HAL open science

Surface projective convexe de volume fini

Ludovic Marquis

To cite this version:

Ludovic Marquis. Surface projective convexe de volume fini. Annales de l'Institut Fourier, 2012, 62 (1), p. 325-392. 10.5802/aif.2707 . hal-00361030v2

HAL Id: hal-00361030

https://hal.science/hal-00361030v2

Submitted on 28 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SURFACE PROJECTIVE CONVEXE DE VOLUME FINI

par

Ludovic Marquis

Résumé. — Une surface projective convexe est le quotient d'un ouvert proprement convexe Ω de l'espace projectif réel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ par un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Nous donnons plusieurs caractérisations du fait qu'une surface projective convexe est de volume fini pour la mesure de Busemann. On en déduit que si Ω n'est pas un triangle alors Ω est strictement convexe, à bord C^1 et qu'une surface projective convexe S est de volume fini si et seulement si la surface duale est de volume fini.

Abstract. — A convex projective surface is the quotient of a properly convex open Ω of the projective real space $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ by a discret subgroup Γ of $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. We give some caracterisations of the fact that a convex projective surface is of finite volume for the Busemann's measure. We deduce of this that if Ω is not a triangle then Ω is strictly convex, with C^1 boundary and that a convex projective surface S is of finite volume if and only if the dual surface is of finite volume.

Introduction

0.1. Exemples de convexes divisibles. — Soit $\mathcal{C}$ une partie de l'espace projectif réel $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, on dira que $\mathcal{C}$ est *convexe* lorsque l'intersection de $\mathcal{C}$ avec toute droite de $\mathbb{P}^n$ est connexe. Une partie convexe $\mathcal{C}$ est dite *proprement convexe* lorsqu'il existe un ouvert affine contenant l'adhérence $\overline{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$. Elle est dite *strictement convexe* lorsque tout segment inclus dans le bord $\partial\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ est trivial.

Le but de ce texte est d'étudier les ouverts proprement convexes Ω de $\mathbb{P}^n$ qui possèdent "beaucoup de symétries". Un cas qui a été beaucoup étudié est celui où "beaucoup de symétrie" signifie qu'il existe un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui préserve Ω et tel que le quotient $\Omega/_\Gamma$ est compact. De tels ouverts s'appellent des *convexes divisibles* et on dit alors que Γ *divise* Ω. Nous allons dans ce texte remplacer l'hypothèse de compacité du quotient $\Omega/_\Gamma$ par une hypothèse de "finitude de volume", et nous restreindre à la dimension 2. Mais commençons par donner des exemples du cas compact.

L'exemple le plus simple de convexe divisible est le simplexe. Toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ définit un pavage de $\mathbb{P}^n$ en 2^n simplexes. La composante neutre du stabilisateur de chaque simplexe ouvert est le groupe D des matrices diagonales dans la base $\mathcal{B}$ à coefficients positifs. D est un groupe de Lie abélien isomorphe à $\mathbb{R}^n$ qui agit simplement transitivement sur chaque simplexe ouvert S. Tout réseau de D divise donc S. On vient donc

de construire un convexe divisible non strictement convexe. On remarque que dans cet exemple tout groupe qui divise S agit de façon réductible sur $\mathbb{R}^{n+1}$, et S est réductible au sens suivant.

Un ouvert proprement convexe Ω est *réductible* si l'une des deux composantes connexes C de $\pi^{-1}(\Omega)$ (π est la projection naturelle $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$) est *réductible*. Ce qui signifie qu'il existe une décomposition $\mathbb{R}^{n+1} = E_1 \oplus E_2$ non triviale et des cônes convexes C_1 de E_1 et C_2 de E_2 tel que $C = C_1 + C_2$. Sinon, on dit qu'ils sont *irréductibles*. Vey a montré dans [**Vey70**] que tout convexe divisible se décompose en un produit de convexes divisibles irréductibles. On s'intéresse donc avant tout aux convexes divisibles irréductibles.

Parmi les convexes divisibles il y a une famille qui se distingue des autres, celles des convexes divisibles homogènes c'est-à-dire ceux pour lesquels le groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ des transformations de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui préserve Ω agit transitivement. Les travaux de Koecher, Vinberg et Borel ont permis de classifier les convexes divisibles homogènes. Voici la liste des convexes divisibles irréductibles homogènes :

Les espaces hyperboliques $\mathbb{H}^n = \pi(\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - x_{n+1}^2 > 0 \text{ et } x_{n+1} > 0\})$ forment la liste complète (avec $n \geqslant 1$) des convexes divisibles strictement convexes et homogènes. Le groupe d'automorphisme de $\mathbb{H}^n$ est bien entendu $SO_{n,1}(\mathbb{R})$. On remarquera qu'en toute dimension $n \geqslant 1$, il existe un unique convexe divisible strictement convexe et homogène.

Il existe quatre familles de convexes divisibles irréductibles non strictement convexes et homogènes. En voici la liste avec $n \geqslant 2$:

- $\Pi_n(\mathbb{R}) = \pi(\ \{$ Les matrices réelles $(n+1) \times (n+1)$ symétriques définies positives) $\}$, il est de dimension $m = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ et son groupe d'automorphisme est $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$.
- $\Pi_n(\mathbb{C}) = \pi(\ \{$ Les matrices complexes $(n+1) \times (n+1)$ hermitiennes définies positives $\})$, il est de dimension $m = n^2 - 1$ et son groupe d'automorphisme est $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$.
- $\Pi_n(\mathbb{H}) = \pi(\ \{$ Les matrices quarternioniques $(n+1) \times (n+1)$ hermitiennes définies positives $\})$, il est de dimension $m = (2n+1)(n-1)$ et son groupe d'automorphisme est $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{H})$.
- $\Pi_3(\mathbb{O})$ un convexe "exceptionnel" de dimension 26 et tel que $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\Pi_3(\mathbb{O}))) = \mathfrak{e}_{6(-26)}$.

Par conséquent, contrairement au cas strictement convexe, il n'existe pas de convexe divisible irréductible non strictement convexe et homogène en toute dimension.

Expliquons succinctement l'histoire de cette classification. À la fin des années 50, Koecher et Vinberg ont classifié les ouverts proprement convexes symétriques de $\mathbb{P}^m$ ([**Vin63**]). Dans les années 60, Borel a montré dans [**Bor63**] que tout groupe réductif contient un réseau cocompact. On peut déduire de cela que tout ouvert Ω proprement convexe et symétrique est divisible, puisque si Ω est symétrique alors le groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est un groupe réductif qui agit transitivement et proprement sur Ω. Le dernier pas vers la classification des convexes divisibles homogènes a été fait par Vinberg ([**Vin65**]) qui a

classifié les ouverts proprement convexes homogènes. Il résulte de cette classification que tout ouvert proprement convexe homogène est symétrique si et seulement si le groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est unimodulaire. Par conséquent, tout ouvert proprement convexe homogène est divisible si et seulement si il est symétrique.

Kac et Vinberg ont construit les premiers exemples de convexe divisible strictement convexe et non homogène dans [**KV67**] à l'aide de groupe de Coxeter. Johnson et Millson ont construit en toute dimension $n \geqslant 2$ des convexes divisibles irréductibles, strictement convexes et non homogènes ([**JM84**]) en déformant des réseaux cocompacts de $\mathrm{SO}_{n,1}(\mathbb{R})$. Kapovich et Benoist ont construit (Benoist pour $n = 4$ dans [**Ben06**] et Kapovich pour $n \geqslant 4$ dans [**Kap07**]) des convexes divisibles strictement convexes, non homogènes et non quasi-isométriques à l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ en toute dimension $n \geqslant 4$.

0.2. Description des principaux résultats. — Revenons au but de ce texte. Tout ouvert proprement convexe est naturellement muni d'une métrique Finslérienne (distance de Hilbert) et de la mesure associée (mesure de Busemann). Le but de ce texte est d'étudier les ouverts proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ pour lesquels il existe un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω et tel que le quotient $\Omega/_\Gamma$ muni de la mesure μ héritée de la mesure de Busemann soit de volume fini.

Nous allons démontrer les théorèmes suivants :

Théorème 0.1. — *(Corollaire 3.5) Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^2$. Si $\mu(\Omega/_\Gamma) < \infty$ et Ω n'est pas un triangle alors l'adhérence de Zariski de Γ est :*

- $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ *ou*
- *Un conjugué de $\mathrm{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$ et l'ouvert Ω est un ellipsoïde (i.e l'intérieur d'une ellipse).*

Théorème 0.2. — *(Théorème 5.18) Toute surface admettant une structure projective proprement convexe de volume fini est de type fini.*

Théorème 0.3. — *(Corollaire 5.29) Soit S une surface sans bord et de type fini, une structure projective proprement convexe sur S est de volume fini si et seulement si l'holonomie des lacets élémentaires (Définition 5.8) de S est parabolique.*

On obtiendra ensuite les résultats suivants :

Théorème 0.4. — *(Théorème 6.8) Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω, l'action de Γ sur Ω est de covolume fini si et seulement si l'action de ${}^t\Gamma$ sur l'ouvert dual Ω^* est de covolume fini.*

Théorème 0.5. — *(Corollaire 6.5 et théorème 6.9) Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret qui préserve Ω, on suppose que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini et que Ω n'est pas un triangle. Alors, Ω est strictement convexe et le bord $\partial\Omega$ de Ω est C^1.*

Théorème 0.6. — *(Théorème 6.11) Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω, on suppose que Γ n'est pas virtuellement*

abélien. Alors, l'action de Γ *sur* Ω *est de covolume fini si et seulement si* Γ *est de type fini et l'ensemble limite* Λ_Γ *de* Γ *vérifie* $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$.

Cette étude permet d'obtenir sur l'espace des structures projectives marquées proprement convexes de volume fini sur la surface de genre g avec p pointes un système de coordonnées à la Fenchel-Nielsen qui montre que cet espace est homéomorphe à $\mathbb{R}^{16g-16+6p}$. Ce système de coordonnées généralise celui employé par Goldman dans le cas compact ([**Gol90**]). Cette étude sera soumise très prochainement ([**Mar09**]).

Voici le plan de ce texte. La première partie est une introduction à la géométrie de Hilbert. Les démonstrations de certains théorèmes peuvent être trouvés dans [**CVV04**, **CVVre**, **Ben**]. On donne quand même les démonstrations de certains théorèmes pour faciliter la lecture de ce texte. Cette partie a pour but de définir la mesure de Busemann et de donner des exemples de parties de volume fini et infini pour celle-ci.

Dans la seconde partie, on étudie la dynamique d'un élément de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe. Cette partie constitue une étude élémentaire mais essentiel pour nos résultats.

Dans la troisième partie on montre le théorème 0.1. Le point clé étant de montrer l'irréductibilité du groupe Γ.

Le but de la quatrième partie est de donner une courte démonstration d'un théorème de Lee ([**Lee**]). Ce théorème assure l'existence d'un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action d'un groupe discret sur un ouvert proprement convexe. Ce résultat est le point de départ de l'étude des surfaces projectives proprement convexes de volume fini. On introduit aussi la notion de secteur qui permettra d'étudier les surfaces projectives proprement convexes à l'infini.

L'objet de la cinquième partie est de montrer les théorèmes 0.2 et 0.3. Pour cela, on utilise abondamment les parties 2 et 4. On commencera par définir précisement les notions de surface projective, surface projective proprement convexe et surface projective proprement convexe de volume fini. Ensuite, on montrera le théorème 0.2, en utilisant une minoration uniforme de l'aire de tout triangle idéal. Enfin, on montre le théorème 0.3, les outils essentiels sont le théorème de Lee, la notion de secteur et les estimations de volume de la partie 1.

La sixième partie a pour but de montrer les théorèmes 0.4, 0.5, 0.6. Pour montrer la strict-convexité on utilise la même idée que dans le cas compact mais on a besoin de raffinement. Ensuite, on définit la notion de surface duale, le théorème 0.5 suit. Cette dualité permettra de montrer que Ω est à bord C^1. Enfin, on montrera le théorème 0.6.

Je remercie Yves Benoist pour ses nombreux conseils et nos nombreuses discussions sur ce sujet, Constantin Vernicos pour ces réponses toujours très rapides à mes questions. Je remercie aussi Benjamin Favetto et Mathieu Cossutta, l'un pour ces conseils de rédaction

et l'autre pour quelques discussions autour de ce sujet. Enfin, je remercie le rapporteur anonyme dont les remarques m'ont permis d'améliorer ce texte de façon significative.

1. Géométrie de Hilbert

Cette partie constitue une introduction à la géométrie de Hilbert. Un exposé plus complet peut être trouvé dans les articles [**CVV04**, **CVVre**, **Ben**].

1.1. La métrique d'un ouvert proprement convexe. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$, Hilbert a introduit sur de tels ouverts une distance, la distance de Hilbert, définie de la façon suivante :

Soient $x \neq y \in \Omega$, on note p, q les points d'intersection de la droite (xy) et du bord $\partial\Omega$ de Ω tels que x est entre p et y, et y est entre x et q (voir figure 1). On pose :

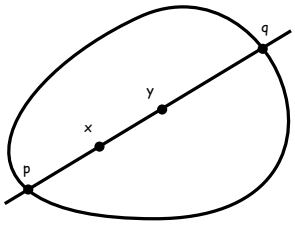

FIGURE 1. La distance de Hilbert

$$d_\Omega(x,y) = \ln([p:x:y:q]) = \ln\left(\frac{\|p-y\|\cdot\|q-x\|}{\|p-x\|\cdot\|q-y\|}\right) \quad \text{et} \quad d_\Omega(x,x) = 0$$

- $[p:x:y:q]$ désigne le birapport des points p, x, y, q.
- $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne quelconque sur un ouvert affine A qui contient l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω.

Remarque. — Il est clair que d_Ω ne dépend ni du choix de A, ni du choix de la norme euclidienne sur A.

Fait 1. — *Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$,*

- *d_Ω est une distance sur Ω.*
- *(Ω, d_Ω) est un espace métrique complet.*
- *La topologie induite par d_Ω coïncide avec celle induite par $\mathbb{P}^n$.*
- *Le groupe $Aut(\Omega)$ des transformations projectives de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui préservent Ω est un sous-groupe fermé de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ qui agit par isométrie sur (Ω, d_Ω). Il agit donc proprement sur Ω.*

On peut trouver une démonstration de cet énoncé dans [**Ben**].

1.2. La structure finslérienne d'un ouvert proprement convexe. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$, la métrique de Hilbert d_Ω est induite par une structure finslérienne sur l'ouvert Ω. On identifie le fibré tangent $T\Omega$ de Ω à $\Omega \times A$.

Soient $x \in \Omega$ et $v \in A$, on note p^+ (resp. p^-) le point d'intersection de la demi-droite définie par x et v (resp $-v$) avec $\partial\Omega$.

On pose : $\|v\|_x = \left(\frac{1}{\|x-p^-\|} + \frac{1}{\|x-p^+\|}\right)\|v\|$.

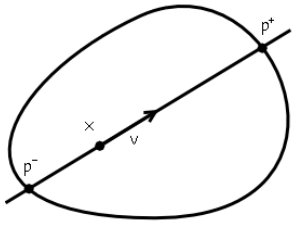

FIGURE 2. La métrique de Hilbert

Fait 2. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$ et A un ouvert affine qui contient $\overline{\Omega}$,*

- *la distance induite par la métrique finslérienne $\|\cdot\|$. est la distance d_Ω.*
- *Autrement dit on a les formules suivantes :*
  - $\|v\|_x = \frac{d}{dt}|_{t=0} d_\Omega(x, x+tv)$, *où $v \in A$, $t \in \mathbb{R}$ assez petit.*
  - $d_\Omega(x,y) = \inf \int_0^1 \|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)} dt$, *où l'inf est pris sur les chemins σ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\sigma(0) = x$ et $\sigma(1) = y$.*

Remarque. — La quantité $\|v\|_x$ est donc indépendante du choix de A et de $\|\cdot\|_A$.

1.3. Mesure sur un ouvert proprement convexe (dite mesure de Busemann). — Nous allons construire une mesure borélienne μ_Ω sur Ω, de la même façon que l'on construit une mesure borélienne sur une variété riemanienne.

Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$, on note :

- $B_x(1) = \{v \in T_x\Omega \,|\, \|v\|_x < 1\}$
- Vol est la mesure de Lebesgue sur A normalisée pour avoir $\mathrm{Vol}(\{v \in A \,|\, \|v\| < 1\}) = 1$.

On peut à présent définir la mesure μ_Ω. Pour tout borélien $\mathcal{A} \subset \Omega \subset A$, on pose :

$$\mu_\Omega(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \frac{dVol(x)}{\mathrm{Vol}(B_x(1))}$$

La mesure μ_Ω est indépendante du choix de A et de $\|\cdot\|$, car c'est la mesure de Hausdorff de (Ω, d_Ω) (Exemple 5.5.13 [BBI01]). (Pour une introduction aux mesures de Hausdorff, on pourra regarder [BBI01]). La mesure μ_Ω est donc $\mathrm{Aut}(\Omega)$-invariante.

1.4. Un résultat de comparaison. — Dans la proposition suivante, il y a deux ouverts en jeu, on ajoute donc aux notations introduites précédemment le symbole de l'ouvert auxquelles elles correspondent (ex : $\|v\|_x^\Omega$, p_Ω^-, $B_x^\Omega(1)$, etc...).

Proposition 1.1. — *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts proprement convexes de $\mathbb{P}^n$ tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, alors :*

- *Les métriques finslériennes de Ω_1 et Ω_2 vérifient : $\|v\|_x^{\Omega_2} \leqslant \|v\|_x^{\Omega_1}$ pour tout $x \in \Omega_1$ et tout $v \in T_x\Omega_1 = T_x\Omega_2$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $p_{\Omega_1}^+ = p_{\Omega_2}^+$ et $p_{\Omega_1}^- = p_{\Omega_2}^-$.*
- *$\forall x, y \in \Omega_1$, on a $d_{\Omega_2}(x,y) \leqslant d_{\Omega_1}(x,y)$.*
- *$\forall x \in \Omega_1$, on a $B_x^{\Omega_1}(1) \subset B_x^{\Omega_2}(1)$ avec égalité si et seulement si $\Omega_1 = \Omega_2$.*
- *Pour tout borélien $\mathcal{A}$ de Ω_1, on a $\mu_{\Omega_2}(\mathcal{A}) \leqslant \mu_{\Omega_1}(\mathcal{A})$.*

1.5. Quelques résultats en géométrie de Hilbert plane. —

1.5.1. Un résultat sur les ouverts proprement convexes de $\mathbb{P}^2$. — On souhaite montrer la proposition suivante :

Proposition 1.2. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et s un point du bord $\partial\Omega$ de Ω, alors, pour tout voisinage V de s dans $\overline{\Omega}$, on a $\mu_\Omega(V \cap \Omega) = \infty$.*

Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et un point $x \in \Omega$, on notera $D_x^\Omega(\varepsilon)$ le disque de centre $x \in \Omega$ et rayon $\varepsilon > 0$: $D_x^\Omega(\varepsilon) = \{y \in \Omega \,|\, d_\Omega(x,y) < \varepsilon\}$. L'idée est de construire une infinité de disques disjoints de rayon constant inclus dans $V \cap \Omega$. La démonstration se passe en deux étapes. On commence par montrer (lemme 1.4) que le volume des disques de rayon ε est uniformément minoré. Ensuite, on construit une suite de disques disjoints inclus dans $V \cap \Omega$.

Nous allons avoir besoin du théorème suivant dû à Benzécri ([**Ben60**]). On munit l'ensemble $\mathcal{E} = \{(\Omega, x) \,|\, \Omega$ est un ouvert proprement convexe de : $\mathbb{P}^2$ et $x \in \Omega\}$ de la topologie de Hausdorff pointée.

***Théorème 1.3* (Benzécri).** — *L'action de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ sur l'ensemble $\mathcal{E} = \{(\Omega, x) \,|\, \Omega$ est un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et $x \in \Omega\}$ est propre et cocompacte.*

On obtient la proposition suivante :

Lemme 1.4. — *Le volume minimum d'un disque de rayon ε d'un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ est strictement positif. Autrement dit :*

$$\inf_{(\Omega,x)\in\mathcal{E}} \mu_\Omega(D_x^\Omega(\varepsilon)) > 0$$

Démonstration. — La fonction qui a $(\Omega, x) \in \mathcal{E}$ associe $\mu_\Omega(D_x^\Omega(\varepsilon))$ est continue et $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$-invariante. Par conséquent, le théorème 1.3 montre que l'infimum de cette fonction est atteint sur $\mathcal{E}$. C'est ce qu'il fallait montrer. □

À présent, nous allons chercher à évaluer la taille euclidienne des disques de Ω.

Lemme 1.5. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et un point $s \in \partial\Omega$, on choisit une carte affine A contenant $\overline{\Omega}$. On se donne D_0 une droite de $\mathbb{P}^2$ passant par s tel que $\Omega \cap D_0 = \varnothing$. On considère un point $x \in \Omega$. On note D_1 la droite parallèle à D_0 (dans la carte A) passant par x. On note D_∞ une droite parallèle (dans la carte A) à D_0 qui ne rencontre pas Ω. Enfin, on note D_e la droite parallèle (dans la carte A) à D_0 et tel*

que le birapport du quadruplet de droites $(D_0, D_1, D_e, D_\infty)$ *est égale à* $e = \exp(1)$. *Pour terminer, on note* B *la composante connexe de* $\Omega - D_e$ *qui contient* x. *Alors,* $D_x^\Omega(1)$ *est inclus dans* B.

Démonstration. — La figure 3 peut aider à suivre cette démonstration.

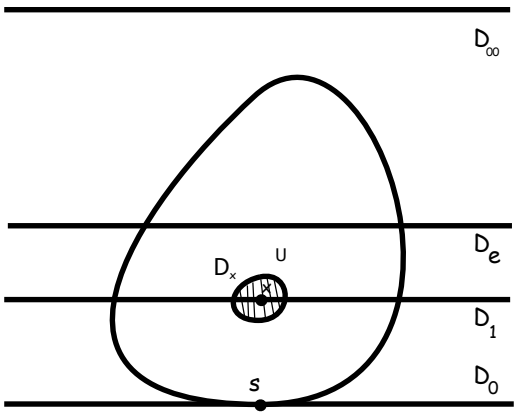

FIGURE 3. Démonstration du lemme 1.5

Pour montrer ce lemme, il faut utiliser la proposition 1.1. On choisit pour Ω_2 n'importe quel rectangle contenant Ω, délimité par les droites D_0 et D_∞ et tel que les côtés donnés par D_0 et D_∞ sont des côtés opposés de Ω_2. La proposition 1.1 montre que $D_x^\Omega(1) \subset D_x^{\Omega_2}(1)$. Par conséquent, il suffit de montrer que $D_x^{\Omega_2}(1)$ est inclus entre les droites D_e et D_0. Mais Ω_2 est un rectangle, par conséquent, comme la distance de Hilbert est défini en terme de birapport, le disque $D_x^{\Omega_2}(1)$ est inclus dans un rectangle dont les côtés sont parallèles à ceux de Ω_2 et inclus entre les droites D_e et D_0. □

On peut à présent montrer la proposition 1.2 lorsque s possède un voisinage V dans $\mathbb{P}^2$ tel que $V \cap \partial\Omega$ ne contient aucun segment non trivial.

