



HAL
open science

Le principe d'équilibre de Clairaut en hydrostatique

Irène Passeron

► **To cite this version:**

| Irène Passeron. Le principe d'équilibre de Clairaut en hydrostatique. 1996. hal-00361469

HAL Id: hal-00361469

<https://hal.science/hal-00361469>

Submitted on 15 Feb 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

En Direct de l'Histoire...

Le principe d'équilibre de Clairaut en hydrostatique (1743)

par Irène Passeron*

La physique n'est pas avare de principes d'équilibre, qu'elle les présente comme « simple » formalisation d'observations empiriques, ou qu'ils soient inclus dans la cohérence d'une théorie unificatrice, et deviennent un cas particulier de relations mathématiques plus générales. Nous nous intéresserons ici à la condition d'équilibre d'une masse fluide. Pour un fluide homogène en rotation, soumis à un champ de forces, de composantes (P,Q,R), dû à la gravitation de ses particules, cette condition s'exprime ainsi, en termes modernes :

$Pdx+Qdy+Rdz$ est une différentielle exacte et l'équation de la surface d'équilibre est donnée en écrivant que la somme des potentiels gravitationnel et centrifuge est constante.

La force de ce principe, qui apparaît au début du XVIIIème siècle (et suppose la maîtrise du calcul différentiel leibnizien appliqué à la loi d'attraction newtonienne), doit-elle davantage à sa formulation mathématique ou à ses applications physiques, notamment quant à la « figure de la Terre »¹ ? Il est clair qu'une telle appréciation ne peut avoir de sens qu'au regard de ses conditions d'apparition historique, qui permettent, nous allons le voir, de préciser cette double appartenance physico-mathématique.

Pourquoi s'intéresser à l'équilibre d'un fluide homogène en rotation ?

Au XVIIIe siècle, l'hydrostatique a déjà, bien sur, des lois et des principes connus, tels ceux d'Archimède, Stevin, Clavius, Huyghens, Torricelli, etc. Mais, d'après Lagrange, le principe proposé en 1743 par Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) change « la face de l'hydrostatique » pour en faire une « science nouvelle ». Lagrange, après avoir rappelé l'utilité du principe des vitesses virtuelles utilisé par Galilée, Descartes et Pascal, situe ainsi la scission conceptuelle au début du dix-huitième siècle :

« Néanmoins, quoique ce Principe ait l'avantage d'être simple & général, soit pour l'équilibre des fluides, soit pour celui des corps solides, il a été abandonné par la plupart des Auteurs modernes qui ont traité de l'Hydrostatique, & surtout qui ont entrepris de reculer les limites de cette Science, en cherchant les loix de l'équilibre des fluides hétérogènes, dont toutes les parties sont animées par des forces quelconques; recherche

* Cet article correspond à un version d'un passage de la thèse de l'auteur : PASSERON Irène, *Clairaut et la figure de la Terre au XVIIIe siècle, cristallisation d'un nouveau style autour d'une pratique physico-mathématique*, Thèse, Paris 7, 1994.

¹ La Terre, au moins au moment de sa formation, est considérée comme un fluide. L'homogénéité ou non de ce fluide, la possibilité d'envisager une masse partiellement fluide et partiellement solide, etc., font à l'époque l'objet de discussions entre savants et philosophes.

très-importante par le rapport qu'elle a avec la fameuse question de la figure de la Terre » (*Mécanique analytique*, 1788, rééd. J. Gabay, p. 128).

L'aperçu historique qui suit a précisément pour objet de donner une interprétation de l'importance du nouveau principe de Clairaut, en fonction des deux critères énoncés par Lagrange : la « fameuse question de la figure de la Terre » et « reculer les limites de cette science », pour en faire une « science nouvelle ».

La fameuse question de la figure de la Terre

Au début du XVIII^{ème} siècle, une « dispute » scientifique sort du petit cercle des savants pour venir divertir le monde des amateurs éclairés de philosophie naturelle. Ce problème a pour lui deux avantages :

— il s'exprime en termes simples : la Terre n'étant pas exactement sphérique, a-t-elle l'allure d'une datte, figure allongée vers les pôles, ou d'un oignon, figure aplatie ?

— il propose une validation définitive de la loi d'attraction newtonienne : deux particules quelconques de matière s'attirent en raison inverse du carré de leur distance².

