} - i})).$$

Pour finir il suffit de remarquer que :

$$P(B_{T, M_{T^-}}) = P(B_{M_{T^-}} = 0, \dots, B_1 = 0) = (1 - p)^{M_{T^-}}$$

et que pour $i > M_{T^-}$,

$$P(B_{T,i}) = P(B_{M_{T^-} - i} = 1, \{B_{M_{T^-} - j} = 0\}_{0 \leq j \leq i-1}) = p(1 - p)^i$$

Ainsi, la fonction de vraisemblance s'écrit de façon récursive. Pour simplifier les écritures on pose $m = M_{T^-} - i$ et on a :

$$L_{T; N_T, t_1, \dots, t_{N_T}}(\lambda, p) = \left(\sum_{m=0}^{M_c} p^{\mathbb{1}_{\{m \neq 0\}}} D_T(m) \exp(-(\Lambda(T - \tau_m) - \Lambda(c - \tau_m))) \right) + \left(\sum_{m=M_c+1}^{M_{T^-}} p D_T(m) \exp(-\Lambda(T - \tau_m)) L_{\tau_m; N_{\tau_m}, t_1, \dots, t_{N_{\tau_m}}}(\lambda, p) \right) \quad (2)$$

Cette écriture de la fonction de vraisemblance est vérifiée pas uniquement pour l'instant de censure T mais pour tout instant de censure $t \in [0, T]$. Les fonctions $D_t(m)$ sont définies de façon générale pour $t > \tau_m \vee c$ ($a \vee b = \max(a, b)$) par :

$$D_t(m) = \begin{cases} (1 - p)^{M_{T^-} - m} \left(\prod_{\tau_m \leq t_j \leq t} \lambda(t_j - \tau_m) \right) & \text{si } \tau_m > c \\ (1 - p)^{M_{T^-} - m} \left(\prod_{c \leq t_j \leq t} \lambda(t_j - \tau_m) \right) & \text{si } \tau_m \leq c \end{cases} \\ = (1 - p)^{M_{T^-} - m} \left(\prod_{c \vee \tau_m \leq t_j \leq t} \lambda(t_j - \tau_m) \right)$$

Pour m donné, les valeurs $D_{\tau_i}(m)$ peuvent s'écrire récursivement sur i :

$$D_{\tau_{i+1}}(m) = \begin{cases} (1-p)^{M_c-m} \left(\prod_{c \leq t_j \leq \tau_{M_c+1}} \lambda(t_j - \tau_m) \right) & \text{si } i = M_c \\ \left(\prod_{\tau_m \leq t_j \leq \tau_{m+1}} \lambda(t_j - \tau_m) \right) & \text{si } i = m > M_c \\ (1-p) \left(\prod_{\tau_i < t_j \leq \tau_{i+1}} \lambda(t_j - \tau_m) \right) D_{\tau_i}(m) & \text{si } i > m \end{cases}$$

Les vraies valeurs des paramètres λ et p sont notées λ_0 et p_0 , elles peuvent être estimées par maximum de vraisemblance. Les valeurs des estimateurs de maximum de vraisemblance correspondent aux valeurs qui maximisent la log-vraisemblance.

$$(\hat{\lambda}, \hat{p}) = \arg \max_{\lambda, 0 \leq p \leq 1} \left(\ln(L_{T; N_T, t_1, \dots, t_{N_T}}(\lambda, p)) \right)$$

4.2 Algorithme de calcul de la fonction de vraisemblance

Pour calculer la fonction de vraisemblance sur un jeu de données réelles et pour une valeur donnée de p et des paramètres λ , on peut se servir de l'algorithme suivant dont la complexité est égale au nombre total de MP multiplié par le nombre maximal de MC observées entre deux MP.

L'algorithme de calcul de la log vraisemblance est le suivant, les textes entre `/**` et `**/` sont des commentaires.

$i=1$ /** on calcule $L_1 = L_{\tau_{M_c+1}}$ à partir de (2) en sommant de $m = 0$ à M_c .
 M_c est le nombre de MP ayant eu lieu entre 0 et c compris, et τ_{M_c+1} est le premier instant de MP qui suit c **/

$$D(0) = (1-p)^{M_c} \left(\prod_{c \leq t_j \leq \tau_{M_c+1}} \lambda(t_j) \right) /** = D_{\tau_{M_c+1}}(0) **/$$

$$L_1 = D(0) \exp(-(\Lambda(\tau_{M_c+1}) - \Lambda(c)))$$

Pour tout τ_m tel que $0 < \tau_m \leq c$

$$D(m) = (1-p)^{M_c-m} \left(\prod_{c \leq t_j \leq \tau_{M_c+1}} \lambda(t_j - \tau_m) \right) /** = D_{\tau_{M_c+1}}(m) **/$$

$$L_1 = L_1 + p D(m) \exp(-(\Lambda(\tau_{M_c+1} - \tau_m) - \Lambda(c - \tau_m)))$$

Fin pour

Pour tout $(\tau_{k-1}, \tau_k) = \{(\tau_{M_c+1}, \tau_{M_c+2}), \dots, (\tau_{M_{T-1}}, \tau_{M_{T-}}), (\tau_{M_{T-}}, T)\}$

$i=i+1$ /** on calcule $L_i = L_{\tau_k} = L_{\tau_{M_c+i}}$ à partir (2) en sommant sur m **/

$$D(0) = (1-p) \left(\prod_{\tau_{k-1} \leq t_j \leq \tau_k} \lambda(t_j) \right) D(0) /** = D_{\tau_k}(0) **/$$

$$L_i = D(0) \exp(-(\Lambda(\tau_k) - \Lambda(c)))$$

Pour tout τ_m tel que $0 < \tau_m \leq c$

$$D(m) = (1-p) \left(\prod_{\tau_{k-1} \leq t_j \leq \tau_k} \lambda(t_j - \tau_m) \right) D(m) /** = D_{\tau_k}(m) **/$$

$$L_i = L_i + p D(m) \exp(-(\Lambda(\tau_k - \tau_m) - \Lambda(c - \tau_m)))$$

Fin pour

Pour tout τ_m tel que $c < \tau_m \leq \tau_{k-2}$

$$D(m) = (1-p) \left(\prod_{\tau_{k-1} \leq t_j \leq \tau_k} \lambda(t_j - \tau_m) \right) D(m) /** = D_{\tau_k}(m) **/$$

$$L_i = L_i + p D(m) \exp(-\Lambda(\tau_k - \tau_m)) L_{m-M_c}$$

Fin pour

$$D(k-1) = \left(\prod_{\tau_{k-1} \leq t_j \leq \tau_k} \lambda(t_j - \tau_{k-1}) \right) /** = D_{\tau_k}(k-1) **/$$

$$L_i = L_i + p D(k-1) \exp(-\Lambda(\tau_k - \tau_{k-1})) L_{k-1-M_c}$$

Fin pour

Log-vraisemblance = $\ln(L_i)$

4.3 Calcul de l'efficacité individuelle des MP

Le paramètre p caractérise l'efficacité globale des MP. L'efficacité de la $m^{\text{ème}}$ MP (pour $1 \leq m < M_{T^-}$) peut être représentée par la probabilité :

$$P_m(\lambda_0, p_0) = P(B_m = 1 \mid N_T, T_1 = t_1, \dots, T_{N_T} = t_{N_T})$$

c'est à dire la probabilité, au vu des observations et connaissant les vraies valeurs des paramètres du modèle, que la $m^{\text{ème}}$ MP soit AGAN, donc remette à neuf le système.

En inversant le conditionnement, on a :

$$P_m(\lambda_0, p_0) = P(B_m = 1) \frac{f_{T_1, \dots, T_{N_T}, N_T \mid B_m=1}(t_1, \dots, t_{N_T})}{f_{T_1, \dots, T_{N_T}, N_T}(t_1, \dots, t_{N_T})}$$

Or $P(B_m = 1) = p_0$ et $f_{T_1, \dots, T_{N_T}, N_T}(t_1, \dots, t_{N_T})$ est la vraisemblance des observations, c'est à dire $L_{T; N_T, t_1, \dots, t_{N_T}}(\lambda_0, p_0)$.

