



**HAL**  
open science

## Comparaison de deux méthodes éléments finis pour la prise en compte de détails. Exemple simple sur un problème de conduction.

Ronan Perrussel, Patrick Dular, Riccardo Scorretti

### ► To cite this version:

Ronan Perrussel, Patrick Dular, Riccardo Scorretti. Comparaison de deux méthodes éléments finis pour la prise en compte de détails. Exemple simple sur un problème de conduction.. Numélec 2008, Dec 2008, Liège, Belgique. pp.16-17. hal-00359226

**HAL Id: hal-00359226**

**<https://hal.science/hal-00359226>**

Submitted on 10 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comparaison de deux méthodes éléments finis pour la prise en compte de détails. Exemple simple sur un problème de conduction.

Ronan Perrussel<sup>†</sup>, Patrick Dular<sup>\*</sup> et Riccardo Scorretti<sup>†</sup>

<sup>\*</sup> Université de Liège, FNRS, Département d'électricité, électronique et informatique, B-4000 Liège, Belgique

<sup>†</sup> Laboratoire Ampère, UMR CNRS 5005, Université de Lyon, École Centrale de Lyon, F-69134 écully, France

E-mails : ronan.perrussel@ec-lyon.fr, patrick.dular@ulg.ac.be, riccardo.scorretti@univ-lyon1.fr

**Résumé** — Deux méthodes éléments finis permettant de découpler un problème complexe en un problème global simplifié et un problème local décrivant un détail sont présentées et comparées en terme de précision sur un problème simple de conduction.

## I. CONTEXTE

Pour modéliser la présence d'un détail dans une structure, il est tentant de découpler *le problème global* en un problème *global simplifié*, où la structure est idéalisée, et un problème *local précis*, dans lequel le détail est traité spécifiquement, quitte à résoudre le problème complet de manière itérative. Les deux méthodes présentées permettent ce découplage dans le cas où un matériau est considéré idéal dans le problème simplifié. Elles sont applicables à de nombreux types de modèles mais, pour analyser simplement leurs comportements en terme de précision, on considère ici un *problème de conduction sur une géométrie simple* : il s'agit de deux électrodes séparées par un matériau de conductivité  $\sigma_1$  comportant une inclusion de conductivité  $\sigma_2$  avec  $\sigma_2 > \sigma_1$  (voir la figure 1(a)). On envisage donc de

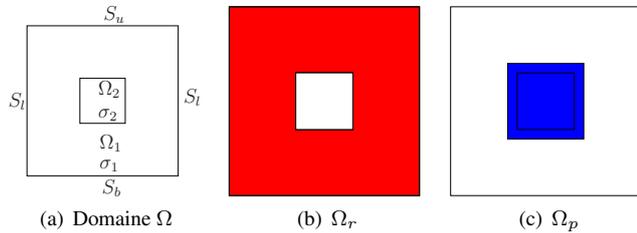


FIG. 1. Représentation du domaine de calcul  $\Omega$  considéré et de deux sous-domaines.

résoudre le problème suivant sur le domaine  $\Omega$  :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad}(u)) = 0, & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } S_l, u = 1 & \text{sur } S_u \text{ et } u = 0 & \text{sur } S_b, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\sigma$  vaut  $\sigma_1$  sur  $\Omega_1$  et  $\sigma_2$  sur  $\Omega_2$  et  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire sortante sur  $\partial\Omega$ . Les principes des méthodes sont précisés dans la suite avant que ces méthodes ne soient comparées sur l'exemple proposé.

## II. PRINCIPES DES MÉTHODES

Pour les deux méthodes abordées, on se donne :

- un sous-domaine  $\Omega_r$  ne contenant pas l'inclusion  $\Omega_2$  (voir la figure 1(b)). Sur  $\Omega_r$ , un problème où l'inclusion est considérée comme un *conducteur parfait* est résolu.
- un sous-domaine  $\Omega_p$  contenant l'inclusion  $\Omega_2$  et un voisinage de celle-ci (voir la figure 1(c)).

Ces travaux ont bénéficié du soutien de l'ANR dans le cadre du projet Passeur.

Les quantités définies sur  $\Omega_r$  et  $\Omega_p$  sont notées respectivement avec des indices  $r$  et  $p$  au niveau continu et avec des indices  $H$  et  $h$  au niveau discret. Les maillages  $\mathcal{T}_H$  et  $\mathcal{T}_h$  sont *a priori* indépendants.

### A. Méthode de patches d'éléments finis

Elle a été introduite dans [1] et est adaptée ici pour prendre en compte le problème avec un conducteur parfait résolu sur  $\Omega_r$ . Un potentiel calculé sur  $\Omega_r$  appartient à l'espace d'éléments finis nodaux  $V_{H,d}$  ( $V_{H,0}$  est l'espace avec conditions de Dirichlet homogènes correspondant) et un potentiel calculé sur  $\Omega_p$  appartient à l'espace d'éléments finis  $V_{h,0}$ .

