



**HAL**  
open science

# Application d'une méthode de perturbation pour résoudre l'équation des ondes en présence d'un milieu fortement conducteur

Damien Voyer, Ronan Perrussel, Patrick Dular

► **To cite this version:**

Damien Voyer, Ronan Perrussel, Patrick Dular. Application d'une méthode de perturbation pour résoudre l'équation des ondes en présence d'un milieu fortement conducteur. Numélec 2008, Dec 2008, Liège, Belgique. pp.174-175. hal-00359228

**HAL Id: hal-00359228**

**<https://hal.science/hal-00359228>**

Submitted on 10 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Application d'une méthode de perturbation pour résoudre l'équation des ondes en présence d'un milieu fortement conducteur

Damien Voyer<sup>†</sup>, Ronan Perrussel<sup>†</sup> et Patrick Dular<sup>\*</sup>

<sup>†</sup> Laboratoire Ampère, UMR CNRS 5005, Université de Lyon, École Centrale de Lyon, F-69134 Ecully, France

<sup>\*</sup> Université de Liège, FNRS, Unité ACE, Département d'électricité, électronique et informatique, B-4000 Liège, Belgique

E-mails: damien.voyer@ec-lyon.fr et patrick.dular@ulg.ac.be

**Résumé – Une méthode de perturbation est proposée pour calculer les pertes métalliques dans une structure micro-ondes. Cette approche s'avère plus précise que le modèle d'impédance de surface sans pour autant impliquer les calculs lourds qui apparaissent quand on maille à la fois l'intérieur et l'extérieur des conducteurs.**

## I. INTRODUCTION

La méthode de perturbation présentée ici a initialement été introduite pour résoudre des problèmes en basses fréquences [1] mais son champ d'application est bien plus vaste. De manière générale, un problème complexe est résolu en deux temps : d'abord, on résout un premier problème où localement n'apparaissent pas certains détails, puis on ajoute ces détails qui font alors apparaître des termes sources dans un second problème. L'application que l'on propose relève d'un problème récurrent en hautes fréquences, à savoir le calcul précis des pertes dans des structures passives comme les filtres micro-ondes. En effet, la résolution implique de décrire des phénomènes de résonance propres à l'équation des ondes mais aussi des phénomènes diffusifs à l'intérieur des conducteurs. Deux approches sont possibles : soit on ne fait aucune hypothèse, le résultat obtenu sera précis mais le calcul impliquera de maille toute la structure, y compris l'intérieur des conducteurs; soit on fait l'hypothèse de modéliser le conducteur par une impédance de surface qui tient compte de l'effet de peau, le problème numérique sera alors plus simple mais le résultat sera erroné dans les zones où les parties métalliques présentent des angles. La méthode de perturbation permet d'exploiter les avantages des deux approches précédentes. Dans un premier problème, l'intérieur du conducteur n'est pas décrit; on considère qu'il est parfaitement conducteur ou décrit par une impédance de surface. Dans un second problème localisé au voisinage du conducteur, on prend en compte l'intérieur du conducteur, ce qui fait apparaître des courants à la surface du conducteur dont les effets corrigent la solution du premier problème. Dans cet article, on propose d'appliquer la méthode de perturbation dans un cas analytique 1D puis on l'éprouvera en 2D.

## II. PROBLÈME ANALYTIQUE 1D

On considère, comme indiqué Fig. 1, la réflexion d'une onde incidente plane  $E^{inc} = E_0 e^{-jk_0 z}$  sur un mur de très forte conductivité  $\sigma \gg \omega \epsilon_0$ . La réflexion est caractérisée par l'impédance  $Z$  vue en  $z = -l$ . La solution exacte de ce problème est triviale. D'une part, à l'intérieur du conducteur, le champ électromagnétique obéit à l'équation de diffusion dont la solution est donnée par :

$$E_x = E_x|_{z=0} e^{-\frac{1+j}{\delta} z} \quad (1)$$

où  $\delta = \sqrt{2/\sigma\omega\mu_0}$  est l'épaisseur de peau.

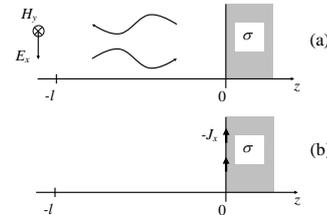


Fig. 1. (a) problème initial 1D (b) problème perturbé.