Lemme 1.6. — *Soient* Ω *un ouvert proprement convexe de* $\mathbb{P}^2$ *et un point* s *du bord* $\partial\Omega$ *qui possède un voisinage* V *dans* $\mathbb{P}^2$ *tel que* $V \cap \partial\Omega$ *ne contient aucun segment non trivial ; alors, pour tout voisinage* V *de* s *dans* $\overline{\Omega}$, *on a* $\mu_\Omega(V \cap \Omega) = \infty$.

Démonstration. — Nous allons construire une infinité de disque de rayon 1 dans $V \cap \Omega$. On se donne un point x de $V \cap \Omega$ et on considère le segment $[x, s[$ inclus dans Ω. Ce segment fournit une géodésique λ de longueur infini que l'on paramètre par la longueur d'arc pour la métrique de Hilbert. Par conséquent, si on note $x_n = \lambda(3n)$ alors les disques $D_n = D_{x_n}^\Omega(1)$ sont disjoints. Il reste à comprendre pourquoi ils sont inclus dans $V \cap \Omega$ pour n assez grand.

On se donne D_s une droite de $\mathbb{P}^2$ passant par s tel que $\Omega \cap D_s = \varnothing$. On note D_n la droite parallèle à D_s passant par $\lambda(3n-1)$ et on note B_n la composante connexe de $\Omega - D_n$ qui

contient x_n. Si V est un voisinage de s dans $\mathbb{P}^2$ tel que $V \cap \partial\Omega$ ne contient aucun segment non trivial alors B_n est inclus dans V pour n assez grand.

De plus, le lemme 1.5 montre que les disques de centre x_n et de rayon 1 sont inclus dans B_n pour n assez grand. L'ensemble $V \cap \Omega$ contient donc une infinité de disques disjoints et leur volume est uniformément minoré par le lemme 1.4. L'ensemble $V \cap \Omega$ est donc de volume infini. □

Il faut à présent traiter le cas contraire : s'il existe un voisinage de s dans $\mathbb{P}^2$ qui contient un segment du bord de Ω alors il existe un point $s' \in V \cap \partial\Omega$ tel que s' appartient à l'intérieur d'un segment de Ω. Il reste donc à montrer le lemme suivant pour terminer la démonstration de la proposition 1.2.

Lemme 1.7. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et un point s du bord $\partial\Omega$, on suppose que s est sur l'intérieur d'un segment S du bord de Ω ; alors, pour tout voisinage V de s dans $\overline{\Omega}$, on a $\mu_\Omega(V \cap \Omega) = \infty$.*

Démonstration. — La figure 4 peut aider à suivre la démonstration.

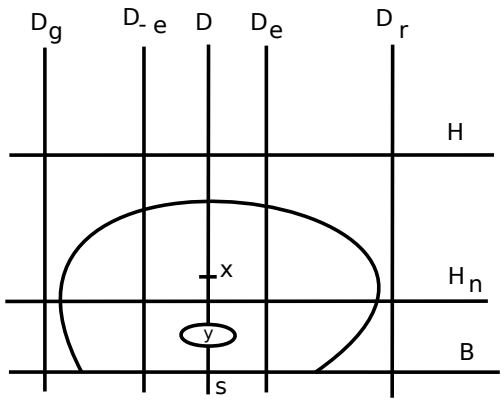

FIGURE 4. Démonstration du lemme 1.7

Dans ce cas, on ne peut pas trouver une infinité de disques de rayon 1, mais nous allons construire une infinité de disque de rayon ε dans $V \cap \Omega$, avec ε assez petit. On se donne un point x de $V \cap \Omega$ et on considère le segment $[x, s[$ inclus dans Ω. Ce segment fournit une géodésique λ de longueur infini que l'on paramètre par la longueur d'arc pour la métrique de Hilbert. On définit la suite $x_n = \lambda(3n)$. Si $\varepsilon < 1$ alors les disques $D_n = D^\Omega_{x_n}(\varepsilon)$ sont disjoints.

Il reste à comprendre pourquoi ils sont inclus dans $V \cap \Omega$ pour n assez grand, si ε est assez petit. Le lemme 1.5 montre que ces disques tendent vers un sous-segment S' de S. Comme S' peut ne pas être trivial il faut prendre ε assez petit pour que les disques D_n soient dans $V \cap \Omega$ pour n assez grand. On va utiliser la même idée que pour le lemme 1.5 mais cette fois-ci, au lieu de pousser les D_n vers le bord de Ω, nous allons contrôler leur taille dans le sens "parallèle" au segment S du bord de Ω.

Pour cela, on note D la droite passant par x et s. On se donne une carte affine A contenant $\overline{\Omega}$. On considère D_g, D_ε, $D_{-\varepsilon}$ et D_r quatre droites parallèles (dans la carte affine A) à D et tel que :

- Les droites D_r et D_g ne rencontre pas Ω.
- Le birapport de $(D_g, D, D_\varepsilon, D_r)$ est égale à e^ε
- Le birapport de $(D_g, D_{-\varepsilon}, D, D_r)$ est égale à $e^{-\varepsilon}$.

Il faut aussi une droite B passant par s et n'intersectant pas Ω, ainsi qu'une droite H parallèle à B et n'intersectant pas Ω. L'ouvert Ω est donc inclus dans le quadrilatère Ω_2 délimité par les droites H, D_r, B, D_g. Comme la distance de Hilbert est défini en terme de birraport, il vient que tout disque $D_y^{\Omega_2}(\varepsilon)$ de Ω_2 de centre $y \in]x, s[$ et de rayon ε est inclus dans le quadrilatère délimité par les droites $H, D_\varepsilon, B, D_{-\varepsilon}$.

Il est essentiel de remarquer que lorsque ε tend vers 0, les droites D_ε et $D_{-\varepsilon}$ converge vers D.

Pour conclure, notons H_n une droite parallèle à H et passant par $\lambda(3n-1)$. La proposition 1.1 et le lemme 1.5 montre que les disques D_n de Ω de centre x_n et de rayon ε sont inclus dans le quadrilatère délimité par les droites $H_n, D_\varepsilon, B, D_{-\varepsilon}$. Par conséquent, si l'on choisit ε assez petit alors les disques D_n sont inclus dans $V \cap \Omega$, pour n assez grand.

Leur volume est uniformément minoré par le lemme 1.4. L'ensemble $V \cap \Omega$ est donc de volume infini. □

Remarque. — Le théorème de Benzécri 1.3 est en fait valable en toute dimension. Le lemme 1.4 peut donc s'énoncer en toute dimension. L'énoncé de la proposition 1.2 se généralise aussi en dimension quelconque et la méthode de démonstration peut aussi s'adapter au prix de quelques complications techniques.

1.5.2. Un résultat sur les pics. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et un point $p \in \partial\Omega$, l'ensemble des droites de $\mathbb{P}^2$ concourantes en p et tel que $D \cap \Omega = \varnothing$ est un segment fermé E_p de $(\mathbb{P}^2)^*$. On a la dichotomie suivante :

- L'ensemble E_p est un singleton dans ce cas $\partial\Omega$ est C^1 en p, et l'unique droite de E_p est la *tangente* au bord $\partial\Omega$ de Ω en p.
- Sinon, $\partial\Omega$ n'est pas C^1 en p, et les points extrémaux du segment E_p sont les *demi-tangentes* à $\partial\Omega$ en p.

Définition 1.8. — Soient $0 < \alpha < 1$, Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et x un point C^1 du bord $\partial\Omega$ de Ω, on dit que x *est* $\mathrm{C}^{1,\alpha}$ lorsqu'il existe $K > 0$ et V un voisinage de p dans $\partial\Omega$ tel que $\forall y \in V$, $d_{\mathbb{E}}(y, T_x\Omega) \leqslant K d_{\mathbb{E}}(x, y)^\alpha$, où $d_{\mathbb{E}}$ est une distance euclidienne sur un ouvert affine contenant $\overline{\Omega}$.

Définition 1.9. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$, un *pic* P est un triangle ouvert de Ω qui possède un et un seul sommet sur le bord $\partial\Omega$ de Ω, on appelle ce sommet *le sommet à l'infini de* P.

***Théorème 1.10* (CVV)**. — *Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$.*

- *Tout pic de Ω dont le sommet à l'infini est un point non C^1 du bord $\partial\Omega$ de Ω est de volume infini.*
- *Tout pic de Ω dont le sommet à l'infini est un point $\mathrm{C}^{1,\alpha}$ avec $\alpha > 0$ du bord $\partial\Omega$ de Ω est de volume fini.*

Remarque. — Nous n'utiliserons pas le second point. Mais il illustre bien l'importance de la régularité dans l'estimation du volume des pics, qui sera essentielle dans ce texte. On pourra trouver une démonstration dans [**CVV04**] du premier et du second point. Nous donnons une démonstration du premier point pour la commodité du lecteur.

Remarque. — La généralisation du théorème 1.10 en dimension supérieure, où les pics seraient des simplexes avec un seul point sur le bord n'est pas du tout évidente. C'est encore une question ouverte.

Nous allons utiliser la proposition 1.1 et le lemme suivant.

Lemme 1.11. — *Soit Ω_0 l'ouvert proprement convexe de $\mathbb{R}^2$ défini par $\Omega_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x,y > 0\}$, tout pic dont le sommet à l'infini est l'origine $(0,0)$ est de volume infini pour μ_{Ω_0}.*

Démonstration. — L'homothétie γ de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre l'origine préserve Ω_0. Soit P un pic de Ω_0 dont le sommet à l'infini est l'origine. On note D la droite engendré par le côté opposé à l'origine de P, et A le quadrilatère fermé délimité par les côtés de P contenant l'origine, la droite D et la droite γD. Ainsi, $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma A$. Par conséquent, comme γ préserve la mesure μ_Ω et que $\mu_\Omega(A) > 0$. Il vient que $\mu_\Omega(P) = \infty$. □

Démonstration du premier point du théorème 1.10. — Il reste simplement à remarquer que si p est un point non C^1 de $\partial\Omega$ alors Ω est inclus dans un triangle dont l'un des sommets est p. Comme l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x,y > 0\}$ est un triangle, la proposition 1.1 et le lemme précédent montre que tout pic de Ω dont le sommet à l'infini est le point P est de volume infini. □

1.5.3. Minoration de l'aire des triangles idéaux. —

Définition 1.12. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$, un *triangle idéal de* Ω est un triangle ouvert dont les sommets appartiennent au bord de Ω.

Théorème 1.13 **(CVV)**. — *Il existe une constante strictement positive $C_{\mathbb{P}^2}$ tel que pour tout ouvert Ω proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et tout triangle idéal Δ de Ω on ait $\mu_\Omega(\Delta) \geqslant C_{\mathbb{P}^2} > 0$.*

Démonstration. — On note $(p_i)_{i=1\ldots3}$ les sommets de Δ. On considère $(D_i)_{i=1\ldots3}$ trois droites de $\mathbb{P}^2$ tel que $D_i \cap \Omega = \varnothing$ et $p_i \in D_i$. Les droites $(D_i)_{i=1\ldots3}$ définissent quatre triangles ouverts de $\mathbb{P}^2$. Un seul d'entre eux contient l'ouvert Ω, on le note T. La proposition 1.1 montre que $\mu_\Omega(\Delta) \geqslant \mu_{\mathrm{T}}(\Delta)$. Le lemme 1.14 qui suit conclut la démonstration. □

Lemme 1.14. — *Soit T un triangle de $\mathbb{P}^2$, il existe une constante strictement positive $C_{\mathbb{P}^2}$ tel que pour tout triangle idéal Δ de T on ait $\mu_{\mathrm{T}}(\Delta) \geqslant C_{\mathbb{P}^2}$.*

Démonstration. — La figure 5 peut aider à suivre la démonstration.

On peut supposer que T= $\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \,|\, x,y,z$ sont de même signe$\}$. Le groupe D des matrices diagonales à diagonale strictement positive préserve T. Commençons par remarquer que la proposition 1.2 montre que tout triangle idéal qui possède deux sommets sur le même coté de T est de volume infini. De même, tout triangle idéal qui possède un sommet en commun avec les sommets de T est aussi de volume infini d'après le théorème

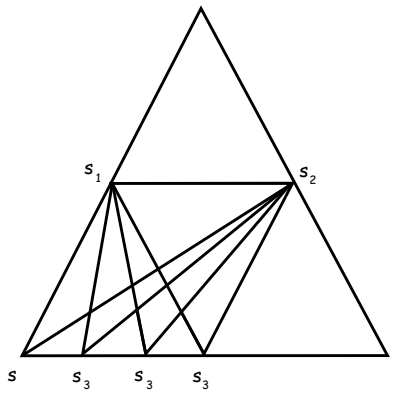

FIGURE 5. Démonstration du lemme 1.14

1.10. On peut donc supposer que les sommets de Δ sont sur chacun des trois côtés ouverts de T.

Le groupe D agit transitivement sur chaque côté ouvert de T. Mieux, le stabilisateur d'un point de l'intérieur d'un côté ouvert de T agit encore transitivement sur chacun des deux autres côtés ouverts. On peut donc supposer que les sommets s_1, s_2 et s_3 du triangle idéal Δ ont pour coordonnées $s_1 = [1:1:0]$, $s_2 = [0:1:1]$ et enfin $s_3 = [x:0:1]$, où $x > 0$. On note Δ_x ce triangle.

Comme $\mu_T(\Delta_x)$ dépend de façon continu de x, il suffit de montrer que le volume de Δ_x admet une limite infinie lorsque x tend vers 0, pour conclure notre démonstration. Le point s_3 tend vers le point $s = [0:0:1]$ lorsque x tend vers 0. On note Δ' le triangle inclus dans Δ et de sommet s, s_1, s_2, et Δ'_x le triangle intersection $\Delta'_x = \Delta_x \cap \Delta'$. La famille des triangles Δ'_x croit lorsque x décroit vers 0 et elle converge vers le triangle Δ'. Le théorème 1.2 montre que le volume de Δ' est infini et le lemme de Fatou montre que le volume de Δ'_x tend vers l'infini lorsque x tend vers 0. Mais les Δ'_x sont inclus dans Δ_x. Ce qui conclut la démonstration. □

Remarque. — On peut montrer que l'aire minimale pour un triangle idéal du triangle T est atteinte pour le triangle Δ_x avec $x = 1$, et son aire est (avec les normalisations que l'on a choisi) $\frac{\pi^3}{24}$, voir [**CVV04**].

Remarque. — La généralisation du théorème 1.13 en dimension supérieure est fausse. En effet, on peut construire sans peine une suite de tétraèdres idéaux (non dégénérés) de l'espace hyperbolique dont le volume tend vers 0.

2. Dynamique

Dans cette partie nous allons étudier les différentes dynamiques possibles pour un élément γ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe.

Remarque. — On munit l'ensemble des fermés de $\mathbb{P}^2$ de la topologie de Hausdorff héritée de la topologie de $\mathbb{P}^2$. Ainsi, toutes les convergences de suites de fermés utilisées dans le reste du texte sont au sens de la topologie de Hausdorff.

2.1. Le cas de $\mathbb{P}^1$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. — On rappelle sans démonstration la proposition suivante :

Proposition 2.1. — *Soit $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, l'élément γ fait partie de l'une des quatre familles suivantes :*

- *La famille des éléments dits hyperboliques qui sont conjugués à une matrice de la forme suivante :*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda\mu = 1 \text{ et } \lambda > \mu > 0$$

- *La famille des éléments dits paraboliques qui sont conjugués à la matrice :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *La famille des éléments dits elliptiques qui sont conjugués à une matrice de la forme suivante :*

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{où, } 0 < \theta < 2\pi$$

- *La famille composée uniquement de l'identité.*

Définition 2.2. — Soient $\gamma \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ et D une droite de $\mathbb{P}^2$ stable par γ, on dira que *l'action de γ sur D est de type hyperbolique (resp. parabolique, resp. elliptique)* lorsque γ restreint à cette droite est un élément hyperbolique (resp. parabolique, resp. elliptique).

2.2. Classification. — La proposition suivante est démontrée dans [Cho94]. On reproduit ici une démonstration pour la commodité du lecteur.

Proposition 2.3. — *Soit Ω un ouvert proprement convexe et un élément $\gamma \in Aut(\Omega)$, γ fait partie de l'une des six familles suivantes :*

- *La famille des éléments dits hyperboliques qui sont conjugués à une matrice de la forme suivante :*

$$\begin{pmatrix} \lambda^+ & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^- \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{où, } \lambda^+ > \lambda^0 > \lambda^- > 0 \\ \text{et } \lambda^+\lambda^0\lambda^- = 1. \end{array}$$

- *La famille des éléments dits planaires qui sont conjugués à une matrice de la forme suivante :*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{où, } \alpha, \beta > 0,\ \alpha^2\beta = 1 \\ \text{et } \alpha,\ \beta \neq 1. \end{array}$$

- *La famille des éléments dits quasi – hyperboliques qui sont conjugués à une matrice de la forme suivante :*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{où, } \alpha,\ \beta > 0,\ \alpha^2\beta = 1 \\ \text{et } \alpha,\ \beta \neq 1. \end{array}$$

- *La famille des eléments dits* <u>*paraboliques*</u> *qui sont conjugués à la matrice suivante :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *La famille des eléments dits* <u>*elliptiques*</u> *qui sont conjugués à une matrice de la forme suivante :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \textit{Où, } 0 < \theta < 2\pi.$$

- *La famille composée uniquemenent de* <u>*l'identité*</u> *:*

Démonstration. — Soit $\gamma \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ on notera $\mathrm{Sp}(\gamma)$ le spectre de γ, pour montrer ce lemme il suffit de montrer 3 points :

- Si $\mathrm{Sp}(\gamma) \subset \mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}(\gamma) \notin \{1, -1\}$ alors on a $\mathrm{Sp}(\gamma) \subset \mathbb{R}_+^*$.
- Si $\mathrm{Sp}(\gamma) \subset \{1, -1\}$ alors γ est diagonalisable ou parabolique.
- Si $\mathrm{Sp}(\gamma) \notin \mathbb{R}$ alors l'unique valeur propre réelle de γ est 1.

Commençons par montrer le premier point. On considère une valeur propre λ de γ de valeur absolue maximale, comme $\mathrm{Sp}(\gamma) \notin \{1, -1\}$ on a $|\lambda| > 1$. On note E la réunion des points et droites stables de γ. L'ensemble $\mathbb{P}^2 - E$ est un ouvert dense, par conséquent il existe un point $x \in (\mathbb{P}^2 - E) \cap \Omega$. Si $\lambda < 0$, le segment $[\gamma^{2n}(x), \gamma^{2n+1}(x)]$ converge vers une droite de $\mathbb{P}^2$, ce qui est absurde car Ω est proprement convexe, donc $\lambda > 0$. En appliquant ce raisonnement à γ^{-1} on obtient que les valeurs propres de valeur absolu maximale et minimale sont positives et par conséquent, comme $\gamma \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Sp}(\gamma) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Montrons à présent le deuxième point. Il s'agit de montrer que γ ne peut pas être conjugué à l'une des 2 matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} u & 1 & \\ & u & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

où, $u = 1$ ou $u = -1$. Supposons qu'il existe un tel $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$. Quitte à travailler avec γ^2 on peut supposer que $u = 1$. Alors, il existe une unique droite D composée de points fixes pour γ. Et, γ possède un unique point fixe $v \in D$ tel que l'action de γ sur toute droite D' passant par v est parabolique si $D' \neq D$. L'élément γ ne préserve donc aucun convexe proprement convexe de $\mathbb{P}^2$.

Enfin, montrons le dernier point. Si le spectre de γ n'est pas réel alors γ est conjugué à une matrice de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} r^{-2} & & \\ & r\cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ & r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{où, } 0 < \theta < 2\pi \text{ et } \theta \neq \pi.$$

L'élément γ possède un unique point fixe v et $\mathbb{P}^2 - \{v\}$ est une réunion d'ellipses disjointes permutées par γ. Par conséquent γ préserve un convexe proprement convexe si et seulement si les ellipses sont globalement préservées par γ, c'est à dire si et seulement si l'unique valeur propre réelle de γ est 1. □

2.3. Résultat élémentaire sur la dynamique. — Les résultats suivants ont déjà été présenté dans [Gol90] ou [Cho94].

2.3.1. Dynamique hyperbolique. — Soit γ un élément hyperbolique de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, l'élément γ est conjugué à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda^+ & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^- \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Où, } \lambda^+ > \lambda^0 > \lambda^- > 0 \\ \text{et } \lambda^+\lambda^0\lambda^- = 1. \end{array}$$

On note :

- p_γ^+ le point propre de $\mathbb{P}^2$ associé à la valeur propre λ^+.
- p_γ^0 le point propre de $\mathbb{P}^2$ associé à la valeur propre λ^0.
- p_γ^- le point propre de $\mathbb{P}^2$ associé à la valeur propre λ^-.
- $D_\gamma^{+,-}$ la droite stable de $\mathbb{P}^2$ associée aux valeurs propres λ^+, λ^-.
- $D_\gamma^{+,0}$ la droite stable de $\mathbb{P}^2$ associée aux valeurs propres λ^+, λ^0.
- $D_\gamma^{-,0}$ la droite stable de $\mathbb{P}^2$ associée aux valeurs propres λ^-, λ^0.

Proposition 2.4. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément hyperbolique $\gamma \in Aut(\Omega)$, alors, on a $p_\gamma^+, p_\gamma^- \in \partial\Omega$ et $p_\gamma^0 \notin \Omega$.*

Démonstration. — Tout d'abord les points $p_\gamma^+, p_\gamma^0, p_\gamma^- \notin \Omega$ puisque $\mathrm{Aut}(\Omega)$ agit proprement sur Ω. Ensuite pour tout $x \in \Omega$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma^n x = p_\gamma^+$ et $\lim\limits_{n\to-\infty} \gamma^n x = p_\gamma^-$ donc $p_\gamma^+, p_\gamma^- \in \partial\Omega$. □

On peut à présent définir l'axe d'un élément hyperbolique qui agit sur un ouvert proprement convexe.

Définition 2.5. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément hyperbolique $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, *l'axe de* γ que l'on notera $\mathrm{Axe}(\gamma)$ est le segment ouvert de la droite $(p_\gamma^- p_\gamma^+)$ qui est inclus dans $\overline{\Omega}$ et dont les extrémités sont p_γ^- et p_γ^+.

Définition 2.6. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et un élément hyperbolique γ de $\mathrm{Aut}(\Omega)$. On suppose que $p_\gamma^0 \in \partial\Omega$. Alors, on note $[p_\gamma^+, p_\gamma^0]$ (resp. $[p_\gamma^-, p_\gamma^0]$) le segment ouvert de la droite $(p_\gamma^+ p_\gamma^0)$ (resp.$(p_\gamma^- p_\gamma^0)$) inclus dans $\overline{\Omega}$. On les appelle les *axes secondaires* de γ.