De plus,

- Pour $M_c < m < M_{T^-}$, $B_m = 1$ signifie que le processus a été renouvelé en τ_m , donc conditionnellement à $B_m = 1$ le processus des maintenances peut être découpé en deux processus indépendants chacun de type MC ABAO, MP BP. Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{T_1, \dots, T_{N_T}, N_T \mid B_m=1}(t_1, \dots, t_{N_T}) &= L_{\tau_m; N_{\tau_m}, t_1, \dots, t_{N_{\tau_m}}}(\lambda_0, p_0) \\ &\quad L_{T-\tau_m; N_T - N_{\tau_m}, t_{N_{\tau_m}+1-\tau_m}, \dots, t_{N_T-\tau_m}}(\lambda_0, p_0) \end{aligned}$$

Et donc,

$$P_m(\lambda_0, p_0) = p_0 \frac{L_{\tau_m; N_{\tau_m}, t_1, \dots, t_{N_{\tau_m}}}(\lambda_0, p_0) L_{T-\tau_m; N_T - N_{\tau_m}, t_{N_{\tau_m}+1-\tau_m}, \dots, t_{N_T-\tau_m}}(\lambda_0, p_0)}{L_{T; N_T, t_1, \dots, t_{N_T}}(\lambda_0, p_0)}$$

- Pour $m < M_c$, on a $\tau_m < c$, ainsi sur la période précédant τ_m on n'observe pas de défaillance puisqu'on est avant la censure à droite. Il n'y a donc pas de vraisemblance associée à cette période. Ainsi,

$$f_{T_1, \dots, T_{N_T}, N_T \mid B_m=1}(t_1, \dots, t_{N_T}) = L_{T-\tau_m; N_T - N_{\tau_m}, t_{N_{\tau_m}+1-\tau_m}, \dots, t_{N_T-\tau_m}}(\lambda_0, p_0)$$

Et donc,

$$P_m(\lambda_0, p_0) = p_0 \frac{L_{T-\tau_m; N_T - N_{\tau_m}, t_{N_{\tau_m}+1-\tau_m}, \dots, t_{N_T-\tau_m}}(\lambda_0, p_0)}{L_{T; N_T, t_1, \dots, t_{N_T}}(\lambda_0, p_0)}$$

Enfin comme on ne connaît pas les vraies valeurs des paramètres λ_0 et p_0 , on peut estimer l'efficacité de la $m^{\text{ème}}$ MP par $P_m(\hat{\lambda}, \hat{p})$

4.4 Initialisation du paramètre d'échelle de l'intensité initiale dans les procédures de maximisation de log-vraisemblance

Pour un processus de Poisson non homogène, pour un processus de renouvellement ou même pour la plupart des modèles de maintenance imparfaite, la valeur du paramètre d'échelle qui maximise la log-vraisemblance s'exprime de façon explicite en fonction des autres paramètres. Malheureusement ce n'est pas le cas pour les modèles de type BP. Cela pose en pratique des problèmes numériques. En effet contrairement aux autres paramètres on n'a souvent aucune idée a priori de la valeur du paramètre d'échelle. De plus, pour des valeurs in fine aberrantes du paramètre d'échelle, on ne peut souvent pas calculer la valeur de la vraisemblance, car elle

explose numériquement. Au final, cela conduit à faire échouer les algorithmes de maximisation de la log vraisemblance dans les procédures d'estimation.

Dans cette section, nous nous intéressons donc au cas où l'intensité initiale possède un paramètre d'échelle. C'est à dire au cas où l'intensité initiale cumulée s'écrit : $\Lambda(t) = \alpha l(t)$ et donc l'intensité initiale s'écrit : $\lambda(t) = \alpha l'(t)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $l(t)$ une fonction positive ne dépendant pas de α . Le cas Weibull correspond à prendre $l(t) = t^\beta$. Pour ce type d'intensité initiale, nous proposons une méthode d'initialisation du paramètre d'échelle α pour la procédure de maximisation de la log-vraisemblance. On suppose que l'expérimentateur choisit les valeurs d'initialisation des autres paramètres du modèle, à savoir le paramètre p et les paramètres, notés l , dont dépend éventuellement $l(t)$.

Si l'on connaît la valeur des effets de maintenance, $\{B_m\}_{m \geq 1}$, la vraisemblance s'écrit :

$$L_{T;N_T,t_1,\dots,t_{N_T}}(\alpha, l) = \left[\prod_{n=1}^{N_T} \lambda(T_n - D_{M_{T_n^-}}) \right] \exp \left(\int_c^T \lambda(s - D_{M_{s^-}}) ds \right)$$

où $D_{M_{t^-}}$ correspond à l'instant de la dernière remise à neuf ayant eu lieu juste avant t . Mathématiquement cela s'écrit :

$$D_{M_{t^-}} = \tau_{M_{t^-}} - \sum_{j=1}^{M_{t^-}} \left[\sum_{k=j}^{M_{t^-}} (1 - B_k) \right] (\tau_j - \tau_{j-1})$$

On en déduit que la log-vraisemblance de l'ensemble des observations, que l'on notera pour simplifier $\ln \mathcal{L}(\alpha, l)$, s'écrit :

$$\ln \mathcal{L}(\alpha, l) = N_T \ln(\alpha) + \left[\overbrace{\sum_{n=1}^{N_T} \ln(l'(T_n - D_{M_{T_n^-}}))}^{S_2} \right. \\ \left. \begin{array}{l} -\alpha(l(\tau_{M_c+1} - D_{M_c}) - l(c - D_{M_c})) \\ -\alpha \left(\sum_{m=M_c+1}^{M_T-1} l(\tau_{m+1} - D_m) - l(\tau_m - D_m) \right) \\ -\alpha(l(T - D_{M_{T^-}}) - l(\tau_{M_{t^-}} - D_{M_{T^-}})) \end{array} \right] - \alpha S_1$$

En annulant la dérivée par rapport à α de la log-vraisemblance, on obtient que le paramètre d'échelle doit vérifier :

$$\tilde{\alpha} = \frac{N_T}{S_1}$$

Si avant c le dernier renouvellement correspond à la $\sigma_0^{\text{ème}}$ MP, et si, après c , il y a eu uniquement \tilde{M} renouvellements en les instants de MP $\tau_{\sigma_1}, \dots, \tau_{\sigma_{\tilde{M}}}$, on peut remarquer que la somme S_1 peut se récrire plus simplement sous la forme :

$$S_1 = -l(c - \tau_{\sigma_0}) + \left(\sum_{m=1}^{\tilde{M}-1} l(\tau_{\sigma_{m+1}} - \tau_{\sigma_m}) \right) + l(T - \tau_{\sigma_{\tilde{M}}})$$

En la valeur $\tilde{\alpha}$, la log-vraisemblance vérifie :

$$\ln \mathcal{L}(l) = N_T \ln(\tilde{\alpha}) + S_2 - N_T$$

On a ainsi une valeur d'initialisation $\tilde{\alpha}$ du paramètre d'échelle. Bien entendu le problème est qu'on ne connaît pas les effets de maintenance $\{B_m\}_{m \geq 1}$. L'idée est donc de les simuler à partir

d'une valeur du paramètre p proposée par l'expérimentateur. Plutôt que de simuler tous les B_m suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p , ce qui reviendrait à ne pas tenir compte des instants de défaillance, nous proposons de les simuler selon une loi de Bernoulli de paramètre $P_i(\tilde{\alpha}, l, p)$. Au final, on choisit parmi les simulations la meilleure valeur $\tilde{\alpha}$, c'est à dire celle qui correspond à la plus grande valeur de la log-vraisemblance.