Considérons l'espace  $V_{Hh} = V_{H,d} + V_{h,0}$  ( $V_{Hh,0} = V_{H,0} + V_{h,0}$ ), le découplage du problème devrait conduire à rechercher une solution  $u_{Hh}$  dans  $V_{Hh}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} a(u_{Hh}, v_{Hh}) &= 0, \quad \forall v_{Hh} \in V_{Hh,0}, \\ \text{où } a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad}(u) \cdot \operatorname{grad}(v) \, \mathbf{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Cependant, il est souvent difficile de construire simplement une base de type "éléments finis" pour  $V_{Hh}$ . On peut néanmoins [1] suivre une méthode itérative de corrections par sous-espaces pour obtenir une solution (voir l'algorithme 1). La solution numérique à l'itération  $n$  devient alors  $u_{Hh}^n = u_H^n + u_h^n$ , soit *la somme d'une solution grossière plus une solution de détail*.

### Algorithme 1 Méthode de correction par sous-espaces.

1.  $u_h^0 = 0$ .  $n = 1$ .
2. Tant que la précision demandée n'est pas atteinte ou que le nombre maximal d'itérations n'a pas été franchi :
  - (a) Trouver  $u_H^n \in V_{H,d}$  tel que  $a(u_H^n, v_H) = -a(u_h^{n-1}, v_H)$ ,  $\forall v_H \in V_{H,0}$ ,
  - (b) Trouver  $u_h^n \in V_{h,0}$  tel que  $a(u_h^n, v_h) = -a(u_H^n, v_h)$ ,  $\forall v_h \in V_{h,0}$ .

### B. Méthode de perturbations

On repart ici de problèmes continus. Il s'agit de trouver les potentiels  $u_r$  et  $u_p$  solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(j_r) = [j_p \cdot \mathbf{n}_p]_{\partial\Omega_p}, j_r = \sigma \operatorname{grad}(u_r), \\ u_r = C \text{ sur } \partial\Omega_2, u_r = 1 \text{ sur } S_u \text{ et } u_r = 0 \text{ sur } S_b, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(j_p) = [j_r \cdot \mathbf{n}_r]_{\partial\Omega_2}, j_p = \sigma \operatorname{grad}(u_p), \\ u_p = 0 \text{ sur } \partial\Omega_p, \end{cases} \quad (4)$$

où  $C$  est une constante sur  $\partial\Omega_2$  et,  $[j_p \cdot \mathbf{n}_p]_{\partial\Omega_p}$  et  $[j_r \cdot \mathbf{n}_r]_{\partial\Omega_2}$  sont des distributions surfaciques. On vérifie ainsi  $\operatorname{div}(j_r +$

---

**Algorithme 2** Méthode de perturbations.

1.  $u_h^0 = 0$ ,  $n = 1$ .
  2. Tant que la précision demandée n'est pas atteinte ou que le nombre maximal d'itérations n'a pas été franchi :
    - (a) Calculer le terme source à partir de  $[j_h^{n-1} \cdot \mathbf{n}_p]_{\partial\Omega_p}$  et trouver une solution discrète  $u_H^n$  de (3),
    - (b) Calculer le terme source à partir de  $[j_H^n \cdot \mathbf{n}_r]_{\partial\Omega_2}$  et trouver une solution discrète  $u_h^n$  de (4).
- 

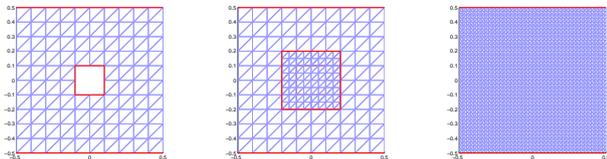
$j_p) = 0$  sur  $\Omega$  et les conditions de continuité de la densité normale de courant aux interfaces  $\partial\Omega_2$  et  $\partial\Omega_p$ .

La résolution par la méthode des perturbations [2] suit alors l'algorithme itératif 2. Une particularité doit être notée dans le *calcul des termes sources au niveau discret*. Notamment, le terme source de l'équation associé à une fonction test  $v_h$  de trace non nul sur le bord  $\partial\Omega_2$ , correspondant formellement à l'intégration surfacique  $\int_{\partial\Omega_2} (j_H^n \cdot \mathbf{n}_r) v_h \, ds$ , est remplacé par le terme volumique :  $\int_{\Omega_r} \sigma \text{grad}(u_H^n) \cdot \text{grad}(v_h) \, dx$ . Au passage, notons que cela consiste à considérer, dans la méthode de correction par sous-espaces, uniquement les termes sources calculés dans la couche d'éléments du maillage  $\mathcal{T}_h$  appartenant à  $\Omega_r \cap \Omega_p$  et touchant  $\partial\Omega_2$ .

### III. RÉSULTATS NUMÉRIQUES PRÉLIMINAIRES

#### A. Maillages emboîtés

Le maillage  $\mathcal{T}_H$  est représenté figure 2(a) et, superposé à celui-ci, le maillage  $\mathcal{T}_h$  est représenté figure 2(b).



(a) Maillage  $\mathcal{T}_H$ . (b) Maillages  $\mathcal{T}_H$  et  $\mathcal{T}_h$  superposés. (c) Maillage pour calcul de référence.