Pour le public non spécialisé, les choses sont simples : d'un côté les « cartésiens » traditionnels de l'Académie des Sciences, Fontenelle, les Cassini, qui défendent, mesures à l'appui, que la Terre est allongée ; de l'autre les « newtoniens » qui bénéficient d'un porte-parole non scientifique mais talentueux, Voltaire.

De fait, l'opposition scientifique se joue sur deux terrains, celui des mesures géodésiques³ et celui des prédictions théoriques. Il est significatif que « l'expérience » faisant basculer le succès dans le clan newtonien soit l'expédition en Laponie (1736-1737) menée par un théoricien, Maupertuis, secondé par Clairaut. Mais suffisait-il que l'expédition rapporte du cercle polaire une mesure d'un degré d'arc de méridien plus grande que celle de Paris pour emporter la décision ? Certes non, les mesures contradictoires ne manquant pas, et la marge d'erreur étant trop proche de l'écart significatif. *Plus importante pour l'assentiment du monde savant est la technique d'approche théorique et sa potentielle généralisation.* L'analyse de la nouvelle formulation du principe d'équilibre nous permettra de comprendre comment cette nouveauté dépassait les confrontations de systèmes philosophiques et physiques.

La « science nouvelle » énoncée par Clairaut en 1743

² Comme on sait, cette loi date de la première édition des fameux *Principia* (1687), lesquels proposaient un système du monde différant sur bien des points de celui de Descartes ; mais vers 1730 certains savants doutent encore de sa justesse.

³ Ces aspects sont exposées dans de nombreux ouvrages, par exemple dans l'article « Figure de la Terre » de l'*Encyclopédie* (rédigé par d'Alembert, t. VII, p. 749-461). Parmi les références modernes, on pourra notamment se reporter à l'ouvrage collectif de H. Lacombe et P. Costabel, cité en bibliographie, qui couvre trois siècles d'histoire, et à l'article de M.-F. Jozeau dans *Matapli* n° 44 qui décrit le protocole d'observation.

Dans son ouvrage paru en 1743, *Théorie de la figure de la Terre, tirée des lois de l'hydrostatique*, Clairaut n'entend pas fonder une théorie complète de l'équilibre mais plutôt formuler une condition d'équilibre adaptée à son problème -celui d'un fluide tournant comme un solide-, et qui soit exploitable dans le cadre des résultats de calcul différentiel et intégral les plus récents. Clairaut fait alors référence à son mémoire mathématique paru dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences [en abrégé : MARS] pour 1740*. Le soin pris, dans l'expression de son principe, à ne faire allusion à aucun « système » particulier, et surtout, la grande simplicité qui préside à sa première énonciation sont les signes patents d'une démarcation : son travail est « tiré des principes de l'hydrostatique » (le titre rappelle opportunément), pour se constituer dans le champ mathématique. Les « hypothèses » n'interviennent que lorsqu'il s'agit, dans la seconde partie de l'ouvrage, de passer aux « applications », dans le cas de la Terre en particulier. Ainsi Clairaut dut être sensible à la réflexion que lui fit Euler dans une lettre de janvier-février 1742 :

« Vos remarques sur la variation des espèces des ellipses qui forment les différentes couches de la terre sont extrêmement profondes, surtout si elles ne sont pas une conséquence d'une hypothèse, mais des principes incontestables de l'hydrostatique, comme vous avés la bonté de m'assurer. Au reste votre pièce dans les transactions⁴ garde toujours ses mérites car jusqu'à présent il me semble, qu'il a été permis de se former des hypothèses à son gré et propres pour le [calcul] » (Euler, *Opera Omnia*, série IV A, vol. 5, éd. Juskevic et Taton, p. 111).

L'intitulé de la première partie de l'ouvrage donne déjà une idée des priorités de l'auteur : « Principes généraux pour trouver les hypothèses dans lesquelles les fluides peuvent être en équilibre, et pour déterminer la figure de la Terre et des autres planètes, lorsque la loi de la pesanteur est donnée ». La généralité du principe porte sur son application à la figure de la Terre, *quelle que soit la loi de pesanteur considérée*, et sur l'efficacité à distinguer entre des hypothèses compatibles avec l'équilibre de toute la masse, et d'autres, qui, mathématiquement, ne le sont pas. Rappelons, en effet, que l'universalité de la loi d'attraction en raison inverse du carré des distances est sujette à discussion, et surtout sujet de recherches.

