



**HAL**  
open science

## Commande d'un système de production à temps critique

Saïd Amari, Claude Martinez

► **To cite this version:**

Saïd Amari, Claude Martinez. Commande d'un système de production à temps critique. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Sep 2008, Bucarest, Roumanie. pp.269-274. hal-00362862

**HAL Id: hal-00362862**

**<https://hal.science/hal-00362862v1>**

Submitted on 19 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Commande d'un système de production à temps critique

SAID AMARI<sup>1,2</sup>, CLAUDE MARTINEZ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LURPA, ENS Cachan

61, avenue Pt Wilson 94235 Cachan, France.

<sup>2</sup>Université Paris XIII

said.amari@lurpa.ens-cachan.fr

<sup>3</sup>IRCCyN, UMR CNRS 6597

1, rue de la Noë, BP 92101, 44321 Nantes cedex 03, France

claudemartinez@irccyn.ec-nantes.fr

**Résumé**— Nous traitons dans ce papier le problème de commande d'un système de production soumis à une contrainte temporelle stricte. Nous comparons sur un exemple réel deux approches formelles de commande temporelles. Le principe des deux méthodes est de calculer une loi de commande ou de synthétiser un superviseur pour garantir le respect de la contrainte. Dans un premier temps, nous utilisons une technique basée sur l'algèbre Min-Plus pour contrôler le système afin de satisfaire la contrainte temporelle. Nous appliquons dans un deuxième temps, la méthode de commande supervisée en réseaux de Petri pour résoudre le problème. Une étude comparative des résultats obtenus est effectuée.

**Mots clés**— Graphe d'événements temporisés, algèbre Min-Plus, système de production, contraintes temporelles, commande.

## I. INTRODUCTION

Les systèmes à temps critiques sont très fréquents dans le milieu industriel, par exemple, dans le cas des processus incluant des traitements chimiques ou thermiques (toute la durée est fixée), les systèmes informatiques soumis à des contraintes temps réels (par exemple un système de contrôle embarqué) et dans les procédés agroalimentaires (les durées de traitement doivent être compatibles avec les temps de conservations des produits). Pour cette classe de systèmes à événements discrets temporisés, le facteur temps est une composante primordiale. Il affecte les performances et la validité fonctionnelle du système. Le procédé peut se retrouver dans un état interdit si une opération donnée est produite plus tard que prévu. Il est donc nécessaire de disposer de techniques de commande pour assurer un bon fonctionnement et garantir le respect de ces contraintes temporelles. Plusieurs travaux ont été réalisés sur la commande des systèmes à événements discrets non-temporisés, en particulier, la théorie de la supervision qui est introduite dans les années 80 par Ramadge et Wonham [11]. Cette théorie est la base de nombreuses études sur les problèmes de commande des systèmes à événements discrets. Par exemple, la commande supervisée dans les réseaux de Petri ([9]), a permis d'élaborer des lois de commande optimales et efficaces, qui garantissent le respect des spécifications sur le marquage. Cependant, elles ne prennent pas en compte explicitement l'influence du temps. Elles considèrent que les événements peuvent avoir lieu dans un système à n'importe quel moment. Contrairement à la réalité, le fonctionnement de la plupart des processus industriels exige un certain nombre de contraintes temporelles,

telles que les durées opératoires et les dates des débuts et de fins de tâches. La modélisation des systèmes à événements discrets temporisés en vue de la synthèse de la commande, doit prendre compte explicitement l'influence du temps. Plusieurs travaux dans cette thématique ont été développés. Des méthodes formelles ont été proposées pour la commande de ces systèmes temporisés. On peut citer les approches publiées dans [4], qui sont basées sur les automates temporisés, et d'autres méthodes de commande qui utilisent les modèles graphes d'événements temporisés et l'algèbre des dioïdes, qui sont présentées dans [5], [8], [7] et [2]. Nous avons abordé cette contribution le problème d'un système de production à temps critique en appliquant deux approches de commande.

Ce papier est structuré de la manière suivante. Dans la section II, nous rappelons quelques définitions et notations de base sur les graphes d'événements temporisés et les modèles Min-Plus linéaires. Le problème de commande du système de production par l'algèbre Min-Plus est formulé dans la section III, et nous expliquons dans la partie IV la démarche de synthèse d'un superviseur en réseaux de Petri. Finalement la section V résume la conclusion.

## II. DEFINITIONS ET NOTATIONS

### A. Graphes d'événements temporisés

Un graphe d'événements est un réseau de Petri ordinaire où chaque place a exactement une seule transition en amont et une seule transition en aval [10]. Lorsque des temporisations sont associées aux places ou aux transitions, on parle de graphe d'événements temporisé. Dans la suite de ce mémoire, nous considérons des graphes d'événements P-temporisés, où le temps est associé aux places. Le nombre de transitions ayant des places en amont et en aval est  $n$ , et  $m$  désigne le nombre de transitions sources, notés  $t_u$ , qui n'ont pas de places en amont. Pour deux transitions  $t_i, t_j \in T$ , on suppose que la place qui relie les transitions  $t_j$  et  $t_i$  est notée  $p_{ij}$ , est unique. Si cette place  $p_{ij}$  existe, la temporisation correspondante est notée  $\tau_{ij}$  et son marquage est noté  $m_{ij}$ . La plus grande temporisation du graphe d'événements considéré est noté  $\tau^{\max}$ . Le plus grand marquage initial des places du graphe d'événements considéré est noté  $m^{\max}$ .