On construit ainsi l'algorithme suivant. Les valeurs d'entrée de cet algorithme sont les valeurs d'initialisation choisies pour l et p , et un entier, noté $Iter$, égal au nombre de simulations faites de la série des effets de maintenance $\{B_m\}_{m \geq 1}$. $Iter$ représente le raffinement choisi pour la méthode d'initialisation de α : plus il est grand, plus la valeur $\tilde{\alpha}$ a de chances d'être proche de l'optimal correspondant aux valeurs de l et p choisies. Dans l'algorithme, $SimulU$ correspond à la simulation d'un nombre aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

```

( $p_m$ ) $_{m=1:M_T} = p$ 
 $\ln \mathcal{L} = -\infty$ 

Pour  $i = 1 : Iter$ 

     $DM = 0$  /**  $DM$  représente l'instant du dernier renouvellement **/

    Pour tout  $\tau_m$  tel que  $0 < \tau_m \leq c$ 
        Si  $SimulU \leq p_m$  alors  $DM = \tau_m$  Fin si /** c'est à dire si  $B_m = 1$  **/
    Fin pour

     $S_1 = -l(c - DM)$ 
     $S_2 = 0$ 
     $m = M_c$  /** le nombre MP ayant eu lieu avant  $c$  **/

    Pour tout  $C_k$  tel que  $c < C_k \leq T$ 

        Si  $U_k = 1$  alors /**  $C_k$  est une MP **/

             $m = m + 1$ 
            Si  $SimulU \leq p_m$  alors /**  $B_m = 1$ , la  $m^{\text{ème}}$  MP est AGAN **/
                 $S_1 = S_1 + l(C_k - DM)$ 
                 $DM = C_k$ 
            Fin si

        sinon /**  $C_k$  est une MC **/

             $S_2 = S_2 + \ln(l'(C_k - DM))$ 

        Fin si

    Fin pour

```

$$S_1 = S_1 + l(T - DM)$$

Si T est un instant de MC alors $S_2 = S_2 + \ln(l'(T - DM))$ Fin si

$$\tilde{\alpha}_{new} = \frac{N_T}{S_1}$$

$$\ln \mathcal{L}_{new} = N_T \ln(\tilde{\alpha}_{new}) + S_2 - N_T$$

Si $\ln \mathcal{L}_{new} \geq \ln \mathcal{L}$ alors

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_{new}$$

$$\ln \mathcal{L} = \ln \mathcal{L}_{new}$$

Pour $m = 1 : M_T, p_m = P_m(\tilde{\alpha}, l, p)$ Fin pour

Fin si

Fin pour

5 L'intensité de défaillance

5.1 Théorie générale

L'intensité de défaillance d'un système caractérise sa propension instantanée à tomber en panne sachant son histoire \mathcal{H}_t , c'est à dire l'ensemble des événements déjà observés.

$$\lambda_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N_{t+\Delta t} - N_t | \mathcal{H}_{t-})$$

Si l'on considère que le processus des défaillances ne dépend que de son propre passé, c'est à dire que son histoire n'est constituée que des instants de maintenance déjà observés, alors le processus est auto-excité et il est alors complètement caractérisé par son intensité de défaillance. En effet, la fonction de vraisemblance associée aux observations du processus des défaillances entre c et $t > c$ s'écrit alors uniquement en fonction de l'intensité de défaillance :

$$L_{t; N_t, t_1, \dots, t_{N_t}}(\lambda, p) = \left(\prod_{c \leq t_j \leq t} \lambda_{t_j} \right) \exp(-\Lambda_t) \quad (3)$$

où Λ_t est l'intégrale de l'intensité de défaillance sur la période d'observation du phénomène aléatoire, c'est à dire entre c et t : $\Lambda_t = \int_c^t \lambda_s ds$.

Si l'on considère que le processus des défaillances dépend d'un processus extérieur, c'est à dire que son histoire est constituée des instants de maintenance déjà observés et d'une série de variables aléatoires (par exemple les effets de maintenance B_i dans le cadre du modèle BP), le processus n'est pas auto-excité et son intensité de défaillance ne suffit pas pour le caractériser complètement. Dans ce cas l'intensité de défaillance est dite relative (aux effets de maintenance dans le cas BP). Par opposition, dans le cas précédent l'intensité de défaillance est dite propre.

Il existe un lien entre l'intensité propre et l'intensité relative. Ce lien est fait par le théorème d'innovation. Soient \mathcal{H}_t^1 et \mathcal{H}_t^2 deux histoires telles que pour tous $t > 0$, $\mathcal{H}_t^2 \subseteq \mathcal{H}_t^1$. Pour un processus N on note $\lambda_t(\mathcal{H}^1)$ son intensité de défaillance par rapport à la plus large des deux histoires. Alors N possède également une intensité de défaillance par rapport à la plus petite des deux histoires, et elle vérifie :

$$\lambda_t(\mathcal{H}^2) = E[\lambda_t(\mathcal{H}^1) | \mathcal{H}_{t-}^2]$$

Dans le cadre du modèle considéré, l'intensité relative est égale à l'intensité initiale en le temps écoulé depuis la dernière remise à neuf. Cela s'écrit :

$$\lambda_t = \lambda \left(t - \tau_{M_{t^-}} + \sum_{j=1}^{M_{t^-}} \left[\sum_{k=j}^{M_{t^-}} (1 - B_k) \right] (\tau_j - \tau_{j-1}) \right)$$

Le problème de cette intensité de défaillance est qu'on ne sait pas la représenter. En effet, on ne connaît pas la valeur des effets de MP, B_i , puisqu'ils sont aléatoires et non observés. C'est pourquoi dans cette section on propose une méthode de calcul de l'intensité propre du modèle qui n'aura pas ce problème puisqu'elle ne dépend que des instants de maintenance déjà observés.

5.2 Résultat théorique

En remplaçant les fonctions de vraisemblance dans (2) par l'expression (3) on a :

$$\begin{aligned} L_{t;N_t,t_1,\dots,t_{N_t}}(\lambda,p) &= \left(\prod_{c \leq t_j \leq t} \lambda_{t_j} \right) \exp(-\Lambda_t) \\ &= \left(\sum_{m=0}^{M_c} p^{\mathbb{1}_{\{m \neq 0\}}} D_t(m) \exp(-(\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda(c - \tau_m))) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{m=M_c+1}^{M_{t^-}} p D_t(m) \exp(-\Lambda(t - \tau_m)) \left(\prod_{0 \leq t_j \leq \tau_m} \lambda_{t_j} \right) \exp(-\Lambda_{\tau_m}) \right) \end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'équation par $\prod_{c \leq t_j \leq t} \lambda_{t_j}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \exp(-\Lambda_t) &= \left(\sum_{m=0}^{M_c} p^{\mathbb{1}_{\{m \neq 0\}}} \frac{D_t(m)}{\prod_{c \leq t_j \leq t} \lambda_{t_j}} \exp(-(\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda(c - \tau_m))) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{m=M_c+1}^{M_{t^-}} p \frac{D_t(m)}{\prod_{\tau_m < t_j \leq t} \lambda_{t_j}} \exp(-\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda_{\tau_m}) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

On en déduit, pour $t \geq c$, que la valeur de l'intensité de défaillance vérifie :

$$\begin{aligned} \lambda_t &= -\frac{d}{dt} \left[\ln \left(\sum_{m=0}^{M_c} p^{\mathbb{1}_{\{m \neq 0\}}} G_t(m) \exp(-(\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda(c - \tau_m))) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{m=M_c+1}^{M_{t^-}} p G_t(m) \exp(-\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda_{\tau_m}) \right) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Dans cette écriture les fonctions $G_t(m)$ sont définies pour $t > \tau_m \vee c$ et vérifient :

$$G_t(m) = \frac{D_t(m)}{\prod_{c \vee \tau_m \leq t_j \leq t} \lambda_{t_j}} = (1-p)^{M_{t^-} - m} \prod_{c \vee \tau_m \leq t_j \leq t} \frac{\lambda(t_j - \tau_m)}{\lambda_{t_j}}$$

Comme τ_m est déterministe l'événement $\tau_m = t_j$ a une probabilité nulle. Il est donc équivalent de remplacer l'inégalité stricte dans (4) par une inégalité large

Pour une valeur de m donnée, les fonctions $G_t(m)$ se calculent de façon incrémentale. C'est à dire que pour tous a et b vérifiant $c \vee \tau_m < a \leq b$ on a :

$$G_b(m) = (1-p)^{M_b - M_a} \left[\prod_{a < t_j \leq b} \frac{\lambda(t_j - \tau_m)}{\lambda_{t_j}} \right] G_a(m)$$

5.3 Algorithme de calcul de l'intensité de défaillance

L'intensité de défaillance est définie pour un instant $t \in [c, T]$. Elle est nécessairement continue à gauche et se calcule donc de la façon suivante, d'après (5) :

$$\lambda_t = DA/A$$

Comme $G_t(m)$ est discontinue en les instants de maintenance, pour garantir la continuité à gauche de l'intensité on remplace $G_t(m)$ par $G_{t-}(m)$ dans l'expression de A .

$$\begin{aligned} A &= \sum_{m=0}^{M_c} p^{\mathbb{1}_{\{m \neq 0\}}} G_{t-}(m) \exp(-(\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda(c - \tau_m))) \\ &\quad + \sum_{m=M_c+1}^{M_{t-}} p G_{t-}(m) \exp(-\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda_{\tau_m}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DA &= \sum_{m=0}^{M_c} p^{\mathbb{1}_{\{m \neq 0\}}} G_{t-}(m) \lambda(t - \tau_m) \exp(-(\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda(c - \tau_m))) \\ &\quad + \sum_{m=M_c+1}^{M_{t-}} p G_{t-}(m) \lambda(t - \tau_m) \exp(-\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda_{\tau_m}) \end{aligned}$$