Deux qualités, donc, la facilité d'usage et le potentiel discriminatoire, vont faire l'efficacité de ces principes. Clairaut ne s'exprime pas en termes issus directement d'une théorie générale des forces et du comportement de la matière. Le lecteur moderne pourrait ressentir un malaise : l'auteur ne définit pas l'équilibre à partir du mouvement (ou la statique comme cas particulier de la dynamique), il ne fait pas la distinction entre fluide et solide autrement qu'implicitement, ne définit pas rigoureusement des expressions comme « l'effort produit par un canal », un mot comme « pression », n'explicite pas le rapport entre l'équilibre d'un canal et l'équilibre des particules de matière qui le composent.

A l'époque, cela n'attire aucune critique quant à sa rigueur ou à la validité de ses bases, car les autres auteurs, Daniel Bernoulli, Euler, d'Alembert ...,

⁴ Il s'agit des *Philosophical Transactions*, dans lesquelles Clairaut avait publié un premier aperçu de son travail en 1738. Les *Philosophical Transactions* sont à la Royal Society de Londres ce que les *MARS* sont à l'Académie des sciences de Paris.

procèdent de même et Clairaut leur répond. Ce n'est qu'à partir des travaux d'Euler en 1755, puis de la *Mécanique analytique* de Lagrange à la fin du siècle, que la formulation devient mathématisée en termes de pression et de potentiel ; cependant, les étapes théoriques restent identiques à celles de Clairaut, et les formules, que celui-ci donne souvent au premier ordre d'approximation, constituent encore aujourd'hui un noyau incontournable.

Quelques remarques sont nécessaires avant de revenir au texte de Clairaut.

Le rôle des mathématiques à l'Académie des Sciences

L'Académie royale des sciences de Paris, qui existe depuis 1666, devient au XVIIIème siècle le passage obligé de la reconnaissance scientifique. Elle comprend deux classes, celle de «mathématiques» et celle de «physique». La classe de mathématiques comporte trois divisions : la «géométrie», la «mécanique» et l'«astronomie» ; le terme «physique» n'a pas le sens actuel et recouvre la «chimie», l'«anatomie» et la «botanique». Clairaut, enfant prodige reçu à l'Académie avec dispense d'âge à 18 ans, représente parfaitement le type de mathématicien habile à manier le calcul différentiel, tout comme Maupertuis (1698-1759), Fontaine (1704-1771), Bouguer (1698-1758), ou D'Alembert (1717-1783). L'expédition en Laponie le rend célèbre en 1737. Il est vite en correspondance avec les mathématiciens étrangers les plus connus, Jean (1667-1748) puis Daniel Bernoulli (1700-1782), Gabriel Cramer (1704-1752), Colin Mac Laurin (1698-1746) et avec le plus grand d'entre eux, Leonhard Euler (1707-1783). Il joue rapidement un rôle important au sein de l'Académie et dans les journaux scientifiques, devient une autorité qu'il est prestigieux de critiquer. Sa polémique avec Buffon, en 1748, sur la possibilité ou non de modifier la loi d'attraction de Newton, les attaques dont il est l'objet en 1758 sur sa prédiction de la date de retour (1759) de la comète de Halley marquent la vie scientifique du milieu du siècle.

Les mathématiciens (ou «géomètres» comme on dit plutôt alors) sont aussi chargés de rédiger des rapports sur des inventions, des machines, d'accorder des privilèges, d'enseigner ou, mieux, d'écrire des traités destinés à l'enseignement. Clairaut, par exemple est l'auteur d'*Eléments de Géométrie* (1741) et d'*Eléments d'Algèbre* (1746) réédités de nombreuses fois. Leurs centres d'intérêt sont *de facto* intimement liés non seulement à la recherche mais à la science qui se diffuse et s'enseigne.

Une part importante des recherches mathématiques, au sein de l'Académie, s'oriente à partir de 1730 vers l'examen des différentes lois possibles de la pesanteur. Cette analyse traverse tous les traités de mécanique rationnelle, parce qu'elle permet, sur un cas jugé crucial, d'évaluer l'efficacité d'une formulation mathématique. On trouve un premier exemple de ce type dans le mémoire de Bouguer « Comparaison de deux Loix que la Terre et les autres Planètes doivent observer dans la figure que la pesanteur leur fait prendre », publié dans les *MARS pour 1734*.

Le principe d'équilibre

Au moment où Clairaut propose son principe d'équilibre d'un fluide, il n'existe aucune expression d'un tel principe qui soit une condition nécessaire et suffisante d'équilibre de toute la masse fluide. Le concept de pression n'a pas encore été utilisé (il le sera, notamment, par Euler dans un mémoire de 1755) et l'hydrostatique n'a encore donné lieu à aucune interprétation strictement mathématique du type de ce que sera la *Mécanique analytique* de Lagrange en 1788.