Un chemin noté  $\alpha$ , qui relie la transition  $t_i$  et la transition  $t_j$ , est la séquence de transitions et de places,  $\alpha = (t_i, p_{i k_1}, t_{k_1}, p_{k_1 k_2}, t_{k_2}, \dots, t_j)$ . On note par  $\tau_\alpha$  la somme des temporisations des places le long du chemin  $\alpha$ . Le marquage d'un chemin, noté  $m_\alpha$ , est la somme des marquages de ses places. Dans la suite de ce papier, on s'intéresse aux des graphes d'événements temporisés qui modélisent des exemples réels de processus de production.

### B. Algèbre Min-Plus

Un monoïde, noté  $D$ , est un ensemble, muni d'une loi de composition interne  $\oplus$ , qui est associative et possède un élément neutre, noté  $\varepsilon : \forall a \in D, a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$ . Le monoïde est dit commutatif si la loi  $\oplus$  est commutative. Un demi-anneau est un monoïde commutatif muni d'une deuxième loi, notée  $\otimes$ , qui est associative, distributive à droite et à gauche par rapport à la loi  $\oplus$ . Il admet un élément neutre, noté  $e$ , et un élément absorbant  $\varepsilon : \forall a \in D, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ . Un dioïde est un demi-anneau pour lequel la loi  $\oplus$  est idempotente :  $\forall a \in D, a \oplus a = a$ . Le dioïde est dit commutatif si la deuxième loi  $\otimes$  est commutative. Nous considérons dans la suite, le dioïde commutatif Min-Plus, aussi appelé algèbre Min-plus et noté  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}, \min, +)$  ou  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ . Dans ce dioïde, la loi  $\oplus$  correspond à l'application min, dont élément neutre est  $\varepsilon = +\infty$ , et la deuxième loi  $\otimes$ , correspond à la somme usuelle, avec comme élément neutre  $e = 0$ .

Si  $n \in \mathbb{N}$  et  $v, w \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^n$ , on note  $v \oplus w$ , le vecteur dont les composantes  $v_i \oplus w_i := \min(v_i, w_i)$  pour  $i = 1$  à  $n$ . Les nombres  $p, n, q \in \mathbb{N}$  et les matrices  $P \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{p \times n}$ ,  $Q \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{n \times q}$  étant données, alors le produit matriciel dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$  est défini comme suit :  $(P.Q)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n (P_{ik} \otimes Q_{kj}) := \min_k (P_{ik} + Q_{kj})$ .

L'étoile de Kleene d'une matrice carré  $M \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{n \times n}$ , noté  $M^*$ , est défini comme suit :  $M^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M^i$ . La matrice  $M^0$ , notée  $I_n$  est appelée matrice identité, dont les termes valent  $e$  sur la diagonale et  $\varepsilon$  ailleurs. Il est bien montré que, pour  $v \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^n$ ,  $x = M^* . v$  est la solution maximale de l'inéquation  $x \leq M . x \oplus v$  et aussi de l'équation  $x = M . x \oplus v$  [3].

### C. Modèles Min-Plus linéaires

Le comportement d'un graphe d'événements temporisés peut être représenté par un système d'équations Min-Plus linéaires. Pour cela, on associe à chaque transition du graphe une fonction compteur, correspondant au nombre cumulé de franchissement de la transition à l'instant  $t$ . Nous adaptons la notation  $tu$  aux transitions sources, où le paramètre  $u$  ne désigne pas un indice, il est employé pour différencier les transitions de commande des transitions internes du graphe. Les compteurs correspondants aux transitions sources sont les composantes du vecteur  $u(t) \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^m$ , et les compteurs des autres transitions composent le vecteur  $\theta(t) \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^n$ . En général, on s'intéresse à l'évolution au plus tôt de ces graphes, c'est-à-dire qu'une transition est franchie dès qu'elle est franchissable. Le comportement d'un graphe d'événements temporisés est représenté par l'équation suivante :

$$\theta(t) = \bigoplus_{\tau=0}^{\tau_{\max}} (A_\tau . \theta(t-\tau) \oplus B_\tau . u(t-\tau)), \quad (1)$$

où  $A_\tau \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{n \times n}$  est la matrice dont le terme  $A_{\tau, ij}$  égal à  $m_{ij}$ , le nombre de jetons initiaux dans la place  $p_{ij}$ , si cette place existe et la temporisation associée est  $\tau$ , et  $\varepsilon$  sinon. Egalement les termes des matrices  $B_\tau \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{n \times m}$  correspondent aux marquages initiaux des places de sortie des transitions sources. On fait l'hypothèse que  $\tau \in \mathbb{N}$ , l'équation (1) est implicite et souvent remplacée par une solution explicite donnée par l'équation (2).

$$\theta(t) = \bigoplus_{\tau=1}^{\tau_{\max}} (A_0^* . A_\tau . \theta(t-\tau) \oplus A_0^* . B_\tau . u(t-\tau)), \quad (2)$$

où  $A_0^*$  est l'étoile de Kleene de la matrice  $A_0$ .