$G_t(m)$ en fonction de $t \in [c \vee \tau_m]$ est continue par morceaux. Elle est discontinue en les instants de maintenances. En ces instants, c'est à dire pour tous $m \in \{0, \dots, M_T\}$ et tous $k \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_m < C_k \leq T$ on a :

$$\begin{aligned} G_{C_k^+}(m) &= (1-p)^{\mathbb{1}_{\{U_k=1\}}} G_{C_k}(m) \\ &= (1-p)^{\mathbb{1}_{\{U_k=1\}}} \left(\frac{\lambda(C_k - \tau_m)}{\lambda_{C_k}} \right)^{\mathbb{1}_{\{U_k=0\}}} G_{C_k^-}(m) \end{aligned}$$

Entre les instants de maintenances, c'est à dire pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $C_k^+ \leq t \leq C_{k+1}^-$ et tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_m \leq C_k$ on a :

$$G_t(m) = \begin{cases} G_{C_k^+}(m) & \text{si } C_k > c \\ G_{c^+}(m) & \text{si } C_k \leq c \end{cases}$$

enfin $G_{c^+}(m) = (1-p)^{M_c - m}$ et si $C_k = \tau_m$ alors $G_{C_k^+}(m) = 1$.

On remarque que $\Lambda_t = -\ln A$. Cela se démontre très simplement avec (4).

On remarque également que comme l'intensité de défaillance est continue à gauche et que les instants de maintenance sont des points de discontinuité de l'intensité, on ne peut calculer

la valeur de l'intensité en c que si ce n'est un instant de maintenance. Pour simplifier les choses on se contentera donc de calculer la valeur de l'intensité de défaillance sur $]c, T]$, et on pourra la prolonger naturellement par continuité en c si ce n'est pas un instant de maintenance.

Pour pouvoir appliquer l'algorithme de calcul de l'intensité de défaillance en un instant quelconque $t \in]c, T]$, il faut au préalable avoir fait tourner l'algorithme suivant et mémoriser :

- la valeur de l'intensité cumulée en tous les instants de MP entre c et T : Λ_{τ_m} pour tous $m \in \mathbb{N}$ tel que $c < \tau_m < T$. On note dans l'algorithme Λ_i la valeur $\Lambda_{\tau_{M_c+i}} = \int_c^{\tau_{M_c+i}} \lambda_s ds$ pour $i \neq 0$ et Λ_0 la valeur $\Lambda_c = \int_c^c \lambda_s ds = 0$. Dans l'algorithme, Λ_i est donc un vecteur de taille un plus le nombre de MP comprises entre c (non compris) et T .
- la valeur de l'intensité de défaillance en tous les instants de maintenance : λ_{C_k} pour tous $k \in \mathbb{N}$ tel que $c < C_k < T$. On note dans l'algorithme λ_k la valeur λ_{C_k} pour $k > 0$. C'est un vecteur de taille le nombre de maintenances comprises entre c (non compris) et T .
- la limite à droite de la fonction $G_{\cdot}(m)$ en tous les instants de maintenance entre c et T et pour m représentant toutes les MP précédentes : $G_{C_k^+}(m)$ pour tous $(k, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $c < C_k \leq T$ et $0 \leq \tau_m < C_k$. Il faut également avoir la valeur $G_{c^+}(m)$ pour tous $m \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_m < c$. On note dans l'algorithme $G_k(m)$ la valeur $G_{C_k^+}(m)$ pour $k \neq 0$ et $G_0(m)$ la valeur $G_{c^+}(m)$. Dans l'algorithme $G_k(m)$ est donc une matrice dont les éléments non nuls correspondent aux indices k compris entre 0 et le nombre de maintenances entre c (non compris) et T , et aux indices m compris entre 0 et le nombre de MP entre 0 et C_k (non compris).

$i = 0;$

$\Lambda_0 = 0;$

$G_0(0) = (1 - p)^{M_c};$

Pour tout m tel que $\tau_m < c$ /* $m = 1 : M_c$ */

$$G_0(m) = (1 - p)^{M_c - m}$$

Fin pour

Pour tout C_k tel que $c < C_k < T$

$$DA = G_{k-1}(0) \lambda(C_k) \exp(-(\Lambda(C_k) - \Lambda(c)))$$

$$A = G_{k-1}(0) \exp(-(\Lambda(C_k) - \Lambda(c)))$$

Pour tout τ_m tel que $0 < \tau_m \leq c$ /* $m = 1 : M_c$ */

$$DA = DA + p G_{k-1}(m) \lambda(C_k - \tau_m) \exp(-(\Lambda(C_k - \tau_m) - \Lambda(c - \tau_m)))$$

$$A = A + p G_{k-1}(m) \exp(-(\Lambda(C_k - \tau_m) - \Lambda(c - \tau_m)))$$

Fin pour

Pour tout τ_m tel que $c < \tau_m < C_k$ /* $m = M_c + 1 : M_c + i^*$ */

$$DA = DA + p G_{k-1}(m) \lambda(C_k - \tau_m) \exp(-\Lambda(C_k - \tau_m) - \Lambda_{m-M_c})$$

$$A = A + p G_{k-1}(m) \exp(-\Lambda(C_k - \tau_m) - \Lambda_{m-M_c})$$

Fin pour

$$\lambda_k = DA/A$$

si $U_k = 1$

$i=i+1$

$$\Lambda_i = -\ln(A)$$

$$G_k(0) = (1 - p)G_{k-1}(0)$$

Pour tout τ_m tel que $\tau_m < C_k$ /* $m = 1 : M_c + i - 1^*$ */

$$G_k(m) = (1 - p)G_{k-1}(m)$$

Fin pour

$$G_k(M_c + i) = 1$$

sinon

$$G_k(0) = \frac{\lambda(C_k)}{\lambda_{C_k}} G_{k-1}(0)$$

Pour tout τ_m tel que $\tau_m < C_k$ /* $m = 1 : M_c + i^*$ */

$$G_k(m) = \frac{\lambda(C_k - \tau_m)}{\lambda_{C_k}} G_{k-1}(m)$$

Fin pour

Fin si

Fin pour

Et le calcul de la valeur de l'intensité de défaillance en un instant quelconque $t \in]c, T]$ se fait alors avec l'algorithme suivant :

Si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $t = C_k$ alors $\lambda_t = \lambda_k$ sinon

$$k = \max\{j \in \mathbb{N} \mid C_j < t\}$$

$$DA = G_k(0)\lambda(t)\exp(-(\Lambda(t) - \Lambda(c)))$$

$$A = G_k(0)\exp(-(\Lambda(t) - \Lambda(c)))$$

Pour tout τ_m tel que $0 < \tau_m \leq c$

$$DA = DA + p G_k(m)\lambda(t - \tau_m)\exp(-(\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda(c - \tau_m)))$$

$$A = A + p G_k(m)\exp(-(\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda(c - \tau_m)))$$

Fin pour

Pour tout τ_m tel que $c < \tau_m < t$

$$DA = DA + p G_k(m)\lambda(t - \tau_m)\exp(-\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda_{m-M_c})$$

$$A = A + p G_k(m)\exp(-\Lambda(t - \tau_m) - \Lambda_{m-M_c})$$

Fin pour

$$\lambda_t = DA/A$$

Fin si

6 Application aux données EDF

6.1 Les données

Nous disposons de données de retour d'expérience concernant un matériel d'une unité de production d'électricité de EDF. Les données portent sur 2 systèmes identiques, désignées dans la suite sous les noms de U1 et U2. Pour des raisons de confidentialité, l'échelle de temps des données n'est pas donnée.

Après discussion avec les experts EDF il a été admis que l'on pouvait considérer que les maintenances préventives ont eu lieu à intervalles de temps réguliers, tous les 1460 unités de temps (UT) depuis la mise en route des systèmes. Nous disposons des dates de MP depuis la mise en service et des dates de MC (défaillances) uniquement depuis une date fixée, postérieure à la date de mise en service. Les données traitées dans ce chapitre sont donc les dates de maintenance, les types de maintenance et les dates de censure à droite (c) et à gauche (T). Ces données sont récapitulées dans le tableau 1.