La première formulation du principe d'équilibre par Clairaut, en tête du premier chapitre de la *Théorie de la figure de la Terre*, est presque triviale pour un physicien d'aujourd'hui :

« Une masse de fluide ne saurait être en équilibre, que les efforts de toutes les parties qui sont comprises dans un canal de figure quelconque qu'on imagine traverser la masse entière, ne se détruisent mutuellement » (§ 1)⁵.

Lagrange l'interprète comme suit : « le principe de M. Clairaut n'est qu'une conséquence naturelle du Principe de l'égalité de pression en tout sens ». (*Mécanique analytique*, p. 129)

La non trivialité apparaît dans l'usage que Clairaut fait de son principe dès le paragraphe suivant pour retrouver les deux conditions d'équilibre énoncées par Newton et Huygens⁶.

Afin de mieux comprendre la démarche de Clairaut, adoptons un moment le langage moderne. Une formalisation ferait apparaître qu'à densité ρ constante, si l'on note $g(x,y,z)$ l'attraction gravitationnelle au point de coordonnées (x,y,z) , dm un élément de masse autour de ce point, dv l'élément de volume correspondant, MC une colonne⁷ de section s constante, suffisamment petite pour que g reste identique sur cette section, et les axes choisis de façon à ce que Cx soit l'axe de révolution de la colonne, le poids de la colonne MC allant du centre C au point M (qu'on supposera ici être le pôle) vaut :

$$\int_M^C g(x, y, z) dm = \rho s \int_{x_M}^{x_C} g(x, y, z) dx$$

Ce poids (ou « effort de la colonne ») doit être égal au poids d'une colonne allant du centre à l'équateur : telle est la condition d'équilibre de Newton.

La notion de pression, c'est-à-dire de force par unité de section, df/ds , qui intervient lorsque l'on écrit l'équilibre des forces sur un petit canal isolé, trouve son origine dans cette utilisation des canaux qui permet d'écrire des équations locales⁸.

Chez Clairaut, le terme de « pression » n'est pas plus défini que celui d'« effort », mais son utilisation, quant à elle, se précise au fur et à mesure des

⁵ Les § renvoient évidemment au traité de Clairaut.

⁶ Voir encadré.

⁷ Voir figure 1. Sur cette figure, tirée de l'ouvrage de Clairaut, la ligne des pôles est représentée horizontalement. On notera (ce que nous n'explicitons pas ici) qu'ici ORS est le canal quelconque de Clairaut, FD le canal couché correspondant à une condition de Huygens, et MCN deux colonnes perpendiculaires issues de la condition d'équilibre de Newton.

⁸ L'examen des efforts sur un canal ou un petit cylindre est encore la représentation couramment utilisée dans les manuels modernes pour exprimer l'équilibre (par exemple le manuel de Dévoré et Hannequin, 1965).

calculs. Elle contient en particulier de façon implicite les conditions qui permettent de définir la pression p et de représenter l'équilibre en termes d'équations portant sur les dérivées partielles dans lesquelles P , Q , R sont les composantes de la gravitation et ρ la densité :

$$\begin{cases} \frac{\delta p}{\delta x} = \rho P \\ \frac{\delta p}{\delta y} = \rho Q \\ \frac{\delta p}{\delta z} = \rho R \end{cases}$$

Les certitudes et l'efficacité du calcul passent par l'emploi de quantités différentielles algébriques, qui souffrent moins d'ambiguïtés. Elles refoulent les questions d'existence (de la différentielle, d'une solution, etc.) et de définition vers des cas particuliers volontairement ignorés, quitte à exiger ultérieurement une plus grande généralisation formelle.

Revenons à l'ouvrage de Clairaut. Afin de se ramener à un calcul en coordonnées «cartésiennes», l'auteur décompose la « force de la gravité en chaque point S » d'un canal, en deux composantes P et Q suivant les axes⁹.

« Cela fait, on cherchera l'effort que la force P fera faire au cylindre S_s pour sortir vers C , et on trouvera facilement que l'expression de cet effort sera Pdy ; car la force P agissant suivant SH , la partie de cette force qui agira dans la direction du canal S_s sera $\frac{P \times rs}{S_s}$ [on projette dans la direction du canal] ; or multipliant cette quantité par la masse, on aura $P \cdot sr$ ou Pdy . » (§ 16)

L'effort d'un cylindre S_s pour sortir par une extrémité est donc exprimé par $Pdy + Qdx$, qui est le poids de S_s , divisé par la section.