FIG. 2. Les différents maillages utilisés dans le cas "emboîtés".

Différentes erreurs par rapport à la solution de référence sont reportées dans le tableau I ( $\sigma_1 = 1$  et  $\sigma_2 = 1000$ ) et dans le tableau II ( $\sigma_1 = 1$  et  $\sigma_2 = 5$ ). La norme d'énergie (liée au calcul de la résistance), la semi-norme  $H^1$  (liée à la précision sur le champ) et la norme infini d'un potentiel  $u$  correspondent respectivement à :  $\|u\|_a = \sqrt{a(u, u)}$ ,  $|u|_1 = \sqrt{\int_{\Omega} |\text{grad}(u)|^2 \, dx}$  et  $\|u\|_{\infty} = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (|u(\mathbf{x})|)$ . Dans le tableau I, les erreurs relatives sont de l'ordre de

Erreur relative en	$\ \cdot\ _a$	$ \cdot _1$	$\ \cdot\ _{\infty}$
$u_H$ (1 itér.)	0.127	0.126	0.0242
+ $u_h$ (1 itér., perturbation)	0.126	0.126	0.0240
+ $u_h$ (5 itér., perturbation)	0.126	0.126	0.0240
+ $u_h$ (1 itér., patche)	0.0902	0.0902	0.0167
+ $u_h$ (5 itér., patche)	0.0858	0.0857	0.0152

TAB. I. Comparaisons des erreurs relatives pour différentes méthodes.  $\sigma_2 = 1000$ . itér. indique le nombre d'itérations avant d'observer la précision de la solution.

10%. On note que la solution corrigée par une itération de la méthode de perturbations apporte peu de progrès par rapport à la solution grossière. Dans cet exemple, l'utilisation de la méthode de patches permet de diviser l'erreur par un facteur de 1.4, quel que soit la norme considérée.

Erreur relative en	$\ \cdot\ _a$	$ \cdot _1$	$\ \cdot\ _{\infty}$
$u_H$ (1 itér.)	0.222	0.172	0.0492
+ $u_h$ (1 itér., perturbation)	0.140	0.137	0.0336
+ $u_h$ (5 itér., perturbation)	0.126	0.125	0.0281
+ $u_h$ (1 itér., patche)	0.105	0.104	0.0275
+ $u_h$ (5 itér., patche)	0.0515	0.0486	0.00663

TAB. II. Comparaisons des erreurs relatives pour différentes méthodes.  $\sigma_2 = 5$ . itér. indique le nombre d'itérations avant d'observer la précision de la solution.

Dans le tableau II, on s'est éloigné de l'hypothèse du conducteur parfait. La méthode de perturbations apporte cette fois une précision supplémentaire vis-à-vis de la solution grossière. La méthode de patches fournit de nouveau une solution plus précise et il est utile de faire quelques itérations (mais la convergence est rapide avec les maillages emboîtés).

#### B. Maillages indépendants

Dans le tableau III, les tendances semblent se confirmer lorsque les maillages sont indépendants (voir la figure 3). Notons néanmoins que pour cet exemple le calcul des termes sources n'est pas exact (intégration sur le maillage fin couplée à une interpolation du grossier vers le fin).

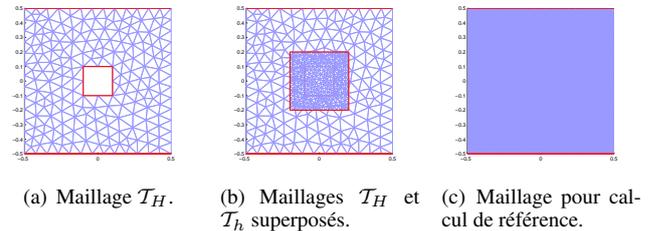


FIG. 3. Les différents maillages utilisés dans le cas "indépendants".

Erreur relative en	$\ \cdot\ _a$	$ \cdot _1$	$\ \cdot\ _{\infty}$
$u_H$ (1 itér.)	0.205	0.150	0.0474
+ $u_h$ (1 itér., perturbation)	0.124	0.118	0.0326
+ $u_h$ (1 itér., patche)	0.0978	0.0965	0.0258
+ $u_h$ (5 itér., patche)	0.0692	0.0693	0.00856

TAB. III. Comparaisons des erreurs relatives pour différentes méthodes.  $\sigma_2 = 5$ . itér. indique le nombre d'itérations avant d'observer la précision de la solution.

Les résultats de ces premières expériences doivent être confirmés sur des problèmes plus complexes.

### RÉFÉRENCES

- [1] R. Glowinski, J. He, J. Rappaz, and J. Wagner, "Approximation of multi-scale elliptic problems using patches of finite elements," *Comptes Rendus Mathématique*, vol. 337, pp. 679–684, Nov. 2003.
- [2] P. Dular, R. V. Sabariego, and L. Krähenbühl, "Subdomain perturbation finite-element method for skin and proximity effects," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 44, no. 6, pp. 738–741, 2008.