Si nous décomposons chaque place du graphe en plusieurs places temporisés à 1, l'équation explicite (2) est équivalente à l'équation suivante :

$$x(t) = \hat{A}_0 . x(t) \oplus \hat{A}_1 . x(t-1) \oplus \hat{B} . u(t),$$

qui peut s'écrire sous une forme explicite :

$$x(t) = A . x(t-1) \oplus B . u(t) \quad (3)$$

avec  $A = \hat{A}_0^* . \hat{A}_1$  et  $B = \hat{A}_0^* . \hat{B}$ .

L'équation d'état (3) est équivalente à la formulation suivante :

$$x(t) = A^t . x(t-\tau) \oplus \left[ \bigoplus_{k=0}^{\tau-1} A^k . B . u(t-k) \right], \quad (4)$$

## III. COMMANDE DU SYSTEME DE PRODUCTION PAR L'ALGÈBRE MIN-PLUS

Les problèmes de contraintes de temps strict sont très souvent rencontrés dans le milieu industriel. On peut considérer comme exemple un système de production qui comporte un four pour réaliser un traitement thermique. La durée des traitements thermiques est fixée, ou définie par un intervalle de temps. Il est nécessaire de contrôler le processus pour respecter cette contrainte temporelle. D'après la définition des graphes d'événements temporisés qui représentent ces processus, la temporisation de chaque place, correspond à la durée minimale de séjour de jetons dans cette place. Une durée maximale apparaît comme une contrainte supplémentaire qui devrait être vérifiée. Plutôt qu'un problème de vérification, nous allons formuler la question comme un problème de commande qui consiste à calculer en ligne le paramètre  $u(t)$  de façon à assurer que la contrainte temporelle est bien satisfaite. On considère  $p_{ij}$  la place soumise à la contrainte stricte. Un intervalle de temps  $[\tau_{ij}^{\min}, \tau_{ij}^{\max}]$  est associé à cette place où se situe la contrainte temporelle, avec  $\tau_{ij}^{\min} = \tau_{ij}$ . Cette contrainte s'exprime par cette inéquation suivante,

$$m_{ij} . x_j(t - \tau_{ij}) \geq x_i(t) \geq m_{ij} . x_j(t - \tau_{ij}^{\max})$$

où le produit est défini dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ ,  $m_{ij}$  est le marquage initial de la place  $p_{ij}$ . L'inéquation de gauche est satisfaite en tenant compte du modèle linéaire (3). La deuxième qui est donnée par

$$x_i(t) \geq m_{ij} x_j(t - \tau_{ij}^{\max}), \quad (5)$$

dont le produit est dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ , est en réalité la contrainte supplémentaire à satisfaire. Nous souhaitons déterminer des

commandes  $u(t)$  pour garantir le respect de (5). Nous recherchons des lois de commande bien posée, sous la forme d'un retour d'état (feedback) causal, qui sont donnés comme suit :  $u(t) = F.x(t-1)$ ,

Une approche de commande basée sur l'algèbre Min-Plus est développée dans [2]. Dans un premier temps, le cas d'une seule contrainte temporelle et d'une seule entrée de commande est traité. Ensuite, la méthode est généralisée au cas de plusieurs contraintes et de plusieurs entrées de commande.

#### A. Une seule contrainte et une seule commande

On considère un graphe d'événements temporisé avec une seule transition source  $tu$  et une place  $p_{ij}$  soumise à la contrainte temporelle (5). On suppose qu'il existe un chemin  $\alpha$  qui relie la transition  $tu$  et  $t_j$ , avec une temporisation notée  $\tau_\alpha$ . Nous remplaçons  $\tau$  par  $\tau_\alpha$  dans l'équation (4), et d'après la définition de  $tu$ , nous avons

$$x_j(t) \leq (A^{\tau_\alpha})_{ju} u(t - \tau_\alpha). \quad (6)$$

Nous appliquons à nouveau l'équation (4) avec  $\tau = \phi$ , nous obtenons l'expression explicite suivante de  $x_i(t)$

$$x_i(t) = \bigoplus_{r=1}^N (A^\phi)_{ir} x_r(t - \phi) \bigoplus \left[ \bigoplus_{k=0}^{\phi-1} (A^k B)_i u(t - k) \right], \quad (7)$$

pour chaque entier  $\phi \geq 1$ .

**Théorème 1** : Prenant  $(\phi = \tau_{ij}^{\max} + \tau_\alpha + 1)$ , l'inéquation

$$u(t) \leq \bigoplus_{r=1}^N \left[ ((A^\phi)_{ir} - (A^{\tau_\alpha})_{ju} - m_{ij}) x_r(t - 1) \right],$$

définit des commandes causales qui garantissent le respect de la contrainte (5) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $(A^\phi)_{ir} \geq (A^{\tau_\alpha})_{ju} . m_{ij}$ , pour  $r$  de 1 à  $N$ ,
- ii)  $(A^k B)_i \geq (A^{\tau_\alpha})_{ju} . m_{ij}$ , pour  $k = 0$  à  $\phi - 1$ .