Si l'on introduit la densité ρ (que Clairaut supposait égale à 1), la quantité $\rho(Pdy+Qdx)$ que vient d'exprimer Clairaut pour écrire l'égalité des « efforts », et qui ne doit pas dépendre de la forme du canal ni de sa section, n'est autre que la variation de pression dp , telle que nous la définissons aujourd'hui.

A partir de là, nous voyons que *cette définition suppose l'existence d'une différentielle exacte, et c'est bien là le point essentiel et incontournable de cette mathématisation.*

Nous avons vu que les formulations antérieures à cet ouvrage ne posaient pas la question de l'équilibre en des termes pour lesquels la notion de pression prenait sens. Clairaut, lui, va pouvoir expliciter une condition nécessaire d'équilibre sous forme analytique sans qu'il soit besoin de *nommer* la pression.

La notion moderne de pression

⁹ Voir figure 2. Puisqu'on travaille dans le plan méridien d'une figure de révolution, la composante en z disparaît. D'autre part, chez Clairaut, les axes des x et des y sont inversés par rapport à nos notations habituelles, ce qui donnera des formules du type $Pdy+Qdx$, au lieu de $Pdx+Qdy$.

Avant de suivre la démarche de Clairaut, regardons d'un peu plus près comment la notion de pression intervient dans l'expression classique moderne de la loi fondamentale de l'hydrostatique :

$\text{grad } p = \rho \text{ grad } V$, où p est la pression, ρ la densité et V le potentiel, formulation équivalente à

$$\begin{cases} \frac{\delta p}{\delta x} = \rho \frac{\delta V}{\delta x} \\ \frac{\delta p}{\delta y} = \rho \frac{\delta V}{\delta y} \\ \frac{\delta p}{\delta z} = \rho \frac{\delta V}{\delta z} \end{cases}$$

La première remarque est triviale, mais a son importance : la force doit dériver d'un potentiel, ce qui est le cas, bien sûr, pour l'attraction newtonienne et la force centrifuge.

La seconde remarque est que la notion de pression n'est pas nécessaire pour formaliser la notion d'équilibre. Comme il a été dit au début de cet article, pour un fluide homogène soumis à une force (P, Q, R) , il y a équilibre en tout point si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

— $Pdx + Qdy + Rdz$ est une différentielle exacte (ceci correspond au principe d'équilibre d'un canal de Clairaut ; une telle condition est effectivement réalisée si $dp = \rho dV$; elle l'est de toute façon lorsque le fluide n'est soumis qu'aux seules forces centrifuges et attractives, qui toutes deux dérivent d'un potentiel).

— A la surface du liquide, « l'effort » de la force est nul, soit, si l'on a défini le terme de potentiel : le potentiel aux deux extrémités d'un canal couché sur la surface, est identique.

L'équation de la surface s'écrit alors :

« potentiel de gravitation + potentiel de la force centrifuge = constante. »

Comme nous le verrons un peu plus loin, cette équation est donnée par Clairaut en 1743 (§ 18) sous la forme (plus générale, sans hypothèse sur la loi de gravitation) : $\int (Pdy + Qdx) - \frac{fyy}{2r} = A$.

Ici f représente la force centrifuge, que nous noterions usuellement $\omega^2 r$.

On remarque que le potentiel total $V = \text{constante}$ si et seulement si $dV = 0$,
ou

$$\frac{\delta V}{\delta x} dx + \frac{\delta V}{\delta y} dy + \frac{\delta V}{\delta z} dz = 0$$

qui n'est autre que la condition par laquelle on obtient le plus souvent la surface d'équilibre, et qui correspond à la condition de Huygens (la surface est en tout point perpendiculaire à la pesanteur).

Faire intervenir en hydrostatique la pression d'un liquide incompressible, c'est-à-dire d'un liquide dont la densité est indépendante de la pression, c'est donc supposer que les équipotentiels sont les isobares, ou encore que les pressions sont égales lorsque les efforts sont égaux.