Définition 2.7. — Soit $c : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{P}^2$ une courbe simple continue, on dit que c est une *courbe convexe* lorsque la composante connexe orientable de $\mathbb{P}^2 - c(\mathbb{S}^1)$ est un ouvert proprement convexe.

Les figures 6 et 7 illustrent la dynamique d'un élément hyperbolique.

Proposition 2.8. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément hyperbolique $\gamma \in Aut(\Omega)$.*

(A) *Si $p_\gamma^0 \notin \overline{\Omega}$ et $Axe(\gamma) \subset \Omega$ alors*
- *$\partial\Omega$ est C^1 en p_γ^+ et en p_γ^-.*
- *$p_\gamma^0 = T_{p_\gamma^+}\partial\Omega \cap T_{p_\gamma^-}\partial\Omega$.*

(B) *Si $p_\gamma^0 \notin \overline{\Omega}$ et $Axe(\gamma) \subset \partial\Omega$ alors*
- *$\partial\Omega$ n'est pas C^1 en p_γ^+ et en p_γ^-.*
- *Les demi-tangentes à $\partial\Omega$ en p_γ^+ sont $(p_\gamma^+ p_\gamma^-)$ et $(p_\gamma^+ p_\gamma^0)$.*
- *Les demi-tangentes à $\partial\Omega$ en p_γ^- sont $(p_\gamma^+ p_\gamma^-)$ et $(p_\gamma^- p_\gamma^0)$.*

(C) *Si* $p_\gamma^0 \in \overline{\Omega}$ *et* $Axe(\gamma) \subset \Omega$ *alors*
- $[p_\gamma^+, p_\gamma^0]$ *et* $[p_\gamma^-, p_\gamma^0] \subset \partial\Omega$.
- $\partial\Omega$ *est* C^1 *en* p_γ^+, p_γ^- *et* $p_\gamma^0 = T_{p_\gamma^+}\partial\Omega \cap T_{p_\gamma^-}\partial\Omega$.

(D) *Si* $p_\gamma^0 \in \overline{\Omega}$ *et* $Axe(\gamma) \subset \partial\Omega$ *alors*
- $[p_\gamma^+, p_\gamma^0]$ *et* $[p_\gamma^-, p_\gamma^0] \subset \partial\Omega$.
- Ω *est un triangle dont les sommets sont* p_γ^+, p_γ^0, p_γ^-.

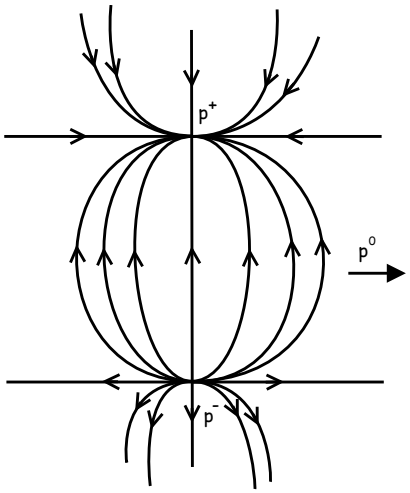

FIGURE 6. Dynamique d'un élément hyperbolique sur $\mathbb{P}^2$

Démonstration. — Les points p_γ^+, p_γ^0 et p_γ^- définissent un pavage de $\mathbb{P}^2$ en quatre triangles fermés. Soient T_1 et T_2 les deux triangles de cette partition tels que $T_1 \cap T_2 = \mathrm{Axe}(\gamma)$, et $x_1 \in \mathring{T}_1$ et $x_2 \in \mathring{T}_2$, la courbe obtenue en concaténant la courbe $(\gamma^t x_1)_{t\in\mathbb{R}}$ et la courbe $(\gamma^{-s}x_2)_{s\in\mathbb{R}}$ et en ajoutant les points limites p_γ^+ et p_γ^- définit une courbe $\mathcal{C}$ convexe analytique en dehors des points p_γ^+ et p_γ^-. $\mathcal{C}$ est C^{1,α^+} en p_γ^+ et C^{1,α^-} en p_γ^-, où $\alpha^+ = \frac{\ln(\lambda^+)-\ln(\lambda^0)}{\ln(\lambda^0)-\ln(\lambda^-)} > 0$ et $\alpha^- = (\alpha^+)^{-1}$. On tire facilement de tout ceci les conclusions de la proposition. □

2.3.2. Dynamique planaire. — Soit γ un élément planaire de $SL_3(\mathbb{R})$, l'élément γ est conjugué à la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{où, } \alpha, \beta > 0,\ \alpha^2\beta = 1 \\ \text{et } \alpha,\ \beta \neq 1. \end{array}$$

On note :
- p_γ le point propre de $\mathbb{P}^2$ associé à la valeur propre β.
- D_γ la droite stable de $\mathbb{P}^2$ associée à la valeur propre α.

La dynamique des éléments planaires étant extrêmement simple, on obtient facilement la propostion suivante.

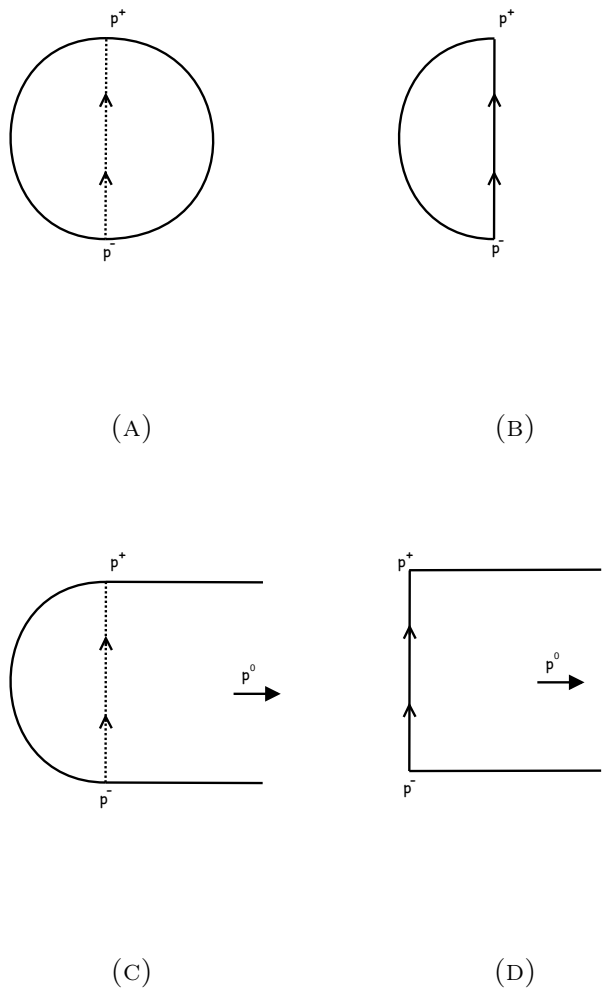

FIGURE 7. Les différentes configurations de la proposition 2.8

Proposition 2.9. — *Soit Ω un ouvert proprement convexe et un élément planaire $\gamma \in Aut(\Omega)$, alors, Ω est un triangle dont l'un des sommets est p_γ et le côté de Ω opposé à p_γ est inclus dans la droite D_γ.*

2.3.3. Dynamique quasi-hyperbolique. — Soit γ un élément quasi-hyperbolique de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, l'élément γ est conjugué à la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Où, } \alpha, \beta > 0,\ \alpha^2\beta = 1 \\ \text{et } \alpha, \beta \neq 1. \end{array}$$

On note :

- p_γ^1 le point propre de $\mathbb{P}^2$ associé à la valeur propre β.
- p_γ^2 le point propre de $\mathbb{P}^2$ associé à la valeur propre α.
- D_γ la droite stable de $\mathbb{P}^2$ associée à la valeur propre α.

On peut définir l'axe d'un élément quasi-hyperbolique qui agit sur un ouvert proprement convexe de la même façon que pour un élément hyperbolique. La même démonstration que dans le cas hyperbolique donne la proposition suivante :

Proposition 2.10. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément quasi-hyperbolique $\gamma \in Aut(\Omega)$, alors, on a $p^1_\gamma, p^2_\gamma \in \partial\Omega$.*

Définition 2.11. — Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément quasi-hyperbolique $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, *l'axe de* γ que l'on notera $\mathrm{Axe}(\gamma)$ est le segment ouvert de la droite $(p^1_\gamma p^2_\gamma)$ qui est inclus dans $\overline{\Omega}$ et dont les extrémités sont p^1_γ et p^2_γ.

La figure 8 illustre la dynamique d'un élément quasi-hyperbolique

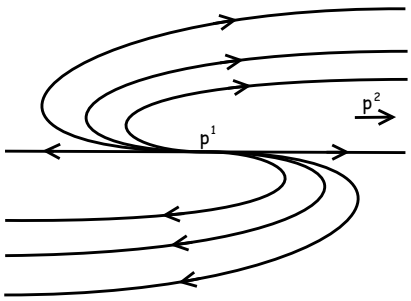

FIGURE 8. Dynamique d'un élément quasi-hyperbolique

Proposition 2.12. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément quasi-hyperbolique $\gamma \in Aut(\Omega)$. Alors,*

- *$Axe(\gamma) \subset \partial\Omega$.*
- *$\partial\Omega$ n'est pas C^1 en p^2_γ et les demi-tangentes à $\partial\Omega$ en p^2_γ sont $(p^1_\gamma p^2_\gamma)$ et D.*
- *$\partial\Omega$ est C^1 en p^1_γ et $T_{p^1_\gamma}\partial\Omega = (p^1_\gamma p^2_\gamma)$.*

Démonstration. — On procède comme pour l'étude de la dynamique d'un élément hyperbolique. La droite $(p^1_\gamma p^2_\gamma)$ et la droite D définissent un pavage en deux parties de $\mathbb{P}^2$. L'action de γ sur D est parabolique et l'action de γ sur $(p^1_\gamma p^2_\gamma)$ est hyperbolique. Les points p^1_γ et p^2_γ définissent deux segments S_1 et S_2 de la droite $(p^1_\gamma p^2_\gamma)$ dont les extrémités sont p^1_γ et p^2_γ. Soit $x \in \mathbb{P}^2 - (D \cup (p^1_\gamma p^2_\gamma))$, la courbe $(\gamma^t x)_{t\in\mathbb{R}}$ a pour limite les points p^1_γ et p^2_γ lorsque t tend vers $\pm\infty$. Si on ajoute le segment S_1 ou bien S_2 à cette courbe on obtient une courbe $\mathcal{C}$ convexe et analytique en dehors des points p^1_γ et p^2_γ. La courbe $\mathcal{C}$ n'est pas C^1 en p^2_γ et admet comme demi-tangentes en p^2_γ, les droites D et $(p^1_\gamma p^2_\gamma)$. La courbe $\mathcal{C}$ est C^1 en p^1_γ et sa tangente est la droite $(p^1_\gamma p^2_\gamma)$. Il faut aussi remarquer que si $y \in \mathbb{P}^2 - (D \cup (p^1_\gamma p^2_\gamma))$ est dans l'autre composante connexe de $\mathbb{P}^2 - (D \cup (p^1_\gamma p^2_\gamma))$, alors la courbe obtenue par le même procédé, mais en ajoutant l'autre segment est une courbe convexe analytique en dehors des points p^1_γ et p^2_γ. On tire facilement de ceci les conclusions de la proposition. $\square$

2.3.4. Dynamique parabolique. — Soit γ un élément parabolique de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, l'élément γ est conjugué à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note :

- p_γ l'unique point fixe de γ sur $\mathbb{P}^2$.
- D_γ l'unique droite fixe de γ sur $\mathbb{P}^2$.

La figure 9 illustre la dynamique d'un élément parabolique.

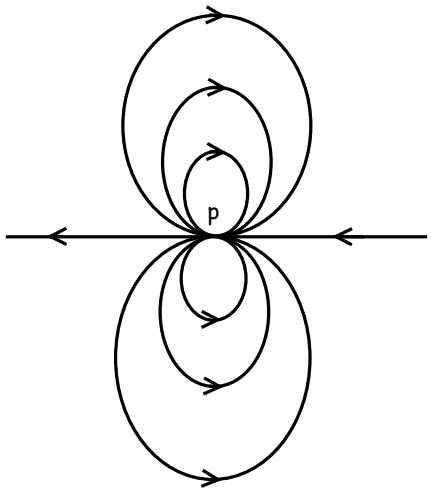

FIGURE 9. Dynamique d'un élément parabolique

Proposition 2.13. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe et un élément parabolique $\gamma \in Aut(\Omega)$ alors*

- *$p \in \partial\Omega$.*
- *$\partial\Omega$ est C^1 en p.*
- *$T_p\partial\Omega = D$.*
- *Le point p n'appartient pas à un segment non trivial du bord de Ω.*

Démonstration. — On procède comme pour l'étude des éléments hyperboliques et quasi-hyperboliques. Soit $x \notin D$, la courbe $\mathcal{C}$ obtenue en ajoutant le point p à la courbe $(\gamma^t x)_{t\in\mathbb{R}}$ définit une courbe convexe analytique (la courbe $\mathcal{C}$ est en fait une ellipse). □

2.3.5. Dynamique elliptique. — On ne se soucie pas des éléments elliptiques car le lemme de Selberg permet de s'en débarrasser sans frais. On rappelle ici un énoncé de celui-ci.

***Lemme 2.14* (Selberg).** — *Tout sous-groupe de type fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est virtuellement sans torsion, c'est à dire possède un sous-groupe d'indice fini sans torsion.*

2.4. Calcul du centralisateur d'un élément de Γ dans $\mathrm{Aut}(\Omega)$. —

Lemme 2.15. — *Soient γ, δ des éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient que :*

- *les éléments γ, δ sont hyperboliques tels que $\{p_\gamma^+, p_\gamma^-, p_\gamma^0\} = \{p_\delta^+, p_\delta^-, p_\delta^0\}$.*
- *Ou bien, les éléments γ, δ sont paraboliques tels que $p_\gamma = p_\delta$ et $D_\gamma = D_\delta$.*
- *Ou bien, les éléments γ et δ sont quasi-hyperboliques tels que $p_\gamma^1 = p_\delta^1$ et $p_\gamma^2 = p_\delta^2$.*

Si le groupe $< \gamma, \delta >$ est discret et préserve un ouvert proprement convexe qui n'est pas un triangle alors le groupe $< \gamma, \delta >$ est cyclique infini.

Démonstration. — Dans les trois cas, un calcul simple montre que le commutateur $\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$ de γ et δ est la matrice identité ou une matrice conjuguée à la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proposition 2.3 montre que le dernier cas est impossible donc γ et δ commutent. Pour conclure, on peut considérer la composante connexe de l'adhérence de Zariski A du groupe $< \gamma, \delta >$ qui est un groupe de Lie abélien. On a donc deux possibilités :

- A est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.
  - Si les éléments γ, δ sont hyperboliques alors A est conjugué au groupe suivant :
  $$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} | \, \alpha, \beta, \gamma > 0 \text{ et } \alpha\beta\gamma = 1 \right\}$$
  - Si les éléments γ, δ sont quasi-hyperboliques alors A est conjugué au groupe suivant :
  $$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} | \, \alpha, \gamma > 0 \, , \, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha^2\gamma = 1 \right\}$$
  - Si les éléments γ, δ sont paraboliques alors A est conjugué au groupe suivant :
  $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | \, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$
- A est isomorphe à $\mathbb{R}$

Dans le second cas, comme le groupe $< \gamma, \delta >$ est un sous-groupe discret de A, le groupe $< \gamma, \delta >$ est cyclique. Pour conclure, il suffit donc de montrer que le premier cas est absurde. Pour cela, remarquons que A agit simplement transitivement sur :

- Chacune des quatre composantes connexes de $\mathbb{P}^2 - (D_\gamma^{+,-} \cup D_\gamma^{+,0} \cup D_\gamma^{0,-})$ si γ est hyperbolique.
- Chacune des deux composantes connexes de $\mathbb{P}^2 - (D_\gamma \cup (p_\gamma^1 p_\gamma^2))$ si γ est quasi-hyperbolique.
- $\mathbb{P}^2 - D_\gamma$ si γ est parabolique.

On note X l'une de ces composantes connexes. Comme le groupe $\Gamma =< \gamma, \delta >$ est Zariski-dense dans A, c'est un réseau cocompact de A, car A est un groupe de Lie abélien. L'enveloppe convexe de toute orbite d'un point de X est alors égale à X. Par conséquent,

si γ et δ sont hyperboliques alors tout ouvert proprement convexe préservé par Γ est un triangle, ce qui est absurde. Et sinon Γ ne peut pas préserver d'ouvert proprement convexe, ce qui est absurde. □

Définition 2.16. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et $\gamma, \delta \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, on dira que γ et δ ont *les mêmes caractéristiques géométriques* s'ils font partie d'un même groupe à un paramètre de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Ceci entraine qu'ils ont les mêmes points fixes et droites fixes.

Proposition 2.17. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe qui n'est pas un triangle et $\gamma \in Aut(\Omega)$, le centralisateur d'un élément hyperbolique (resp. quasi-hyperbolique, resp. parabolique, resp. elliptique d'ordre différent de 2) γ dans $Aut(\Omega)$ est le sous-groupe des éléments hyperboliques (resp. quasi-hyperboliques, resp. paraboliques, resp. elliptiques) de $Aut(\Omega)$ qui ont les mêmes caractéristiques géométriques que γ.*

Démonstration. — Soit $\gamma \in \mathrm{Aut}(\Omega)$, rappellons que, comme Ω n'est pas un triangle, $\mathrm{Aut}(\Omega)$ ne contient pas d'élément planaire. Raisonnons au cas par cas.

- Si γ est hyperbolique alors le centralisateur de γ dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonalisables dans la même base que γ, et le lemme 2.15 permet de conclure.
- Si γ est elliptique alors comme γ n'est pas d'ordre 2, le centralisateur de γ dans $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est l'ensemble des éléments elliptiques de Γ qui ont les mêmes espaces stables. Or, l'ensemble des éléments elliptiques de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un plan P et une droite D avec $D \notin P$ est un groupe de Lie de dimension 1. C'est ce qu'il fallait démontrer.
- Si γ est quasi-hyperbolique alors un simple calcul montre que le centralisateur de γ dans $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est l'ensemble des éléments quasi-hyperboliques δ qui vérifient $p^1_\gamma = p^1_\delta$ et $p^2_\gamma = p^2_\delta$. Le lemme 2.15 conclut la démonstration.
- Si γ est parabolique alors un simple calcul montre que le centralisateur de γ dans $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est l'ensemble des éléments paraboliques qui vérifient $p_\gamma = p_\delta$ et $D_\gamma = D_\delta$. Par conséquent le lemme 2.15 conclut la démonstration une nouvelle fois.

□

3. Irréductibilité et adhérence de Zariski

3.1. Irréductibilité. — On reproduit pour la commodité du lecteur la démonstration de la proposition suivante due à Goldman dans [Gol90].

Proposition 3.1 **(Goldman)**. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^2$, si Γ n'est pas virtuellement abélien alors Γ est irréductible.*

Démonstration. — Supposons que Γ n'est pas irréductible, nous allons montrer que Γ est virtuellement abélien. Alors le groupe Γ fixe un point ou une droite de $\mathbb{P}^2$. Par dualité, on peut supposer que Γ fixe un point $p \in \mathbb{P}^2$. Il faut distinguer 2 cas.

- Si $p \in \Omega$ alors, comme Γ agit proprement sur Ω, Γ est fini.
- Si $p \notin \Omega$ alors Γ ne contient aucun élément elliptique, par conséquent Γ est sans torsion. À présent, le faisceau $\mathcal{F}$ des droites concourantes en p est préservé par Γ. La

projection de $\mathcal{F}$ sur la surface $S = \Omega/_\Gamma$ est un feuilletage de dimension 1 sans point singulier. La surface S est donc un cylindre ou un tore. Le groupe Γ est donc abélien. □

Lemme 3.2. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^2$. Si Γ est virtuellement abélien et $\mu(\Omega/_\Gamma) < \infty$ alors Ω est un triangle, Γ contient une copie de $\mathbb{Z}^2$ d'indice fini et $\Omega/_\Gamma$ est compact.*

Démonstration. — On peut supposer que Γ est abélien. L'espace $\Omega/_\Gamma$ est de volume fini par conséquent Γ contient un élément d'ordre infini. Pour faciliter la discussion, il est commode de distinguer le cas où Ω est un triangle, du cas où Ω n'est pas un triangle.

Dans le premier cas, le groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est un groupe de Lie abélien isomorphe à $\mathbb{R}^2$ qui agit simplement transitivement sur Ω. Par conséquent, $\mu(\Omega/_\Gamma) < \infty$ si et seulement si Γ est un réseau de $\mathrm{Aut}(\Omega)$. Ceci entraine que $\Omega/_\Gamma$ est compact et que Γ contient une copie de $\mathbb{Z}^2$ d'indice fini.

Enfin il faut montrer que le second cas est absurde. On peut utiliser la proposition 2.17. Celle-ci montre que le centralisateur dans $\mathrm{Aut}(\Omega)$ d'un élément hyperbolique (resp. parabolique, resp. quasi-hyperbolique) est un élément hyperbolique (resp. parabolique, resp. quasi-hyperbolique) qui possède les mêmes caractéristiques géométriques. Il vient que Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

À présent, nous allons construire un domaine fondamental convexe F pour l'action de Γ sur Ω. Pour cela, on considère un générateur γ de Γ et on note un point fixe de γ : $p \in \partial\Omega$. On considère une droite D passant par p et tel que $\Omega \cap D \neq \varnothing$. On définit F comme l'adhérence d'une composante connexe de $\Omega - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \gamma^n D$. L'ensemble F est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur Ω et il contient un voisinage d'un point du bord de Ω. Il vient que F est de volume infini par le théorème 1.2. □

Corollaire 3.3. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^2$. Si $\mu(\Omega/_\Gamma) < \infty$ et Ω n'est pas un triangle alors Γ est irréductible.*

3.2. Adhérence de Zariski. —

Proposition 3.4. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, si Γ est infini et irréductible alors l'adhérence de Zariski de Γ est :*

- $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ *ou*
- *Un conjugué de* $\mathrm{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Tout sous-groupe Zariski-fermé et irréductible de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ est :

- $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ ou
- un conjugué de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ou
- un conjugué de $\mathrm{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Par conséquent, comme l'adhérence de Zariski de Γ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ Zariski-fermé, irréductible et non borné. On obtient le résultat voulu. □

Corollaire 3.5. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^2$, si $\mu(\Omega/_\Gamma) < \infty$ et Ω n'est pas un triangle alors l'adhérence de Zariski de Γ est :*

- $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ *ou*

- *un conjugué de* $\mathrm{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$.

4. Existence d'un domaine fondamental convexe

L'existence d'un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action d'un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^n$ est dû à Jaejeong Lee ([Lee]). Nous donnons ici une courte démonstration de ce résultat.