Nous commençons l'analyse de ces données en représentant le nombre cumulé de défaillances en fonction du temps (figures 1 et 2). Les pointillés verticaux représentent les instants de maintenance préventive et les traits pointillés verticaux représentent les instants de censure à gauche du processus des défaillances.

Les résultats seront comparés avec ceux, notés *, obtenus en ne prenant pas en compte les censures à gauche, c'est à dire en considérant que le système est neuf à la date c .

Dans la suite on suppose que l'intensité initiale est du type Weibull. Pour β et p donnés, on introduit la notation $\hat{\alpha}_{\beta,p}$ comme étant la valeur de α qui maximise la log vraisemblance.

<i>U1</i>	<i>U2</i>
<i>MP</i> : 1184	<i>MP</i> : 558
<i>MP</i> : 2644	<i>MP</i> : 2018
<i>MP</i> : 4104	<i>MP</i> : 3478
<i>MP</i> : 5564	<i>MP</i> : 4938
<i>MP</i> : 7024	<i>MP</i> : 6398
<i>c</i> : 8035	<i>c</i> : 7670
<i>MC</i> : 8329	<i>MP</i> : 7858
<i>MC</i> : 8376	<i>MC</i> : 8219
<i>MC</i> : 8393	<i>MC</i> : 8409
<i>MC</i> : 8455	<i>MC</i> : 8489
<i>MP</i> : 8484	<i>MC</i> : 8670
<i>MC</i> : 8494	<i>MC</i> : 8679
<i>MC</i> : 8605	<i>MC</i> : 8747
<i>MC</i> : 8628	<i>MC</i> : 8752
<i>MC</i> : 8641	<i>MP</i> : 8924
<i>MC</i> : 8744	<i>MC</i> : 9171
<i>MC</i> : 8903	<i>MP</i> : 10387
<i>MC</i> : 9105	<i>MP</i> : 11856
<i>MC</i> : 9660	<i>MC</i> : 12558
<i>MC</i> : 9845	<i>MC</i> : 13170
<i>MC</i> : 9846	<i>MP</i> : 13214
<i>MC</i> : 9866	<i>T</i> : 13879
<i>MC</i> : 9919	
<i>MC</i> : 9985	
<i>MC</i> : 9987	
<i>MP</i> : 10010	
<i>MC</i> : 10363	
<i>MC</i> : 10470	
<i>MC</i> : 11021	
<i>MP</i> : 11494	
<i>MP</i> : 12956	
<i>MP</i> : 13662	
<i>T</i> : 14244	

TABLE 1 – Dates et types des maintenances.

6.2 Unité 1

Dans un premier temps, la figure 3 donne le logarithme de la vraisemblance en $\hat{\alpha}_{\beta,p}$, c'est à dire $\ln L_{6;t_1,\dots,t_{N_{\tau_6}}}(\hat{\alpha}_{\beta,p}, \beta, p)$, en fonction de β et p . Pour simplifier les notations, on notera dans la suite $\mathcal{L}(\alpha, \beta, p)$ la vraisemblance associée à l'ensemble des observations. On note sur la vraisemblance, la présence de trois maxima locaux, deux pour $\beta < 1$ et un pour $\beta > 1$. On voit apparaître en plus un phénomène de “vague” sur la vraisemblance.

Le maximum de vraisemblance est en :

$$\hat{\alpha} = 1.86 \times 10^{-6}, \hat{\beta} = 1.94, \hat{p} = 0.61, \ln \mathcal{L}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}) = -150.90$$

En ne prenant pas en compte la censure à gauche on avait trouvé le maximum de vraisem-

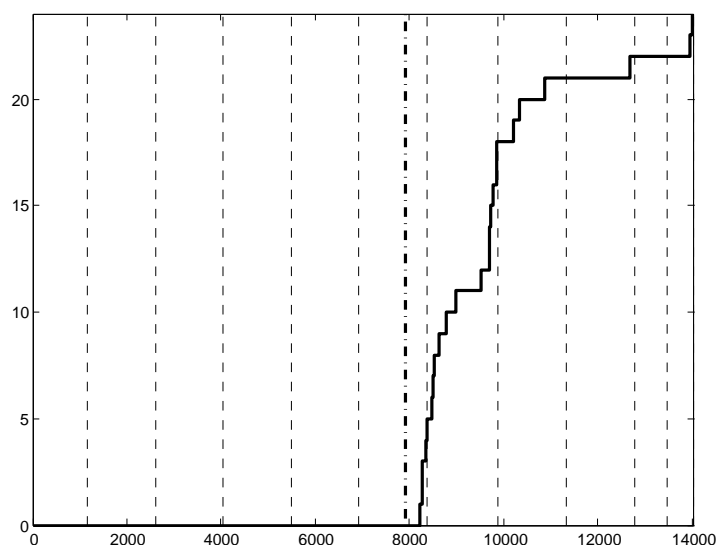


FIGURE 1 – U1 - Nombre cumulé de défaillances

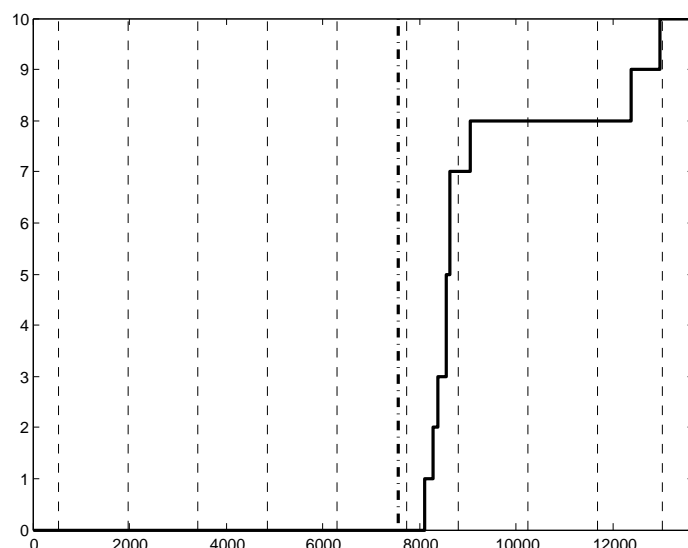


FIGURE 2 – U2 - Nombre cumulé de défaillances

blance en :

$$\hat{\alpha}^* = 6.12 \times 10^{-5}, \hat{\beta}^* = 1.57, \hat{p}^* = 0.77, \ln \mathcal{L}^*(\hat{\alpha}^*, \hat{\beta}^*, \hat{p}^*) = -156.79$$

Sans rajouter de paramètres, la vraisemblance est plus grande en prenant en compte la censure à gauche. Donc le modèle prenant en compte la censure à gauche semble plus vraisemblable. On trouve un paramètre de forme pour l'intensité initiale proche de 2, donc le système s'use. Les MP ont globalement un effet sur le système, elles ont un peu plus de 60% de chances de renouveler le système. On trouve une usure intrinsèque plus forte et une efficacité de MP moyenne plus faible en prenant en compte la censure à gauche.

Les efficacités individuelles des maintenances préventives correspondantes sont données dans le tableau 7. La troisième ligne du tableau rappelle les valeurs que l'on avait trouvées en ne prenant pas en compte la censure à gauche des données.

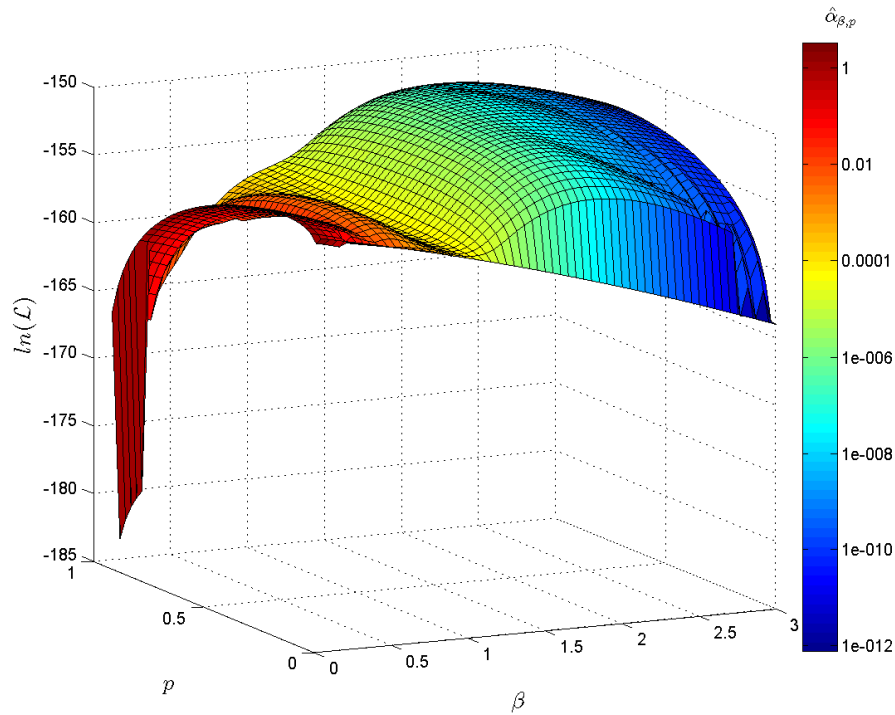


FIGURE 3 – U1 : Log-vraisemblance en $\hat{\alpha}_{\beta,p}$, fonction de β et p .