**Démonstration** : voir [2].

**Corollaire 1** : Il existe toujours une loi de commande causale qui satisfait la contrainte (5), si les marquages initiaux de la place  $p_{ij}$  et les places du chemin  $\alpha$  de  $tu$  à  $t_j$  sont nuls. Cette loi de commande est donnée par

$$u(t) = \bigoplus_{r=1}^N (A^\phi)_{ir} x_r(t - 1). \quad (8)$$

**Démonstration** : voir [2].

#### B. Plusieurs contraintes et une seule commande

Nous considérons un graphe avec  $Z$  places soumises à des contraintes supplémentaires de temps, notées  $p_z$ , pour  $z = 1$  à  $Z$ . Pour chaque place contrainte  $p_z$ , on note respectivement par  $m_z$ ,  $\tau_z$  et  $\tau_z^{\max}$ , le marquage initial, la temporisation minimale et la temporisation maximale associées à cette place. Les transitions  $t_z$  et  $t_z$  représentent les transitions d'entrées et de sortie de la place  $p_z$  et les variables  $x_z$  et  $x_z$  définissent les compteurs correspondants à ces transitions. Nous notons par  $\lambda_z$  la somme des temporisation le long du chemin allant de  $tu$  à  $t_z$ . Les contraintes temporelles sont exprimées par les inéquations suivantes :

$$x_z(t) \geq m_z x_z(t - \tau_z^{\max}) \quad (9)$$

pour  $z$  allant de 1 à  $Z$ .

$u_z(t)$  représente la loi de commande calculée par la méthode précédente pour satisfaire la contrainte temporelle (9).

**Théorème 2** : L'équation :  $u(t) = \bigoplus_{z=1}^Z u_z(t)$ ,

$$\text{avec : } u_z(t) = \bigoplus_{r=1}^N \left[ ((A^{\phi_z})_{zr} - (A^{\tau_z})_{zu} - m_z) x_r(t - 1) \right],$$

et  $(\phi_z = \tau_z^{\max} + \tau_z + 1)$ , pour  $z = 1$  à  $Z$ , définit une loi de commande causale qui respecte toutes les contraintes temporelles (9), si les conditions suffisantes suivantes sont toutes satisfaites : pour  $z = 1$  à  $Z$ .

$$\text{(iii) } (A^{\phi_z})_{zr} \geq (A^{\tau_z})_{zu} . m_z \quad \text{pour } r = 1 \text{ à } N,$$

$$\text{(iv) } (A^k B)_z \geq (A^{\tau_z})_{zu} . m_z \quad \text{pour } k = 0 \text{ à } \phi_z - 1.$$

**Démonstration** : voir [2].

#### C. Plusieurs contraintes et plusieurs commandes

Nous supposons dans un premier temps que  $p_{ij}$  est l'unique place soumise à une contrainte temporelle supplémentaire. Nous souhaitons alors calculer un vecteur de commande  $u(t) \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^m$ , avec  $m \geq 1$ , qui va vérifier la contrainte (5). Pour chaque transition source, nous allons associer une variable compteur, notée  $u_s(t)$  pour  $s = 1$  à  $m$ , et nous notons aussi par  $\lambda_s$ , la somme des temporisations le long du chemin allant de  $tu_s$  à  $t_j$ .

**Théorème 3** : Le respect de la contrainte temporelle (5) est garanti si il existe un entier  $s$  tel que :

$$u_s(t) \leq \bigoplus_{r=1}^N \left[ ((A^{\phi_s})_{ir} - (A^{\lambda_s} B)_{js} - m_{ij}) x_r(t - 1) \right],$$

avec  $(\phi_s = \tau_{ij}^{\max} + \lambda_s + 1)$ ,  $u_i(t) = \varepsilon$  pour  $i \neq s$  et les conditions suivantes sont satisfaites,

$$\text{(v) } (A^{\phi_s})_{ir} \geq (A^{\lambda_s} B)_{js} . m_{ij} \quad \text{pour } r = 1 \text{ à } N,$$

$$\text{(vi) } (A^k B)_{is} \geq (A^{\lambda_s} B)_{js} . m_{ij} \quad \text{pour } k = 0 \text{ à } (\phi_s - 1).$$

**Démonstration** : Voir [2]

Ce résultat est généralisé au cas de plusieurs contraintes qui doivent être assurées, dans l'esprit du théorème 3.

**Corollaire 2** : Le vecteur  $u(t)$  qui est défini comme suit :

$$u_l(t) = \bigoplus_{z=1}^Z u_z(t), \text{ pour } l = 1 \text{ à } Z,$$

avec  $u_z(t)$  la loi de commande calculée par le théorème 3 pour vérifier la  $z^{\text{ème}}$  contrainte, et si  $l \neq z$  pour  $z = 1$  à  $Z$ ,  $u_l(t) = \varepsilon$ , permet la satisfaction de toutes les  $Z$  contraintes temporelles (9).

**Démonstration** : La loi de commande  $u_z(t)$  valide la  $z^{\text{ème}}$  contrainte, si les conditions (v) et (vi) du théorème 3 sont satisfaites. Nous avons, pour  $z = 1$  à  $Z$ ,

$$u_z(t) \geq \bigoplus_{z=1}^Z u_z(t).$$

Il est donc clair, que la commande  $u(t) = \bigoplus_{z=1}^Z u_z(t)$  assure le respect de toutes les  $Z$  contraintes temporelles.