4.1. Fonction caractéristique d'un cône convexe. — Pour montrer ce résultat, nous aurons besoin de nous placer dans un cadre vectoriel. Rappelons donc quelques définitions.

Définition 4.1. — Un *cône* de $\mathbb{R}^{n+1}$ est une partie invariante par les homothéties linéaires de rapport positifs. Un cône convexe est dit *proprement convexe* s'il ne contient pas de droite affine.

Soit C un cône ouvert proprement convexe, on note $\mathrm{C}^* = \{f \in (\mathbb{R}^{n+1})^* \,|\, \forall\, v \in \overline{\mathrm{C}} - \{0\},\ f(v) > 0\}$ le *cône dual* de C. C'est un cône ouvert proprement convexe de $(\mathbb{R}^{n+1})^*$. Les points 1 à 5 du lemme suivant sont tirés d'un article de Vinberg [Vin63].

Lemme 4.2. — *Soit* C *un cône proprement convexe de* $\mathbb{R}^n$*, on considère l'application suivante appelée* fonction caractéristique *de* C.

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\mathrm{C}}: & \mathrm{C} & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & \int_{\mathrm{C}^*} e^{-f(M)} df \end{array}$$

1. *La fonction* φ_{C} *est bien définie.*
2. *La fonction* φ_{C} *est analytique.*
3. *La fonction* φ_{C} *est une submersion.*
4. *Le hessien de* φ_{C} *est défini positif.*
5. $\lim\limits_{M \to M_\infty \in \partial \mathrm{C}} \varphi_{\mathrm{C}}(M) = +\infty$.
6. $\forall M \in \mathrm{C},\ \forall v \in \overline{\mathrm{C}},\ \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \varphi_{\mathrm{C}}(M + \lambda v) = 0$.

Démonstration. —

1. Soit $M \in \mathrm{C}$ fixé, on note $\Omega_M = \{f \in \mathrm{C}^* \,|\, f(M) = 1\}$, E l'espace vectoriel engendré par Ω_M et Vol_E la mesure de Lebesgue canonique du sous-espace E de $(\mathbb{R}^{n+1})^*$. La propre convexité de C entraine que Ω_M est une partie compacte de E, le calcul suivant conclut.
$$\int_{\mathrm{C}^*} e^{-f(M)} df = \int_{\Omega_M} \Big(\int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-\lambda} d\lambda \Big) d\mathrm{Vol}_E = \mathrm{Vol}_E(\Omega_M) < +\infty.$$
2. C'est clair.
3. Le calcul de $d\varphi_{\mathrm{C}}$ est immédiat et donne :
$$\begin{array}{rccc} d\varphi_{\mathrm{C}}: & \mathrm{C} & \to & (\mathbb{R}^{n+1})^* \\ & M & \mapsto & \int_{\mathrm{C}^*} f e^{-f(M)} df \end{array}$$
Donc φ_{C} est une submersion.

4. Le calcul de $d^2\varphi_{\mathrm{C}}$ est lui aussi immédiat et donne :
$$\begin{array}{rccc} d^2\varphi_{\mathrm{C}}: & \mathrm{C} & \to & \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & (u,v)\mapsto \int_{\mathrm{C}^*} f(u)f(v)e^{-f(M)}df \end{array}$$
où $\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})$ désigne l'espace des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Donc le hessien de φ_{C} est défini positif.
5. Soit $M_\infty \in \partial\mathrm{C}$, il existe $f \in \partial\mathrm{C}^*$ tel que $f(M_\infty) = 0$. On considère un compact d'intérieur non vide K inclus dans C^* et on définit le sous-ensemble $L = K+\{\lambda f\}_{\lambda>0} \subset \mathrm{C}^*$. Enfin, on note $c = \sup\limits_{f\in K}\{f(M_\infty)\}$. Le calcul suivant permet de conclure.
$$\lim_{M\to M_\infty\in\partial\mathrm{C}} \varphi_{\mathrm{C}}(M) \geqslant \varphi_{\mathrm{C}}(M_\infty) \geqslant \int_L e^{-f(M_\infty)}df \geqslant \int_L e^{-c}df = +\infty$$
La première inégalité est une conséquence du lemme de Fatou, les autres sont triviales.
6. Soient $M \in \mathrm{C}$ et $v \in \overline{\mathrm{C}}$, $\varphi_{\mathrm{C}}(M+\lambda v) = \int_{\mathrm{C}^*} e^{-\lambda f(v)}e^{-f(M)}df$, l'intégrant est dominé par $M \mapsto e^{-f(M)}$ qui est intégrable et il tend vers 0 lorsque $\lambda \to +\infty$. Le théorème de convergence dominée entraine que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\varphi_{\mathrm{C}}(M+\lambda v) = 0$.

□

Définition 4.3. — Soit Σ une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$, on dit que Σ est *localement convexe* (resp. *localement strictement convexe*) lorsque tout point de Σ possède un voisinage dans Σ qui est une partie du bord d'un convexe (resp. d'un convexe strictement convexe) de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarque. — Soit Σ une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ localement strictement convexe, pour tout point p de Σ, et tout ouvert V de $\mathbb{R}^{n+1}$ suffisament petit contenant p, $V-\Sigma$ possède deux composantes connexes. La stricte convexité permet de définir la composante intérieure et la composante extérieure. En particulier, pour tout point p de Σ, on peut donner un sens à la phrase "le vecteur $\overrightarrow{0p}$ pointe vers l'extérieur (resp. l'intérieur) de Σ".

Définition 4.4. — Soit Σ une hypersurface localement strictement convexe de $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$, on dit que Σ est *radiale* si pour point p de Σ le vecteur $\overrightarrow{0p}$ pointe vers l'intérieur de Σ.

Remarque. — Toute hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ localement strictement convexe, radiale et propre est le bord d'un ouvert strictement convexe de $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$.

Définition 4.5. — Soient Σ une hypersurface localement strictement convexe, radiale et propre de $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ et C un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$, on dit que Σ est asymptote au cône C lorsque :

- Le cône C contient Σ.
- Toute demi-droite affine incluse dans C intersecte Σ.

Remarque. — On peut remarquer que la dernière condition est équivalente au fait que l'hyperplan <u>affine</u> tangent à Σ en un point x converge vers un hyperplan <u>vectoriel</u> tangent à $\partial\mathrm{C}$ le bord de C, lorsque la droite engendrée par x converge dans $\mathbb{P}^n$ vers une droite incluse dans $\partial\mathcal{C}$.

Soit $\pi : \mathbb{R}^{n+1}-\{0\} \to \mathbb{P}^n$ la projection naturelle, le lemme 4.2 donne le corollaire suivant.

Corollaire 4.6. — *Soit* C *un cône ouvert proprement convexe de* $\mathbb{R}^{n+1}$*, pour tout* $m > 0$*, l'hypersurface* $\varphi_{\mathrm{C}}^{-1}(m)$ *est une hypersurface fermée de* $\mathbb{R}^{n+1}$*, strictement convexe, radiale, propre et asymptote au cône* C*. De plus, toute application linéaire de déterminant 1 qui préserve* C*, préserve* φ_{C} *et donc aussi les hypersurfaces* $(\varphi_{\mathrm{C}}^{-1}(m))_{m\in\mathbb{R}_+^*}$.

4.2. Existence d'un domaine fondamental convexe. —

Définition 4.7. — Soient X un espace topologique et Γ un groupe qui agit sur X par homéomorphisme, on dit qu'une partie fermée $D \subset X$ est un *domaine fondamental pour l'action de* Γ *sur* X lorsque :

- $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma D = X$.
- $\forall \gamma \neq 1$, $\gamma \mathring{D} \cap \mathring{D} = \varnothing$.

De plus, un domaine fondamental D pour l'action de Γ sur X est dit *localement fini* lorsque :

- $\forall K$ compact de X, $\{\gamma \in \Gamma \,|\, \gamma D \cap K \neq \varnothing\}$ est fini.

Nous allons construire un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action de Γ sur Ω. Pour cela on introduit les objets suivants. On note C l'une des deux composantes connexes de $\pi^{-1}(\Omega)$. On pose $\varphi = \varphi_{\mathrm{C}}$ la fonction caractéristique de C. Le groupe Γ agit sur C en préservant les lignes de niveau de φ. On note $\Sigma = \varphi^{-1}(1)$, c'est une hypersurface préservée par Γ.

Enfin, on définit ψ_X pour $X \in \Sigma$ la forme linéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$ qui donne l'équation de l'hyperplan vectoriel tangent à Σ en X et qui vérifie $\psi_X(X) = 1$. Autrement dit, on a $\psi_X = \frac{d\varphi_X}{d\varphi_X(X)}$.

Définition 4.8. — On reprend les notations introduites. Soit $X_0 \in \Sigma$ dont le stabilisateur dans Γ est trivial, *le domaine de Dirichlet-Lee pour l'action de* Γ *sur* Σ *basé en* X_0 est, l'ensemble :

$$D_{X_0} = \{X \in \Sigma \,|\, \forall \gamma \neq 1,\ \psi_{X_0}(X) \leqslant \psi_{X_0}(\gamma X)\}$$

Si on note $x_0 = \pi(X_0)$, on a une définition naturelle du *domaine de Dirichlet-Lee pour l'action de* Γ *sur* Ω *basé en* x_0, il s'agit de l'ensemble $\Delta_{x_0} = \pi(D_{X_0})$.

Théorème 4.9 **(Lee)**. — *Soient* Γ *un sous-groupe discret de* $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ *qui préserve un ouvert proprement convexe* Ω *de* $\mathbb{P}^n$ *et un point* x_0 *dont le stabilisateur dans* Γ *est trivial. Le domaine de Dirichlet-Lee pour l'action de* Γ *sur* Ω *basé en* x_0 *est un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action de* Γ *sur* Ω.

Pour montrer le théorème de Lee, nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 4.10. — *Pour tout points* $X_0, X \in \Sigma$, $\lim_{\gamma\to\infty} \psi_{X_0}(\gamma X) = +\infty$.

Démonstration. — Le lemme 4.2 montre que l'hypersurface localement strictement convexe, radiale et propre Σ est asymptote au cône proprement convexe C. Par conséquent, l'intersection du cône C avec tout demi-espace de la forme $\{\psi_{X_0} \leqslant c\}$, où $c \in \mathbb{R}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^{n+1}$. Mais, le point γX tend vers l'infini lorsque γ tend vers l'infini. Ceci conclut la démonstration du lemme. □

Pour le second lemme, il faut introduire plusieurs objets. Soit $X \in \Sigma$, on note T_X l'hyperplan affine tangent à Σ en X, il est donné par l'équation $\psi_X = 1$. Si $X \in \Sigma$ et $\gamma \in \Gamma$, alors on note μ_X^γ la forme linéaire $\psi_X - \psi_X \circ \gamma$. Et on note H_X^γ l'hyperplan vectoriel $\mu_X^\gamma = 0$, et si $x = \pi(X)$, on note M_x^γ son image dans $\mathbb{P}^2$.

Nous aurons aussi besoin d'une définition.

Définition 4.11. — Soient C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $X \in \partial$C, un *hyperplan d'appui* à C en X est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant le point X mais ne rencontrant pas C.

Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{P}^n$ et $x \in \partial\Omega$, un *hyperplan d'appui* à Ω en x est un hyperplan projectif de $\mathbb{P}^n$ contenant le point x mais ne rencontrant pas Ω.

Lemme 4.12. — *Soient $(\gamma_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{p\to\infty} \gamma_p = \infty$ et $x_0 \in \Omega$, on suppose que la suite $\gamma_p x_0$ converge vers un point $x_\infty \in \partial\Omega$. Alors, la suite des hyperplans $M_{x_0}^{\gamma_p}$ converge vers un hyperplan d'appui M_∞ à Ω en x_∞.*

Démonstration. — La figure 10 peut aider à suivre la démonstration.

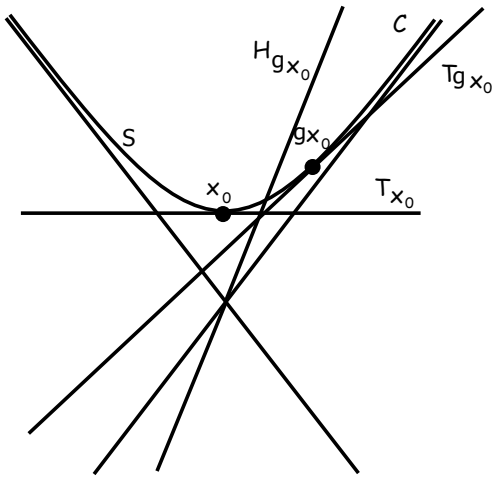

FIGURE 10. Démonstration du lemme 4.12

On note X_0 le point de Σ tel que $\pi(X_0) = x_0$. Tout d'abord, l'hypersurface Σ est asymptote au cône convexe C par conséquent les hyperplans affines $T_{\gamma_p X_0}$ convergent vers un hyperplan vectoriel T de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui est un hyperplan d'appui à C contenant la droite x_∞. On veut montrer que la suite d'hyperplan vectoriel $\pi^{-1}(M_{x_0}^{\gamma_p}) = H_{X_0}^{\gamma_p}$ converge aussi vers T.

Commençons par remarquer que $\pi^{-1}(M_{x_0}^{\gamma_p}) = H_{X_0}^{\gamma_p}$ =Vect$(T_{X_0} \cap T_{\gamma_p X_0})$. En effet, l'intersection $T_{X_0} \cap T_{\gamma_p X_0}$ est incluse dans $H_{X_0}^{\gamma_p}$ et les hyperplans affines T_{X_0} et $T_{\gamma_p X_0}$ ne sont pas parallèles donc $\dim(T_{X_0} \cap T_{\gamma_p X_0}) = n - 1$.

Ainsi, la suite $(H_{X_0}^{\gamma_p})_{p\in\mathbb{N}}$ a donc la même limite que la suite $(T_{\gamma_p X_0})_{p\in\mathbb{N}}$ et puisque l'hyperplan affine $(T_{\gamma_p X_0})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers l'hyperplan vectoriel T, on a donc démontré que la suite $(H_{X_0}^{\gamma_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un hyperplan d'appui au cône convexe C. Ce qui conclut la démonstration. □

On obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.13. — *Pour tout point $x_0 \in \Omega$, la famille des hyperplans $\{M_{x_0}^{\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}$ est localement finie dans Ω.*

Démonstration du théorème 4.9. — L'ensemble Δ_{x_0} est une partie convexe de Ω puisqu'elle est obtenue comme intersection de demi-espaces de Ω. Pour montrer que c'est un domaine fondamental il suffit de montrer que l'$\inf_{\gamma\in\Gamma}\{\psi_{X_0}(\gamma X)\}$ est atteint pour tout point $X \in \Sigma$. Ceci est une conséquence directe du lemme 4.10. La partie Δ_{x_0} est donc un domaine fondamental convexe, il est localement fini car la famille des hyperplans $M_{x_0}^{\gamma}$ est localement finie dans Ω (corollaire 4.13). □

Proposition 4.14. — *Soient un espace localement compact X et un groupe discret Γ qui agit par homéomorphisme sur X. Supposons qu'il existe un domaine fondamental D localement fini pour l'action de Γ sur X. L'application naturelle $p : D \to X/_\Gamma$ est propre.*

Démonstration. — On va montrer que l'image réciproque de tout suite convergente est une suite incluse dans un compact de D. Soient une suite de points $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (X/_\Gamma)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in X/_\Gamma$ et une suite $t_n \in D$ tel que $p(t_n) = s_n$, il existe des éléments $\gamma_n \in \Gamma$ tel que la suite $(\gamma_n t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $t \in D$ qui vérifie $p(t) = s$. Par conséquent si on considère K un voisinage compact de t alors pour n assez grand on a $\gamma_n D \cap K \neq \varnothing$. L'ensemble D est un domaine fondamental localement fini, il n'y a donc qu'un nombre fini de $\gamma \in \Gamma$ qui vérifient $\gamma D \cap K \neq \varnothing$. Par conséquent, la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est finie et la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans un compact de X. □

4.3. Locale finitude à l'infini en dimension 2. —

Remarque. — Dans cette partie on se place en dimension 2. De plus, à partir de maintenant si A est une partie de Ω on désignera par $\overline{A}$ son adhérence dans $\mathbb{P}^2$ et $\overline{A} \cap \Omega$ son adhérence dans Ω. De cette façon, on évitera toute ambiguïté.

Définition 4.15. — Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et un élément γ de $\mathrm{Aut}(\Omega)$, un *secteur* de γ est l'adhérence dans Ω de l'enveloppe convexe dans Ω de l'orbite d'une partie compacte non vide de Ω sous l'action de γ.

La forme des secteurs est très variable suivant la dynamique de l'élément γ. On étudie dans la proposition suivante de façon exhaustive la forme de ces derniers. La démonstration de cette proposition est une simple conséquence de l'étude de la dynamique des éléments de $\mathrm{Aut}(\Omega)$ faite dans la partie 2.

La figure 11 illustre la proposition suivante.

Proposition 4.16. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω et un élément γ de Γ.*

- *Si γ est hyperbolique et $Axe(\gamma) \subset \Omega$ alors tout secteur de γ est un fermé $\mathcal{F}$ de Ω, γ-stable, convexe et tel que $\mathcal{F} \supset Axe(\gamma)$.*

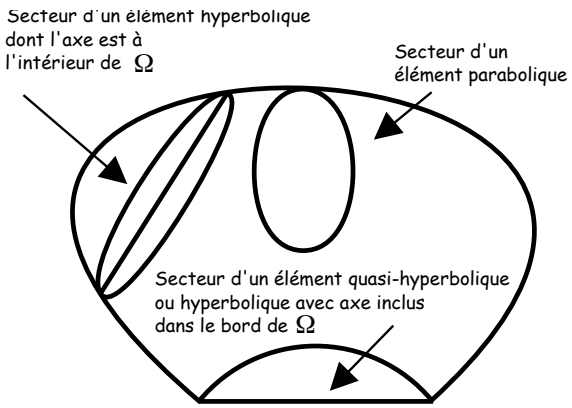

FIGURE 11. Forme des secteurs

- *Si γ est hyperbolique, $Axe(\gamma) \subset \partial\Omega$ et $p_\gamma^0 \notin \partial\Omega$ alors tout secteur de γ est un fermé $\mathcal{F}$ de Ω, γ-stable, convexe tel que $\overline{\mathcal{F}} \cap \partial\Omega = \overline{Axe(\gamma)}$.*
- *Si γ est quasi-hyperbolique alors tout secteur de γ est un fermé $\mathcal{F}$ de Ω, γ-stable, convexe et tel que $\overline{\mathcal{F}} \cap \partial\Omega = \overline{Axe(\gamma)}$.*
- *Si γ est parabolique alors tout secteur de γ est un fermé $\mathcal{F}$ de Ω, γ-stable, convexe et tel que $\overline{\mathcal{F}} \cap \partial\Omega = \{p_\gamma\}$.*
- *Si γ est elliptique alors tout secteur de γ est un fermé de Ω, γ-stable et convexe.*

La proposition suivante décrit la propriété essentielle des secteurs.

Proposition 4.17. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et un élément γ de $Aut(\Omega)$, si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ sont deux secteurs de γ alors $<\gamma>$ agit cocompactement sur $\overline{\mathcal{F} - \mathcal{F}'} \cap \Omega$.*

Démonstration. — Une étude exhaustive en distinguant les cas :

- l'élément γ est hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \Omega$,
- l'élément γ est quasi-hyperbolique ou hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$,
- l'élément γ est parabolique,
- l'élément γ est elliptique,

et en regardant la figure 11 rend cette proposition claire. □

Proposition 4.18. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^2$, on se donne un domaine Dirichlet-Lee D pour l'action de Γ sur Ω. Soient $\gamma \in \Gamma$ et $\mathcal{F}$ un secteur de γ, alors le domaine D ne rencontre qu'un nombre fini d'images $(\delta\mathcal{F})_{\delta\in\Gamma}$.*

Nous allons avoir besoin de plusieurs lemmes préliminaires.

Lemme 4.19. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^2$ qui n'est pas un triangle. Si le groupe Γ contient un élément hyperbolique avec $Axe(\gamma) \subset \partial\Omega$ alors il existe un ouvert proprement convexe Ω' préservé par Γ tel que $Axe(\gamma) \subset \Omega'$.*

Démonstration. — Le lemme 2.8 montre qu'alors le point attractif et le point répulsif de γ ne sont pas C^1. On considère le triangle T_γ de sommets $p_\gamma^+, p_\gamma^-, p_\gamma^0$ qui n'est pas inclus dans Ω et dont l'un des côtés est $\mathrm{Axe}(\gamma)$. On prend pour Ω' la réunion de Ω et de l'orbite

de $T_\gamma \cup \mathrm{Axe}(\gamma)$ sous Γ. Le convexe Ω' est proprement convexe car le convexe Ω n'est pas un triangle. □

Lemme 4.20. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^2$ qui n'est pas un triangle. Si le groupe Γ contient un élément parabolique ou un élément quasi-hyperbolique ou un élément hyperbolique avec $Axe(\gamma) \subset \partial\Omega$ alors le quotient $\Omega/_\Gamma$ n'est pas compact.*

Démonstration. — Commençons par supposer que le groupe Γ contient un élément parabolique ou un élément quasi-hyperbolique γ. On va exhiber une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $d_\Omega(x_n, \gamma(x_n)) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. L'existence d'une telle suite sur une variété compacte est impossible, puisque le rayon d'injectivité d'un point d'une variété finslérienne est une fonction continue et positive.

On considère Δ une droite passant par $p = p_\gamma$ si γ est parabolique et par $p = p^1_\gamma$ si γ est quasi-hyperbolique. On suppose de plus que $\Delta \cap \Omega \neq \varnothing$. On considère une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Δ qui tend vers p. On suppose que la droite $(x_n\gamma(x_n))$ rencontre $\partial\Omega$ en a_n et b_n et que x_n est entre a_n et $\gamma(x_n)$.

La quantité $d_\Omega(x_n, \gamma(x_n))$ est égale à la moitié du logarithme du birraport des droites $\Delta^+_n, \Delta, \gamma(\Delta)$ et Δ^-_n, où Δ^+_n (resp. Δ^-_n) est la droite passant par p et le point a_n (resp. b_n). Le point p est un point C^1 de la courbe $\partial\Omega$ et le point $\gamma(x_n)$ converge vers p, par suite les droites Δ^+_n et Δ^-_n convergent vers la tangente à $\partial\Omega$ en p. En particulier, la quantité $d_\Omega(x_n, \gamma(x_n))$ tend vers 0.

Supposons à présent que le groupe Γ contient un élément hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$. On va exhiber une distance d' sur $\Omega/_\Gamma$ qui induit la même topologie mais qui fait de $(\Omega/_\Gamma, d')$ un espace métrique incomplet. Ce qui est impossible sur une variété compacte.