Au vu de ces efficacités individuelles, il est logique que l'efficacité moyenne estimée \hat{p} baisse quand on prend en compte la censure à gauche. En effet, en ce faisant on considère en plus des MP peu efficaces qui de fait font baisser l'efficacité moyenne.

On note que la cinquième MP qui précède la date de censure à gauche est estimée comme étant quasiment ABAO. De même la sixième MP qui suit la date de censure à gauche est estimée ABAO. Le phénomène d'avalanche de défaillances peut ainsi s'expliquer par le fait que le système est déjà dans un état dégradé au début de la collecte des données de défaillances. Cela ne pouvait pas être pris en compte dans le modèle précédent qui n'intégrait pas la censure à gauche. La sixième MP ne semble pas avoir d'effet sur cette avalanche de défaillances, elle est donc sans doute inefficace.

On constate également que quand on remonte beaucoup dans le temps par rapport à l'instant de censure à gauche, l'efficacité des MP est estimée comme étant égale à l'efficacité moyenne. En effet, les données de défaillances étant éloignées de ces instants de MP, la procédure statistique n'a plus d'information, elle ne peut donc pas distinguer l'efficacité individuelle de l'efficacité moyenne.

La septième MP est toujours estimée remettre à neuf le système. En effet elle semble stopper le phénomène d'avalanche de défaillances. Les huitième et neuvième MP sont estimées comme étant quasiment AGAN. En effet, le phénomène d'avalanche de défaillances ne redémarre pas.

$i^{\text{ème}}$ MP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_i(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p})$	0.61	0.62	0.69	0.73	0.07	0.00	1.00	0.99	0.96	0.46
$P_i^*(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p})$						0.02	1.00	1.00	0.99	0.85

TABLE 2 – U1 : Efficacité des MP.

La dernière MP voit son efficacité baisser quand on prend en compte la censure à gauche. Cette MP a été réalisée prématurément par rapport à la périodicité de 1460 UT sur toutes les autres MP. En plus on constate 2 MP très rapprochées juste avant la censure à droite. Le modèle interprète peut être ce phénomène comme un possible redémarrage d'une avalanche de défaillances.

Pour ces données, la moyenne des efficacités de MP est très proche de l'efficacité moyenne.

$$\tilde{p} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} P_i(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}) = 0.61 \approx \hat{p}$$

La figure 4 représente en trait plein épais noir l'intensité de défaillance propre en $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, \hat{p} . Comme on l'a déjà précisé, on ne peut pas représenter l'intensité de défaillance relative. Ce que nous représentons sur la figure 4 en trait plein fin bleu est une estimation de l'intensité de défaillance relative en $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, \hat{p} . Pour ce faire nous estimons B_i à 1 si $P_i(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}) > 0.5$ et nous l'estimons à 0 sinon. Enfin la courbe en trait plein fin rouge avec des cercles pour marque représente l'intensité relative, toujours en $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, \hat{p} , mais ici dans le cas où tous les B_i valent 1, c'est à dire dans le cas où toutes les MP sont AGAN.

Sur ce graphique on note que les MP, représentées sous forme de traits verticaux, sont efficaces puisqu'elles diminuent la valeur de l'intensité de défaillance. Les MC, représentées sous forme d'étoiles sur l'axe des abscisses, sont nuisibles pour le système puisqu'elles augmentent la valeur de l'intensité de défaillance. Ce phénomène est a priori étrange puisque dans le modèle les MC étaient supposées ABAO donc sans effet sur l'état de dégradation du système. L'intensité de défaillance ne devrait donc pas a priori être affectée par les MC. En fait, cela est dû au fait que les effets des MP sont aléatoires et non observés. Plus on observe de défaillances proches d'un instant de MP, plus la MP en question a de chances d'avoir été inefficace donc ABAO. Pour autant, l'intensité de défaillance ne peut pas être modifiée rétrospectivement. Seules les valeurs courante et future de l'intensité de défaillance peuvent prendre en compte ce phénomène lié à l'observation d'une MC. D'où l'augmentation de l'intensité de défaillance après une MC suffisamment proche d'une MP. Inversement, s'il s'écoule un temps suffisamment important sans observer de défaillance, cela signifie que la dernière MP a plus de chance d'avoir été efficace, c'est à dire d'avoir renouvelé le système. De plus, on observe que l'intensité de défaillance est toujours supérieure à l'intensité relative pour laquelle tous les B_i valent 1. En effet, au mieux toutes les MP remettent à neuf le système. La conjugaison des trois phénomènes précédents entraîne le fait que l'on observe des formes de l'intensité de défaillance propre en baignoire. Enfin ces différentes caractéristiques de l'intensité de défaillance du modèle semblent lui permettre de prendre en compte les phénomènes d'avalanches de défaillances. Lors d'un tel phénomène l'intensité de défaillance croît suite à la multiplication des défaillances rapprochées, entraînant ainsi d'autres défaillances. Puis, si le système arrive à survivre suffisamment longtemps sans défaillance, ou s'il subit une MP, l'intensité de défaillance décroît et stoppe donc le phénomène. Enfin on note une relative proximité entre l'intensité propre et l'intensité relative estimée.

6.3 Unité 2

La figure 5 représente le logarithme de la vraisemblance en $\hat{\alpha}_{\beta,p}$.

Le maximum de vraisemblance est en :

$$\hat{\alpha} = 1.96 \times 10^{-9}, \hat{\beta} = 2.80, \hat{p} = 0.83, \ln \mathcal{L}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}) = -71.31$$

En ne prenant pas en compte la censure à gauche on avait trouvé deux maxima locaux correspondant à des valeurs de vraisemblance assez proches :

$$\hat{\alpha}^* = 3.57 \times 10^{-2}, \hat{\beta}^* = 0.64, \hat{p}^* = 0.00, \ln \mathcal{L}^*(\hat{\alpha}^*, \hat{\beta}^*, \hat{p}^*) = -73.19$$

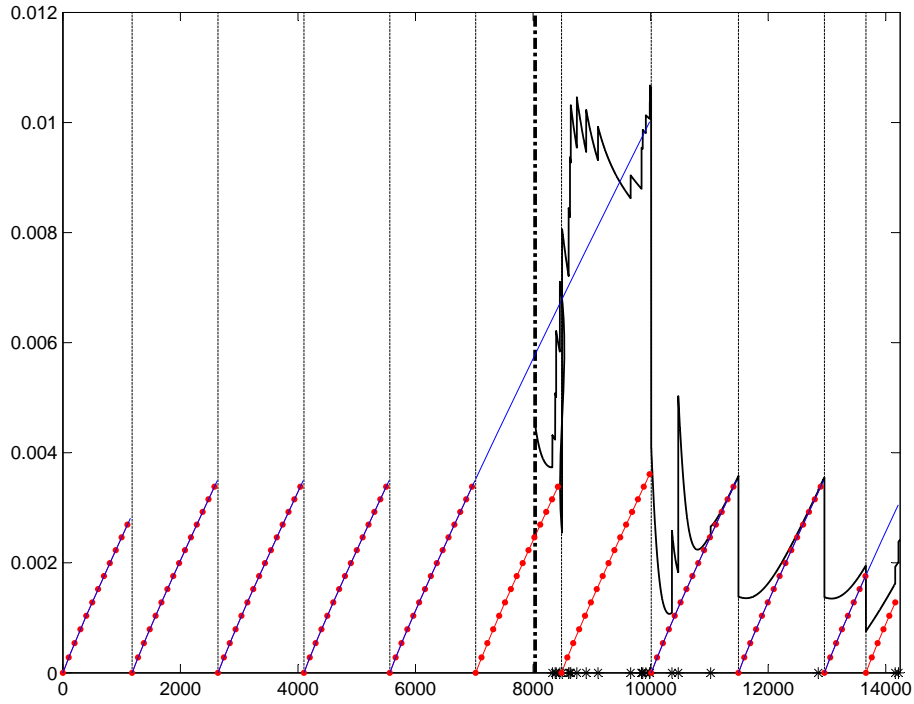


FIGURE 4 – U1 : Intensité de défaillance en $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, \hat{p} (trait épais noir).