Avantages de cette formulation

L'analyse qui précède nous permet donc de comprendre le lien entre le principe de Clairaut et celui couramment utilisé dans les formulations modernes, mais aussi le pourquoi de cette formulation générale en terme de canaux : ce principe possède bien la généralité souhaitée, à savoir

- contenir comme des cas particuliers simples le principe de Newton et celui de Huygens,
- donner une condition d'équilibre valable partout¹⁰,
- permettre d'énoncer les modalités de l'étude du cas hétérogène sans avoir recours à de nouvelles hypothèses,
- aboutir à une interprétation simple en termes différentiels.

En résumé, l'utilisation de son principe, qui justifie de n'utiliser que la condition de Huygens, pour exprimer l'équilibre, amène Clairaut «très près» de la formulation des notions de pression et de potentiel.

Clairaut explicite un autre avantage : il donne une discrimination entre les principes qui donnent une condition suffisante et les autres. Le §15 montre que dans ce cas, les deux principes « ordinaires » (celui de Newton et celui de Huygens) peuvent être respectés, sans que pourtant, l'équilibre interne ne le soit.

Le raisonnement de Clairaut en dit davantage que sa conclusion sur la nécessité d'édicter un principe aussi général que le sien : il montre que l'équilibre, nécessité abstraite mais néanmoins physique, correctement exprimé au moyen d'outils mathématiques adaptés, impose des contraintes de forme à une loi aussi sujette à hypothèses que la loi de l'attraction. La fin des années 1740 sera l'époque des travaux sur la forme de la loi d'attraction, modifiée, ou non, au vu des calculs de perturbations qui interviennent dans les équations lunaires. La notion de contrainte mathématique dans un champ physique est en train de s'élaborer.

Traduction mathématique par Clairaut du principe d'équilibre

La condition différentielle appelée par Clairaut « manière de faire usage du principe... » (titre du chapitre IV) va traduire cette contrainte mathématique. Ce « faire usage » est un développement et une valorisation des travaux d'intégration des années 1740. Il s'agit d'exprimer algébriquement pour un petit cylindre, le bilan des forces, ou, comme nous l'avons expliqué plus haut, « des efforts du petit cylindre pour sortir vers » une extrémité.

Le phénomène d'équilibre des canaux s'exprime alors par une analyse purement mathématique :

« Il faut que $Pdy + Qdx$ soit une différentielle complète (*)¹¹, afin qu'il puisse y avoir équilibre dans le fluide »

¹⁰ Ce point est important puisqu'il va permettre de montrer que si une loi autorise l'équilibre de toute une masse fluide dont les positions relatives des particules sont invariables, alors l'équilibre à la surface est suffisant.

¹¹ (*) correspond à une note de Clairaut précisant la définition de ce terme et donnant quelques exemples :

Notons -comme tous les historiens des sciences l'ont souligné- que, dans ces intégrations et dans ces développements en séries, il n'est jamais question de domaine de validité. Malgré l'inscription de cette recherche dans le registre algébrique (c'est net dans ce chapitre), la proximité de l'interprétation géométrique et partant, des contraintes inhérentes bien que non formulées, semble pour les auteurs une forme de garantie de la cohérence de leur calcul.

La condition nécessaire pour que $Pdy+Qdx$ soit une différentielle complète est $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$ ¹². Dans sa démonstration, Clairaut renvoie à son mémoire publié

dans les *MARS pour 1740*, (p. 294)¹³. Dans une lettre à Clairaut du 19 octobre 1740, Euler fait remonter l'origine du théorème aux travaux des années 1717-1721, effectués par les Bernoulli et Hermann sur les trajectoires orthogonales. La notion de dérivée partielle, mobilisée ici, est très sommaire, et n'a d'autre fonction qu'utilitaire :

« On entend par $\frac{dP}{dx}$ la différentielle de la fonction P, prise en supposant x seulement variable et dont on a ôté les dx. »

La condition une fois remplie, on peut, dit Clairaut, « trouver l'équation qui exprime le méridien » : en d'autres termes, « l'intégrale de $Pdy+Qdx$ », à une constante près, « exprimera le poids d'une colonne ou canal quelconque CM qui irait du centre C à la superficie » et comme « on aura $\frac{fyy}{2r}$ pour la somme des efforts centrifuges de la colonne CM », Clairaut retrouve l'équation, déjà mentionnée plus haut¹⁴ :

$$\int (Pdy + Qdx) - \frac{fyy}{2r} = A$$

$Pdy+Qdx$ étant une différentielle complète, on obtient bien l'expression moderne de la condition d'équilibre en terme de potentiel (la somme des potentiels gravitationnel et centrifuge est constante sur une surface de niveau), et que Clairaut exprime ainsi :