Le lemme 4.19 montre qu'il existe alors un ouvert proprement convexe Ω' préservé par Γ tel que $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \Omega'$. On munit $\Omega/_\Gamma$ de la distance induite par $d_{\Omega'}$. Les composantes connexes $\Omega' \smallsetminus \Omega$ sont permutées par γ et le stabilisateur d'une composante connexe est engendré par une racine de γ à indice 2 près (lemme 2.17). En particulier, on peut trouver une suite de points de $\Omega/_\Gamma$ qui converge vers un point de la géodésique $\mathrm{Axe}(\gamma)/_{<\gamma>}$ dans $\Omega'/_\Gamma$. L'espace métrique $(\Omega/_\Gamma, d')$ n'est donc pas complet. □

Lemme 4.21. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^2$ qui n'est pas un triangle. On se donne un domaine de Dirichlet-Lee D pour l'action de Γ sur Ω. Soit $\gamma \in \Gamma$, il existe un secteur $\mathcal{F}_0$ de γ tel qu'aucune image $(\delta D)_{\delta\in\Gamma}$ n'est incluse dans $\mathcal{F}_0$.*

Démonstration. — Commençons par supposer que l'élément γ est elliptique ou hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \Omega$. Comme l'élément γ est elliptique ou hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \Omega$, on peut trouver un secteur $\mathcal{F}$ de γ tel que le quotient $\mathcal{F}/_{<\gamma>}$ soit d'aire aussi petite que voulue. Par conséquent, il existe un secteur $\mathcal{F}_0$ de γ qui ne contient aucune image $(\delta D)_{\delta\in\Gamma}$.

Le lemme 4.20 montre que si le domaine fondamental D est compact alors les éléments de Γ sont elliptiques ou hyperboliques avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \Omega$. On a donc montré le lemme dans le cas D compact.

Supposons à présent que le domaine fondamental D n'est pas compact, commençons par montrer ce lemme lorsque l'intersection $\overline{D} \cap \partial\Omega$ possède au moins deux composantes connexes. On peut supposer que γ est parabolique ou hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$ ou quasi-hyperbolique.

Soit $\mathcal{F}$ un secteur de l'élément γ. L'intersection $\overline{\mathcal{F}} \cap \partial\Omega$ est convexe est un point ou un segment. Par suite, si l'intersection $\overline{D} \cap \partial\Omega$ possède au moins deux composantes connexes alors le secteur $\mathcal{F}$ ne peut contenir un domaine fondamental D.

On suppose à présent que $\overline{D} \cap \partial\Omega$ possède une seule composante connexe. Supposons aussi qu'il existe un secteur $\mathcal{F}$ de γ qui contient le domaine fondamental D. Nous allons montrer qu'il existe un secteur $\mathcal{F}_0$ de γ inclus dans $\mathcal{F}$ qui ne contient aucune image de D. Il faut traiter les cas γ parabolique, γ quasi-hyperbolique, ou γ hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$. On ne fait que le cas γ parabolique. Les autres cas sont analogues.

Si un domaine fondamental convexe D est inclus dans la différence $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$ de deux secteurs d'un élément γ alors la convexité de D entraîne que D est compact. Donc si un secteur $\mathcal{F}$ de γ contient un domaine fondamental D alors tout secteur $\mathcal{F}_0$ de γ inclus dans $\mathcal{F}$ rencontre le domaine fondamental D. Comme l'intersection de l'adhérence des secteurs de γ est le point fixe p_γ de l'élément parabolique γ, on a $\overline{D} \cap \partial\Omega = \{p_\gamma\}$.

Raisonnons par l'absurde. Si tout secteur $\mathcal{F}_0$ contient une image de D, alors ils existent une suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de secteurs de γ décroissante tel que l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n = \varnothing$ et une suite de domaines fondamentaux $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $D_n \subset \mathcal{F}_n$ et $D_n \notin \mathcal{F}_{n+1}$. Les domaines D_n (qui sont tous différents) vérifient tous que $\overline{D_n} \cap \partial\Omega = \{p_\gamma\}$. Le domaine fondamental D_{n+1} n'est pas une image du domaine D_n par $<\gamma>$.

On peut supposer quitte à appliquer une puissance de γ que le domaine D_{n+1} est "entre" le domaine D_n et le domaine γD_n. En particulier, les domaines fondamentaux $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont "entre" les domaines D_0 et γD_0. Par conséquent, la famille des droites donnés par les côtés des domaines $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas localement fini, ce qui contredit le lemme 4.13. □

Démonstration de la proposition 4.18. — Commençons par faire le cas où l'ouvert Ω n'est pas un triangle.

Il existe alors d'après le lemme 4.21 un secteur $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ qui ne contient aucun domaine fondamental. Le groupe $<\gamma>$ agit cocompactement sur $V = \overline{(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)} \cap \Omega$. On note E un domaine fondamental compact pour cette action.

Si un élément $\delta \in \Gamma$ est tel que $\delta^{-1}D \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$ alors il vérifie $\delta^{-1}D \cap V \neq \varnothing$, car sinon on aurait $\delta^{-1}D \subset \mathcal{F}_0$ et ceci contredit notre hypothèse sur $\mathcal{F}_0$.

Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma^n\delta^{-1}D \cap E \neq \varnothing$. Or, D est un domaine fondamental localement fini donc l'ensemble $\{\delta \in \Gamma \,|\, \delta^{-1}D \cap E \neq \varnothing\}$ est fini. Notons $\{\delta_1, ..., \delta_r\}$ ces éléments.

On vient donc de montrer que si un élément $\delta \in \Gamma$ est tel que $D \cap \delta\mathcal{F} \neq \varnothing$ alors il existe $i = 1...r$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\delta = \delta_i\gamma^n$. Or, le secteur $\mathcal{F}$ est γ-invariant par conséquent D rencontre un nombre fini d'image $(\delta\mathcal{F})_{\delta\in\Gamma}$.

Enfin, si l'ouvert Ω est un triangle alors le groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est virtuellement abélien et par conséquent un secteur à un nombre fini d'images distincts sous $\mathrm{Aut}(\Omega)$. □

On rappelle la définition d'élément primitif.

Définition 4.22. — Soient Γ un groupe et $\gamma \in \Gamma$, on dit que γ est *primitif* lorsque l'existence d'un élément $\delta \in \Gamma$ et d'un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma = \delta^n$ entraine $\delta = \gamma$ et $n = 1$ ou $\delta = \gamma^{-1}$ et $n = -1$.

Les lemmes suivants seront cruciaux dans la partie suivante pour montrer le lemme 5.11.

Lemme 4.23. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^2$. Pour tout élément primitif γ de Γ et pour tout secteur $\mathcal{F}$ de γ, il existe un nombre fini d'éléments $h_1, ..., h_N$ de Γ tel que $\{\delta \in \Gamma \,|\, \delta\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \varnothing\} \subset \{\delta \in \Gamma \,|\, \exists n, p \in \mathbb{Z}, \exists i = 1, ..., N, \delta = \gamma^n h_i \gamma^p\}$.*

Démonstration. — On se donne un domaine de Dirichlet-Lee D pour l'action de Γ sur Ω (théorème 4.9) qui rencontre $\mathcal{F}$. La proposition 4.18 montre que D rencontre un nombre fini d'image de $\mathcal{F}$. On peut les écrire $g_1\mathcal{F}, ..., g_r\mathcal{F}$, où $g_i \in \Gamma$ pour $i = 1...r$ et $g_1 = Id$.

Comme γ est primitif, on a $\mathcal{F} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z},\, i=1..r} \gamma^n g_i^{-1} D$. Par conséquent, si $\delta\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ et un $i_0 = 1...r$ tel que $g_{i_0}\gamma^{n_0}\delta\mathcal{F} \cap D \neq \varnothing$, par conséquent il existe $n_1 \in \mathbb{Z}$ et $i_1 = 1...r$ tel que $g_{i_0}\gamma^{n_0}\delta = g_{i_1}\gamma^{n_1}$. Autrement dit, $\delta = \gamma^{-n_0} g_{i_0}^{-1} g_{i_1} \gamma^{n_1}$, c'est ce qu'il fallait montrer. □

Lemme 4.24. — *Soient Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe Ω de $\mathbb{P}^2$, un élément $\gamma \in \Gamma$ et $\mathcal{F}$ un secteur de γ, pour tout élément δ de Γ on a l'alternative suivante :*

- *$\delta\mathcal{F} \cap \mathcal{F}$ est compacte ou bien*
- *$\delta\mathcal{F} = \mathcal{F}$.*

Démonstration. — Une étude exhaustive en distinguant les différentes dynamiques de l'élément γ va rendre ce lemme clair.

Si γ est elliptique alors tout secteur de γ est compact. Il n'y a donc rien à montrer.

Si γ est hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \Omega$ alors l'intersection de l'adhérence de tout secteur $\mathcal{F}$ de γ avec le bord de Ω est égale à deux points, le point attractif et le point répulsif de γ. Il vient que pour tout $\delta \in \Gamma$, ou bien

- $\delta\gamma\delta^{-1}$ possède les mêmes points fixes que γ, alors $\delta\gamma\delta^{-1}$ est une puissance de γ (proposition 2.17) et $\delta\mathcal{F} = \mathcal{F}$.
- les points fixes de $\delta\gamma\delta^{-1}$ et les points fixes de γ forment des ensembles disjoints, et $\delta\mathcal{F} \cap \mathcal{F}$ est compacte.

Si γ est parabolique alors l'intersection de l'adhérence de tout secteur $\mathcal{F}$ de γ avec le bord de Ω est égale à un point, le point attractif de γ. Par conséquent, ou bien

- $\delta\gamma\delta^{-1}$ possède le même point fixe que γ, alors $\delta\gamma\delta^{-1}$ est une puissance de γ (proposition 2.17) et $\delta\mathcal{F} = \mathcal{F}$.
- le point fixe de $\delta\gamma\delta^{-1}$ et le point fixe de γ sont différents, et $\delta\mathcal{F} \cap \mathcal{F}$ est compacte.

De même, si γ est quasi-hyperbolique ou hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$. La même méthode conclut. □

5. Surface projective convexe d'aire finie

Tout au long de ce texte, une surface est une variété connexe orientable de dimension 2, avec éventuellement des bords. Si S est une surface on notera son bord ∂S. On note $\mathbb{E}$ un demi-espace affine fermé de $\mathbb{P}^2$.

5.1. Structure projective. —

Définition 5.1. — Soit S une surface, une *structure projective réelle à bord géodésique* est la donnée d'un atlas maximal $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{E}$ sur S tel que :

- les fonctions de transitions $\varphi_{\mathcal{U}} \circ \varphi_{\mathcal{V}}^{-1}$ sont des éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, pour tous ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de l'atlas de S tel que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$.
- Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de l'atlas tel que $\mathcal{U} \cap \partial S \neq \varnothing$ et pour toute composante connexe B de $\mathcal{U} \cap \partial S$, $\varphi_{\mathcal{U}}(B)$ est inclus dans une droite projective de $\mathbb{P}^2$.

Définition 5.2. — Un *isomorphisme* entre deux surfaces munies de structures projectives à bord géodésique est un difféomorphisme qui, lu dans les cartes, est donné par des éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

Définition 5.3. — Soit S une surface, une *structure projective à bord géodésique marquée sur* S est la donnée d'un difféomorphisme $\varphi : S \to S'$ où S' est une surface projective à bord géodésique.

Deux structures projectives à bord géodésique marquée sur S, $\varphi_1 : S \to S_1$ et $\varphi_2 : S \to S_2$ sont dites *isotopiques* lorsqu'il existe un isomorphisme $h : S_1 \to S_2$ tel que $\varphi_2^{-1} \circ h \circ \varphi_1 : S \to S$ est un difféomorphisme isotope à l'identité. On note $\mathbb{P}(S)$ *l'ensemble des structures projectives à bord géodésique marquées sur* S *modulo isotopie.*

À tout élément de $\mathbb{P}(S)$, on peut associer deux objets :

- Un difféomorphisme local $\mathrm{dev} : \widetilde{S} \to \mathbb{P}^2$ appelée *développante*, où $\widetilde{S}$ est le revêtement universel de S.
- Une représentation $\mathrm{hol} : \pi_1(S) \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ appelée *holonomie.*

De plus, la développante est $\pi_1(S)$-équivariante, c'est à dire que $\forall x \in \widetilde{S}$, $\forall \gamma \in \pi_1(S)$ on a $\mathrm{dev}(\gamma x) = \mathrm{hol}(\gamma)\mathrm{dev}(x)$. Enfin, le couple $(\mathrm{dev}, \mathrm{hol})$ est unique au sens où si $(\mathrm{dev}', \mathrm{hol}')$ est une autre telle paire alors il existe un $g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{dev}' = g \circ \mathrm{dev}$ et $\mathrm{hol}' = g \circ \mathrm{hol} \circ g^{-1}$.

On pourra consulter l'article [Gold1] pour avoir plus de détails sur le couple développante et holonomie.

Remarque. — À partir de maintenant toutes les structures projectives seront implicitement supposées marquées et à bord géodésique.

5.2. Structure projective proprement convexe. —

Définition 5.4. — Soit S une surface, une structure projective est dite *proprement convexe* sur S lorsque la développante est un difféomorphisme sur une partie proprement convexe de $\mathbb{P}^2$. On note $\beta(S)$ l'ensemble des structures projectives proprement convexes sur S modulo isotopie.

5.3. Structure projective proprement convexe d'aire finie. — Soit S une surface projective proprement convexe, l'application développante permet d'identifier le revêtement universel $\widetilde{S}$ de S à une partie $\mathcal{C}$ proprement convexe de $\mathbb{P}^2$. On notera $\pi : \mathcal{C} \to S$ le revêtement universel de S. On a construit au paragraphe 1.1 sur l'intérieur $\Omega = \mathring{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ une distance d_Ω et une mesure μ_Ω qui sont invariantes sous l'action du groupe fondamental $\pi_1(S)$ de S sur Ω . Par conséquent, il existe une unique distance d_S et une unique mesure μ_S sur $\mathring{S}$ l'intérieur de S telles que :

- Pour tout $x, y \in \mathring{S}$, $d_S(x, y) = \inf\limits_{(\widetilde{x},\widetilde{y})\in\mathcal{E}} d_\Omega(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, où $\mathcal{E} = \{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \Omega^2 \,|\, \pi(\widetilde{x}) = x \text{ et } \pi(\widetilde{y}) = y\}$
- $\forall \mathcal{A}$ borélien de Ω, si $\pi : \Omega \to \mathring{S}$ restreinte à $\mathcal{A}$ est injective alors $\mu_S(\pi(\mathcal{A})) = \mu_\Omega(\mathcal{A})$.

Définition 5.5. — Soit S une surface, on dit qu'une structure projective proprement convexe sur S est de *volume fini* lorsque pour tout fermé F de l'intérieur $\mathring{S}$ de S, on a $\mu_S(F) < \infty$. On note $\beta_f(S)$ l'ensemble des structures projectives marquées proprement convexes de volume fini sur S modulo isotopie.

5.4. La théorie des bouts d'un espace topologique. — On rappelle quelques définitions de la théorie des bouts d'un espace topologique.

Définition 5.6. — Soit X un espace topologique localement compact, une *base de voisinages d'un bout de* X est une suite décroissante d'ouverts connexes de X qui sort de tout compact. Deux bases de voisinages d'un bout de X, $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont dites *équivalentes* si pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, il existe $N, M \in \mathbb{N}$ tel que $U_N \subset V_n$ et $V_M \subset U_m$. Les classes d'équivalence de base de voisinages de bout de X forment un ensemble appelé *l'espace des bouts de* X et dont les éléments sont *les bouts de* X.

Remarque. — Cet ensemble possède une topologie naturelle. On la construit de la façon suivante. Pour tout compact K de X on définit $\mathcal{U}_K$ l'ensemble des bouts de X qui sont ultimement inclus dans $X - K$. Les $\mathcal{U}_K$ forment une base de la topologie de l'espace des bouts de X. On peut montrer que l'espace des bouts est un espace compact totalement discontinu.

5.5. Les lacets d'holonomie parabolique ou quasi-hyperbolique sont élémentaires. — Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 5.7. — *Soit S une surface projective proprement convexe dont le groupe fondamental n'est pas virtuellement abélien alors aucun lacet tracé sur S ne possède une holonomie planaire.*

Démonstration. — La dynamique des éléments planaires montre que si l'holonomie d'un élément de $\pi_1(S)$ est planaire alors Ω est un triangle (proposition 2.9). Par conséquent, le groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est virtuellement isomorphe à $\mathbb{R}^2$ et donc virtuellement abélien. Il vient que $\pi_1(S)$ est virtuellement abélien, ce qui contredit l'hypothèse sur la topologie de S. □

Remarque. — Si l'ouvert proprement convexe Ω est un triangle alors le groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. Par conséquent, si S est une surface projective convexe de caractéristique d'Euler strictement négative alors son revêtement universel Ω n'est pas un triangle.

Définition 5.8. — Soit S une surface, on dit qu'un lacet tracé sur S, $c : \mathbb{S}^1 \to S$ est *simple* s'il est injectif. On dit qu'un lacet simple c tracé sur S est *élémentaire* si $S - c$ possède deux composantes connexes et l'une d'elles est un cylindre. Lorsque S n'est pas un cylindre, on appellera l'adhérence de la composante homéomorphe à un cylindre *la composante élémentaire associée à* c.

Remarque. — Soient S une surface et c un lacet élémentaire tracé sur S alors on a l'alternative suivante :

- La composante élémentaire associée à c est un cylindre avec un bord. On dira alors que c *fait le tour d'un bout*.
- La composante élémentaire associée à c est un cylindre avec deux bords. Dans ce cas c est librement homotope à une composante connexe du bord de S.

Les propositions suivantes sont très classiques en géométrie hyperbolique. On ne montre que la première.

Proposition 5.9. — *Soit S une surface, on munit S d'une structure projective proprement convexe. On note $\pi : \mathcal{C} \to S$ le revêtement universel de S donné par la développante de S, où $\mathcal{C}$ est une partie proprement convexe de $\mathbb{P}^2$. L'intérieur de $\mathcal{C}$ sera noté Ω. Alors, tout lacet tracé sur S dont l'holonomie est hyperbolique avec $Axe(\gamma) \subset \Omega$ est librement homotope à une géodésique.*

Démonstration. — On note Γ l'image du groupe fondamental de S dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. On choisit $\gamma \in \Gamma$ qui représente $\mathrm{hol}(c)$ et on note $\widetilde{c}$ le relevé correspondant de c. On a les convergences suivantes $\lim\limits_{t\to+\infty} \widetilde{c}(t) = p_\gamma^+$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} \widetilde{c}(t) = p_\gamma^-$. Le chemin $\widetilde{c}$ est donc homotope via une homotopie γ-équivariante à une et une seule géodésique de Ω : $\mathrm{Axe}(\gamma)$. La projection de cette homotopie sur la surface S donne le résultat souhaité. □

La même démonstration que dans le cas hyperbolique donne la proposition suivante :

Proposition 5.10. — *Soit S une surface, on munit S d'une structure projective proprement convexe. On note $\pi : \mathcal{C} \to S$ le revêtement universel de S donné par la développante de S, où $\mathcal{C}$ est une partie proprement convexe de $\mathbb{P}^2$. L'intérieur de $\mathcal{C}$ sera noté Ω. Soient c_1 et c_2 sont deux lacets simples tracés sur S dont l'holonomie est hyperbolique avec $Axe(\gamma_1)$, $Axe(\gamma_2) \subset \Omega$, on note λ_1 (resp. λ_2) l'unique géodésique homotope à c_1 (resp. c_2). Si c_1 est simple alors λ_1 est simple. Si les lacets c_1 et c_2 ne s'intersectent pas alors les géodésiques λ_1 et λ_2 ne s'intersectent pas.*

Lemme 5.11. — *Soit S une surface de caractéristique d'Euler strictement négative, on munit S d'une structure projective proprement convexe. Soit c un lacet simple tracé sur S, il existe un secteur $\mathcal{F}$ de $hol(c)$ tel que l'application naturelle de $\mathcal{F}/_{<hol(c)>} \to S$ est une injection.*

Démonstration. — On pose $\gamma = \mathrm{hol}(c)$. Le lemme 4.23 montre qu'il existe des éléments g_j pour $j = 1...N$ tel que si $\delta\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $j_0 = 1...N$ tel que $\delta\mathcal{F} = \gamma^n g_{j_0}\mathcal{F}$.

De plus, le lemme 4.24 montre que si $g_j\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$ $(j = 1...N)$ alors cette intersection est ou bien $\mathcal{F}$ ou une partie compacte de Ω. Il faut à présent distinguer les deux cas suivants :

- Si γ est hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$ ou quasi-hyperbolique ou parabolique alors comme les g_j sont en nombre fini, on peut trouver un secteur $\mathcal{F}_0$ inclus dans $\mathcal{F}$ tel que $g_j\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_0 \neq \varnothing$ si et seulement si $g_j\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0$.
- Si γ est hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \Omega$ alors on peut supposer d'après le lemme 5.9 que c est la géodésique simple donné par l'axe de γ. Le secteur $\mathcal{F}$ est un voisinage de l'axe de γ. De plus, comme c est une géodésique simple le lemme 5.10 montre que les relevés de c ne s'intersectent pas. Par conséquent, comme les g_j sont en nombre fini, on peut trouver un secteur $\mathcal{F}_0$ inclus dans $\mathcal{F}$ tel que $g_j\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_0 \neq \varnothing$ si et seulement si $g_j\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0$.

Dans tous les cas, on obtient que pour tout $\delta \in \Gamma$, $\delta\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_0 \neq \varnothing$ si et seulement si $\delta\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0$. Mais, l'ouvert Ω n'est pas un triangle par conséquent $\delta\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0$ si et seulement si $\delta \in <\gamma>$. □

Proposition 5.12. — *Soit S une surface de caractéristique d'Euler strictement négative, on munit S d'une structure projective proprement convexe. Soit c un lacet simple tracé*

sur S, on note $\pi : \mathcal{C} \to S$ le revêtement universel de S donné par la développante de S. On note $\overset{\circ}{S}$ l'intérieur de S.

- *Si l'holonomie de c est parabolique alors c fait le tour d'un bout B et l'image de tout secteur de $hol(c)$ dans S contient un voisinage du bout B.*
- *Si l'holonomie de c est quasi-hyperbolique alors c est élémentaire et l'image de tout secteur de $hol(c)$ dans S contient un voisinage du bout correspondant dans la surface $\overset{\circ}{S}$.*
- *Si l'holonomie de c est hyperbolique et $Axe(Hol(c)) \subset \partial\mathcal{C}$ alors c est élémentaire et l'image de tout secteur de $hol(c)$ dans S contient un voisinage du bout correspondant dans la surface $\overset{\circ}{S}$.*
- *Si l'holonomie de c est hyperbolique, $Axe(Hol(c)) \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ et $p^0_{Hol(c)} \in \partial\mathcal{C}$ alors c est élémentaire et l'image dans S de la réunion de n'importe quel secteur de $hol(c)$ et de l'unique triangle inclus dans $\mathcal{C}$ défini par les points fixes de $hol(c)$ contient un voisinage du bout correspondant dans la surface $\overset{\circ}{S}$.*

En particulier, si c n'est pas élémentaire alors l'holonomie de c est hyperbolique, $Axe(Hol(c)) \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ et $p^0_{Hol(c)} \notin \partial\mathcal{C}$.