#### D. Commande du système de production sous contrainte temporelle

##### 1. Description du système de production

Nous nous sommes intéressés à un exemple réel de processus de production sous contrainte de temps. Ce processus fait partie d'une ligne de fabrication de tube de caoutchouc pour équipement automobile [1]. Il est composé de convoyeurs en boucle, comme on peut le voir sur la figure 1. Il comporte un poste de garnissage A, où sont fixées sur des palettes les pièces à traiter, un poste de dégarnissage E où celles-ci sont démontées, et un four (I O). Le four est constitué de deux parties, une zone de chauffe et une zone de refroidissement. C'est le temps de séjour des palettes dans la zone de chauffe qui est critique .

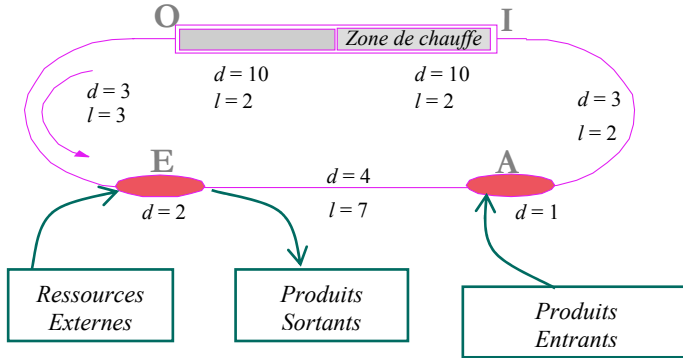


Figure 1 : Système de production

Nous avons associé à ce processus un graphe d'événements temporisé qui est donné par la figure 2.

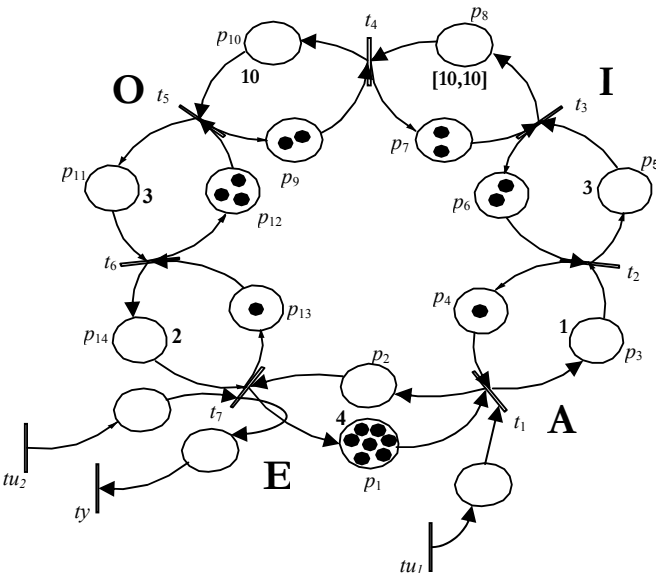


Figure 2 : Graphe d'événements temporisé associé au système

##### 2. Commande du système de production

Le processus comporte une zone critique qui est la partie chaude du four. Les produits qui vont subir le traitement thermique, ne doivent pas dépasser 10 unités de temps dans cette zone de travail. Les convoyeurs de la boucle de

production ne fonctionnent pas tous avec la même vitesse, ce qui provoque parfois une saturation à l'entrée du poste de dégarnissage, qui peut conduire au blocage des palettes dans le four. Le problème en question consiste à contrôler les produits à l'entrée de boucle afin de garantir le respect du temps de leurs passages dans le four. La transition source  $tu_2$  modélise les moyens de transport et nous supposons qu'elle n'est pas contraignante au fonctionnement du système. Nous calculons alors des lois de commande sous forme d'équations aux différences Min-Plus linéaires pour respecter cette contrainte temporelle. Nous appliquons l'approche de commande des systèmes Min-Plus linéaires développée précédemment. Nous considérons le graphe d'événements temporisé de la figure 2. La place  $p_8$  modélise la zone chaude du four. La temporisation de cette place qui correspond à la durée de cuisson des pièces, vaut 10 unités de temps. Cette contrainte temporelle stricte se traduit en Min-Plus par l'inéquation suivante :

$$x_4(t) \geq x_3(t-10), \text{ pour } t \geq 10 .$$

Nous calculons alors la loi de commande  $u_1(t)$  qui garantit le respect de la contrainte temporelle. Pour cela, nous appliquons le corollaire 1. Pour obtenir une équation d'état (Equation 3), nous allons étendre le graphe de la figure 2 pour avoir un autre graphe équivalent avec des temporisations égales à 1 ou 0. Nous décomposons toutes les places ayant des temporisations supérieures à 1 en plusieurs places temporisées à 1 et qui sont reliées par des transitions intermédiaires. Nous définissons alors de nouvelles variables d'état en plus des variables d'état initiales. Ces variables correspondent aux fonctions compteurs des transitions supplémentaires. Les expressions de ces variables sont données comme suit :

$$x_{2l}(t) = x_2(t-l) \text{ pour } l \text{ allant de } 1 \text{ à } 2, x_{3l}(t) = x_3(t-l) \text{ pour } l \text{ allant de } 1 \text{ à } 9, x_{4l}(t) = x_4(t-l) \text{ pour } l \text{ allant de } 1 \text{ à } 9, x_{5l}(t) = x_5(t-l) \text{ pour } l \text{ allant de } 1 \text{ à } 2, x_{6l}(t) = x_6(t-1) \text{ et } x_{7l}(t) = 7x_7(t-l) \text{ pour } l \text{ allant de } 1 \text{ à } 3 \text{ (le coefficient 7 est dû au fait que la place } p_1 \text{ la seule place marquée et temporisée).}$$