On peut alors exprimer l'impédance  $Z_s$  qui est vue à la surface du conducteur :

$$Z_s = \frac{E_x}{H_y|_{z=0}} = \frac{\omega\mu_0\delta}{1-j} \quad (2)$$

Dans le vide, le champ électromagnétique est régi par l'équation des ondes. La théorie des lignes permet d'extraire l'impédance  $Z$  vue en  $z = -l$  :

$$Z_{exact} = Z_0 \frac{Z_s + jZ_0 \tan(k_0 l)}{Z_0 + jZ_s \tan(k_0 l)} \quad (3)$$

Pour appliquer la méthode de perturbation, on considère dans un premier temps le cas où la paroi est parfaitement conductrice. On obtient alors le champ électromagnétique  $\{E_1, H_1\}$  donné par :

$$\begin{cases} E_1 = E_0 e^{-jk_0 z} - E_0 e^{+jk_0 z} & z < 0 \\ H_1 = E_0/Z_0 e^{-jk_0 z} + E_0/Z_0 e^{+jk_0 z} & z < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Ce champ induit à l'interface vide/métal un courant surfacique  $J_x = H_y|_{z=0} \times n_z = 2E_0/Z_0$  qui n'apparaît pas dans la solution exacte. Le problème perturbé consiste alors à annuler ce courant surfacique comme indiqué Fig. 1. D'un point de vue circuit, cette situation est équivalente au cas d'une source de courant  $-J_x$  débitant sur des charges  $Z_0$  et  $Z_s$  en parallèle. Lorsque le matériau est fortement conducteur, on a  $Z_0 \gg Z_s$ . On peut alors négliger  $Z_0$ , c'est-à-dire la partie rayonnée. Ainsi, le champ électromagnétique  $\{E_2, H_2\}$  du problème perturbé est donné par :

$$\begin{cases} E_2 = 2Z_s/Z_0 E_0 e^{-\frac{1+j}{\delta} z} & z > 0 \\ H_2 = 2E_0/Z_0 e^{-\frac{1+j}{\delta} z} & z > 0. \end{cases} \quad (5)$$

La solution complète est la somme des champs  $\{E_1, H_1\}$  et  $\{E_2, H_2\}$ . L'impédance  $Z$  peut alors être calculée via le théorème de Poynting, c'est-à-dire par un calcul volumique des énergies électrique et magnétique et de la puissance dissipée dans le conducteur :

$$Z_{perturbe} = jZ_0 \tan(k_0 l) + \frac{Z_s}{\cos^2(k_0 l)} \quad (6)$$

On peut montrer que  $Z_{perturbe}$  est très précisément égal au développement limité à l'ordre 1 de  $Z_{exact}$  suivant  $Z_s/Z_0 \tan(k_0 l)$ , valable donc quand  $Z_0 \gg Z_s$  et  $\tan(k_0 l) \ll 1$ , c'est-à-dire lorsque l'on est loin de la résonance qui apparaît en  $l = \lambda_0/4$ . Notons qu'à l'approche de la résonance, il serait plus judicieux de calculer l'admittance  $Y_{perturbe}$ .

Une application dans le cas du cuivre ( $\sigma = 5.7 \cdot 10^7$  S/m) montre que, pour  $l = 7\lambda_0/8$ , l'erreur de la méthode de perturbation sur  $Z$  est inférieure à 0.01% jusqu'à 10 GHz.

### III. PROBLÈME NUMÉRIQUE 2D

On considère un guide parfaitement métallique dans lequel on ajoute une plaque conductrice fine de 1/10 mm placée à  $\lambda_g/4$  du bord (voir Fig. 2). On excite le mode  $TE_1$ .

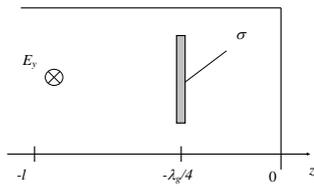


Fig. 2. géométrie du problème 2D

Le problème numérique a été résolu de trois façons en utilisant à chaque fois la méthode des éléments finis :

- les deux régions – vide et conducteur – sont maillées dans un seul problème (34 056 noeuds).
- on impose une impédance de surface  $Z_s$  à l'interface vide/conducteur. Seule la région du vide est maillée (17 986 noeuds).