Démonstration. — On note Ω l'intérieur de $\mathcal{C}$. On considère $\gamma = Hol(c)$ et on note $\mathcal{F}$ un secteur de γ tel que l'application naturelle de $\mathcal{F}/_{<\gamma>} \to S$ est une injection. L'existence d'un tel secteur est assuré par le lemme 5.11.

Commençons par le cas γ est parabolique. Construisons un domaine fondamental pour l'action de γ sur $\mathcal{F}$. On considère une droite L passant par p_γ. L'adhérence D' dans Ω de n'importe quelle composante connexe de $\mathcal{F} - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \gamma^n L$ est un domaine fondamental pour l'action de γ sur $\mathcal{F}$. Le domaine fondamental D' est l'intersection d'un triangle fermé de $\mathbb{P}^2$ et de $\mathcal{F}$. De plus son adhérence dans $\mathbb{P}^2$ contient le point p_γ. L'image de $\mathcal{F}/_{<\gamma>}$ dans S est donc un cylindre qui contient un voisinage d'un bout B de la surface S et le lacet c fait le tour du bout B.

Ensuite, on peut traiter en même temps les cas, ou γ est quasi-hyperbolique, ou hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \partial\mathcal{C}$. On procède de la même façon. Construisons un domaine fondamental pour l'action de γ sur $\mathcal{F}$. On note p^+_γ le point attractif de γ et p^-_γ le point répulsif de γ. L'axe de γ est le segment d'extrémité p^+_γ et p^-_γ inclus dans $\partial\Omega$. On considère une droite L qui intersecte $\mathrm{Axe}(\gamma)$ sur son intérieur. L'action de γ sur $\partial\Omega$ vérifie que pour tout $x \in \partial\Omega$ différent de p^+_γ, p^-_γ, le point γx appartient à la composante connexe V de $\partial\Omega - \{p^+_\gamma, p^-_\gamma\}$ qui contient x. Et, le point γx appartient à la composante connexe de $V - \{x\}$ qui contient p^+_γ dans son adhérence. Par conséquent, les droites L et γL ne s'intersectent pas dans Ω. Il vient donc que l'adhérence D' dans Ω de n'importe quelle composante connexe de $\mathcal{F} - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \gamma^n L$ est un domaine fondamental pour l'action de γ sur $\mathcal{F}$. Le domaine fondamental D' contient un sous-segment non trivial de $\mathrm{Axe}(\gamma)$. L'image de $\mathcal{F}/_{<\gamma>}$ dans S est donc un cylindre qui contient un voisinage d'un bout B de la surface $\overset{\circ}{S}$ et le lacet c est fait le tour de ce bout.

Enfin, il faut traiter le cas où γ est hyperbolique avec $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ et $p^0_\gamma \in \partial\mathcal{C}$. La difficulté de ce cas vient du fait que cette fois-ci les secteurs de γ "ne vont pas jusqu'à l'infini". On considère la partie $\widetilde{\mathcal{F}}$ de Ω obtenue en ajoutant à $\mathcal{F}$ le triangle ouvert inclus dans Ω

défini par les points $p_\gamma^+, p_\gamma^-, p_\gamma^0$. Pour appliquer le même raisonnement que précédemment il faut montrer que l'application naturelle de $\widetilde{\mathcal{F}}/_{<\gamma>}$ vers S est injective. Comme $\mathcal{F}$ est un voisinage de $\mathrm{Axe}(\gamma)$ et que pour tout élément $\delta \in \Gamma$ si $\delta\mathcal{F} \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$ alors $\delta \in < \gamma >$, l'ensemble $\widetilde{\mathcal{F}}$ vérifie aussi que pour tout élément $\delta \in \Gamma$ si $\delta\widetilde{\mathcal{F}} \cap \widetilde{\mathcal{F}} \neq \varnothing$ alors $\delta \in < \gamma >$, car $\delta\widetilde{\mathcal{F}} \cap \widetilde{\mathcal{F}} \neq \varnothing$ entraîne $\mathrm{Axe}(\gamma) \cap \delta\mathrm{Axe}(\gamma) \neq \varnothing$. Il reste à construire un domaine fondamental pour l'action de γ sur $\widetilde{\mathcal{F}}$. Pour cela on considère une droite L passant par p_γ^0. L'adhérence D' dans Ω de n'importe quelle composante connexe de $\widetilde{\mathcal{F}} - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \gamma^n L$ est un domaine fondamental pour l'action de γ sur $\mathcal{F}$. Le point p_γ^0 est adhérent au domaine fondamental D'. L'image de $\mathcal{F}/_{<\gamma>}$ dans S est donc un cylindre qui contient un voisinage d'un bout B de la surface $\mathring{S}$ et le lacet c fait le tour de ce bout. □

5.6. Le groupe fondamental d'une surface de volume fini est de type fini. —

5.6.1. Un peu de topologie des surfaces. — On note P la surface à bord obtenue en retirant 3 disques ouverts disjoints à la sphère euclidienne $\mathbb{S}^2$.

Définition 5.13. — Soit S une surface, un *pantalon de S* est une sous-surface à bord de S homéomorphe à P. Un *pantalon non élémentaire de S* est un pantalon de S dont le bord défini 3 lacets non élémentaires.

Richards a classifié les surfaces en construisant des invariants à l'aide de l'espace des bouts de celles-ci ([**Ric63**]). Il résulte de cette classification la proposition suivante.

Proposition 5.14. — *Soit S une surface, on a l'alternative suivante :*

- *L'espace des bouts de S est infini.*
- *L'espace des bouts de S est fini mais S contient une infinité de pantalons non élémentaires deux à deux disjoints.*
- *La surface S est de type fini.*

Définition 5.15. — Soit S une surface projective proprement convexe, un *pantalon de S à bord géodésique* est un pantalon P de S tel que le bord de P est défini par trois géodésiques non élémentaires de S.

Les lemmes 5.9, 5.10 et la proposition 5.12 donne la proposition suivante :

Proposition 5.16. — *Soit S une surface projective proprement convexe, tout pantalon non élémentaire de S est homotope à un unique pantalon à bord géodésique. Si P_1 et P_2 sont deux pantalons non élémentaires de S disjoints alors les uniques pantalons homotopes à P_1 et P_2 sont aussi disjoints.*

5.6.2. Minoration de l'aire d'un pantalon projectif proprement convexe. — Pour montrer que l'aire de tout pantalon à bord géodésique est minorée par une constante universelle, nous allons chercher des triangles idéaux, pour cela on utilise des "chemins en spirales".

Proposition 5.17. — *Il existe une constante universelle $K_{\mathbb{P}^2}$ tel que pour toute surface S projective proprement convexe et tout pantalon non élémentaire P à bord géodésique inclus dans S, on ait : $\mu_S(P) \geqslant K_{\mathbb{P}^2}$.*

Démonstration. — Nous allons montrer que tout pantalon est la réunion de deux triangles idéaux. Pour cela on utilise une construction de Goldman ([Gol90]). On part de la figure 12.

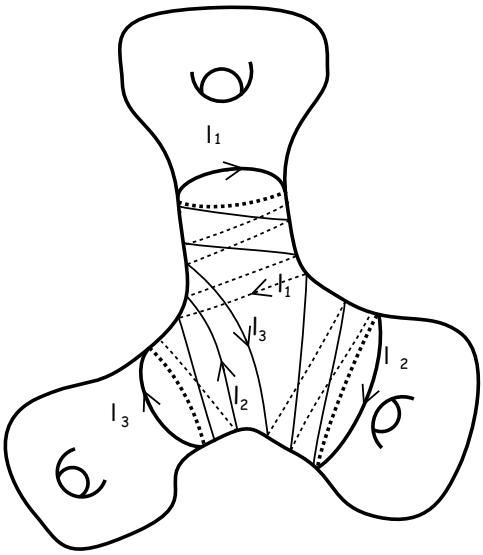

FIGURE 12. Démonstration de la proposition 5.17

Commençons par donner une définition précise de la figure 12 d'un point de vue topologique via la géométrie hyperbolique. On munit la surface S d'une structure hyperbolique, c'est possible car S est de caractéristique d'Euler strictement négative. On note $\lambda_1^{\mathbb{H}}$, $\lambda_2^{\mathbb{H}}$ et $\lambda_3^{\mathbb{H}}$ les géodésiques données par le bord de P, et orienté comme sur la figure 12. Le chemin l_i est l'unique géodésique qui s'accumule sur les géodésiques $\lambda_{i+1}^{\mathbb{H}}$ et $\lambda_{i+2}^{\mathbb{H}}$ (Les indices sont calculés modulo 3).

Nous allons montrer que dans le cas projectif la situation est analogue. On note $\mathcal{C}$ la partie proprement convexe donné par la développante de S et $\pi : \mathcal{C} \to S$ le revêtement universel associé. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les géodésiques données par le bord de P, et orienté comme sur la figure 12.

Les chemins l_1, l_2 et l_3 se relèvent en des chemins simples $\widetilde{l_1}$, $\widetilde{l_2}$ et $\widetilde{l_3}$ tracé sur le revêtement universel $\widetilde{P}$ de P. Chacun des chemins $\widetilde{l_i}$ vérifient que $\widetilde{P} - \widetilde{l_i}$ possède deux composantes connexes. Ces chemins et leurs images par le groupe fondamental Γ de P définissent une triangulation de $\widetilde{P}$ (triangulation de Faray). Deux triangles fermés adjacents de cette triangulation définissent un domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\widetilde{P}$.

Nous allons montrer que chacun de ces chemins peuvent être supposés géodésiques. On note γ_1 (resp. γ_2 resp. γ_3) les représentants de l'holonomie des lacets λ_1 (resp. λ_2 resp. λ_3) donnés par le choix du point base x_0 sur P. Ils vérifient la relation $\gamma_3\gamma_2\gamma_1 = 1$.

On note $\widetilde{\lambda}_1$ (resp. $\widetilde{\lambda}_2$, resp. $\widetilde{\lambda}_3$) un relevé de λ_1, (resp. λ_2 resp. λ_3). On peut supposer que $\widetilde{\lambda}_1$, $\widetilde{\lambda}_2$ et $\widetilde{\lambda}_3$ bordent la même composante connexe $\mathcal{U}$ de $\pi^{-1}(P)$. La partie $\mathcal{U}$ de $\mathcal{C}$ est

convexe puisque c'est l'intersection de l'intérieur Ω de $\mathcal{C}$ et d'une infinité de demi-espaces définis par les relevés de λ_1, λ_2 et λ_3 qui bordent $\mathcal{U}$. Ainsi, le convexe $\mathcal{U}$ est le revêtement universel du pantalon P.

Comme P est un pantalon non élémentaire, la proposition 5.12 montre que γ_1, γ_2 et γ_3 sont hyperboliques et leurs axes principaux sont inclus dans Ω. Notre choix d'orientation fait que les points $p^-_{\gamma_1}, p^+_{\gamma_1}, p^-_{\gamma_2}, p^+_{\gamma_2}, p^-_{\gamma_3}, p^+_{\gamma_3} \in \partial\Omega$ sont sur $\partial\Omega$ dans cet ordre. Les axes de γ_1, γ_2 et γ_3 sont inclus dans le bord de $\mathcal{U}$. Tout relevé du chemin l_3 converge en $+\infty$ vers le point $p^-_{\gamma_1}$ et en $-\infty$ vers le point $p^-_{\gamma_2}$. On peut donc supposer que le chemin $\widetilde{l_3}$ est le segment ouvert d'extrémité $p^-_{\gamma_1}$ et $p^-_{\gamma_2}$ qui est inclus dans $\mathcal{U}$. De la même façon, on peut supposer que $\widetilde{l_1}$ est le segment ouvert d'extrémité $p^-_{\gamma_2}$ et $p^-_{\gamma_3}$ inclus dans $\mathcal{U}$ et $\widetilde{l_2}$ le segment ouvert d'extrémité $p^-_{\gamma_3}$ et $p^-_{\gamma_1}$ inclus dans $\mathcal{U}$. La triangulation topologique de $\widetilde{P}$ peut donc être réalisée dans $\mathcal{U}$ par des géodésiques.

On note T le triangle idéal fermé dans Ω de sommets $p^-_{\gamma_1}, p^-_{\gamma_2}, p^-_{\gamma_3}$ et $T' = \gamma_1 T$. Ces deux triangles sont inclus dans $\mathcal{U}$ car $\mathcal{U}$ est convexe. Le groupe fondamental de P est le groupe Γ' engendré par γ_1, γ_2 et γ_3. Par conséquent, $T \cup T'$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ' sur l'intérieur de $\mathcal{U}$. La proposition 1.13 conclut notre démonstration. □

On obtient donc la proposition suivante :

Théorème 5.18. — *Toute surface S projective proprement convexe de volume fini est de type fini (i.e le groupe fondamental $\pi_1(S)$ de S est de type fini).*

Démonstration. — L'application développante permet d'identifier S au quotient d'une partie proprement convexe $\mathcal{C}$ par un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Commençons par faire le cas où S est une surface sans bord. Le théorème 4.9 montre que l'action de Γ sur l'ouvert $\Omega = \mathcal{C}$ admet un domaine fondamental convexe et localement fini. Si $\overline{D} \cap \partial\Omega$ admet un nombre infini de composantes connexes, D contient une infinité de triangles idéaux disjoints. La proposition 1.13 montre que l'aire de chacun de ces triangles est minorée par une constante strictement positive. La surface S est donc de volume infini. Par conséquent, $\overline{D} \cap \partial\Omega$ admet un nombre fini de composantes connexes et la surface S possède donc un nombre fini de bouts. La proposition 5.14 montre qu'il suffit donc de montrer que la surface S ne peut contenir une infinité de pantalons non élémentaires disjoints. Les propositions 5.16 et 5.17 montre que S contient un nombre fini de pantalons non élémentaires.

Supposons à présent que S est une surface à bord. Le théorème 4.9 montre que l'action de Γ sur l'intérieur Ω de $\mathcal{C}$ admet un domaine fondamental convexe et localement fini. Commençons par montrer que $\overline{D} \cap \partial\Omega$ possède un nombre fini de composante connexe. Sinon, comme dans le cas sans bord, le domaine D contient une infinité de triangles idéaux disjoints. Le problème dans le cas avec bord est que la projection de ces triangles n'est pas un fermé inclus dans l'intérieur de S. Mais, on peut retirer un petit voisinage de chaque sommet et ainsi on peut construire une infinité d'hexagones disjoints inclus dans D et de volume supérieure à $C_{\mathbb{P}^2}/2$ et ces hexagones se projettent sur un fermé de $\mathring{S}$. Par conséquent, $\overline{D} \cap \partial\Omega$ admet un nombre fini de composantes connexes et la surface $\mathring{S}$ possède donc un nombre fini de bouts. Son genre est fini pour les mêmes raisons que dans le cas sans bord. □

5.6.3. Le domaine fondamental est un polyèdre fini. —

Définition 5.19. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$, un *polyèdre* (resp. *polyèdre fini*)de Ω est un fermé d'intérieur non vide défini comme l'intersection d'une famille (resp. famille finie) de demi-espaces de Ω.

Proposition 5.20. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et Γ un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω, on suppose que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini. Alors, tout domaine fondamental de Dirichlet-Lee est un polyèdre fini.*

Démonstration. — Le théorème 5.18 montre que la surface $\Omega/_\Gamma$ est une surface de type fini, en particulier elle possède un nombre fini de bout. Soit D un domaine fondamental de Dirichlet-Lee, on sait que D est un polyèdre. La démonstration se fait en trois étapes.

Tout d'abord le nombre de composantes connexes de $\overline{D} \cap \partial\Omega$ est fini. Sinon on pourrait construire une infinité de triangles idéaux disjoints deux à deux inclus dans D. Et, la proposition 1.13 montre qu'alors D est de volume infini.

De plus, la proposition 1.2 montre si l'une des composantes connexes de $\overline{D} \cap \partial\Omega$ n'est pas réduite à un point, alors D est de volume infini.

Comme D est un domaine fondamental localement fini, il ne reste plus qu'à montrer que pour tout point $x_\infty \in \overline{D} \cap \partial\Omega$, il existe un voisinage V de x_∞ tel que V ne rencontre qu'un nombre fini de faces de D.

Soit $x_\infty \in \overline{D} \cap \partial\Omega$, et x_0 un point de D, la projection du segment $]x_0, x_\infty[$ sur la surface $\Omega/_\Gamma$ est une demi-géodésique λ non bornée et simple. On note $\widetilde{\lambda}$ le segment $]x_0, x_\infty[$ paramétré par la longueur d'arc pour la distance de Hilbert. La proposition 4.14 montre qu'il existe une suite t_n tendant vers l'infini et un bout B de S tel que la suite $(\lambda(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement incluse dans le bout B. Nous allons montrer qu'en fait la demi-géodésique λ est ultimement incluse dans le bout B. Au bout B de $\Omega/_\Gamma$ est associé un lacet élémentaire c, bien défini à homotopie près et à orientation près. On choisit un élément γ qui représente l'holonomie de c.

On note $\mathcal{F}$ un secteur de γ tel que l'application naturelle de $\mathcal{F}/_{<\gamma>}$ vers S est injective (lemme 5.11). La proposition 5.12 montre que $\mathcal{F}/_{<\gamma>}$ contient un voisinage du bout B, sauf si γ est hyperbolique et $p^0_\gamma \in \Omega$. Dans ce cas, on note $\widetilde{\mathcal{F}}$ l'union de $\mathcal{F}$ et de l'unique triangle inclus dans Ω défini par les points $p^+_\gamma, p^-_\gamma, p^0_\gamma$. On peut donc toujours supposer qu'il existe un fermé convexe $\widetilde{\mathcal{F}}$ tel que l'application naturelle de $\widetilde{\mathcal{F}}/_{<\gamma>}$ vers S est injective (lemme 5.11) et que son image contient un voisinage du bout B de S.

Il existe donc un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, il existe un élément $\delta_n \in \Gamma$ tel que $\delta_n\widetilde{\lambda}(t_n) \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Le domaine D ne rencontre qu'un nombre fini d'images de $\widetilde{\mathcal{F}}$, quitte à extraire et à conjuguer γ, on peut donc supposer que la suite $\widetilde{\lambda}(t_n)$ est ultimement incluse dans $\widetilde{\mathcal{F}}$. Or, $\widetilde{\lambda}$ est une demi-géodésique incluse dans D et $\widetilde{\mathcal{F}}$ est convexe donc $\widetilde{\mathcal{F}}$ contient ultimement $\widetilde{\lambda}$.

Le domaine D rencontre un nombre fini d'image du fermé $\widetilde{\mathcal{F}}$. Il existe donc un voisinage de x_∞ qui ne rencontre qu'un nombre fini de côtés de D. C'est ce qu'il fallait montrer. □

5.7. Holonomie des lacets élémentaires et volume des composantes élémentaires associées. —

5.7.1. Estimation du volume des pics. —

Proposition 5.21. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et P un pic de Ω, on suppose que le sommet p à l'infini de P est fixé par un élément γ non trivial de $Aut(\Omega)$. Alors,*

- *Si γ est parabolique alors $\mu_\Omega(P) < \infty$.*
- *Si γ est quasi-hyperbolique alors $\mu_\Omega(P) = \infty$*
- *Si γ est hyperbolique et $Axe(\gamma) \subset \partial\Omega$ alors $\mu_\Omega(P) = \infty$.*
- *Si γ est hyperbolique et $Axe(\gamma) \subset \Omega$ et $p = p_\gamma^0 \in \partial\Omega$ alors $\mu_\Omega(P) = \infty$.*

Nous allons montrer cette proposition à l'aide de plusieurs lemmes.

Lemme 5.22. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et P un pic de Ω, on suppose que le sommet p de P qui appartient au bord $\partial\Omega$ de Ω est sur une ellipse $\mathcal{E}$ dont l'intérieur (i.e la composante connexe orientable de $\mathbb{P}^2 - \mathcal{E}$) est dans Ω. Alors, $\mu_\Omega(P) < \infty$.*

Démonstration. — On note E l'intérieur de $\mathcal{E}$. On peut supposer que $P \subset E$. La proposition 1.1 montre que $\mu_\Omega(P) \leqslant \mu_E(P)$. Comme tout ellipsoïde muni de la distance de Hilbert est isométrique au plan hyperbolique, on est ramené à montrer que tout pic du plan hyperbolique est d'aire fini. Mais tout pic du plan hyperbolique est inclus dans un triangle idéal, et, tout triangle idéal est d'aire π en géométrie hyperbolique. □

Lemme 5.23. — *Soit $\gamma \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ un élément parabolique, l'élément γ préserve un faisceau d'ellipses tangentes à la droite D_γ au point p_γ.*

Démonstration. — On peut supposer que l'élément γ est donné par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on utilise les coordonnées x, y, z alors l'élément γ préserve les polynômes z et $y^2 - z(y + 2x)$. Par conséquent, l'élément γ préserve le faisceaux d'ellipses d'équation $\{\lambda z^2 + \mu(y^2 - z(y + 2x)) = 0\}_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}}$. Ces ellipses ont pour point commun le point $p_\gamma = [1 : 0 : 0]$ et leurs tangentes en p_γ est la droite D_γ d'équation $z = 0$. □

Démonstration de la proposition 5.21 dans le cas parabolique. — La première chose à remarquer est que la proposition 2.13 montre que $\partial\Omega$ est $\mathcal{C}^1$ en p. On note D la tangente à $\partial\Omega$ en p. Le lemme 5.23 montre que l'élément γ préserve un faisceau d'ellipses $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ tangentes à la droite D au point p. L'unique point commun des ellipses $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ est le point p, leurs tangentes en ce point est la droite D. Nous allons montrer que l'intérieur de l'une de ces ellipses est inclus dans Ω, ce qui conclura la démonstration grâce au lemme 5.22.

On se place dans une carte affine qui contient $\overline{\Omega}$, on munit cette carte d'un produit scalaire qui fait du faisceau d'ellipses tangentes $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ un faisceau de cercles tangents. On note A la droite perpendiculaire à la droite D pour le produit scalaire choisi. La droite A est donc perpendiculaire à chacun des cercles $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$. On notera l'image de A par γ, $A' = \gamma A$.

Soit $x \in A \cap \Omega$, on note T_x la tangente en x à l'unique cercle $\mathcal{E}_i$ passant par x. À présent, les droites A, A' et T_x définissent 4 triangles fermés de $\mathbb{P}^2$, on note $\mathcal{T}_x$ celui qui est borné dans la carte A. Si le point x est suffisament proche de p et dans Ω alors le triangle $\mathcal{T}_x$ est inclus dans Ω. On se donne donc un tel point x et on va montrer que l'intérieur de l'unique cercle $\mathcal{E}_i$ passant par x est inclus dans Ω.