La matrice d'état du graphe d'événement étendu est  $A \in \mathbb{R}_{\min}^{33 \times 33}$ . Pour cet exemple, nous avons  $(\tau_{ij}^{\max} = \tau_{43}^{\max} = 10)$  et  $(\tau_{\alpha} = 4)$  la temporisation du chemin  $\alpha = (t_1, p_3, t_2, p_5, t_3)$ , qui relie les transitions  $tu_1$  et  $t_3$ . Le marquage initial de la place  $p_8$  est  $m_{ij} = m_{43} = e$  et le marquage du chemin  $\alpha$  est  $(A^{\tau_{\alpha}} \cdot B)_j = (A^4 \cdot B)_3 = e$ . Ainsi, les conditions (i) et (ii) du corollaire 1 sont bien vérifiées, ce qui assure l'existence de feedbacks causaux qui vérifient la contrainte temporelle. En tenant compte de l'expression donnée dans le corollaire 1 (Equation 8), la loi de commande suivante :

$$u_1(t) = \bigoplus_{r=1}^{33} (A^{15})_{4r} \cdot x_r(t-1),$$

garantit le respect de la contrainte. On détermine la fonction compteur  $x_4(t)$  associée à la transition  $t_4$  retardée de 15 unités de temps. Tout calcul fait, on aboutit à

$$x_4(t) = u_1(t-14) \oplus x_{73}(t-15) \oplus 1 \cdot x_1(t-15) \oplus 2 \cdot x_{35}(t-15) \oplus 7 \cdot x_{48}(t-15) \oplus 4 \cdot x_{45}(t-15)$$

La loi de commande suivante :

$$u_1(t) = x_{73}(t-1) \oplus 1.x_1(t-1) \oplus 2.x_{35}(t-1) \oplus 7.x_{48}(t-1) \oplus 4.x_{45}(t-1)$$

qui se simplifie à l'expression suivante :

$$u_1(t) = 1.x_1(t-1) \oplus 7.x_7(t-4) \oplus 2.x_3(t-6) \oplus 4.x_4(t-6).$$

Cette dernière expression correspond à la loi de commande écrite en fonction des compteurs du graphe. Cette loi est équivalente à :

$$u_1'(t) = 2.x_3(t-6) \oplus 4.x_4(t-6).$$

En tenant compte des équations du graphe, nous constatons que :

$$2.x_3(t-6) = 4.x_4(t-6) \oplus 2.x_2(t-9) \leq 4.x_4(t-6).$$

Finalement l'équation de commande se réduit à un seul terme, qui est :  $u_1'(t) = 2.x_3(t-6)$ .

La loi de commande  $u_1'(t)$  est un retour d'état causal qui peut être représenté par une place de contrôle. Cette place sera connectée au graphe de la boucle pour éviter le blocage des jetons dans la place qui modélise le four.

#### IV. COMMANDE SUPERVISEE DU SYSTEME PAR RESEAUX DE PETRI

Nous appliquons l'approche de commande supervisée basée sur les réseaux de Petri, pour résoudre le problème de la contrainte temporelle de la boucle de production.

##### A. Rappels sur la commande supervisée

Cette approche de commande est définie sur la théorie des réseaux de Petri soumis à des contraintes de marquage [9]. Son principe s'énonce comme suit : disposant d'un réseau de Petri qui représente un procédé et étant données des spécifications imposées à son marquage, on synthétise un superviseur, qui est constitué de places reliées par des arcs au réseau de Petri initial, afin que le réseau de Petri supervisé satisfasse les spécifications. En d'autres termes, un superviseur permet de modifier le marquage du réseau de Petri initial afin d'éviter toute évolution vers un marquage qui viole ces spécifications. On synthétise des places de contrôle, qui vont être ajoutées au réseau initial pour que le réseau de Petri résultant respecte ces spécifications sur le marquage. Les auteurs s'intéressent plus particulièrement à des contraintes sur le marquage qui sont définies par l'inéquation :  $k_i.M(p_i) + k_j.M(p_j) \leq b_i$ , (a)

avec  $M(p_i)$ ,  $M(p_j)$  sont les marquages des places  $p_i$  et  $p_j$ , et  $k_i, k_j, b_i$  sont des entiers. En introduisant une variable auxiliaire, qu'on note  $M(c_i)$ , l'inégalité (a) se transforme en une égalité :  $k_i.M(p_i) + k_j.M(p_j) + M(c_i) = b_i$  (b).