« Lorsque $Pdy+Qdx$ sera une différentielle complète, son intégrale égalée à une constante sera l'équation du sphéroïde, puisque la surface du sphéroïde doit être elle-même une surface courbe de niveau. » (§ 23)

Des diverses façons d'être newtonien

« J'entends par différentielle complète, une quantité qui a pour intégrale une fonction de x et de y.[...] $\frac{xdy - ydx}{xx + yy}$ est aussi une différentielle complète, parce que son intégrale

est représentée par l'arc dont la tangente est $\frac{y}{x}$, le rayon étant 1. »

¹² Nous dirions « totale » dans le langage moderne, et nous imposerions des conditions de connexité au domaine de définition afin que la réciproque soit vraie.

¹³ L'historique de cette question est fait par Euler, qui avait également exprimé cette condition dans un mémoire publié en 1740 par l'Académie de Saint-Pétersbourg (*Commentarii Academiae Petrop.*, 1734-35)

¹⁴ Cette équation se trouvait déjà chez Maupertuis.

L'ouvrage de Clairaut est newtonien quant aux résultats (terre aplatie, loi universelle d'attraction confirmée) mais très éloigné de Newton quant aux méthodes. En outre, l'auteur critique avec assurance l'hypothèse de Newton sur la répartition de la densité à l'intérieur de la Terre¹⁵. Cette remarque sur l'impossibilité d'une telle hypothèse, contradictoire avec l'équilibre des surfaces de niveau, prépare l'exposition de la seconde partie de l'ouvrage de Clairaut, où les calculs sont détaillés pour différentes hypothèses.

Le savant français peut d'autre part donner la « Manière d'employer la mesure actuelle des degrés du méridien et des longueurs du pendule à secondes, à la recherche de la loi suivant laquelle agit la gravité » (chapitre XII). On peut confronter les formules issues de sa théorie aux mesures géodésiques ; réciproquement, à partir de ces mesures, on peut déterminer la plausibilité de « la loi suivant laquelle agit la gravité » en fonction des mesures géodésiques. Nous avons évoqué brièvement le contexte des mesures sur la figure de la Terre, et déjà mentionné le fait que les mesures faites en Laponie avaient une valeur probante toute relative. La façon dont Clairaut insère cette question dans son discours nous indique à la fois ses doutes et l'importance qu'il entend donner à la précision de ses calculs.

La question des mesures, c'est-à-dire du lien entre longueur du pendule à secondes et mesure du degré de méridien avait fait l'objet de nombreux mémoires dans les années précédentes. Pour le calcul des valeurs de la pesanteur et de la force centrifuge que l'on peut tirer de ces mesures, Clairaut se contente de renvoyer à l'ouvrage de Maupertuis de 1738. Il désire plutôt insister sur le fait que les observations ne permettent pas une détermination « unique » de la loi de gravité, mais fondent la possibilité d'« en exclure d'autres auxquelles on se serait peut-être arrêté par la simplicité qu'elles offrent », pour des raisons purement mathématiques.

Ainsi, il peut affirmer que « de la seule différence des degrés mesurés en France et en Laponie, on peut conclure que la gravité n'agit pas suivant la ligne tirée au centre de la Terre », quelle que soit son expression en fonction de la distance. En effet, « le rapport des axes ne pourrait jamais être qu'environ celui de 576 à 577 » (calcul de Huygens, dans une hypothèse cartésienne d'une force centrale), bien trop différent de celui de 177 à 178 obtenu par comparaison des mesures de Laponie à celle de Paris. Dans l'hypothèse d'une Terre homogène, Newton donnait un coefficient d'aplatissement de 1/230. Clairaut a montré que, sans cette hypothèse, le rapport doit être plus petit. On s'accorde aujourd'hui à l'évaluer à 1/298.

¹⁵ « L'erreur de quelques auteurs, qui voulant diminuer l'expression que la théorie donne pour le rayon de l'équateur d'une planète, supposent que les colonnes de fluide qui vont du centre à la surface, sont d'autant plus denses, qu'elles sont plus voisines de l'équateur ». Critiquer Newton n'était pas si facile pour un géomètre du XVIII^e siècle, témoin cette note de D'Alembert dans une lettre à Cramer : « Mais je crains si fort les assertions dans une matière si importante, que je ne me presse pas de rien publier là dessus. Je serois fâché d'ailleurs d'attirer à Newton le coup de pied de l'âne, & je ne publieray mon travail sur son système qu'avec tous les eloges dûs à ce grand homme, et toutes les restrictions que la matière mérite »

Mais tel n'est pas l'objet de notre article. Nous avons voulu montrer un moment de l'histoire de la mathématisation de la physique. La maîtrise de ce type de problème est passée de la compétence des physiciens à celle des mathématiciens. Lagrange, Laplace, Legendre, ..., plus près de nous Poincaré et bien d'autres vont intervenir sur le sujet.