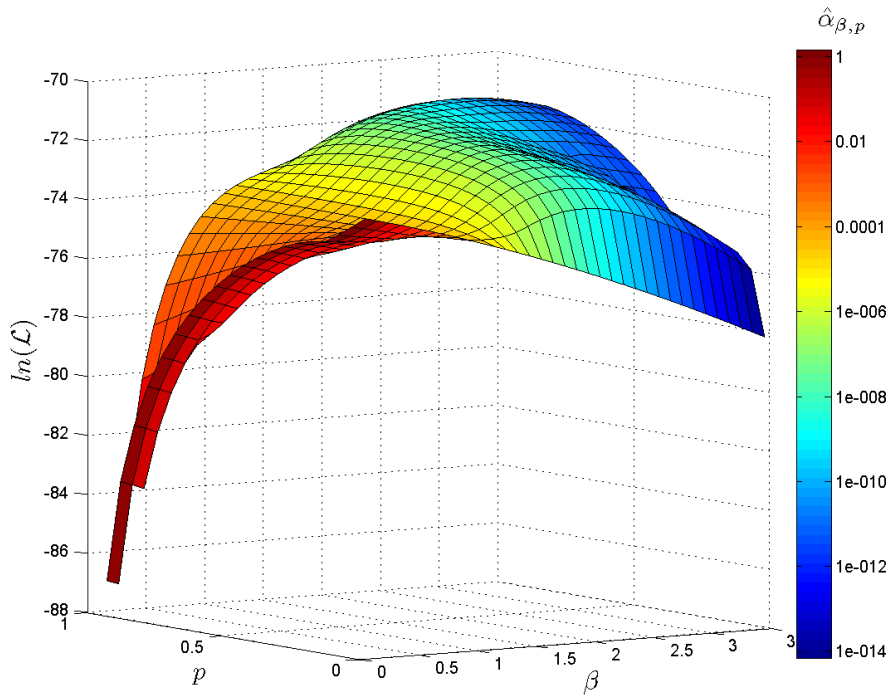


FIGURE 5 – U2 : Log-vraisemblance en $\hat{\alpha}_{\beta,p}$, fonction de β et p .

$$\hat{\alpha}^* = 3.46 \times 10^{-5}, \hat{\beta}^* = 1.54, \hat{p}^* = 1.00, \ln \mathcal{L}^*(\hat{\alpha}^*, \hat{\beta}^*, \hat{p}^*) = -73.34$$

Sans rajouter de paramètres, la vraisemblance est plus grande en prenant en compte la censure à gauche. Donc là encore, le modèle prenant en compte la censure à gauche semble plus

vraisemblable. On trouve un paramètre de forme pour l'intensité initiale proche de 2.8, donc le système s'use fortement. Les MP ont globalement un effet sur le système, elles ont un peu plus de 80% de chances de renouveler le système. En prenant en compte la censure à gauche, on trouve une usure intrinsèque plus forte et une efficacité de MP moyenne plus faible. Malgré tout, les valeurs estimées avec ce nouveau modèle semblent plus réalistes puisque β est estimé à une valeur supérieure à 2, ce qui signifie que le système en l'absence de maintenance a tendance à s'user de plus en plus vite.

Les efficacités individuelles des maintenances préventives correspondantes sont données dans le tableau 8.

$i^{\text{ème}}$ MP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_i(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p})$	0.83	0.83	0.83	0.83	0.99	0.00	1.00	1.00	0.99	0.98
$P_i^*(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p})$						1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

TABLE 3 – U2 : Efficacité des MP.

Comme pour U1, au vu de ces efficacités individuelles, il est logique que l'efficacité moyenne estimée \hat{p} baisse quand on prend en compte la censure à gauche. En effet, en ce faisant on considère en plus des MP peu efficaces qui de fait font baisser l'efficacité moyenne.

La grosse différence avec le cas où on ne prenait pas en compte la censure à gauche porte sur la sixième MP qui suit la date de censure à gauche. Elle était auparavant estimée quasiment parfaite ce qui était étrange compte tenu de l'avalanche de défaillances qui débutait juste après. De toutes façons, dans ce cas, qu'elle soit estimée parfaite ou inefficace ne changeait pas beaucoup les choses, puisque cette MP était très proche du début de collecte des données et donc, avec ce modèle, d'un instant où le système était nécessairement neuf. Avec ce nouveau modèle, la sixième MP est estimée ABAO. L'avalanche de défaillances s'explique donc par le fait que le système était déjà dans un état dégradé au début de la collecte des données.

La 5^{ème} MP qui précède juste la date de censure à gauche est estimée comme ayant 99% de chance de renouveler le système. Les comportements du système avant et après cette MP ont donc 99% de chance d'être indépendants. Les dates de défaillances observées après cette MP ne fournissent donc pas d'information sur le comportement du système avant cette MP. C'est pourquoi les efficacités individuelles des 1^{ère}, 2^{ème}, 3^{ème} et 4^{ème} MP sont égales à l'efficacité moyenne des MP.

Les 7^{ème}, 8^{ème}, 9^{ème} et 10^{ème} MP sont, comme dans l'étude précédente, estimées quasiment parfaites. En effet il n'y a pas de redémarrage de phénomène d'avalanche de défaillances.

Là encore, la moyenne des efficacités de MP est très proche de l'efficacité moyenne.

$$\tilde{p} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} P_i(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}) = 0.83 \approx \hat{p}$$

La figure 6 représente en trait plein épais noir l'intensité de défaillance propre en $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, \hat{p} , ainsi que les différentes intensités relatives comme cela avait été fait pour U1 sur la figure 4 dans la section précédente. Les mêmes interprétations qui avaient été faites pour U1 peuvent être transposées ici pour U2.

6.4 Analyse de sensibilité aux variations des dates de MP avant la censure à gauche

Il s'avère que, avant la date de censure à gauche, les experts EDF ne sont pas absolument certains du fait que les MP aient lieu exactement avec une périodicité de 1460 UT. Afin d'analyser

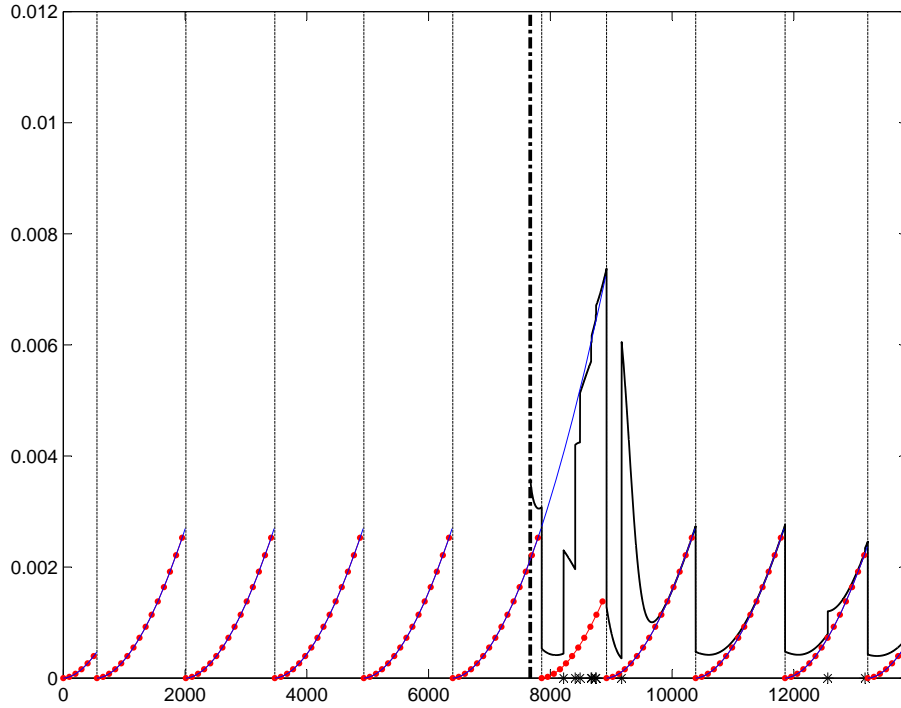


FIGURE 6 – U2 : Intensité de défaillance en $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, \hat{p} (trait épais noir).

la sensibilité des résultats à cette périodicité, nous proposons deux autres jeux d'estimations des paramètres dans lesquels nous avons perturbé assez fortement cette périodicité. A partir des deux jeux de données U1 et U2, on construit 2 jeux de données supplémentaires correspondants à une périodicité de 1095 UT et à une périodicité de 1825 UT pour les MP ayant lieu avant la date de censure à gauche (tab. 4).