La quantité  $M(c_i)$  désigne en réalité le marquage d'une place supplémentaire, qui sera la place de contrôle du réseau de Petri. On constate que l'égalité (b) s'interprète comme un P-invariant du réseau de Petri contrôlé. Etant donné un réseau de Petri avec une matrice d'incidence notée  $W_p$  et soumis à  $N_c \in \mathbb{N}^*$  contraintes de marquage. Ces contraintes sont du même type que (a), elles sont représentées par l'inéquation vectorielle suivante :  $K.M(p) \leq b$  (c)

$K$  est une matrice de dimension  $(N_c \times n)$  définie les contraintes et  $b$  est un vecteur de dimension  $(N_c \times 1)$ . L'équation (b) se généralise à l'égalité (d).

$$K.M(p) + M(c) = b. \quad (d)$$

$M(c)$  est un vecteur auxiliaire de dimension  $(N_c \times 1)$ , qui représente le marquage de  $N_c$  places de contrôle qu'on veut déterminer. L'égalité (d) exprime  $N_c$  invariants de marquage du réseau de Petri contrôlé. On note  $W$ , la matrice d'incidence du réseau de Petri contrôlé est donnée comme suit :  $W = (W_p \ W_c)^T$ .

$W_c$  est la matrice qui présente les poids des arcs qui relient les places de contrôle aux transitions du réseau de Petri initial. Les invariants de marquages donnés par l'équation (d) vérifient l'égalité suivante :  $X.W = 0$ ,

avec  $X = (K \ I_d)$  et  $I_d$  est matrice d'identité d'ordre  $N_c$ .

Nous remplaçons les matrices  $X$  et  $W$  par leurs expressions données précédemment dans cette équation des invariants, on a alors la formule suivante :

$$(K \ I_d) \cdot \begin{pmatrix} W_p \\ W_c \end{pmatrix} = 0, \quad K.W_p + I_d.W_c = 0,$$

On déduit alors l'équation (e).

$$W_c = -K.W_p \quad (e)$$

L'égalité (e) définit les coefficients de la matrice  $W_c$  qui sont les poids des arcs qui relient les places du contrôle aux transitions du réseau de Petri considéré.

Le marquage initial des places de contrôle est déduit directement de l'équation (d).

$$M_0(c) = b - K.M_0(p) \quad (f)$$

Connaissant la matrice  $K$ , qui représente les contraintes de marquage, on calcule la matrice  $W_c$  qui définit les places de contrôle. Nous utilisons cette méthode pour contrôler la boucle de production et pour empêcher le blocage des palettes dans le four.

##### B. Commande supervisée de la boucle de production

Pour adapter la théorie de la commande supervisée à notre problème, nous sommes amenés à transformer la contrainte de temps en une contrainte sur les marquages. A notre connaissance, nous n'avons pas de méthode directe pour trouver une contrainte sur le marquage qui sera équivalente à la contrainte temporelle. Intuitivement, nous sommes arrivés à déterminer une contrainte sur le marquage plus large, incluant la contrainte temporelle. Nous avons considéré un tronçon du graphe d'événements de la figure 2, qui représente les places sur le chemin allant de la transition  $t_3$  à la transition  $t_7$ , c'est-à-dire de l'entrée du four jusqu'à la sortie des produits finis. Nous imposons aux places de ce chemin une contrainte de marquage, qui est en fonction de leurs capacités. En d'autres termes, nous allons avoir un ensemble de marquages autorisés et d'autres qui seront interdits. La contrainte de marquage à respecter est donnée par l'inéquation suivante :

$$M(p_8) + M(p_{10}) + M(p_{11}) + M(p_{14}) \leq 6.$$

Nous pouvons alors appliquer la méthode de la commande en réseaux de Petri présentée précédemment.

Pour cet exemple, l'équation (b) qui représente l'invariant est  $M(p_8) + M(p_{10}) + M(p_{11}) + M(p_{14}) + M(p_c) = 6$ ,

avec  $M(c)$  le marquage de la place de contrôle  $p_c$ . Cette place est unique puisque nous avons une seule contrainte de marquages.

Le vecteur  $K$  qui exprime la contrainte de marquage à respecter est :  $K = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$ .

D'après l'équation (e) et après calcul, on trouve :  $W_c = K.W_p = (0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$ .

Ce vecteur exprime les poids des arcs qui relie la place de contrôle aux transitions du graphe. La terme  $(-1)$  de cette matrice définit un arc de poids 1 d'une place de contrôle  $p_c$  à la transition  $t_3$  et le terme 1 représente un arc de poids 1 sortant de la transition  $t_7$  entrant à cette place  $p_c$ . En tenant compte de (f), le marquage initial de la place de contrôle est :  $M_0(p_c) = 6 - M_0(p_8) + M_0(p_{10}) + M_0(p_{11}) + M_0(p_{14}) = 6$ .

La place  $p_c$  qui sera rajoutée au graphe initial joue le rôle d'un superviseur qui surveille le marquage du graphe pour éviter la violation de la contrainte temporelle. On sait que le graphe d'événements de la boucle admet une seule transition commandable, qui est  $t_1$ . Nous avons trouvé en utilisant la théorie de la supervision une place de contrôle reliée à la transition  $t_3$ , ce qui n'est pas réalisable en pratique. Pour mettre en œuvre cette commande, nous anticipons le contrôle sur la transition commandable  $t_1$ . Cette supervision entraîne une restriction de l'espace d'état du système. Nous dirons alors que la contrainte de marquage que nous avons considérée est limitative et par conséquent la feedback calculé rend le système moins permissif. En termes de compteurs de transitions du graphe, la place de contrôle peut être représentée par l'inéquation suivante :  $x_3(t) \leq 6.x_7(t)$ .