Conclusion

La première moitié de l'ouvrage de Clairaut est donc consacrée à l'exposé, l'explicitation, puis l'application à différentes hypothèses de pesanteur de son principe d'équilibre des fluides. Retenons deux idées essentielles :

— La première est issue du sens à donner au traitement de ces différentes hypothèses. Chez Maupertuis et Bouguer, cet examen remplissait un rôle à double détente. Le premier temps leur était commun : prendre des distances calculées par rapport aux enjeux philosophiques. Chez Bouguer, l'autonomie par rapport à ces enjeux lui permettait de discuter en termes analytiques la possibilité de différentes lois d'attraction, tandis que Maupertuis cherchait à légitimer l'hypothèse d'attraction universelle. Dans un cas comme dans l'autre, l'équilibre était traduit en termes d'équations différentielles. Clairaut ne peut donc faire autrement qu'inclure cette trame d'intelligibilité et y associer les vertus de son principe, vertus qui furent déplacées par la suite, lorsqu'il ne fut plus d'actualité de remettre en cause la loi d'attraction newtonienne.

Il y ajoute une qualité plus subtile, mais d'importance pour les voies de la physique mathématique : une loi peut certes amener à des calculs irrésolubles avec les techniques du moment, mais elle doit permettre une approximation, et cette approximation doit pouvoir être modifiée continûment suivant la complexité des hypothèses retenues. Ces calculs doivent autoriser un certain nombre de discriminations. Meilleures sont les discriminations, meilleur est le principe utilisé.

— La seconde idée est que la coexistence de l'interprétation physique en termes de canaux avec l'utilisation mathématique qui seule permet d'amener la notion de potentiel et son lien avec la pression et la densité, telle que nous l'avons vu apparaître au fil des déterminations, est due à la nécessité d'insérer ce discours dans la tradition « mécanique » aussi bien que « géométrique ». D'où le double aspect que recouvre la généralité des principes de Clairaut, ils peuvent s'appliquer dans un grand nombre d'hypothèses de pesanteur ou de constitution de la Terre, et parallèlement leur énonciation mathématique impose un réseau de contraintes qui appartiennent à l'univers de l'analyse.

Bibliographie

- Pour comprendre l'évolution de la géodésie, voir et l'ouvrage :
LACOMBE Henri et COSTABEL Pierre ed., *La figure de la Terre du XVIIIe siècle à l'ère spatiale*, Gauthier-Villars, 1988.
- MONTUCLA Jean-Etienne (et Lalande), *Histoire des mathématiques*, t. IV, p. 137-206, Paris, an X
- TODHUNTER Isaac, *A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth*, London, 1873.

Une bibliographie est donnée par M.-F. Jozeau, *Matapli* n° 44, p. 41.

- Pour situer le travail physico-mathématique avec des textes d'époque et un texte moderne :

EULER Léonard, « Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides », *Mémoires de Berlin*, 1755, 1757, *Opera Omnia*, II, t.12, p. 2-132.

HUYGENS Christiaan, *Œuvres complètes*, t. XVIII, XIX et t. XXI, La Haye, M. Nijhoff, 1937.

LAGRANGE Joseph Louis., *Mécanique Analytique* , 1ère éd. 1788, 2ème éd. 1811-15.

MAUPERTUIS Pierre Louis MOREAU De, *La figure de la Terre déterminée par les observations de MM de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier, Outhier, Celsius faites par ordre du Roy au cercle polaire*, Imprimerie Royale, 1738.

POINCARÉ Henri, *Théorie du potentiel newtonien*, 1899, Réed. J. Gabay, 1990.

- A propos de Clairaut, voici deux classiques :

BRUNET Pierre, *La vie et l'oeuvre de Clairaut (1713-1765)*, PUF, 1952.

TATON René, « Inventaire chronologique de l'oeuvre d'Alexis-Claude Clairaut », *Revue d'Histoire des Sciences* , t. 29, 1976, p. 97-122 et le « Supplément à la bibliographie de Clairaut » t. 31, 1978.