1095 UT		1460 UT		1825 UT	
<i>U1</i>	<i>U2</i>	<i>U1</i>	<i>U2</i>	<i>U1</i>	<i>U2</i>
<i>MP</i> : 819	<i>MP</i> : 193				
<i>MP</i> : 1914	<i>MP</i> : 1288				
<i>MP</i> : 3009	<i>MP</i> : 2383	<i>MP</i> : 1184	<i>MP</i> : 558		
<i>MP</i> : 4104	<i>MP</i> : 3478	<i>MP</i> : 2644	<i>MP</i> : 2018	<i>MP</i> : 1184	<i>MP</i> : 558
<i>MP</i> : 5199	<i>MP</i> : 4573	<i>MP</i> : 4104	<i>MP</i> : 3478	<i>MP</i> : 3009	<i>MP</i> : 2383
<i>MP</i> : 6294	<i>MP</i> : 5668	<i>MP</i> : 5564	<i>MP</i> : 4938	<i>MP</i> : 4834	<i>MP</i> : 4208
<i>MP</i> : 7389	<i>MP</i> : 6763	<i>MP</i> : 7024	<i>MP</i> : 6398	<i>MP</i> : 6659	<i>MP</i> : 6033
<i>c</i> : 8035	<i>c</i> : 7670	<i>c</i> : 8035	<i>c</i> : 7670	<i>c</i> : 8035	<i>c</i> : 7670
<i>MC</i> : 8329	<i>MP</i> : 7858	<i>MC</i> : 8329	<i>MP</i> : 7858	<i>MC</i> : 8329	<i>MP</i> : 7858
<i>MC</i> : 8376	<i>MC</i> : 8219	<i>MC</i> : 8376	<i>MC</i> : 8219	<i>MC</i> : 8376	<i>MC</i> : 8219
... cf. tableau 1					
<i>T</i> : 14244		<i>T</i> : 14244		<i>T</i> : 14244	

TABLE 4 – Dates et types des maintenances selon la périodicité des MP avant la censure à gauche.

Les tableaux 5 pour U1 et 6 pour U2 donnent les valeurs des estimations des paramètres selon la périodicité des MP avant la censure à gauche. L'estimation du paramètre α n'a pas

tellement d'importance puisque c'est uniquement un paramètre d'échelle. Pour U1 les valeurs estimées de β et p sont très peu sensibles à la périodicité des MP. Pour U2 l'estimation de β est un peu sensible, par contre celle de p n'est quasiment pas affectée. Pour U2 l'estimation faite du paramètre β est plus sensible à la périodicité des MP que pour U1. Par contre pour p c'est l'inverse.

Périodicité des MP	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{p}	$\ln \mathcal{L}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p})$
1095 UT	1.32×10^{-6}	2.00	0.58	-151.22
1460 UT	1.86×10^{-6}	1.94	0.61	-150.90
1825 UT	2.83×10^{-6}	1.89	0.63	-150.70

TABLE 5 – U1 : Estimation des paramètres selon la périodicité des MP avant la censure à gauche.

Périodicité des MP	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{p}	$\ln \mathcal{L}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p})$
1095 UT	9.36×10^{-10}	2.92	0.83	-71.67
1460 UT	1.96×10^{-9}	2.80	0.83	-71.31
1825 UT	7.10×10^{-9}	2.61	0.82	-71.15

TABLE 6 – U2 : Estimation des paramètres selon la périodicité des MP avant la censure à gauche.

Les tableaux 7 pour U1 et 8 pour U2 donnent les valeurs estimées des efficacités des MP selon la périodicité des MP avant la censure à gauche. Globalement on constate que les efficacités des MP ayant lieu après la censure à gauche ne sont quasiment pas sensibles aux variations de la périodicité des MP avant la censure à gauche. Pour les efficacités des MP ayant lieu avant la censure à gauche, on constate en observant le tableau 4 que l'on est amené à comparer des maintenances ayant lieu à des dates parfois très différentes et pour des systèmes ne subissant pas le même nombre de maintenance. Pour autant, exception faite des MP notées 5, 6, et 7 pour U1 dans le tableau 7, les efficacités sont très peu influencées par la périodicité des MP avant la censure à gauche. Pour les MP 5 et 7, on note une faible influence mais qui ne modifie pas les conclusions que l'on avait pu tirer dans les sections précédentes. En fait, seule la MP 6 en passant d'une périodicité de 1095 UT à une périodicité de 1460 ou 1825 UT présente une différence vraiment notable. Mais au vu du tableau 4 on se rend compte que la MP 6 dans le cas d'une périodicité de 1095 UT ou 1460 UT est plus proche en termes de date de la MP 5 avec une périodicité de 1095 UT et dans ce cas les efficacités de MP ont des valeurs comparables.

$i^{\text{ème}}$ MP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1095 UT	0.58	0.58	0.58	0.61	0.71	0.51	0.02	0.00	1.00	0.99	0.96	0.42
1460 UT			0.61	0.62	0.69	0.73	0.07	0.00	1.00	0.99	0.96	0.46
1825 UT				0.64	0.68	0.80	0.16	0.00	1.00	0.99	0.95	0.5

TABLE 7 – U1 : Efficacité des MP selon leur périodicité avant la censure à gauche.

En conclusion, les résultats énoncés dans les sections précédentes semblent être peu sensibles aux variations de la périodicité des MP avant la date de censure à gauche.

$i^{\text{ème}}$ MP	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1095 UT	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83	0.98	0.00	1.00	1.00	1.00	0.99
1460 UT			0.83	0.83	0.83	0.83	0.99	0.00	1.00	1.00	0.99	0.98
1825 UT				0.83	0.83	0.83	0.99	0.00	1.00	1.00	0.97	0.96

TABLE 8 – U2 : Efficacité des MP selon leur périodicité avant la censure à gauche.

Références

- [1] M.Z.N. AGUSTIN et E.A. PEÑA : Order statistics properties, random generation, and goodness-of-fit testing for a minimal repair model. *Journal of the American Statistical Association*, 94(445):266–272, 1999.
- [2] H.W. BLOCK, W.S. BORGES et T.H. SAVITS : Age-dependent minimal repair. *Journal of Applied Probability*, 22:370–385, 1985.
- [3] M. BROWN et F. PROSCHAN : Imperfect repair. *Journal of Applied Probability*, 20:851–859, 1983.
- [4] M. HOLLANDER, P. PRESNELL et J. SETHURAMAN : Nonparametric methods for imperfect repair models. *The Annals of Statistics*, 20(2):879–896, 1992.
- [5] P.H. KVAM, H. SINGH et L.R. WHITAKER : Estimating distributions with increasing failure rate in an imperfect repair model. *Lifetime Data Analysis*, 8:53–67, 2002.
- [6] H. LANGSETH et B.H. LINDQVIST : A maintenance model for components exposed to several failure mechanisms and imperfect repair. In K. DOKSUM et B.H. LINDQVIST, éditeurs : *Mathematical and Statistical Methods in Reliability, Quality, Reliability and Engineering Statistics*, pages 415–430. World Scientific Publishing Co, 2003.
- [7] G. LAST et R. SZEKLI : Asymptotic and monotonicity properties of some repairable systems. *Advances in Applied Probability*, 30:1089–1110, 1998.
- [8] J.H. LIM, K.L. LU et D.H. PARK : Bayesian imperfect repair model. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 27(4):965–984, 1998.
- [9] T.J. LIM : Estimating system reliability with fully masked data under Brown-Prochan imperfect repair model. *Reliability Engineering and System Safety*, 59:277–289, 1998.
- [10] L.R. WHITAKER et F.J. SAMANIEGO : Estimating the reliability of systems subject to imperfect repair. *Journal of the American Statistical Association*, 84(405):301–309, 1989.