Pour cela, il suffit de remarquer que la famille des $(\gamma^t x)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ est incluse dans $\mathcal{T}_x$ et donc dans Ω. L'ouvert Ω est γ-invariant, par conséquent l'orbite $(\gamma^t x)_{t\in\mathbb{R}}$ est incluse dans Ω, et cette orbite est l'unique cercle $\mathcal{E}_i$ passant par x privé du point p. □

Démonstration de la proposition 5.21 dans les cas hyperboliques et le cas quasi-hyperbolique avec $p = p_\gamma^2$

Ce cas là est beaucoup plus facile. En effet, si γ est hyperbolique et $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$ la proposition 2.8 montre que les points p_γ^+ et p_γ^- ne sont pas des points C^1 de $\partial\Omega$. De même, si γ est hyperbolique et $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \Omega$ et $p = p_\gamma^0 \in \partial\Omega$, alors le point p n'est pas un point C^1 de $\partial\Omega$. Et, si γ est quasi-hyperbolique alors la proposition 2.12 montre que $\partial\Omega$ n'est pas C^1 en p_γ^2. Par conséquent $\mu_\Omega(P) = \infty$ par le théorème 1.10. □

Il reste le cas où γ est quasi-hyperbolique et $p = p_\gamma^1$. Pour cela, on a besoin de connaître l'allure de l'orbite d'un point $x \in \mathbb{P}^2$ sous l'action d'un élément quasi-hyperbolique. Soit γ un élément quasi-hyperbolique, on peut supposer que γ est donné par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Où, $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha^2\beta = 1$. Nous allons donner les équations des orbites d'un point de $\mathbb{P}^2$ sous l'action du groupe à un paramètre engendré par γ. Pour cela, on se place dans la carte affine : $A = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \,|\, z \neq 0\}$. L'action de γ dans cette carte est donné par :

$$(X, Y) \mapsto (\frac{\alpha}{\beta}X + \frac{\alpha}{\beta}Y, \frac{\alpha}{\beta}Y)$$

Si $Y_0 \neq 0$, un calcul simple montre que l'équation de l'orbite du point $(X_0, Y_0) \in A$ est :

$$\frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y_0} + \frac{Y}{X_0}\frac{\ln(\frac{Y}{Y_0})}{\ln(\frac{\alpha}{\beta})}$$

Si $Y_0 = 0$, l'équation de l'orbite du point $(X_0, Y_0) \in A$ est la droite :

$$Y = 0$$

Nous allons avoir besoin du lemme ci-dessous pour estimer l'aire d'un pic dont le sommet à l'infini est le p_γ^1 d'un élément quasi-hyperbolique.

Lemme 5.24. — *On considère l'ouvert Ω_0 de $\mathbb{R}^2$ définit par $\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\,,\, y > x\ln(x)\}$. Tout pic de Ω_0 dont le sommet à l'infini est le point $(0, 0)$ est de volume infini pour la mesure de Busemann associée à l'ouvert Ω_0.*

Remarque 5.25. — La courbe $y(x) = x\ln(x)$ est affinement équivalente à la courbe $y'(x') = x' + ax'\ln(x')$ avec $a \neq 0$, via le changement de variable $x = e^{\frac{1}{a}}x'$ et $y = \frac{1}{a}e^{\frac{1}{a}}y'$.

Démonstration. — L'ouvert Ω_0 ne contient aucune droite affine, c'est donc un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$. Soit $(x, y) \in \Omega_0$, commençons par évaluer le volume de la boule $B^{\Omega_0}_{(x,y)}(1)$. On identifie l'espace tangent à Ω_0 en (x, y) à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

La première chose à remarquer est que Ω_0 est inclus dans l'ouvert convexe $\Omega_0' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$. Par conséquent, $B^{\Omega_0}_{(x,y)}(1)$ est incluse dans la bande $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x < u < x\}$.

De plus, un calcul simple montre que le vecteur $u = (0, y - f(x))$ appartient au bord de la boule $B^{\Omega_0}_{(x,y)}(1)$.

Enfin, la boule $B^{\Omega_0}_{(x,y)}(1)$ est symétrique par rapport à l'origine. Par conséquent, les tangentes à $\partial B^{\Omega_0}_{(x,y)}(1)$ en u et $-u$ sont parallèles. Il vient que le volume de $B^{\Omega_0}_{(x,y)}(1)$ vérifie :

$$\mathrm{Vol}(B^{\Omega_0}_{(x,y)}(1)) \leqslant 4x(y - f(x))$$

Le volume d'un pic $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < \epsilon,\, ax < y < bx\}$ avec $0 < a < b$ et $\epsilon > 0$ est donné par :

$$\begin{aligned}\mu_{\Omega_0}(P) = \int_0^\epsilon \int_{ax}^{bx} \frac{1}{\mathrm{Vol}(B^{\Omega_0}_{(x,y)}(1))} dydx &\geqslant \int_0^\epsilon \int_{ax}^{bx} \frac{1}{4x(y-f(x))} dydx \\ &\geqslant \int_0^\epsilon \frac{1}{4x} \ln\left(\frac{b-\ln(x)}{a-\ln(x)}\right) dx = \infty\end{aligned}$$

La quantité $\frac{b-\ln(x)}{a-\ln(x)}$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{4x} \ln\left(\frac{b-\ln(x)}{a-\ln(x)}\right)$ et $x \mapsto -\frac{b-a}{4x\ln(x)}$ sont équivalentes et positives au voisinage de 0. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^\epsilon \frac{1}{4x} \ln\left(\frac{b-\ln(x)}{a-\ln(x)}\right)$ est infini car l'intégrale $\int_0^\epsilon -\frac{b-a}{4x\ln(x)}$ est infini. □

À présent, nous allons utiliser la proposition 1.1 et le lemme 5.24 pour montrer la proposition 5.21 dans le cas quasi-hyperbolique.

Démonstration de la proposition 5.21 dans le cas quasi-hyperbolique avec $p = p^1_\gamma$

On rappelle que l'élément γ possède deux droites stables. Ces deux droites définissent une partition de $\mathbb{P}^2$ en deux demi-espaces fermés. On a vu au lemme 2.12 que Ω était inclus dans l'un de ces deux demi-espaces ouverts, on note A celui qui le contient. Nous allons montrer qu'il existe un point $x \in A$ tel que l'orbite de x sous l'action du groupe à un paramètre H engendré par γ n'intersecte pas Ω.

Commençons par voir pourquoi l'existence d'un tel point permet de conclure. Soit $x \in A$ tel que l'orbite $\mathcal{O}$ de x sous l'action H n'intersecte pas Ω. L'union de l'orbite $\mathcal{O}$ et de l'adhérence de l'axe de γ forment une courbe convexe qui définit un ouvert proprement convexe projectivement équivalent à l'ouvert proprement convexe Ω_0 du lemme 5.24. La proposition 1.1 et le lemme 5.24 montrent que tout pic de γ dont le sommet à l'infini est stabilisé par un élément quasi-hyperbolique est de volume infini.

Montrons à présent qu'un tel point x existe. Il suffit de trouver un point $x \in A$ tel que l'ensemble $(\gamma^t x)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ est inclus dans $A - \Omega$, puisque l'ensemble $A - \Omega$ est préservé par γ. Pour cela on considère une droite quelconque D passant par p^1_γ et son image D' par γ. On se donne un point $x \in D \cap A$, et on considère le segment S inclus dans A et définit par les points x et p^1_γ. La région $R = \{y \in A \,|\, \exists t,\, 0 \leqslant t \leqslant 1,\, \exists z \in S,\ \text{ tel que } y = \gamma^t(z)\}$ est une partie convexe dont le bord est formé de trois courbes. Une incluse dans D, une autre dans D' et la dernière est la courbe $(\gamma^t x)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$. On note $\mathcal{T}_x$ le triangle fermé de A défini par les points $p^1_\gamma, x, \gamma x$. Si le point $x \in D$ tend vers l'infini, alors le point $\gamma x \in D'$ tend aussi vers l'infini. Par conséquent, il existe un point $x \in D \subset A$ tel que le côté de $\mathcal{T}_x$ opposé à p^1_γ soit inclus dans $A - \Omega$. Mais le segment $[x, \gamma x]$ est une corde de la courbe convexe $(\gamma^t x)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$. Par conséquent, si on se donne un tel x alors la courbe $(\gamma^t x)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ est incluse dans $A - \Omega$. □

5.7.2. L'holonomie des bouts des surfaces projectives proprement convexes de volume fini est parabolique. —

Définition 5.26. — Soient $\mathcal{C}$ une partie proprement convexe et $\Omega = \mathring{\mathcal{C}}$, on appelle bord réel de $\mathcal{C}$ la partie $\mathcal{C} \cap \partial\Omega$, on le note $\partial_r\Omega$.

Proposition 5.27. — *Soit S une surface de caractéristique d'Euler strictement négative, on munit S d'une structure projective proprement convexe. Soit c un lacet élémentaire tracé sur S, on note $\pi : \mathcal{C} \to S$ le revêtement universel de S donné par la développante de S.*

- *Si c fait le tour d'un bout et l'holonomie de c est hyperbolique ou quasi-hyperbolique alors le volume de la composante élémentaire associée à c est infini.*
- *Si c fait le tour d'un bout et l'holonomie de c est parabolique alors le volume de la composante élémentaire associée à c est fini.*
- *Si c est librement homotope à une composante connexe du bord de S alors l'holonomie de c est :*
  - *ou quasi-hyperbolique avec $Axe(Hol(c)) \subset \partial_r\mathcal{C}$*
  - *ou hyperbolique avec $Axe(Hol(c)) \subset \partial_r\mathcal{C}$*
  - *ou hyperbolique avec $p^0_\gamma \in \partial\mathcal{C}$ et l'un des axes secondaires de γ est inclus dans $\partial_r\mathcal{C}$.*

Démonstration. — On note $\gamma = Hol(c)$. On sait par le théorème 4.9 qu'il existe un domaine fondamental D convexe et localement fini pour l'action du groupe fondamental Γ de S sur l'intérieur Ω de $\mathcal{C}$. La proposition 5.12 montre qu'il existe un fermé γ-invariant et convexe $\mathcal{F}$ de Ω tel l'application naturelle de $\mathcal{F}/_{<\gamma>}$ vers S est injective et son image est une composante élémentaire associée à un lacet homotope à c. Le lemme 4.18 montre que D rencontre un nombre fini d'image de $\mathcal{F}$. On les note $\delta_i\mathcal{F}$ avec $\delta_i \in \Gamma$ et $\delta_1 = Id$. Le volume de $\mathcal{F}/_{<\gamma>}$ est égale au volume de $(\bigcup_{i=1\dots r} \delta_i^{-1}D) \cap \mathcal{F}$.

Il reste donc à estimer le volume des $\delta_i^{-1}D \cap \mathcal{F}$ pour $i = 1\dots r$. Il suffit de calculer le volume de $D \cap \mathcal{F}$. Traitons les 3 cas séparement :

- Si c fait le tour d'un bout B et l'holonomie de c est hyperbolique ou quasi-hyperbolique alors on a deux cas à distinguer.
  - Les deux faces du polyèdre D intersectant $\mathcal{F}$ ont une extrémité commune p appartenant à $\overline{\Omega}$. Le point p est alors fixé par γ. Si l'élément γ est hyperbolique alors, il y a trois sous cas : a) $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$, b) $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \Omega$ et $p^0_\gamma \in \partial\Omega$, ou bien c) $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \Omega$ et $p^0_\gamma \notin \partial\Omega$.
    Si l'élément γ est quasi-hyperbolique ou hyperbolique cas a) , alors les cas 2 et 3 de la proposition 5.21 montre que la composante élémentaire associée à c est de volume infini.
    Si l'élément γ est hyperbolique cas b) alors $p = p^0_\gamma$, car l'ensemble $\mathcal{F}/_{<\gamma>}$ est un voisinage du bout B. Le cas 4 de la proposition 5.21 montre que la composante élémentaire associée à c est de volume infini.
    Enfin, si l'élément γ est hyperbolique cas c) alors comme l'ensemble $\mathcal{F}/_{<\gamma>}$ est un voisinage du bout B, le point p ne peut-être fixé par γ. Par conséquent, on ne peut pas être dans ce cas.
  - Les deux faces du polyèdre D incluse dans $\mathcal{F}$ n'ont pas d'extrémités commune appartenant à $\overline{\Omega}$. Dans ce cas, c'est le théorème 1.2 qui montre que la composante élémentaire associée à c est de volume infini.

- Si c fait le tour d'un bout et l'holonomie de c est parabolique alors les deux faces du polyèdre D incluse dans $\mathcal{F}$ s'intersectent en p_γ le point fixe de γ. Dans ce cas la proposition 5.21 montre que la composante élémentaire associée à c est de volume fini.
- Si c est librement homotope à une composante connexe L du bord de S alors on a vu que l'holonomie de c ne peut-être parabolique (proposition 5.12). La surface S est une surface projective à bord géodésique par conséquent tout relevé de L est un segment T inclus dans le bord de $\mathcal{C}$ et préservé par γ. Si γ est quasi-hyperbolique alors il n'y a rien à montrer car $\mathrm{Axe}(\gamma)$ est l'unique segment préservé par γ inclus dans $\partial\mathcal{C}$. On suppose donc que γ est hyperbolique. Si le point p_γ^0 n'appartient pas à $\partial\Omega$ alors T est nécessairement l'axe principal de γ, car dans ce cas $\mathrm{Axe}(\gamma)$ est l'unique segment préservé par γ inclus dans $\partial\mathcal{C}$. Et, si p_γ^0 appartient à $\partial\Omega$ alors les axes secondaires de γ sont les seuls segments préservés par γ et inclus dans $\partial\mathcal{C}$. Ils ne peuvent pas être tous les deux inclus dans $\partial\mathcal{C}$ cas sinon le quotient ne serait pas une surface. Par conséquent, T est l'un des deux axes secondaires de γ.

□

On peut à présent montrer le résultat principal de cet article.

Théorème 5.28. — *Soit S une surface qui n'est pas un cylindre, on munit S d'une structure projective proprement convexe, cette structure est de volume fini si et seulement si la surface S est de type fini et l'holonomie de tous les lacets qui font le tour d'un bout est parabolique.*

Démonstration. — On commence par se placer dans le cas où la surface S est de caractéristique d'Euler strictement négative. Supposons que que l'on s'est donné une structure projective proprement convexe sur S de volume fini. Alors, la surface S est de type fini d'après le théorème 5.18, et l'holonomie de chaque bout est parabolique d'après la proposition 5.27.

Supposons à présent que S est de type fini et que l'holonomie de tous les bouts de S est parabolique. La proposition 5.27 montre que la surface S est de volume fini.

Enfin, supposons la surface S est de caractéristique d'Euler positive. Si l'intérieur de S est compacte le théorème est évident. Si l'intérieur S n'est pas compact alors S est un cylindre avec ou sans bord. On a exclu ce cas. □

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 5.29. — *Soit S une surface sans bord, on munit S d'une structure projective proprement convexe. Alors, cette structure est de volume fini si et seulement si la surface S est de type fini et l'holonomie de tous les lacets élémentaires est parabolique.*

Démonstration. — Si la surface S n'est pas un cylindre alors ce corollaire est une conséquence direct du théorème 5.28. Si la surface S est un cylindre, c'est un cylindre sans bord, il est alors assez facile de voir que l'une des deux composantes élémentaires de S est de volume infini. □

Proposition 5.30. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et Γ un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω, si Γ contient un élément quasi-hyperbolique alors l'action de Γ sur Ω est de covolume infini.*

Démonstration. — Supposons que le groupe Γ contienne un élément γ quasi-hyperbolique. L'ouvert Ω n'est donc pas un triangle et la surface quotient $\Omega/_\Gamma$ est de caractéristique d'Euler négative. Il existe un revêtement fini de $\Omega/_\Gamma$ dans lequel γ est représenté par un lacet simple. La proposition 5.12 montre que le lacet correspondant à γ sur la surface $\Omega/_\Gamma$ est élémentaire. Par conséquent, la proposition 5.27 montre que $\Omega/_\Gamma$ est de volume infini. □

6. Applications

6.1. Stricte convexité. — Le but de cette partie est d'étudier la stricte-convexité de l'ouvert Ω. Nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemme 6.1. — *Soient $\mathcal{C}$ une partie proprement convexe et un sous-groupe sans torsion discret Γ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve $\mathcal{C}$ et tel que le quotient $S = \mathcal{C}/_\Gamma$ est une surface à bord géodésique. Soient x_0 un point de l'intérieur Ω de $\mathcal{C}$ et un point x_∞ de $\partial\Omega$. On note $\widetilde{\lambda}$ le segment $[x_0, x_\infty[$ paramétré par la longueur d'arc (pour la distance de Hilbert) et λ la demi-géodésique obtenue en projetant $\widetilde{\lambda}$ sur S. Si la demi-géodésique λ est ultimement incluse dans un bout B de $\overset{\circ}{S}$ alors il existe $\gamma \in \Gamma$ représentant l'holonomie du bout B tel que :*

- *si γ n'est pas hyperbolique avec $p^0_\gamma \in \partial\Omega$ alors $\widetilde{\lambda}$ est ultimement inclus dans tout secteur de γ.*
- *si γ est hyperbolique avec $p^0_\gamma \in \partial\Omega$ alors $\widetilde{\lambda}$ est ultimement inclus dans la réunion de tout secteur de γ et de l'unique triangle T_γ inclus dans $\mathcal{C}$ définit par les points $p^+_\gamma, p^-_\gamma, p^0_\gamma$.*

Démonstration. — On considère un lacet simple c qui fait le tour du bout B de S et l'élément $\gamma = \mathrm{hol}(c)$. On note $\mathcal{F}$ un secteur de γ. La proposition 5.12 montre que si γ n'est pas hyperbolique avec $p^0_\gamma \in \partial\Omega$ alors $\mathcal{F}/_{<\gamma>}$ est un voisinage du bout B. Elle montre aussi que si γ est hyperbolique avec $p^0_\gamma \in \partial\Omega$ alors pour obtenir un voisinage du bout B, on peut prendre la projection de la réunion de $\mathcal{F}$ et du triangle T_γ définit par les points $p^+_\gamma, p^-_\gamma, p^0_\gamma$.

Comme $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F} \cup T_\gamma$ est convexe et que la demi-géodésique λ converge vers le bout B de S, quitte à conjuguer γ on peut supposer que λ est inclus dans $\mathcal{F}$. □

On obtient le corollaire suivant :

Corollaire 6.2. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe et un sous-groupe discret Γ qui préserve Ω. On suppose que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini. On se donne un domaine fondamental D convexe et localement fini. Soient x_0 un point de Ω et x_∞ un point de $\partial\Omega$. On note S la surface $\Omega/_\Gamma$, $\widetilde{\lambda}$ le segment $[x_0, x_\infty[$ paramétré par la longueur d'arc et λ la demi-géodésique obtenue en projetant $\widetilde{\lambda}$ sur S. Si la demi-géodésique λ est ultimement incluse dans un bout B de S alors il existe $\delta \in \Gamma$ et un $T > 0$ tel que pour tout $t > T$, $\lambda(t) \in \delta D$. En particulier, x_∞ est le point fixe d'un élément parabolique de Γ qui représente l'holonomie du bout B.*

Démonstration. — Le corollaire 5.29 montre que l'holonomie de tous les lacets élémentaires de S est parabolique. L'intersection de l'adhérence de tous les secteurs d'un élément

parabolique ne contient qu'un seul point du bord de Ω : le point fixe de cet élément parabolique. Par conséquent, le point x_∞ est le point fixe d'un élément parabolique de Γ. Il vient que le segment $[x_0, x_\infty[$ est ultimement inclus dans un domaine fondamental. $\square$

On peut à présent montrer le théorème suivant :

Théorème 6.3. — *Soient $\mathcal{C}$ une partie proprement convexe et Γ un sous-groupe discret de type fini et sans torsion de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve $\mathcal{C}$. On suppose que le quotient $\mathcal{C}/_\Gamma$ est une surface projective à bord géodésique et que $\mathcal{C}$ n'est pas un triangle. Alors, tout segment maximal non trivial de $\partial\mathcal{C}$ est préservé par un élément non parabolique de Γ qui correspond à un lacet élémentaire de $\mathcal{C}/_\Gamma$.*

On rappelle le théorème suivant dû à Benzécri que l'on a déjà utilisé dans la partie 1.

Théorème 6.4 **(Benzécri)**. — *L'action de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ sur l'ensemble $\{(\Omega, x) | \Omega$ est un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et $x \in \Omega\}$ est propre et cocompacte.*

Démonstration du théorème 6.3. — On note Ω l'intérieur de $\mathcal{C}$. On obtient ainsi $\overset{\circ}{S} = \Omega/_\Gamma$ une surface projective convexe sans bord et de type fini. Supposons qu'il existe un segment s non trivial et maximal inclus dans le bord $\partial\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$. Soit $(e_i)_{i=1...3}$ une base de $\mathbb{R}^3$. On peut supposer que les extrémités de s sont les points $[e_2]$ et $[e_3]$ et que $[e_1] \notin \overline{\Omega}$. On considère les éléments :

$$g_t = \begin{pmatrix} 2^t & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\lim_{t\to+\infty} g_t\Omega$ est un triangle T dont les sommets sont e_1, e_2 et e_3.

Soit $x_0 \in \Omega \cap T$, on considère la famille $\widetilde{\lambda}_t = (g_t^{-1}x_0)_{t\geqslant 0}$ qui est dans $\Omega \cap T$ pour tout t. Il est essentiel de remarquer que la famille $(\widetilde{\lambda}_t)_{t>0}$ est un segment ouvert dont l'une des extrémités est x_0 et l'autre est dans s. Soit D un domaine fondamental convexe et localement fini pour l'action de Γ sur Ω contenant le point x_0. On note λ_t la projection de $\widetilde{\lambda}_t$ sur $\overset{\circ}{S}$. La surface $\overset{\circ}{S}$ est homéomorphe à la surface compacte Σ_g de genre g à laquelle on a retiré p points x_i, $i = 1...p$. On considère des disques ouverts B_i de centre x_i et suffisament petit pour être disjoints deux à deux. On note K' le complémentaire de ces disques et K le compact correspondant dans $\overset{\circ}{S}$. On a l'alternative :

1. Ou la demi-géodésique λ est ultimement incluse dans un bout B de S.
2. Ou alors, il existe une suite de réels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini et tel que $\lambda_{t_n} \in K$.