- on applique la méthode de perturbation. Dans un premier problème, on résout le cas où le conducteur est supposé parfait. Seule la zone du vide est maillée. Dans un second problème, on introduit comme terme source l'opposé du courant induit à l'interface vide/conducteur. Ici, on ne résout pas le problème uniquement dans la zone conductrice mais on étend le domaine de quelques dixièmes de  $\lambda_0$  dans la zone du vide pour prendre en compte le champ proche induit au voisinage des coins de la plaque (20 909 noeuds). Le domaine est délimité par des conditions absorbantes.

Les résultats sont rapportés Fig. 3; l'allure des champs électriques calculés est donnée Fig. 4. Il apparaît que les résultats du calcul par impédance de surface ne coïncident pas précisément avec ceux du calcul direct : l'écart atteint 0.16 dB à la résonance soit environ 4%. Le calcul par perturbation donne de meilleurs résultats loin de la résonance mais il y a une erreur grossière autour d'une fréquence légèrement inférieure à la fréquence des pertes maximales. Cela coïncide avec la résonance du problème sans pertes. Dans ce cas, le courant induit tend vers l'infini, ce qui provoque d'importantes erreurs numériques.

Pour contourner cette difficulté, on propose de partir non pas du cas où le matériau est parfaitement conducteur mais du cas où il est décrit par une impédance de surface. Le problème perturbé fait alors apparaître deux sources à l'interface vide/métal : des courants électrique et magnétique liés à la discontinuité des champs tangentiels magnétique et électrique. On résout le problème perturbé en deux temps. D'abord, on calcule le champ électrique

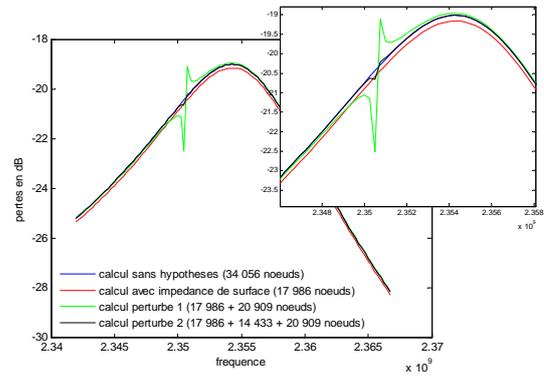


Fig. 3. pertes dans la structure 2D

dans le conducteur quand on impose à la frontière du domaine conducteur le champ électrique calculé dans le premier problème (14 433 noeuds). Ensuite, on somme le champs électrique des deux problèmes; cette opération fait disparaître la source de courant magnétique. Il ne reste alors plus que le problème de la source de courant électrique qui est traité comme dans la première méthode de perturbation. Les résultats sont rapportés Fig. 3; l'allure du champ électrique est donnée Fig. 4. On constate que la méthode de perturbation permet de restituer très précisément les pertes calculées dans le problème direct même s'il reste quelques effets résiduels du problème soulevé précédemment.

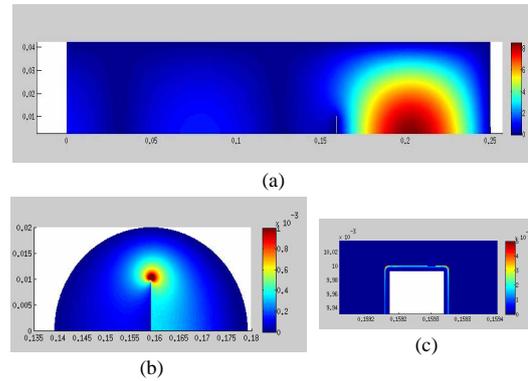


Fig. 4. champ électrique (V/m) dans : (a) le calcul sans hypothèses, (b) le problème perturbé de la première méthode de perturbation et (c) le deuxième problème de la deuxième méthode de perturbation

### IV. CONCLUSION

Une méthode de perturbation a été proposée pour traiter le problème des pertes dans une structure résonante 2D. On a montré qu'à partir de la solution du problème avec un modèle d'impédance de surface, pour lequel l'erreur sur les pertes atteint 4%, on peut retrouver très précisément les résultats donnés par le calcul sans hypothèses en y ajoutant un problème perturbé formulé au voisinage des conducteurs.

### REFERENCES

- [1] P. Dular, R. V. Sabariego, and L. Krähenbühl, "Subdomain perturbation finite-element method for skin and proximity effects," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 44, no. 6, pp. 738–741, 2008.