On remarque sur le graphe que la fonction  $x_3(t)$  est retardée de 4 unités de temps par rapport au compteur  $u_1(t)$  associé à  $t_1$ . Cette relation s'exprime par l'inégalité suivante :  $x_3(t) \leq u_1(t-4)$ .

On constate que la loi de commande qui vérifie l'inégalité suivante :  $u_1(t-4) \leq 6.x_7(t)$ ,

garantit le respect de la contrainte sur les marquages mais elle correspond à un feedback non causal et par conséquent non réalisable. Nous choisissons alors la loi de commande suivante :  $u_1(t) = 6.x_7(t)$ ,

qui est réalisable et qui valide la contrainte sur les marquages. L'équation de commande devient retardée par rapport à l'état si on remplace  $x_7(t)$  par son équation explicite. En tenant compte des compteurs des transitions du graphe, on déduit l'expression suivante :

$$x_7(t) = x_6(t-2) \oplus 7.x_7(t-4) \oplus 1.x_1(t-1) \oplus 3.x_2(t-3) \\ \oplus 5.x_3(t-10) \oplus 7.x_4(t-10) \oplus u_1(t)$$

La loi de commande explicite est :

$$u_1(t) = 6.x_6(t-2) \oplus 13.x_7(t-4) \oplus 7.x_1(t-1) \oplus 9.x_2(t-3) \\ \oplus 11.x_3(t-10) \oplus 13.x_4(t-10),$$

qui est équivalente à :  $u_1(t) = 6.x_6(t-2)$ .

## V. CONCLUSION

Les lois de commande calculées par les deux approches ont la même forme, les deux correspondent à un retour d'état causal. La loi de commande en Min-Plus pourrait être représentée par une ou plusieurs places marquées et temporisées. Par contre, la place de contrôle synthétisée par la méthode de la supervision est unique et ne comporte pas de temporisation. La contrainte de marquage considérée dans la commande supervisée est plus large que la contrainte temporelle en Min-Plus. Le feedback calculé par la théorie de la supervision est limitatif et rend l'espace d'état très restreint, par contre, le fait qu'il est constitué d'une unique place de contrôle, il sera plus facile à mettre en œuvre. Tandis que la mise en œuvre du retour d'état déterminé en Min-Plus n'est pas simple, puisqu'il correspond à plusieurs places de contrôle. Nous concluons que les deux approches de commande aboutissent à des feedbacks causaux qui vérifient la contrainte temporelle stricte. Nous avons comparé sur un exemple réel l'approche de commande en algèbre Min-Plus avec la théorie de la supervision. Cet exemple ouvre la voie à la recherche des liens exacts entre ces deux méthodes de commande dans le cas général, en particulier transformer la contrainte sur les compteurs en une contrainte sur les marquages. Nous projetons des applications dans d'autres contextes, notamment pour la vérification et la validation des contraintes temporelles dans des architectures d'automatisation distribuées.

## VI. REFERENCES

- [1] Amari S., I. Demongodin and J.J. Loiseau, « Sizing, cycle time and plant control using dioid algebra ». Chapter 6 in Supply Chain Optimisation, Series Applied Optimization, Springer, p.p. 71-85, 2004.
- [2] Amari S., I. Demongodin et J.J. Loiseau, « Méthode formelle de commande sous contraintes de temps dans les dioïdes ». MSR'05, Grenoble, 2005
- [3] Baccelli F., G. Cohen, G. Olsder, and J. Quadrat, « Synchronization and Linearity ». Wiley, 1992.
- [4] Brandin B.A and W.M Wonham. « Supervisory control of timed discrete event systems ». IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39 (2), p.p. 329-341, 1994.
- [5] Cottenceau B., L. Hardouin, J.L. Boimond, and J.L. Ferrier, « Synthesis of Greatest linear feedback for timed event graphs in dioid ». IEEE transactions on Automatic Control, Vol. 44(6), p.p.1258-1262, 1999.
- [6] Holloway L.E, B.H. Krogh and A. Giua, « A Survey of Petri net methods for controlled discrete event systems ». Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications, 7, p.p.151-190, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997
- [7] Lahaye S., B. Cottenceau, A. Correia, « Commande de graphe d'événements temporisés avec contraintes de temps critique ». CIFA, Tunisie, 2004.
- [8] Libeaut L., « Sur l'utilisation des dioïdes pour la commande des systèmes à événements discrets ». Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 1996.
- [9] Moody J., K. Yamalidou, M. Lemmon and P. Antsaklis, « Feedback control of Petri nets based on place invariants ». CDC'94, p.p. 3104-3109, Lake Buena Vista Florida, 1994.
- [10] Murata T. Petri nets, « Properties, analysis and application », Proceeding of the IEEE, Vol. 77(4) p.p. 541-579, 1989.
- [11] Ramadge J.G. and W.M. Wonham, « Supervisory control of a class of discrete event process ». SIAM, Control and Optimization 25(5) p.p.1202-1218, 1987.