1. Commençons par traiter le second cas. Dans ce cas, il existe une famille $\gamma_{t_n} \in \Gamma$ tel que $\gamma_{t_n} g_{t_n}^{-1} x_0$ appartienne à une partie compacte de D. Quitte à extraire on peut supposer que la suite $(\gamma_{t_n} g_{t_n}^{-1} x_0)_{n\geqslant 0}$ converge vers un point $x_\infty \in D$. On a donc les convergences suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} (\Omega, \gamma_{t_n} g_{t_n}^{-1} x) = (\Omega, x_\infty) \text{ et } \lim_{n\to\infty} g_{t_n}\gamma_{t_n}^{-1}(\Omega, \gamma_{t_n} g_{t_n}^{-1} x) = (T, x)$$

   Le théorème 6.4 montre que la suite $(g_{t_n}\gamma_{t_n}^{-1})_{t_n\geqslant 0}$ est bornée, ce qui montre que Ω est un triangle, ce qui est absurde.
2. Il reste donc à traiter le premier cas. Il peut être utile de remarquer que si on fait l'hypothèse plus forte que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini alors le corollaire 6.2 montre que la limite de $\widetilde{\lambda}_t$ en $+\infty$ qui est un point du segment s devrait être fixée

par un élément parabolique, ce qui est absurde (lemme 2.13). Mais revenons, au cas général, on note γ un représentant de l'holonomie du bout B. La proposition 5.27 montre qu'il faut distinguer quatre cas :

- L'élément γ est parabolique.
- L'élément γ est quasi-hyperbolique ou hyperbolique avec $p_\gamma^0 \notin \partial\Omega$ et $\mathrm{Axe}(\gamma) \subset \partial\Omega$.
- L'élément γ est hyperbolique avec $p_\gamma^0 \in \partial\Omega$ et l'un des axes secondaires de γ est inclus dans $\partial\Omega$.

Dans les trois premiers cas, le lemme 6.1 montre qu'il existe un secteur $\mathcal{F}$ de γ tel que la géodésique $\widetilde{\lambda}$ est ultimement inclus dans $\mathcal{F}$. Le deuxième et troisième cas se traite de la même façon. On commence par le cas ou γ est parabolique.

- Si γ est parabolique alors tout secteur de γ ne possède qu'un point d'adhérence sur le bord de Ω, à savoir le point fixe de γ. Par conséquent, x_∞ est fixée par γ, or, le lemme 2.13 montre que le point fixe d'un élément parabolique ne peut-être sur un segment non trivial du bord de Ω. Ce cas ne peut donc pas se produire.
- Si γ est quasi-hyperbolique ou hyperbolique avec $p_\gamma^0 \notin \partial\Omega$ alors l'adhérence de tout secteur de γ contient l'axe de γ. Par conséquent, le segment s est l'axe de γ. C'est ce que l'on voulait montrer.
- Si γ est hyperbolique avec $p_\gamma^0 \in \partial\Omega$ alors d'après le lemme 6.1, la géodésique $\widetilde{\lambda}$ est ultimement inclus dans la réunion $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ et de l'unique triangle inclus dans $\mathcal{C}$ définit par les points $p_\gamma^+, p_\gamma^-, p_\gamma^0$. Par conséquent, le segment s est l'un des deux axes secondaires de γ.

□

Corollaire 6.5. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe et un sous-groupe discret sans torsion Γ qui préserve Ω. On suppose que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini et que Ω n'est pas un triangle. Alors, Ω est strictement convexe.*

Démonstration. — Tout segment maximal et non trivial du bord de Ω est stabilisé par un élément non parabolique $\gamma \in \Gamma$ (théorème 6.3) qui correspond à un lacet élémentaire tracé sur $\Omega/_\Gamma$. Mais le théorème 5.29 montre que l'holonomie de tout lacet élémentaire de $\Omega/_\Gamma$ est parabolique. L'ouvert Ω est donc strictement convexe. □

6.2. Dualité. — Soit S une surface sans bord. Nous allons définir une opération de dualité sur l'espace $\beta(S)$ et nous allons voir que cette opération préserve le sous-espace $\beta_f(S)$.

Définition 6.6. — Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$. On note Ω^* l'ouvert convexe de $(\mathbb{P}^2)^*$: $\Omega^* = \{\mathbb{R}f \in (\mathbb{P}^2)^* \,|\, \forall\, \mathbb{R}v \in \overline{\Omega},\ f(v) \neq 0\}$. C'est un ouvert proprement convexe. On l'appelle *le dual de* Ω.

Pour faire passer cette notion de dualité au niveau des surfaces nous allons avoir besoin d'une application $\mathrm{Aut}(\Omega)$-équivariante $\theta_\Omega : \Omega \to \Omega^*$. On rappelle ici une construction dû à Vinberg d'une telle application.

Soit C un des deux cônes ouverts proprement convexe de $\mathbb{R}^3$ dont l'image dans $\mathbb{P}^2$ est Ω. On va de nouveau utiliser la fonction caractéristique de C. On note $\mathrm{C}^* = \{f \in \mathbb{R}^{3*} \,|\, \forall\, v \in$

$\overline{\mathrm{C}} - \{0\}$, $f(v) > 0\}$ le cône dual de C. Son image dans $(\mathbb{P}^2)^*$ est Ω^*. Pour tout $v \in \mathrm{C}$, on définit $v^* \in \mathrm{C}^*$ par la formule suivante :

$$v^* = \frac{\int_{\mathrm{C}^*} f e^{-f(v)} df}{\int_{\mathrm{C}^*} e^{-f(v)} df}$$

Le point v^* est le centre de gravité du convexe $\{f \in \mathrm{C}^* \,|\, f(v) = 3\}$. On définit donc $x^* = \theta_\Omega(x)$ comme la droite engendré par l'image v^* de n'importe quel générateur $v \in \mathrm{C}$ de la droite $x \in \Omega$.

Remarque. — Il est vrai que $\Omega^{**} = \Omega$ via l'identification naturel entre un espace vectoriel et son bidual. Par contre, l'application $\theta_{\Omega^*} \circ \theta_\Omega \neq Id$ en général. On pourra consulter [**Ben03**] pour un contre-exemple.

On obtient ainsi la définition suivante :

Définition 6.7. — Soient S une surface sans bord et un point base $x_0 \in S$. Notons π_1 le groupe fondamental de S basé en x_0. On munit S d'une structure projective proprement convexe via une développante $d : \widetilde{S} \to \mathbb{P}^2$ et une holonomie $\rho : \pi_1 \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. La surface duale de S, noté S^* est la surface projective proprement convexe définit par la développante $d^* = \theta_\Omega \circ d : \widetilde{S} \to (\mathbb{P}^2)^*$ et l'holonomie ρ^* est la représentation duale de la représentation ρ. En particulier, la surface projective proprement convexe S^* s'identifie au quotient $\Omega^*/_{\Gamma^t}$. On notera θ_S l'homéomorphisme induit par θ_Ω entre S et S^*.

Théorème 6.8. — *Soit S une surface sans bord. On munit S d'une structure projective convexe. Alors, S est de volume fini si et seulement si S^* est de volume fini.*

Démonstration. — Le théorème 5.29 montre qu'une surface projective proprement convexe est de volume fini si et seulement si l'holonomie de chaque bout est parabolique. Soit γ un lacet qui fait le tour d'un bout de S. Le lacet $\theta_S(\gamma)$ fait le tour d'un bout de S^*. L'holonomie $\rho(\gamma)$ de γ est parabolique si et seulement si l'holonomie $\rho^*(\gamma) =^t \gamma^{-1}$ de $\theta_S(\gamma)$ est parabolique. Le fait d'être de volume fini est donc stable par dualité. □

Le fait suivant est très classique.

Fait 3. — *Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ alors le bord $\partial\Omega$ de Ω est C^1 si et seulement si Ω^* est strictement convexe.*

Théorème 6.9. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ et un sous-groupe discret sans torsion Γ non virtuellement abélien de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω. Si l'action de Γ sur Ω est de covolume fini alors l'ouvert Ω est à bord C^1.*

Démonstration. — L'action de Γ sur Ω est de covolume fini. La proposition 6.8 montre que l'action dual du groupe Γ sur l'ouvert dual Ω^* de Ω est de covolume fini. Par conséquent, le corollaire 6.5 affirme que l'ouvert Ω^* est strictement convexe. Le fait 3 permet de conclure que le bord $\partial\Omega$ de Ω est C^1. □

6.3. Caractérisation de la finitude du volume en termes d'ensemble limite. —

Définition 6.10. — Lorsque Γ est un sous-groupe discret irréductible de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe, on peut définir Λ_Γ *l'ensemble limite* de Γ, c'est le plus petit fermé invariant non vide de $\mathbb{P}^2$ ([**Ben00**]).

Remarque. — Le corollaire 3.3 montre que l'ensemble limite Λ_Γ est bien défini dès que Γ n'est pas virtuellement abélien. De plus, l'ensemble limite est l'adhérence de l'ensemble des points fixes attractifs des éléments hyperboliques de Γ ([**Ben00**]). Il est clair que $\Lambda_\Gamma \subset \partial\Omega$.

Théorème 6.11. — *Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret non virtuellement abélien de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω. Alors, l'action de Γ sur Ω est de covolume fini si et seulement si Γ est de type fini et $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$.*

Démonstration. — Remarquons que Ω n'est pas un triangle puisque Γ n'est pas virtuellement abélien. Commençons par supposer que $\Lambda_\Gamma \neq \partial\Omega$ et montrons que $\mu(\Omega/_\Gamma) = \infty$. L'intérieur K de l'enveloppe convexe de Λ_Γ est invariante par Γ et $\Omega - K$ est non vide puisque Ω est strictement convexe (corollaire 6.5). Par conséquent, les composantes connexes de $\Omega - K$ sont permutées par Γ et leur stabilisateur est soit trivial, soit engendré par un élément hyperbolique. Dans tous les cas, la proposition 1.2 montre que $\mu(\Omega/_\Gamma) = \infty$.

Supposons à présent que $\mu(\Omega/_\Gamma) = \infty$ et Γ est de type fini. On peut supposer que Γ est sans torsion puisque Γ est de type fini. Le corollaire 5.29 montre que l'holonomie de l'un des bouts de la surface sans bord et de type fini $\Omega/_\Gamma$ est hyperbolique ou quasi-hyperbolique. Par conséquent, si on considère c un lacet autour de l'un de ces bouts, la réunion E des relevés de la composante élémentaire associée à c est un fermé de Ω préservé par Γ. La partie $\overline{(\partial\Omega - \overline{E^{\mathbb{P}^2}})^{\mathbb{P}^2}}$ est un fermé Γ-invariant. Il est différent de $\partial\Omega$ car $\mathrm{hol}(c)$ n'est pas parabolique. Donc $\Lambda_\Gamma \neq \partial\Omega$. □

Remarque. — L'hypothèse Γ type fini est essentielle comme le montre la construction classique suivante. Soient Ω un ouvert proprement convexe et Γ un sous-groupe discret non virtuellement abélien et sans torsion de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve Ω tel que l'action de Γ sur Ω est de covolume fini. La proposition 5.18 montre que Γ est ou un groupe libre non abélien de type fini ou isomorphe au groupe fondamental d'une surface compacte de genre supérieur ou égale à 2. Par conséquent, le groupe dérivé $[\Gamma, \Gamma]$ de Γ est un sous-groupe d'indice infini de Γ. Son action sur Ω n'est donc pas de covolume fini. Mais, l'ensemble limite $\Lambda_{[\Gamma,\Gamma]}$ est Γ-invariant car $[\Gamma, \Gamma]$ est distingué dans Γ, par conséquent $\Lambda_{[\Gamma,\Gamma]} = \Lambda_\Gamma$. Ceci ne contredit pas notre théorème puisqu'il est bien connu que $[\Gamma, \Gamma]$ n'est pas de type fini.

Proposition 6.12. — *Soit Γ un sous-groupe discret non virtuellement abélien, sans torsion et de type fini de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui préserve un ouvert proprement convexe de Ω. On considère l'enveloppe convexe $\mathcal{C}$ dans $\overline{\Omega} - \Lambda_\Gamma$ de Λ_Γ l'ensemble limite de Γ. La surface $\mathcal{C}/_\Gamma$ est de volume fini.*

Démonstration. — Par définition, l'intérieur $\mathcal{U}$ de $\mathcal{C}$ est le plus petit ouvert convexe de $\mathbb{P}^2$ préservé par Γ. La partie $\mathcal{C}$ est le convexe obtenu en ajoutant à $\mathcal{U}$ les axes des éléments hyperbolique et quasi-hyperbolique de Γ qui représente un lacet qui fait le tour d'un bout de $\Omega/_\Gamma$ d'holonomie hyperbolique ou quasi-hyperbolique (théorème 6.3 et proposition 5.12).

Par conséquent, tous les bouts de la surface $\mathcal{C}/_\Gamma$ ont une holonomie parabolique et l'holonomie des composantes connexes du bord de $\mathcal{C}/_\Gamma$ est hyperbolique ou quasi-hyperbolique. La proposition 5.27 montre que la surface $\mathcal{C}/_\Gamma$ est de volume fini. □

6.4. Unicité de l'ouvert Ω lorsque le volume est fini. —

Proposition 6.13. — *Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe un ouvert proprement convexe Ω tel que $\mu(\Omega/_\Gamma) < \infty$ et que Ω n'est pas un triangle. Alors, Ω est l'unique ouvert convexe de $\mathbb{P}^2$ sur lequel Γ agit proprement.*

Démonstration. — Soit $F = \overline{\{x \in \mathbb{P}^2 \,|\, \exists \gamma \in \Gamma \text{ tel que } \gamma x = x\}}$, commençons par montrer que $F = \mathbb{P}^2 - \Omega$. On sait d'après [**Ben00**] que pour tout couple de points $(x^+, x^-) \in \Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma$, il existe une suite d'éléments hyperboliques $\gamma_n \in \Gamma$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} p^+_{\gamma_n} = x^+$ et $\lim\limits_{n\to\infty} p^-_{\gamma_n} = x^-$. La proposition 2.8 montre que le point $p^0_{\gamma_n}$ est l'intersection des tangentes à $\partial\Omega$ en $p^+_{\gamma_n}$ et $p^-_{\gamma_n}$. Le théorème 6.11 montre que $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$. Par conséquent, comme le bord $\partial\Omega$ de Ω est C^1 (proposition 6.9), l'ensemble $\{p^0_\gamma \,|\, \gamma \in \Gamma \text{ hyperbolique}\}$ est dense dans $\mathbb{P}^2 - \Omega$. Par conséquent, si Ω' est un ouvert sur lequel Γ agit proprement alors $\Omega' \subset \Omega$. Il reste à remarquer que l'enveloppe convexe de toute orbite d'un point de Ω est Ω lui-même. L'adhérence de toute orbite d'un point quelconque de Ω contient l'ensemble limite Λ_Γ, or $\Lambda_\Gamma = \partial\Omega$. Ainsi, le seul ouvert convexe Γ-invariant de $\mathbb{P}^2$ est Ω. □

Cette proposition montre que l'holonomie d'une structure projective proprement convexe de volume fini sur une surface sans bord caractérise cette structure. On obtient facilement le corollaire suivant :

Corollaire 6.14. — *Soient S une surface de type fini <u>sans bord</u> de caractéristique d'Euler strictement négative, et ρ une représentation du groupe fondamental de S, il existe au plus une structure projective proprement convexe de volume fini sur la surface S dont l'holonomie est ρ.*

Remarque. — Ce théorème est faux pour les surfaces à bord. En effet, considérons une surface à bord S de type fini et donnons nous une structure projective proprement convexe de volume fini sur S. On note $\mathcal{C}$ la partie proprement convexe de $\mathbb{P}^2$ donné par la développante de cette structure et Ω l'intérieur de $\mathcal{C}$. Considérons un lacet c homotope à une composante connexe L du bord, on a trois cas à distinguer (proposition 5.12) :

- L'élément $\mathrm{hol}(c)$ est quasi-hyperbolique,
- L'élément $\mathrm{hol}(c)$ est hyperbolique et $\mathrm{Axe}(\mathrm{hol}(c)) \subset \partial\mathcal{C}$,
- L'élément $\mathrm{hol}(c)$ est hyperbolique et $\mathrm{Axe}(\mathrm{hol}(c)) \subset \Omega$.

Tout relevé du bord L est un segment inclus dans $\partial\mathcal{C}$ préservé par un conjugué de $\mathrm{hol}(c)$. Par conséquent, dans les deux premiers cas, le bord L de S est la projection de l'axe principal de $\mathrm{hol}(c)$ sur la surface S. Et, dans le troisième cas, le bord L est la projection de l'un des deux axes secondaires de $\mathrm{hol}(c)$.

Par conséquent, étant donné une structure projective proprement convexes de volume fini sur une surface à bord S. Notons n_h le nombre de composantes connexes du bord de S dont l'holonomie est hyperbolique, le paragraphe précédent montre que l'on peut construire au moins 3^{n_h} structures projectives proprement convexes de volume fini sur la surface S qui ont la même holonomie que S. Et, le théorème 5.27 montre qu'il n'y en a pas d'autres.

Pour résoudre ce problème dans le but d'étudier l'espace des modules des structures projectives proprement convexe de volume fini sur les surfaces à bord, on introduit la notion de surface à bord géodésique principal.

Définition 6.15. — Une structure projective proprement convexe sur une surface à bord S est dite à *bord géodésique principal* lorsqu'elle est à bord géodésique et toute composante connexe L du bord de S qui a une holonomie hyperbolique est la projection de l'axe principal de cette holonomie.

La proposition suivante est à présent évidente.

Proposition 6.16. — *Soient S une surface de type fini de caractéristique d'Euler strictement négative, et ρ une représentation du groupe fondamental de S, il existe au plus une structure projective proprement convexe de volume fini à bord géodésique principal sur la surface S dont l'holonomie est ρ.*

6.5. Discrétude du groupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$. —

Théorème 6.17. — *Soient Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ et Ω un ouvert proprement convexe tel que $\mu(\Omega/_\Gamma) < \infty$. On suppose que Ω n'est pas un triangle alors on a l'alternative <u>exclusive</u> suivante :*

- *L'adhérence de Zariski $\overline{\Gamma^Z}$ de Γ est conjuguée au groupe $\mathrm{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$ et Ω est un ellipsoïde et $Aut(\Omega) = \overline{\Gamma^Z}$.*
- *Le groupe Γ est Zariski dense dans $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ et $Aut(\Omega)$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. En particulier, Γ est d'indice fini dans $Aut(\Omega)$.*

Démonstration. — Supposons que l'adhérence de Zariski de Γ est conjuguée au groupe $\mathrm{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$ par conséquent, le groupe Γ préserve une ellipse. La proposition 6.13 montre que Ω est cet ellipsoïde.

Si l'adhérence de Zariski de Γ n'est pas conjuguée au groupe $\mathrm{SO}_{2,1}(\mathbb{R})$ alors le corollaire 3.5 montre que Γ est Zariski dense. Le lemme 6.18 montre que $\mathrm{Aut}(\Omega)$ est un sous-groupe discret ou dense de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$. Or, il préserve Ω il ne peut donc pas être dense. □

Lemme 6.18. — *Soit H un sous-groupe Zariski dense de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, on a l'alternative suivante :*

- *Le groupe H est discret, ou bien*
- *Le groupe H est dense.*

Démonstration. — Ce lemme est vrai plus généralement pour les sous-groupes Zariski dense d'un groupe algébrique quasi-simple. La composante neutre G de l'adhérence (pour la topologie usuelle) de H est un sous-groupe fermé, connexe de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ qui est normalisé par H, et donc par $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ puisque H est Zariski dense. Par conséquent, comme $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ est simple. On obtient que :

- $G = \{1\}$, ou bien
- $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$.

□

Ce théorème entraîne le corollaire suivant.

Corollaire 6.19. — *Soit Ω un ouvert proprement convexe de $\mathbb{P}^2$, on suppose qu'il existe Γ_1 et Γ_2 tel que $\mu(\Omega/_{\Gamma_1}) < \infty$ et $\mu(\Omega/_{\Gamma_2}) < \infty$. On suppose de plus que $\Omega/_{\Gamma_1}$ est compact et que $\Omega/_{\Gamma_2}$ n'est pas compact. Alors, Ω est un ellipsoïde.*

Démonstration. — Tout d'abord, l'ouvert Ω n'est pas un triangle puisque $\Omega/_{\Gamma_2}$ n'est pas compact. Ensuite, si Ω n'est pas un ellipsoïde alors le théorème 6.17 montre que Γ_1 et Γ_2 sont des sous-groupes d'indice fini de $\mathrm{Aut}(\Omega)$ par conséquent $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ_1 et Γ_2. Il vient que $\Omega/_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}$ devrait être compact et non compact, ce qui est absurde. □

Références

[BBI01] Dimitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov. A course in metric geometry. *Graduate Studies in Mathematics*, 33, 2001.

[Ben] Yves Benoist. Sous-groupes discrets des groupes de Lie. *European Summer School in Group Theory Luminy 7-18 July 1997.*

[Ben60] Jean-Paul Benzécri. Sur les variétés localement affines et localement projectives. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 88 :p.229–332, 1960.

[Ben00] Yves Benoist. Automorphismes des cônes convexes. *Invent. Math.*, 141 :p.149–193, 2000.

[Ben03] Yves Benoist. Convexes hyperboliques et fonctions quasisymétriques. *Publ. Math. IHES*, 97 :p.181–237, 2003.

[Ben06] Yves Benoist. Convexes hyperpoliques et quasiisométries. *Geometriae Dedicata*, 122 :p. 109–134, 2006.

[Bor63] Armand Borel. Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces. *Topology*, 2 :p.111–122, 1963.

[Cho94] Suhyoung Choi. Convex decompositions of real projective surfaces. II : Admissible decompositions. *J. Differential Geom.*, 40 :p. 239–283, 1994.

[CVV04] Bruno Colbois, Constantin Vernicos, and Patrick Verovic. L'aire des triangles idéaux en géométrie de Hilbert. *L'enseignement mathématique*, 50 :p. 203–237, 2004.

[CVVre] Bruno Colbois, Constantin Vernicos, and Patrick Verovic. Area of ideal triangles and gromov hyperbolicity in hilbert geometry. *Illinois Journal of Math.*, A paraître.

[Gol90] William Goldman. Convex real projective structures on compact surfaces. *J. Differential Geom.*, 31 :791–845, 1990.

[JM84] D. Johnson and John Millson. Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds. *Discrete groups in Geometry and Analysis Progr. Math*, 67 :p. 48–106, 1984.

[Kap07] Misha Kapovich. Convex projective structures on Gromov-Thurston manifolds. *Geometry and Topology*, Vol. 11 :p. 1777–1830, 2007.

[KV67] Victor Kac and Ernest Borisovich Vinberg. Quasi-homogeneous cones. *Math. Notes*, 1 :p.231–235, 1967.

[Lee] Jaejeong Lee. Convex fundamental domains for properly convex real projective structures. *preprint.*

[Mar09] Ludovic Marquis. Espace de Modules Marqués des Surfaces Projectives Convexes de Volume Fini. *preprint arxiv.org/abs/0910.5839.*

[Ric63] Ian Richards. On the classification of noncompact surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106 :p. 259–269, 1963.

[Vey70] Jacques Vey. Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants. *Anna Scuola Normale Superiore di Pisa*, 24 :p. 641–665, 1970.

[Vin63] Èrnest Borisovich Vinberg. The theory of convex homogeneous cones. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 12 :p. 303–358, 1963.

[Vin65] Èrnest Borisovich Vinberg. The structure group of automorphisms of a homogeneous convex cone. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 13 :p. 56–83, 1965.

Ludovic Marquis • *Url :* www.umpa.ens-lyon.fr/~lmarquis/